UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ

Mércia de Oliveira Pontes

INTERAÇÃO ENTRE ESTRUTURAS ALGÉBRICAS E GEOMÉTRICAS NA PRÁTICA PEDAGÓGICA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA DA 8ª SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL

Fortaleza – Ceará
2007

Universidade Estadual do Ceará

Mércia de Oliveira Pontes

INTERAÇÃO ENTRE ESTRUTURAS ALGÉBRICAS E GEOMÉTRICAS NA PRÁTICA PEDAGÓGICA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA DO 8º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Educação da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de mestre em Educação. Área de Concentração em Formação de Professores.

Orientadora: Profa. Dra. Marcília Chagas Barreto
Co-orientadora: Profa. Dra. Maria Gilvanise de Oliveira Pontes

Fortaleza – Ceará
2007

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ

Curso de Mestrado Acadêmico em Educação

TÍTULO DO TRABALHO: INTERAÇÃO ENTRE ESTRUTURAS ALGÉBRICAS E GEOMÉTRICAS NA PRÁTICA PEDAGÓGICA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA DA 8ª SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL

AUTORA: Mércia de Oliveira Pontes

Defesa em: 04 / 06 / 2007 Nota obtida: 10,0

Banca Examinadora

____

Profa. Dra. Marcília Chagas Barreto (Presidente)

____

Profa. Dra. Maria Gilvanise de Oliveira Pontes (Co-orientadora)

____

Profa. Dra. Maria Cristina Souza de A. Maranhão (Avaliador Externo)

____

Prof. Dr. José Aires de Castro Filho (Avaliador Externo)

____

Profa. Dra. Lia Matos Brito de Albuquerque (Suplente)

Aos meus pais, Gilvanise e Raimundo.

Aos meus filhos, Luana, Mariana e Artur.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, pelo apoio incondicional ao longo dessa caminhada.

À minha irmã Giseuda, pelo empenho na tradução do resumo.

À profa. Dra. Lia Matos Brito de Albuquerque, pelas valiosas sugestões e incentivo constante.

À profa. Dra. Maria Cristina Souza de Albuquerque Maranhão, pelas orientações que redirecionaram a coleta de dados.

Ao prof. Dr. José Aires de Castro Filho, pelas sugestões dadas no exame de qualificação.

À profa. Marcília Chagas Barreto, cujo empenho viabilizou a concessão da minha bolsa de estudo junto à FUNCAP.

À FUNCAP, pelo apoio financeiro na forma de bolsa de estudo.

Ao Centro Federal de Educação Tecnológica do Ceará – CEFETCE, pelo apoio financeiro que viabilizou o deslocamento da avaliadora externa para o momento da defesa desta dissertação.

Aos colegas de turma, pelos construtivos momentos de estudo e pelos agradáveis momentos de descontração.

Aos professores do Mestrado Acadêmico em Educação da UECE, pelos ensinamentos e compartilhamento do saber.

Aos professores participantes da pesquisa, pela disponibilidade e presteza pela colaboração.

À Direção da escola que viabilizou a realização das atividades de investigação.

RESUMO

As discussões referentes ao abandono da Geometria no currículo escolar, às abordagens mais significativas da Álgebra e, ainda, à utilização mútua desses dois domínios vêm direcionando pesquisas voltadas para a melhoria do ensino de Matemática. Nesta investigação, tem-se por objetivo identificar na prática pedagógica dos professores da 8ª série, os conhecimentos algébricos e geométricos que possibilitam a interação entre as estruturas algébricas e geométricas; mostrar a possibilidade de tradução de situações geométricas para contextos algébricos e vice-versa; debater a aplicabilidade das estruturas de pensamento geométrico e algébrico na resolução de situações problemas. A pesquisa foi desenvolvida em uma escola da rede privada de ensino, situada em um bairro de classe média da cidade de Fortaleza, que utiliza um professor responsável pelo ensino de Álgebra e outro pelo de Geometria. A fundamentação teórica baseou-se em autores como Crowley (1994) que discute o Modelo Van Hiele referente aos níveis de compreensão do pensamento geométrico; D´Ambrosio (1996) que defende a Educação Matemática como recurso de mediação entre a teoria e a prática; Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) que dão grande contribuição para repensar a educação algébrica elementar; Miorim, Miguel e Fiorentini (1993) que tratam do movimento pendular entre Álgebra e Geometria no currículo escolar brasileiro, Douady conforme Maranhão (1999) com sua teoria *Jogo de Quadros* em que apresenta a dialética-ferrmenta-objeto e o papel da interação entre domínios no funcionamento das fases dessa dialética e ainda *Registros de Representações Semióticas* de Duval (1993). A metodologia da pesquisa teve enfoque qualitativo, tendo sido utilizados os seguintes instrumentos de investigação: questionário, análise documental e teste diagnóstico para a coleta dos dados. Na fase da análise, fez-se uso da abordagem quantitativa e da qualitativa, tendo-se obtido os seguintes resultados: os professores pesquisados consideram necessária a interação entre Álgebra e Geometria, declaram que, em suas aulas, promovem esta interação. No entanto, não a identificam no livro didático adotado pela escola.

Palavras-chave: Álgebra; Geometria; interação.

ABSTRACT

The debate relative to the non-inclusion of geometry in the program of study, as well as to the discovery of more significant approaches of algebra, and finally to the mutual use of the above-mentioned branches of mathematics has guided the research on the improvement of the teaching of mathematics lately. The purpose of the present paper is to identify in the pedagogical practice of eighth-grade teachers the kind of algebraic and geometric knowledge that makes possible the interaction between algebraic and geometric structures, to illustrate the possibility of translating geometric situations into algebraic contexts and vice versa, in addition to discuss the applicabilty of geometric and algebraic structures of thought in problem solving. The research was conducted in a private school situated in a middle-class neighborhood of Fortaleza, state of Ceará, Brazil, where algebra and geometry classes are imparted by two different teachers. We based this study's theoretical frame on authors such as Crowley (1994), who discusses the Van Hiele model of the development of geometric thought; D'Ambrosio (1996), who advocates that mathematical education be used as a mediator between theory and practice; Fiorentini, Miorim and Miguel (1993), who greatly contribute to rethink the teaching of elementary algebra; and Miorim, Miguel and Fiorentini (1993), who address the question of the coming and going between algebra and geometry in the Brazilian curriculum. We further examined Douady's theory, as cited by Maranhão (1999), of the « interplay between settings » (a.k.a. framework games), which introduces the tool-object dialectic, and likewise surveyed Duval's *Registers of Semiotic Representation* (1993). We carried out a qualitative research using questionnaries, documental analyses and diagnosis tests in order to collect our data. During the analysis stage, having resorted to a quantitative as well as a qualitative approach, we obtained the following results: the teachers not only consider the interaction between algebra and geometry necessary, but they also maintain that they promote it in their classes. However, they are unable to identify this interaction in the textbooks they use.

Keywords: algebra, geometry, interaction.

RÉSUMÉ

Le débat sur la non-inclusion de la géométrie dans le programme d'enseignement, sur les approches plus significatives de l'algèbre, ainsi que sur l'utilisation mutuelle des deux domaines cités ci-dessus a guidé les recherches sur l'amélioration de l'enseignement des mathématiques ces derniers temps. Dans le présent travail, nous avons pour but d'identifier dans la pratique pédagogique des enseignants de 8e[1] les types de connaissances en algèbre et géométrie qui rendent possible l'interaction entre les structures algébriques et géométriques; de démontrer qu'il y a une possibilité de traduction de situations géométriques en contextes algébriques et vice-versa et enfin de discuter sur l'applicabilité des structures de pensée géométrique et algébrique dans la résolution de problèmes. Notre recherche a été menée dans une école privée d'un quartier de classe moyenne de Fortaleza, les cours d'algèbre et de géométrie étant dispensés par deux enseignants différents. Le fondement théorique a été établi à l'aide d'auteurs tels que Crowley (1994), qui examine le modèle Van Hiele relatif aux niveaux de compréhension de la pensée géométrique; D'Ambrosio (1996), qui défend l'éducation mathématique en tant que recours de médiation entre la théorie et la pratique; Fiorentini, Miorim et Miguel (1993), qui nous incitent à repenser l'enseignement de l'algèbre élémentaire; Miorim, Miguel et Fiorentini (1993), qui abordent les allers et venues entre l'algèbre et la géométrie dans le programme national brésilien; Douady d'après Maranhão (1999) et son « jeux des cadres », où la dialectique outil-objet, ainsi que le rôle des jeux de cadres dans le fonctionnement des phases de cette dialectique sont présentés et enfin, Duval (1993) et ses *Registres de représentation sémiotique*. Pour ce qui est de la méthodologie de recherche, l'accent a été mis sur l'aspect qualitatif. C'est ainsi que nous avons eu recours à des questionnaires, à l'analyse de documents et à des tests diagnostiques afin de recueillir les données. Lors du processus d'analyse, par contre, l'usage a été fait d'une approche tant quantitative que qualitative, les résultats obtenus ayant été les suivants: les enseignants observés estiment que l'intégration entre l'algèbre et la géométrie se fait nécessaire et ils affirment en outre promouvoir cette interaction dans leurs cours. Cependant, ils ne l'identifient pas dans les manuels utilisés à l'école.

Mots-clé : algèbre, géométrie, interaction.

[1] L'équivalent de la 4e en France.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SIGLAS

AP – Assessoria Pedagógica

CEFETCE - Centro Federal de Educação Tecnológica do Ceará

FCPC – Fundação Cearense de Pesquisa e Cultura

LDB – Lei de Diretrizes e Base da Educação

MMM – Movimento da Matemática Moderna

NECIM – Núcleo de Ensino de Ciências e Matemática

NCTM – National Council of Teachers of Mathematics

PA – Progressão Aritmética

PCA – Parâmetros Curriculares Americanos

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais

PNLD – Programa Nacional do Livro Didático

UFC – Universidade Federal do Ceará

SOD – Serviço de Orientação Desportiva

SOE – Serviço de Orientação Educacional

SOP – Serviço de Orientação Pedagógica

SOR – Serviço de Orientação Religiosa

SPP – Serviço de Psicopedagogia

UECE – Universidade Estadual do Ceará

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Neste trabalho, apresentamos os resultados de uma pesquisa sobre a possibilidade de interação entre Álgebra e Geometria no ensino de Matemática na 8ª série[2]. Desenvolvemos uma pesquisa no período compreendido entre 2005 e 2006, junto a alunos e professores de uma escola de ensino médio da rede particular de ensino, situada em Fortaleza.

O interesse por este tema foi sendo construído ao longo da nossa ação docente como professora de Matemática e, também, no decorrer da formação acadêmica. Durante o curso de Licenciatura Curta em Ciências[3], tivemos a oportunidade de participar do Projeto de Pesquisa Melhoria do Ensino de Ciências e Matemática[4]. Essa experiência foi responsável pela nossa inserção em um grupo de professores preocupados em promover um ensino diferenciado da Matemática.

Após o início da Licenciatura Plena em Matemática, participamos do curso “Matemática pelo operatório concreto” promovido pela mesma instituição e ministrado pela professora Luiza Gobbi, cujos alunos eram supervisores e professores de 1ª a 4ª séries[5] do Ensino Fundamental. Esse curso nos proporcionou o contato com uma série de materiais didáticos que foram, gradativamente, introduzidos nas nossas aulas de Matemática, o que nos levou a lançar um novo olhar para as atividades desenvolvidas em sala de aula. Começamos a perceber que, além da escolha do material a ser usado, era necessário fazer uma escolha apropriada da atividade a ser executada, bem como refletir sobre o que estava sendo vivenciado.

---

[2] Inicialmente, planejamos desenvolver esta pesquisa na 7ª série, pois é o período em que os conteúdos de Álgebra e Geometria são ministrados em separado. Com o advento da Lei Nº 11274 de 06/02/2006, a educação infantil é incorporada ao ensino fundamental que, por sua vez, é acrescido de um ano. Portanto os alunos que estavam na 7ª série passaram a ser considerados de 8ª série.
[3] Licenciatura cursada na Universidade Estadual do Ceará – UECE e concluída em 1988.
[4] Participamos desse projeto coordenado pela professora Liduina Correa Leite, junto ao Núcleo de Ciências e Matemática da Fundação Cearense de Pesquisa e Cultura ligado à Universidade Federal do Ceará – NECIM/FCPC/UFC, na condição de monitora.
[5] Denominação dada a partir da LDB 5692/71.

Desde então, como professora de 5ª série, já trabalhando com atividades aritméticas no laboratório, optamos em introduzir algumas atividades geométricas. Com o tempo, observamos que essas atividades foram desenvolvendo, nos alunos, a capacidade de observação e análise. Tal fato levou-nos à conjectura de que a Geometria poderia desempenhar, no aluno, um importante papel no desenvolvimento de um pensamento organizado, que possibilita a compreensão, a descrição e a representação do mundo em que vive.

O envolvimento com a problemática nos encaminhou a cursar a Especialização em Ensino de Matemática[6], tendo culminado com a pesquisa que gerou a produção da monografia "Laboratório de Matemática: um recurso para a aprendizagem da Matemática".

As leituras realizadas durante o Curso de Especialização promoveram uma aproximação com algumas obras de Ubiratan D'Ambrosio[7] responsável por vasta contribuição à Educação Matemática[8].

Em 2002, passamos a atuar nas 7ª e 8ª séries[9], com o ensino de Álgebra e Geometria, respectivamente. Como a utilização de atividades geométricas já fazia parte da nossa prática pedagógica, começamos a introduzir alguns contextos geométricos para introduzir situações algébricas nas aulas da 7ª série, o que provocou nos alunos uma certa inquietação, pois até então eles estavam habituados à total dicotomia entre a Geometria e a Álgebra. Desse modo, surgiu uma outra conjectura: os contextos geométricos poderiam ser utilizados como justificativa de alguns procedimentos algébricos e a interação entre esses dois ramos da Matemática pode criar um ambiente propício à elaboração de um saber matemático.

---

[6] Especialização cursada na Universidade Estadual do Ceará – UECE de 2000 a 2002.

[7] Obras Educação para uma Sociedade em Transição; a Era da Consciência e Educação Matemática – da teoria à prática.

[8] D´Ambrosio (2004, p. 13), prefaciando a obra Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática, apresenta a EM como uma área prioritária na educação, originária na transição do século XIX para o XX, tendo John Dewey como um dos pioneiros ao escrever a Psicologia do número (1895) na qual faz uma reação ao formalismo, propondo uma relação cooperativa ao invés de tensa entre discente e docente e uma integração entre todas as disciplinas. Vemos que no final do século XIX, Dewey já tinha clareza sobre a ineficiência do formalismo na educação básica e da importância da interdisciplinaridade.

[9] Denominação dada pela LDB 9394/96.

Depois de três anos de atuação nas duas séries mencionadas anteriormente, sentimos necessidade de aprofundar nossos conhecimentos acerca das possibilidades de interação entre a Álgebra e a Geometria. Decidimos ingressar no mestrado em busca de fundamentação teórica e de um ambiente propício para o desenvolvimento de uma pesquisa que tivesse como objeto essa interação.

Encaminhamos a pesquisa para discutir e analisar a possibilidade de tal interação no ensino fundamental, tendo sustentação teórica nos estudos de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) que indicam o caráter oscilatório dessas áreas da Matemática. Seguimos também as orientações de Pires (2000) que pesquisou as possibilidades de transição de um currículo de Matemática linear para um currículo em rede.

Consideramos necessário explicitar os conceitos de educação, ensino, aprendizagem e Educação Matemática. Em seguida, exploramos a importância da interação entre a Álgebra e a Geometria para a aprendizagem da Matemática. A educação pode ser conceituada como um processo permanente de formação do ser humano, que envolve os aspectos social, cultural, político, afetivo e cognitivo, que interferem no modo de vida do indivíduo.

Segundo Gadotti (1993), na visão de Dewey, Montessori, Claparède e Piaget, autores do pensamento pedagógico da escola nova, o ato pedagógico caracteriza-se respectivamente pelo *aprender fazendo*, pelo uso de *métodos ativos e individualização do ensino*, pela *educação funcional e diferenciada* e pela *psicopedagogia e educação para a ação*.

As habilidades envolvidas nesse processo exigem: tentativa, observação, análise, conjectura, verificação, que compõem o raciocínio lógico – uma das metas do ensino de Matemática e principal característica do fazer ciência.

Acerca de situações de ensino, Solé e Coll (1996; p.11) assim se expressam:

> [...] No decorrer das situações de ensino, os referenciais e teorias servem como marco que guia, porém não determina (sic) a ação, pois esta deve contar com os elementos presentes e as incidências previstas, e mesmo porque também está sujeita a todo conjunto de decisões que não são de responsabilidade exclusiva do professor.

Disso decorre a necessidade do professor sempre utilizar sua visão de humanidade, sua percepção de ser humano. Para tanto, deve recorrer a outras áreas do conhecimento como psicologia, relações humanas, educação, educação matemática dentre outras.

O desenvolvimento de atividades caracterizadas pela interação entre conteúdos de ensino exige a aquisição de uma postura construtivista. O surgimento do construtivismo como tendência pedagógica, a partir da epistemologia genética piagetiana, é responsável por inovações no ensino da Matemática, pois substitui a prática mecânica característica do tecnicismo por uma prática destinada à construção das estruturas do pensamento lógico-matemático. Para tanto, podemos lançar mão de situações contextualizadas e/ou de atividades que favorecem uma aprendizagem significativa. A esse respeito, Crusius (1994, p. 169)

> [...] chama de 'construtivista interacionista' uma prática pedagógica na qual o papel do aluno consiste em ver, manipular o que vê, produzir significado ao que resulta de sua ação, representar por imagem, fazer comparações entre a representação imaginada e o objeto de sua ação real; desenhar, errar, corrigir, construir a partir do erro mostrando da maneira que pode através de desenhos o que ficou na cabeça.

No construtivismo, o papel do professor é o de coordenador das atividades a serem desenvolvidas pelo aluno, ou seja, o de mediador de um processo de aprendizagem que deve ir de uma esfera global ao restrito, passando pela investigação, uma vez que o conhecimento matemático resulta da ação interativa/reflexiva do homem com o meio ambiente ou com as atividades realizadas. Segundo Crusius (1994; p.170)

> [...] o professor sempre está junto ao aluno, ao lado de todos, porque todos confabulam e discutem sobre o que estão fazendo. É o saudável barulho da efervescência da aprendizagem. É o zumbido das abelhas 'fabricando mel' na sala de aula. Todos estão produzindo; todos estão construindo; todos estão participando. Mas, há também, na sala de aula, o necessário 'barulho do silêncio',

> quando cada criança se empenha vivamente em sua própria produção; quando interioriza individualmente as ações/reflexões realizadas individualmente.

O ensino de Matemática modifica-se historicamente associado às concepções de Matemática e ao surgimento de novas concepções de ensino e de aprendizagem, que se encontram imbricadas umas nas outras. Podemos observar aspectos das seis tendências em Educação Matemática presentes na atuação do professor em sala de aula. Segundo Fiorentini (1995, p. 1-37), as referidas tendências são: formalista clássica, empírico-ativista, formalista moderna, tecnicista, construtivista e socioetnocultural.

Em cada uma delas, podemos observar a concepção de Matemática implícita; a crença no processo de obtenção, produção e descoberta do conhecimento matemático; as finalidades e os valores atribuídos ao ensino de Matemática; a concepção de ensino-aprendizagem; o papel do aluno e do professor e a perspectiva de pesquisa com vistas à melhoria da aprendizagem da Matemática.

Todas essas tendências são necessárias, mas nenhuma é superior a outra. Convém ao educador conhecê-las para que possa usá-las de modo critico. Em sua prática pedagógica, em geral, o professor faz uso dessas tendências, em decorrência dos saberes recorrentes no contexto em que vive, portanto, não faz uma escolha deliberada e critica das características dessas tendências. Segundo Fiorentini (1995), cada professor constrói seu ideário pedagógico com base nas influências do contexto, na sua opção teórica e, na sua decisão de refletir sobre a prática.

Nessa perspectiva, D'Ambrosio (1996, p. 8) vê a "[…] educação como uma estratégia de desenvolvimento individual e coletivo gerada por [...] grupos culturais com a finalidade de se manterem como tal e de avançarem na satisfação de necessidades de sobrevivência e de transcendência". Como conseqüência, o autor vê a Matemática e a educação como estratégias contextualizadas e interdependentes, que geram a Educação Matemática. Cabe ao professor gerenciar, facilitar o processo de aprendizagem e interagir com o aluno na produção e crítica de novos conhecimentos. Convém que o professor seja também um pesquisador que faça a interface entre a teoria e a prática.

No decorrer do mestrado, a partir da leitura de Douady[10] *apud* Maranhão (1999) que pesquisou o papel da interação entre os domínios, conhecidos também por Teoria dos Quadros, direcionamos nosso estudo para a mudança entre os dois domínios (Álgebra e Geometria). Consideramos que os conhecimentos já desenvolvidos em um dos domínios eram simplesmente aplicados ou transferidos para o outro. Abandonamos a perspectiva de mudança de domínios e passamos, então, a considerar a perspectiva de interação entre os domínios, nos quais os conhecimentos são disponibilizados em, pelo menos, dois domínios. Segundo Maranhão (1999, p. 130):

> [...] trata-se de tornar disponível diversos *conhecimentos em, pelo menos, dois domínios*, visando à formulação de problemas que levem à produção de conhecimentos novos, colocando em interação os conhecimentos dos domínios em jogo. Esse termo, *interação, prevê idas e vindas* entre domínios *estabelecendo relações matematicamente relevantes entre as noções estudadas.* (Grifos da autora)

Esta investigação está centralizada no ensino da Álgebra e da Geometria, o que nos impõe a necessidade de compreender os caminhos percorridos e as tendências do ensino desses dois ramos da Matemática nos últimos tempos. Para tanto reconstruímos, historicamente, o movimento pendular entre Álgebra e Geometria no currículo escolar brasileiro.

Durante muito tempo, o estudo da Geometria foi considerado indispensável à formação intelectual dos indivíduos e ao desenvolvimento da capacidade de hábitos de raciocínio, no entanto, a nossa vivência junto à comunidade docente de Matemática tem indicado que a Geometria sofreu um certo abandono nas últimas décadas. Essa tendência também vem sendo observada em outros conteúdos conforme indicam as pesquisas realizadas por Pavanello (1993) e Pires; Curi; Campos (2000). Merece destaque um achado da pesquisa desses

---

[10] Regine Douady, pesquisadora francesa do desenvolvimento de concepções matemáticas de estudantes em sala de aula.

autores, segundo o qual “[...] os professores não têm boas lembranças de seu tempo de estudante, em relação à Geometria” (PIRES; CURI; CAMPOS, 2000, p. 15).

A origem do abandono da Geometria deve-se ao Movimento da Matemática Moderna (MMM) que se iniciou no final dos anos cinqüenta do século passado, perdurando até a década de 60 e início dos anos 70. Nesse período, foi dada ênfase às estruturas algébricas e à linguagem simbólica da teoria dos conjuntos.

Ainda hoje os matemáticos têm opiniões divergentes quanto ao papel da Geometria no ensino e na pesquisa em Matemática. Segundo Pavanello (1993, p. 7 e 8):

> Alguns acreditam que ela deve ceder espaço a outros ramos mais em evidência no campo da pesquisa matemática contemporânea. Outros, entretanto, assumem a posição contrária e enfatizam exatamente as relações que a geometria mantém com estes mesmos ramos, bem como sua contribuição valiosa para a construção do conhecimento matemático ao longo do processo de escolarização.

Chalouh; Herscovics (1994)[11] afirmam que a utilização de conceitos geométricos auxilia a construção de significado para as expressões algébricas, formando um alicerce para a construção de uma base cognitiva. As pesquisas dos autores indicam inúmeros obstáculos enfrentados pelas crianças na aprendizagem dos conteúdos algébricos.

Segundo Booth (1994), a origem dessas dificuldades pode estar no seguinte fato: a Álgebra tem como foco o estabelecimento de procedimentos e relações que devem ser expressos de uma forma simplificada geral. Em geral, os alunos não percebem isso, pois estão muito ligados aos procedimentos aritméticos, nos quais o foco da atividade é encontrar determinadas respostas numéricas.

A desvinculação dos diversos ramos da Matemática, o abandono da Geometria e a ênfase ao ensino da Álgebra provocam uma certa inquietação nos

---

[11] Esse artigo consta da obra *As idéias da álgebra*, que apresenta trinta e três artigos de autoria de estudiosos da área de Educação Matemática como resultado de pesquisas do *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM).

professores, pois essa postura prejudica o desenvolvimento dos processos de pensamento necessários à resolução de problemas matemáticos.

Dessa inquietação, surgiu o nosso interesse em identificar quais conhecimentos algébricos e geométricos detêm os professores de 8ª série do ensino fundamental que possibilitam a utilização, na sua prática pedagógica, de atividades interativas entre as estruturas algébricas e as geométricas. Para tanto, identificamos os conhecimentos matemáticos que podem ser disponibilizados na Álgebra e na Geometria; as estruturas de pensamento algébrico e geométrico que são necessárias para o ensino da Matemática. Além disso, examinamos a aplicabilidade das estruturas de pensamento geométrico e algébrico na resolução de situações-problema.

É indispensável que o professor domine os conteúdos de ensino para que possa promover atividades que viabilizem a sua articulação ou interação. A nossa investigação se inclui na *Educação Matemática* que segundo Pais (2001, p.10):

> [...] é uma grande área de pesquisa educacional, cujo objeto de estudo é a compreensão, interpretação e descrição de fenômenos referentes ao ensino e à aprendizagem da matemática, nos diversos níveis de escolaridade, quer seja em sua dimensão teórica ou prática. [...] a expressão *educação matemática* pode ser ainda entendida no plano da prática pedagógica, conduzida pelos desafios do cotidiano escolar. (Grifos do autor)

Após a explicitação dos objetivos e postulados teóricos que fundamentam a esta pesquisa, apresentamos a configuração deste texto dissertativo: introdução, seguida de quatro capítulos e, por fim, as considerações finais, as referências e os anexos.

No capítulo 1, fazemos um resgate histórico do movimento pendular entre a Álgebra e a Geometria, ocorrido no currículo escolar brasileiro. No segundo, trazemos as contribuições de Douady segundo Maranhão (1999) e de Duval (1993) para o ensino da Matemática. No terceiro, descrevemos o percurso metodológico da investigação e no quarto, os resultados e as análises. Por último, as considerações finais que arrematam este relatório e contêm as nossas principais aprendizagens e sugestões referentes à melhoria do processo de ensino e aprendizagem.

CAPÍTULO 1 - RECONSTITUIÇÃO HISTÓRICA DO MOVIMENTO PENDULAR ENTRE ÁLGEBRA E GEOMETRIA NO CURRÍCULO ESCOLAR BRASILEIRO

Os autores Fiorentini; Miorim; Miguel (1993; p. 78) mencionam que, ao longo da história, verifica-se um comportamento oscilatório entre a priorização da Álgebra em detrimento da Geometria e vice-versa. No desenvolvimento da Álgebra estão presentes três concepções de Educação Algébrica: lingüístico-pragmática, fundamentalista-estrutural e fundamentalista-analógica. Essas concepções de Educação Algébrica estão relacionadas às concepções de Álgebra discutidas pelos autores acima citados. Relacionaremos cada uma dessas concepções a momentos citados a seguir.

O primeiro momento corresponde ao período de 1799, quando a Álgebra foi oficialmente introduzida no currículo da escola secundária, até metade do Século XX, quando surge no Brasil o Movimento da Matemática Moderna. Houve o predomínio da concepção *lingüístico-pragmática* de Educação Algébrica, que está relacionada à concepção *lingüístico-sintático-semântica*[12] de Álgebra.

O movimento renovador do ensino da Matemática, segundo Miorim, Miguel e Fiorentini (1993) surgiu, a partir da década de 20 do Século XX. No plano pedagógico, foi disseminado no Brasil, através de Euclides Roxo, apoiado na concepção pragmática defendida por Félix Klein, Henri Poincaré, Boutroux e Tanneri e na "[...] concepção empírico-ativista do processo ensino-aprendizagem subjacente ao paradigma escolanovista, assimilado, em nosso país, via pragmatismo norte-americano, principalmente através do pensador John Dewey" (MIORIM; MIGUEL; FIORENTINI,1993, p. 23).

O referido movimento objetiva tornar as concepções matemáticas intuitivas que são apresentadas de "forma viva e concreta". Além disso, unifica as

[12] Na concepção *lingüístico-sintático-semântica* de Álgebra as letras são usadas "para representar genericamente quantidades discretas ou contínuas, determinadas e particulares" (dimensão semântica), mas também "para representar genericamente quantidades genéricas [...], isto é sua capacidade de efetuar e expressar transformações algébricas estritamente simbólicas" (dimensão sintática) (Fiorentini; Miorim; Miguel, 1993, p. 82-83).

diferentes áreas da Matemática até então apresentadas de forma desarticulada na escola secundária[13]. Tal desarticulação é criticada por Klein *apud* Roxo (1937; p. 149):

> [...] É evidente que, à escola secundária, cujo escopo é fornecer uma cultura geral, compete apresentar a matemática como um organismo cujas partes estão em viva e animada correlação. Quando na vida se nos apresenta um problema de matemática a ser resolvido com certa urgência, não há tempo para indagar se trata de geometria, álgebra ou de aritmética. Temos que nos virar com um conjunto de conhecimentos matemáticos.

As idéias escolanovistas, apesar de legalmente amparadas pela Reforma Francisco Campos[14], foram duramente criticadas pelo Padre Arlindo Vieira, que reprovava a forma de reorganização dos programas e métodos de ensino da Matemática na escola secundária, conforme podemos ler em Martins (1984), citado por Miorim; Miguel; Fiorentini (1993; p. 26):

> [...] A Matemática desapareceu do ensino secundário. Eis o triste resultado do que se chama [...] 'a moderna orientação do ensino de matemática', e é apenas uma orientação brasileira, atestando a nossa incompetência pedagógica.

Neste destaque, há uma oposição ferrenha ocorrida na década de 30 ao movimento renovador da Matemática. Durante esse período prevaleceu, pelo menos, na legislação, um equilíbrio enciclopédico entre Aritmética, Álgebra, Geometria e Trigonometria, campos que integravam a educação matemática escolarizada. Esse equilíbrio não foi capaz de despertar a consciência para a importância de cada um desses campos, uma vez que foi mantido o caráter reprodutivo da educação.

Esse equilíbrio enciclopédico sugerido pela Reforma Francisco Campos influenciou o gradativo desaparecimento dos manuais didáticos que, abordam separadamente as áreas da Matemática e reforçavam a tendência metodológica dualista no ensino da Álgebra e da Geometria. Dessa forma, surgiram os manuais,

---

[13] A denominação escola secundária refere-se à LDB 4024/61. Pela Lei n. 9394/96 passou a ser denominada ensino médio.

[14] Os quatro ramos da Matemática – Aritmética, Álgebra, Geometria e Trigonometria – tratadas até então como disciplinas isoladas no currículo escolar brasileiro, foram unificadas em uma disciplina denominada Matemática pela Reforma Francisco Campos em 1931.

nos quais eram abordadas as diversas áreas da Matemática de acordo com a série à qual se destinava.

A Geometria destinava-se às elites por ser considerada uma matéria responsável pelo desenvolvimento das capacidades intelectuais. Uma abordagem rigorosa e quase sempre axiomático-dedutiva era designada a esse ramo da Matemática.

A Álgebra era considerada uma matéria meramente instrumental, portanto, era-lhe reservada uma abordagem mecânica e automatizada, que se limitava às regras de transformação das expressões algébricas. Essa abordagem destinada à Álgebra provocou a inalteração dos tópicos relativos a ela durante todo o período. Essa fase apresenta um transformismo algébrico prioritariamente mecânico, sem preocupação fundamentalista, caracterizado por uma seqüência de tópicos, tais como: estudo das expressões algébricas, operações com operações algébricas e equações. Essas seriam utilizadas na resolução de problemas, o que caracterizava um transformismo algébrico totalmente livre de objetos concretos, de figuras ou ilustrações.

A concepção de Educação Algébrica *fundamentalista-estrutural* alicerça o segundo momento que é concomitante ao Movimento da Matemática Moderna – MMM e demonstra uma preocupação em fundamentar, de maneira lógica e estrutural, o transformismo algébrico.

O MMM apregoa que a fusão entre Álgebra e Geometria aconteça via “espírito da álgebra moderna”. A Álgebra passa, então, a assumir um lugar de destaque, tornando-se o elemento unificador. É-lhe atribuído o papel de fundamentar os diversos campos da Matemática escolar, o que possibilita relacionar essa concepção de Educação Algébrica à concepção *lingüístico-postulacional* [15] de Álgebra.

Segundo Miorim; Miguel; Fiorentini (1993; p. 35):

---

[15] A concepção *lingüístico-postulacional* de Álgebra imprimiu “aos signos lingüísticos um grau de abstração sem precedentes” estendendo “o domínio da Álgebra a todos os campos da Matemática”. (Fiorentini; Miorim; Miguel, 1993, p. 83)

> [...] prevaleceu a crença de que a introdução de propriedades estruturais das operações que justificassem logicamente cada passagem presente no transformismo algébrico capacitaria o estudante a identificar e aplicar essas estruturas nos diversos contextos em que estivessem subjacentes.

O caráter pragmático, mecânico e não-justificado do ensino da Álgebra é substituído por uma abordagem que valoriza o rigor da linguagem matemática e a legitimação das transformações algébricas através das propriedades estruturais.

A *bandeira* da compreensão, via fundamentação lógica, originou uma nova organização dos tópicos algébricos apresentada no quadro a seguir:

Quadro 1 - Distribuição dos tópicos algébricos

TÓPICOS FUNDAMENTADORES	TÓPICOS ALGÉBRICOS	NOVOS CONTEÚDOS ALGÉBRICOS
Os conjuntos numéricos As propriedades estruturais Estudo dos quantificadores Sentenças abertas e fechadas Conjunto universo Conjunto verdade Equações e inequações do 1º grau	Expressões algébricas Valores numéricos Operações Fatoração	Funções Funções do 1º e 2º graus

Fonte: Elaboração a partir de Miorim; Miguel; Fiorentini (1993).

A abordagem euclidiana clássica da Geometria é abandonada e substituída por uma abordagem rigorosa, o que provoca o seu fracasso, pois os professores, em geral, não possuem a fundamentação teórica necessária para vivenciar o enfoque sugerido. Como conseqüência, essa Geometria Algébrica é colocada em segundo plano e deixa de ocupar um lugar significativo no currículo escolar. Passou-se, então, a enfatizar-se apenas a álgebra.

Segundo Miguel; Fiorentini; Miorim (1992), o movimento modernista não foi capaz de superar os obstáculos encontrados no ensino da Matemática, ou seja, não conseguiu executar o seu projeto formativo. Pois as estruturas das quais dependia todo o conhecimento não dotaram os alunos de uma capacidade de aplicação dessas formas estruturais de pensamento inteligente aos diversos domínios, dentro e fora da Matemática.

A partir da segunda metade da década de 70 do século passado, começam a surgir críticas e buscas de novas alternativas na tentativa de resgatar o ensino da Geometria. No entanto, tal reação não significou um simples retorno à abordagem euclidiana clássica que predominava anteriormente, pois tem início o terceiro momento.

Nesse terceiro momento, a concepção de Educação Algébrica *fundamentalista-analógica* está, novamente, relacionada à concepção *lingüístico-sintático-semântica* de Álgebra. Essa concepção de Educação Algébrica tenta sintetizar as duas concepções anteriores, recuperando o valor instrucional da Álgebra presente na primeira e mantendo o caráter fundamentalista da segunda, embora de outra natureza. Na concepção *fundamentalista-estrutural*, a justificação das passagens presentes no transformismo algébrico era do tipo lógico-estrutural, enquanto essa nova concepção apresenta uma justificação visual baseada em recursos analógicos geométricos. Atribuiu, portanto, à Geometria o mesmo lugar de destaque ocupado anteriormente pela Álgebra. A Geometria passa a assumir o papel de unificadora dos diversos campos da Matemática. Como enfatizam Fiorentini; Miorim; Miguel (1993; p. 36):

> Nesse sentido, essa concepção acredita que uma “álgebra geométrica”, por tornar visível certas identidades algébricas, seria didaticamente superior a qualquer forma de abordagem estritamente lógico-simbólica. Isso, porém, não significa defender a tese determinista da impossibilidade de acesso do estudante a uma forma meramente simbólica e mais abstrata, mas, simplesmente, acredita que a etapa geométrico-visual constitui-se em um estágio intermediário e/ou concomitante à abordagem simbólico-formal.

Nesse momento, ocorreu um segundo abandono: o da Álgebra. Para Fiorentini; Miorim; Miguel (1993; p. 22):

> [...] parece existir no Brasil, uma atitude oscilatória e maniqueísta em relação aos dois campos fundamentais da matemática – a álgebra e a geometria [...]. Essa atitude surge sempre que se procura superar uma dicotomia pela ênfase no pólo oposto àquele que vem sendo priorizado.

Ainda sobre esse abandono, Miguel; Fiorentini; Miorim (1993; p. 40) afirmam:

> [...] esse "abandono", entre aspas, não significa necessariamente ausência de informações algébricas, mas ausência de reflexão crítica sobre esse ensino, isto é, a sua fossilização decorrente da não percepção da necessidade de renovação que pudesse imprimir-lhe novas direções e novas significações.

Nesse terceiro momento, predominou a utilização de recursos analógicos geométricos, no entanto, outro recurso analógico passou a ser usado como ferramenta para a justificação de certas passagens do transformismo algébrico.

Pesquisas desenvolvidas e relatadas, nos anos 80 e 90, por Carraher; Schliemann (1988) e Cortez; Kavafisn; Vergnaud (1990) apresentam, a utilização de leis do equilíbrio físico, através do uso da balança de dois pratos como ferramenta para estabelecer o significado de equações e manipulações simbólicas.

Com bases nessas pesquisas e ampliando algumas das situações encontradas nas mesmas, Castro-Filho (s.d.) conduziu investigações acerca de ferramentas interativas que podem ser usadas como recurso para o ensino de Álgebra. Essas investigações resultaram na elaboração de um *software* denominado *Balança Interativa* que foi apresentado e discutido em Castro-Filho (s.d.).

Nessa mesma perspectiva, Meira (2003) apresenta a utilização do recurso da balança como tentativa de acabar com o divórcio entre o *dito concreto* e o supostamente *abstrato*. Para o autor "[...] *produzir significados* significa estabelecer relações entre conceitos, as ferramentas que utilizamos para construí-los [...] e as atividades nas quais emergem" (MEIRA, 2003, p. 38).

Essa metáfora da balança tem sido muito utilizada para a modelagem[16] de equações lineares, pois o equilíbrio nela observado equivale a uma equação que compara o conteúdo dos dois pratos. No trabalho em sala de aula com tal ferramenta, pode ocorrer a seguinte situação: mesmo que os alunos sejam incapazes de *pensar algebricamente*, mantêm-se envolvidos em *atividade algébrica,*

---

[16] Modelagem matemática é um enfoque didático-pedagógico que proporciona uma descrição matemática de um determinado fenômeno. (BORBA; MENEGHETTI; HERMINI, 1997)

pois utilizam símbolos e procedimentos algébricos para atingir objetivos específicos, por exemplo, comunicar o resultado de um problema. A importância desse tipo de atividade é reafirmada por Meira (2003, p.44) “[...] na medida em que levanta a questão da produção de significados em matemática e dos significados específicos que estudantes de álgebra desenvolvem”. Esse autor ainda ressalta o cuidado que o professor deve ter na condução desse tipo de atividade, devido à diversidade de significados que serão produzidos pelos alunos:

> [...] é importante perceber que as tarefas que trazemos para a sala de aula são sempre transformadas pelos alunos, na medida em que eles criam significados próprios que dependem de seus objetivos. Assim, ao invés de enfatizar as tarefas em si e esperar que tenham um significado único e fixo, o professor deve preocupar-se em gradualmente aproximar os significados criados pelos alunos e aqueles pretendidos pela tarefa. (MEIRA, 2003, p. 44).

Esse recurso não é adequado para trabalhar com todos os tipos de equações, porém existem tipos de equações que são contempladas pela balança de dois pratos.

Precisamos reconhecer a importância dessa tentativa de justificação algébrica, via fundamentalismo-analógico, seja qual for o recurso analógico utilizado. Porém, não podemos deixar de lembrar que essa concepção incidiu no mesmo equívoco das concepções anteriores, quando se preocupou unicamente com o transformismo algébrico, que reduziu o ensino da Álgebra apenas à sua linguagem. A linguagem algébrica está relacionada com o pensamento algébrico, conforme Miorim; Miguel; Fiorentini (1993; p. 36):

> Essa tendência da educação algébrica em acreditar que o pensamento algébrico só se manifesta e desenvolve através da manipulação da linguagem sintática concisa e específica da álgebra desconsidera o fato de que, tanto no plano histórico quanto pedagógico, a linguagem é, pelo menos a princípio, a expressão de um pensamento.

Sobre essa relação existente entre pensamento e linguagem, Fiorentini; Miorim; Miguel (1993, p. 85) acrescentam: “Acreditamos subsistir entre pensamento algébrico e linguagem não uma relação de subordinação, mas uma relação de natureza dialética”.

Impõe-se a necessidade de um estudo dedicado à identificação dos elementos constitutivos do pensamento algébrico.

> Se refletirmos sobre a questão de quais seriam os elementos caracterizadores de um tipo de pensamento que poderia ser classificado como algébrico, estaríamos próximos de construir um referencial para uma efetiva educação algébrica (MIORIM; MIGUEL; FIORENTINI, 1993; p. 36).

O ensino da Álgebra precisa abandonar a perspectiva que prioriza o ensino de uma linguagem algébrica já constituída e proporcionar a construção do pensamento algébrico e de sua linguagem. Para que isso aconteça, precisamos entender esses elementos. E para compreender os elementos constitutivos do pensamento algébrico podemos contar com a teoria dos campos conceituais de Vergnaud, a partir da qual Falcão (2003, p.31) elaborou um quadro que apresenta os elementos básicos do campo conceitual algébrico.

Quadro 2 - Elementos básicos do campo conceitual algébrico

Números, medidas, incógnitas e variáveis, regras de atribuição de símbolos, significados do sinal de igual, trânsito entre formas de linguagem.	Operadores, sintaxe, prioridade de operações, princípio de equivalência, conheci mentos vinculados a experiências extra-escolares de compensação e equilíbrio, fatos aritméticos instrumentais (ex: elemento neutro da adição).

Fonte: Falcão (2003, p. 31)

Para o autor, a Álgebra não pode ser tratada apenas como uma Aritmética generalizada, pois possui propriedades intrínsecas que originam um campo conceitual específico. Castro (2003) destaca a opção pedagógica que caracteriza a Álgebra por um tipo específico de *fazer matemático* ou por uma maneira diferente de pensar os problemas matemáticos. O *pensamento algébrico* distingue-se, por exemplo, dos *pensamentos geométrico e aritmético*. Da mesma forma que ocorreu na construção histórica, a aprendizagem da Álgebra vai envolver todos os ramos da Matemática:

> Podemos afirmar que fazemos Álgebra quando somos desafiados por problemas de geometria, de contagem, de finanças, de proporcionalidade, enfim, o fazer algébrico não só está presente em todos os ramos da Matemática, como lhes é fundamental (CASTRO, 2003, p. 14).

Segundo Bruner *apud* Falcão (2003, p. 30) "[...] toda idéia, problema ou conjunto de conhecimentos pode ser suficientemente *simplificada* para ser entendida por qualquer estudante particular, sob forma *reconhecível*". Nesse pensamento, existe a possibilidade de utilização de outros ramos da Matemática como apoio a essa simplificação mencionada.

Para Miorim; Miguel; Fiorentini (1993) há necessidade de identificação e compreensão dos elementos constitutivos do pensamento algébrico. Mas, como a proposta dessa pesquisa é identificar as possibilidades de interação entre estruturas algébricas e geométricas, faz-se necessária, também, a identificação e compreensão dos elementos constitutivos do pensamento geométrico.

Atiyah, *apud* Pavanello (1993, p. 16) "[...] salienta a necessidade de cultivar e desenvolver tanto o pensamento visual, dominante na geometria, quanto o seqüencial, predominante na álgebra, pois ambos são essenciais aos problemas matemáticos autênticos".

Para Araújo (2003), é necessário compreender como os alunos expressam seus pensamentos geométricos, pois tal compreensão é um agente determinante na escolha da proposta pedagógica que se adeqüe à realidade dos alunos e aos seus níveis de pensamento geométrico. Passaremos então a apresentar o modelo Van Hiele[17] de desenvolvimento do pensamento geométrico, considerando suas possibilidades de orientação na formação dos alunos e na sua aplicabilidade em sala de aula.

Crowley (1994) apresenta o modelo Van Hiele que abrangem cinco níveis de compreensão, a saber: *visualização*, *análise*, *dedução informal*, *dedução formal* e

---

[17] O modelo van Hiele de pensamento geométrico emergiu dos trabalhos de doutoramento de Diana Van Hiele-Geldof e Pierre van Hiele, finalizados simultaneamente na Universidade de Utrecht (Holanda).

rigor. Tais níveis descrevem as características do processo de pensamento geométrico. Para os idealizadores do modelo, o aluno move-se, sequencialmente a partir do nível inicial de visualização até o último nível com o qual atinge o *rigor*, pois percorre toda a seqüência acima citada.

No nível básico – *visualização* - o aluno compreende o espaço apenas como algo que o cerca. Os conceitos geométricos são tomados na sua totalidade, pois o aluno não percebe a existência de suas características ou atributos. Nesse nível, um aluno consegue identificar uma forma geométrica por sua aparência física e não por suas propriedades. Mesmo sendo um nível inicial, o aluno já consegue apropriar-se de um vocabulário geométrico, identificar e reproduzir figuras.

O segundo nível – *análise* - proporciona, como a própria denominação sugere, uma análise dos conceitos geométricos. Nesse momento, o aluno começa a identificar as características das figuras que são reconhecidas por suas partes. Embora o aluno já perceba as propriedades, ainda não consegue estabelecer relações entre propriedades.

No nível seguinte - *dedução informal* - o aluno passa a estabelecer relações entre propriedades dentro de uma mesma figura e entre figuras. A percepção de relações entre figuras possibilita o reconhecimento de classes de figuras. As definições passam a ter significado e o aluno inicia um trabalho de argumentação informal. Nesse nível, o aluno não é capaz de construir demonstrações, mas consegue memoriza-las.

Na *dedução formal*, o aluno torna-se capaz de construir demonstrações e fazê-las de maneiras diferentes. Compreende a existência e a interação de condições necessárias e suficientes.

No último estágio – *rigor* - o aluno é capaz de compreender a Geometria trabalhada no plano abstrato, o que lhe possibilita o estudo de Geometrias não Euclidianas.

Os van Hiele identificaram ainda algumas propriedades que caracterizam o modelo e que são orientadoras na escolha de procedimentos a serem seguidos no ensino de Geometria.

O modelo Van Hiele apresenta um caráter seqüencial, pois para atingir os objetivos inerentes a um determinado nível, é necessário que o aluno já tenha se apropriado das estratégias dos níveis anteriores. Para Crowley (1994, p. 5) o avanço "[...] de um nível para outro depende mais do conteúdo e dos métodos de instrução do que da idade". No ensino de Geometria, é preciso usar métodos que possibilitam a compreensão, pois a utilização de situações que, simplesmente, estimulam a memorização de fórmulas ou relações, reduz a essência do assunto a um nível inferior.

O caráter intrínseco e extrínseco do modelo pode ser exemplificado da seguinte forma: no primeiro nível, uma figura tem sua forma apenas reconhecida e no nível seguinte, suas propriedades são descobertas. A linguagem desempenha uma função importante. Segundo P. van Heile *apud* Crowley (1994, p.5), "Cada nível tem seus próprios símbolos lingüísticos e seus próprios sistemas que ligam esses símbolos". Dessa forma, uma relação existente em um determinado nível pode ser modificada em nível posterior. No nível 1 – análise – não compreende a inclusão de classes existentes entre quadrado e retângulo, ou entre quadrado e losango, mas essa inclusão é perfeitamente aceita quando o aluno está no nível 2 – dedução informal.

O conteúdo, a linguagem, o material didático e a abordagem devem estar no mesmo nível de compreensão do aluno para que o avanço mencionado anteriormente e o aprendizado possam ser alcançados.

CAPÍTULO 2 - AS CONTRIBUIÇÕES DO *JOGO DE QUADROS* DE DOUADY E DOS *REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS* DE DUVAL PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

Uma grande contribuição para a Didática da Matemática foi dada por Douady com sua Teoria dos Quadros (*apud* Maranhão, p. 115) que "[...] pesquisou o desenvolvimento de concepções matemáticas de estudantes, em sala de aula, na solução de diversas seqüências de situações problemas". A autora considera que "[...] ensinar é criar condições que produzirão um saber entre os alunos, e aprender é se engajar numa atividade intelectual, pela qual se produza a disponibilidade de um saber com seu duplo estatuto de ferramenta e de objeto" (DOUADY *apud* MARANHÃO, 1999, p. 116).

Na Teoria dos Quadros, podemos observar aspectos aplicáveis ao tema proposto e vários pontos de aproximação com o problema desta pesquisa.

Maranhão (1999) descreve as sete fases da *dialética-ferramenta-objeto* que são: antigo, pesquisas, explicitação, novo implícito, institucionalização, reinvestimento, novo problema. Em paralelo, explicita o papel da noção de *integração entre domínios* no desenvolvimento dessas fases.

Na primeira fase – *antigo* - o aluno utiliza conhecimentos anteriores para resolver o problema sem que o professor ensine diretamente a solução. Na fase seguinte, *as pesquisas*, o aluno encontra dificuldades para solucionar o problema e, na tentativa de superação dessas dificuldades, coloca em jogo novos conhecimentos que são subtendidos. Esses conhecimentos são reconhecidos pelo professor embora o aluno não consiga explicar completamente do que se trata.

Na terceira fase – *explicitação* - o aluno descreve suas idéias, dificuldades e suas conclusões. Nessa fase, cabe ao professor possibilitar a troca entre os conhecimentos antigos que estão sendo utilizados e os novos que estão sendo formulados implicitamente, ou seja, ele refuta ou valida as idéias apresentadas pelos alunos. Nessa interação, que pode ser muito produtiva do ponto de vista da formação de conhecimentos, fica ressaltado o papel de mediador atribuído ao professor que deve escolher o momento e a forma de intervenção, respeitando a liberdade do aluno. Para tanto, o professor deve ter domínio sobre todas as varáveis teóricas e práticas envolvidas na situação.

A quarta fase - *novo implícito* - corresponde ao momento em que o aluno, deparando-se com a impossibilidade de resolução do problema no meio proposto, é levado a procurar novos meios de validação das suas idéias. Portanto, segundo Douady (*apud* Maranhão, 1999, p. 118) “[...] é necessário que os problemas fornecidos envolvam, pelo menos, dois domínios, de modo que um sirva de referência ao outro e possibilitem meios de validação pela ação”. Tais domínios são ramos de conhecimentos matemáticos (Aritmética, Geometria, Álgebra entre outros) ou partes deles. Sobre isso Maranhão (1999, p. 119) coloca:

> É precisamente pelo fato de os *conhecimentos* de certo *domínio* não serem suficientes para avançar, numa situação, que o aluno lança mão de conhecimentos de outros domínios. [...] E são essas idas e vindas entre domínios diferentes as responsáveis pelo avanço de seus conhecimentos (grifos da autora).

Nessa fase, destaca-se o papel da interação entre domínios nas fases da dialética-ferramenta-objeto e seu caráter dinâmico.

Na quinta fase – *institucionalização* - os novos conhecimentos são oficializados como objetos do saber matemático. Cabe ao professor decidir quando e como ocorrerá a passagem para essa fase, na qual os novos conhecimentos assumem o *status* de objetos matemáticos, que passarão, posteriormente, a funcionar como conhecimentos antigos.

Na fase seguinte – *reinvestimento* - o aluno desenvolve vários exercícios para familiarizar-se com o novo, devendo ser utilizados problemas da vida corrente que exijam do aluno conhecimentos de vários domínios. Nessa fase, o conhecimento volta a assumir a forma de ferramentas.

Na última fase - *novo problema* - os novos conhecimentos devem ser reutilizados em situações mais complexas, envolvendo outros conceitos, propriedades e procedimentos, para proporcionar a inicialização de um novo ciclo.

Nessa fase, os conhecimentos novos tornam-se antigos sobre os quais serão construídos outros novos.

Nessa mesma perspectiva, surge a teoria *Registros de Representações Semióticas*, de Raymond Duval, que destaca a necessidade de se levar em consideração as diferentes formas de representar um mesmo objeto matemático. Torna-se uma grande contribuição ao Ensino da Matemática referente à aquisição do conhecimento e à forma como se processa a aprendizagem, o que alicerça nossa pesquisa.

A Matemática usa objetos abstratos que para serem apreendidos necessitam de uma representação. Essas representações são de natureza diversa: símbolos, signos, gráficos, tabelas, algoritmos entre outras. Todas essas representações proporcionam a comunicação entre os sujeitos e as atividades cognitivas do pensamento, portanto mais de um desses recursos podem ser usadas para a representação de um mesmo objeto matemático.

Na sua teoria, Duval (1993) apresenta três idéias para a noção de representação: representações como representação subjetiva e mental, representações internas ou computacionais e as representações semióticas. A primeira refere-se ao estudo das crenças, das explicações e das concepções das crianças mediante fenômenos físicos e naturais e teve como maior pesquisador Jean Piaget. A segunda noção leva em consideração que as "representações são internas e não conscientes do sujeito". Segundo Damm (1999) "[...] o sujeito acaba executando certas tarefas sem pensar em todos os passos necessários para a sua realização". Essas representações transpõem informações externas a um sistema, de tal maneira que seja possível resgata-las e combiná-las no interior do sistema.

A noção de representação semiótica, terceira das noções apresentadas por Duval (1993), em oposição às representações computacionais, é externa e consciente do sujeito. Segundo Duval apud Damm (1999, p. 140) as representações semióticas "[...] são relativas a um sistema particular de signos, linguagem natural, língua formal, escrita algébrica ou gráficos cartesianos, figuras, de um objeto matemático" que possibilitam a diversidade de representações (forma/representante) para um mesmo objeto matemático (conteúdo/representado).

Nesse ponto, ocorre uma primorosa aproximação entre as duas teorias que fundamentam nossa pesquisa, uma vez que as representações semióticas podem ser transformadas em representações de igual valor em outro sistema semiótico. Essa transformação, denominada de conversão, significa "[...] mudar a forma pela qual um conhecimento é representado" (DAMM, 1999, p. 140).

As representações semióticas realizam conjuntamente, e de forma intencional, as funções de objetivação e de expressão. Essa intencionalidade atribui a essas representações um caráter fundamental a aprendizagem humana. Observamos, então, que as representações semióticas são necessárias à comunicação e à construção do conhecimento pelo sujeito.

Segundo Damm (1999, p. 143-144):

> A apreensão conceitual dos objetos matemáticos somente será possível com a coordenação, pelo sujeito que apreende, de vários registros de representação. Ou seja, quanto maior for a mobilidade com *registros de representação diferentes* do mesmo objeto matemático, maior será a possibilidade de apreensão desse objeto.

Para Duval (1993) existem três atividades cognitivas ligadas às representações: a *formação de uma representação identificável* através de um dos recursos de registros citados anteriormente, o *tratamento* dessa transformação, ou seja, transformação dessa representação no próprio registro e por último, a *conversão* da representação com a transformação dessa representação para um outro registro mantendo o objeto matemático em questão. Precisamos atentar para a diferenciação entre tratamento e conversão. O tratamento acontece internamente no registro, enquanto a conversão acontece entre registros diferentes.

A não percepção da necessidade da conversão e da coordenação entre os vários registros de representação, que possibilita a apreensão do objeto matemático, ou seja, a sua conceitualização torna-se uma lacuna existente no ensino de Matemática. Muitas propostas metodológicas giram em torno apenas dos tratamentos necessários às diversas representações, pois falta o estabelecimento de relações entre essas diversas representações.

Diante do exposto, concluímos que existe complementeridade entre as duas teorias, o que justifica a nossa opção em adotá-las como fundamentação teórica nesta pesquisa.

CAPÍTULO 3 - ASPECTOS METODOLÓGICOS

O delineamento metodológico é apresentado em três seções que contemplam a descrição do lócus da pesquisa e dos sujeitos pesquisados, a descrição dos instrumentos de investigação e o caminho percorrido durante a trajetória investigativa.

3.1 - O *Lócus* da Pesquisa e os sujeitos pesquisados

Estabelecemos como critério de escolha da escola, na qual a pesquisa foi desenvolvida, a existência de professores diferentes para Álgebra e Geometria. Todas as escolas da rede pública de Fortaleza utilizam um mesmo professor para o ensino de Álgebra e de Geometria, por isso, optamos em desenvolver esta pesquisa em uma escola da rede privada de ensino, na qual, é comum, haver um professor responsável pelo ensino de Álgebra e outro pelo de Geometria.

A escola escolhida fica situada em um bairro de classe média da cidade de Fortaleza, fundada em 1950, que atende, em geral, a alunos moradores do bairro.

A escola possui 1730 alunos matriculados, sendo 197 na educação infantil, 1043 no ensino fundamental e 490 no ensino médio. Estes alunos estão distribuídos em 9 turmas de educação infantil, 15 de ensino fundamental I, 16 de ensino fundamental II e 12 de ensino médio. Oferece a educação infantil e o ensino fundamental I no período da manhã, o ensino fundamental II no período da tarde e o ensino médio, parte no período da manhã (3º ano) e parte no período da tarde (1º e 2º anos).

Atuam na escola 88 professores com formação inicial, variando entre magistério, licenciatura plena e bacharelado.

A infra-estrutura da escola é composta de diversos ambientes: 46 salas de aula, recepção, sala da diretoria, secretaria, tesouraria, sala de professores, salas de reuniões, salas de coordenação, sala de audiovisual, laboratório de informática, laboratório de ciências, biblioteca, sala de leitura, auditório, teatro, sala da assessoria pedagógica, gráfica, sala de apoio, guarda volumes, parque infantil, ginásio de esportes, cantina, praça de alimentação, enfermaria e capela.

A gestão da escola é realizada pela Direção com o apoio dos serviços presentes na instituição: Assessoria Pedagógica (AP), Serviço de Orientação Pedagógica (SOP), Serviço de Orientação Religiosa (SOR), Serviço de Orientação Educacional (SOE), Serviço de Orientação Desportiva (SOD) e Serviço de Psicopedagogia (SPP).

A escola apresenta uma proposta educativa delineada com base nos quatro objetivos:

1. possibilitar a todos, em especial ao educando, ser agentes do seu processo de desenvolvimento, tendo em vista a formação para a cidadania e a construção da solidariedade numa sociedade pluralista;
2. oportunizar a cada educando tornar-se comunitário, crítico, criativo e responsável;
3. proporcionar um ensino de qualidade, promovendo a vivência de um currículo que favoreça a ampliação do processo de construção do saber, incentive a pesquisa e valorize a descoberta, realize atividades significativas e desafiadoras, promova a interação e a expressão sob as mais diversas formas e proponha transformação social;
4. desenvolver no aluno a cultivo da fé, estimulando-o a revelar o coração de Maria em sua compaixão e misericórdia.

Toda a condução da escola se baliza nesses objetivos.

Feita a descrição do *lócus* da pesquisa, apresentamos os professores de Matemática do ensino fundamental II e do ensino médio, que foram submetidos a um questionário para obtenção de dados, que será descrito no próximo tópico.

Nesses dois segmentos da educação básica, atuam 11 professores, incluindo a pesquisadora. Foi aplicado um questionário a 10 professores, mas somente 8 devolveram. Os dados e informações obtidos através desse instrumento de pesquisa serviram de base para traçar o perfil da equipe de Matemática da escola.

Destes respondentes, 5 são homens e 3 são mulheres. Suas idades variam de 30 a 63 anos, com tempo de serviço no magistério de 10 a 42 anos e, na instituição, de 01 a 39 anos. Quanto à formação inicial, 5 são licenciados em Matemática, um em Pedagogia e 2 são bacharéis: um em Ciências Contábeis e outro em Matemática. Quanto à formação continuada, 5 são especialistas (62,5%), o que mostra a preocupação desses professores em investir na sua formação após a graduação.

No que tange ao tempo de serviço, 62,5% (5) dos professores atuam no magistério há mais de 20 anos, são, pois, portadores de vasta experiência docente. Os demais atuam no magistério há, no mínimo, 10 anos, de modo que toda a equipe docente de Matemática tem muita vivência de sala de aula. Quanto ao tempo de serviço na instituição, apenas um professor está na instituição há um ano, o que equivale a (12,5%); enquanto 87,5% (7) trabalham na instituição há, pelo menos, nove anos. Dois professores estão lá há mais de trinta anos.

Dos 8 professores, 2 foram intencionalmente selecionados para o aprofundamento da investigação, pois lecionam na 8ª série[18]. São eles, o mais novo e um dos mais velhos do grupo. Esta série é a primeira a apresentar professores diferentes para a Álgebra e para a Geometria, por isso foi escolhida para a pesquisa.

Também são sujeitos da investigação duas alunas (uma de cada um dos 2 professores), cuja escolha também foi intencional, por tratar-se de alunas

---

[18] Em 2006, houve uma modificação na denominação dos anos, passando o ensino fundamental a ser de nove anos, de modo que a 8ª série corresponde à sétima na denominação anterior.

assíduas, organizadas, cujos cadernos de apontamentos permitiram o desvelamento de aspectos relevantes para este estudo.

As duas alunas, das quais as anotações pessoais e as avaliações foram coletadas, tiveram toda a vida escolar na instituição pesquisada. Quando da coleta, ambas tinham 13 anos. Para preservar a identidade das alunas pesquisadas adotamos os códigos A1 e A2.

3. 2 - Os Instrumentos de Investigação

Em uma pesquisa, os dados podem ser coletados por uma diversidade de procedimentos denominada por Santos (1993) de pluralidade metodológica: "[...] cada método é uma linguagem e a realidade responde na língua em que se pergunta. Só uma constelação de métodos pode captar o silêncio que persiste entre cada língua que pergunta" (SANTOS, 1993, p. 48).

Utilizamos como recurso metodológico a triangulação e encontramos em Yin (2001, p. 32-33) passagens que reforçam a necessidade desse acontecimento:

> A investigação de estudo de caso enfrenta uma situação tecnicamente única em que haverá muito mais variáveis de interesse do ponto de dados, e, como resultado, baseia-se em várias fontes de evidências, com os dados precisando convergir, em um formato de triângulo, e, como outro resultado, beneficia-se do desenvolvimento prévio de proposições teóricas para conduzir a coleta e a análise de dados.

Ancorada no autor acima referenciado, que destaca na *triangulação*, o uso de diferentes procedimentos para a obtenção de dados, como um modo de aumentar a credibilidade da pesquisa qualitativa, optamos em trabalhar com os seguintes instrumentos de pesquisa:

- análise documental;
- questionário com professores (Anexo I);
- teste diagnóstico (Anexo II);

Os documentos analisados foram: o Projeto Político Pedagógico da escola, os roteiros programáticos da disciplina pesquisada (Anexo III), o livro didático adotado, os cadernos das alunas, as avaliações, as listas de exercícios e similares.

O questionário foi estruturado em três partes: i) dados pessoais, incluindo sexo, idade, tempo de serviço em sala de aula e na instituição pesquisada, série em que lecionam e turno; ii) formação docente, contemplando a inicial e a continuada; iii) questões referentes ao tema da pesquisa. Na terceira parte, foram apresentadas 11 questões abertas na tentativa de desvelar a visão dos professores acerca dos pensamentos algébrico e geométrico, dos conteúdos mínimos de Álgebra e Geometria que devem ser abordados no ensino fundamental e seus benefícios, das possibilidades de integração entre Álgebra e Geometria e das possíveis dificuldades para essa interação.

Apresentamos a seguir, as 11 questões abertas representadas pelos tópicos seguintes:

- contribuições dos pensamentos algébrico e geométrico para o desenvolvimento do aluno;
- conteúdo mínimo de Álgebra para o ensino fundamental;
- benefícios que esse conteúdo mínimo de Álgebra poderá trazer para o aluno;
- conteúdo mínimo de Geometria para o ensino fundamental;
- benefícios que esse conteúdo mínimo de Geometria poderá trazer para o aluno;
- recursos utilizados para trabalhar a interação entre Álgebra e Geometria;
- principais dificuldades para que a interação seja trabalhada;
- conteúdos de Álgebra que podem integrar-se á Geometria;
- conteúdos de Geometria que podem integrar-se á Álgebra.

As questões do teste diagnóstico em número de 7 foram escolhidas dentre as que possibilitam uma maior interação entre enfoque algébrico e geométrico. Cinco foram retiradas de livros didáticos, uma de relato de experiência apresentado no XVIII Encontro Regional de Professores de Matemática e outra do primeiro anuário do NCTM.

Na primeira questão Perez; Almeida (2005) apresentam uma seqüência de números triangulares na forma de desenho e solicita que seja indicada a quantidade de bolinhas da 2000ª figura (T_{2000}). Na segunda, Isolani (1999), também apresentada uma seqüências de figuras, porém, é pedido que seja escrita uma fórmula que permita calcular a quantidade de quadrinhos das figuras em qualquer posição. Na terceira, Milauskas (1994), temos 2 quadrados congruentes parcialmente sobrepostos, onde um tem o vértice no centro do outro. Nessa questão, é requerido que seja calculado o maior valor possível da área da região hachurada.

Na quarta questão Dante (2003) mostra uma seqüência de triângulos eqüiláteros inscritos em um inicial, do qual é indicada a medida dos lados, e é solicitada que seja calculada a medida dos lados do menor dos triângulos. Na quinta, adaptada de Dante (2003), é proposto que seja mostrada a relação existente entre a medida do lado e do perímetro de um quadrado e entre a medida do lado e a área da região quadrada. Na sexta, Dante (2005) traz um trinômio com um termo desconhecido e é pedido que esse termo seja determinado para que o trinômio seja quadrado perfeito.

Na última questão Isolani (1999), expõe três pisos em forma de mosaicos compostos de tacos retangulares e é pedido que seja escrita na forma algébrica uma relação para cada um deles.

3. 3 – O Caminho Percorrido

D’Ambrosio (1996) conceitua pesquisa como o elo entre a teoria e a prática, pois o pesquisador quando começa a interferir na realidade, necessita de fundamentação teórica que inclua princípios metodológicos contempladores da prática.

Nesta investigação, optamos pela pesquisa qualitativa do tipo estudo de caso que, segundo Bogdan e Biklen (1994), “[...] consiste na observação detalhada de um contexto, ou indivíduo, de uma fonte de documentos ou de um acontecimento específico”. Sobre esse método, Tull (1976, p. 323) afirma que "[...] um estudo de caso refere-se a uma análise intensiva de uma situação particular".

Também respaldamos nossa escolha em Lüdke e André (1986), pois encontramos muitas aproximações entre as características atribuídas pelas autoras ao método citado com os objetivos da nossa pesquisa. Para elas, os estudos de casos:

> [...] visam à descoberta uma vez que o conhecimento não é algo acabado, mas uma construção que se faz e refaz constantemente; [...] enfatizam a ‘interpretação em contexto’; [...] buscam retratar a realidade de forma completa e profunda; [...] usam uma variedade de fontes de informação; [...] revelam experiências vicárias e permitem generalizações naturalísticas; [...] procuram representar os diferentes e às vezes conflitantes pontos de vista presentes numa situação social; [...] os relatos do estudo de caso utilizam uma linguagem e uma forma mais acessível do que os outros relatórios de pesquisa (Lüdke e André, 1986, p. 18-20).

Fizemos opção pela pesquisa qualitativa, no entanto, usamos a estatística descritiva na apresentação dos dados em forma de percentual, de gráficos e tabelas. Segundo Queiroz (1991), os dados qualitativos revelam a amplitude do fenômeno estudado e os dados quantitativos traduzem a intensidade em que o fenômeno ocorreu.

De acordo com Araújo; Borba (2004), o planejamento inicial da pesquisa é flexível, mas evita que o pesquisador se perca em um emaranhado de dados sem significado para a análise dos resultados. A metodologia de uma pesquisa em Educação Matemática “[...] deve ser coerente com as visões de Educação e de conhecimento sustentadas pelo pesquisador, o que inclui suas concepções de Matemática e de Educação Matemática” (ARAÚJO; BORBA, 2004, p. 43).

O trabalho de campo foi iniciado em agosto de 2006 com a aplicação do questionário e coleta dos registros pessoais das duas alunas e teve prosseguimento em fevereiro com a aplicação das situações-problema.

Segundo Alves-Mazzotti (2003), o *design* da pesquisa emerge à proporção que a pesquisa se desenvolve e seus passos não podem ser determinados *a priori* e de modo rígido. Entendemos a necessidade da escolha de procedimentos metodológicos mínimos que garantam o desenvolvimento da pesquisa e que funcionarão como o fio condutor das diversas etapas do trabalho de campo.

A análise documental foi dividida em três etapas: na primeira analisamos os documentos oficiais da escola, dos quais extraímos a linha filosófica da instituição. Conseguimos, assim, identificar os objetivos delineadores da sua proposta educativa, da estrutura administrativa, dos serviços atuantes no cotidiano escolar e de outros aspectos do sistema escolar; na segunda etapa, analisamos os roteiros programáticos da disciplina pesquisada e o livro didático adotado; na terceira e última etapa, examinamos os registros pessoais das alunas, as avaliações, as listas de exercícios e similares na tentativa de confirmação das informações coletadas no questionário aplicado aos professores.

O questionário (anexo I) foi aplicado a todos os professores de Matemática da escola pesquisada que atuam no ensino fundamental II e ensino médio, tendo em vista a obtenção de informações gerais sobre esses professores. De posse desses dados, traçamos o perfil sócio-demográfico do corpo docente e identificamos suas concepções acerca da possibilidade de interação entre as estruturas algébricas e geométricas.

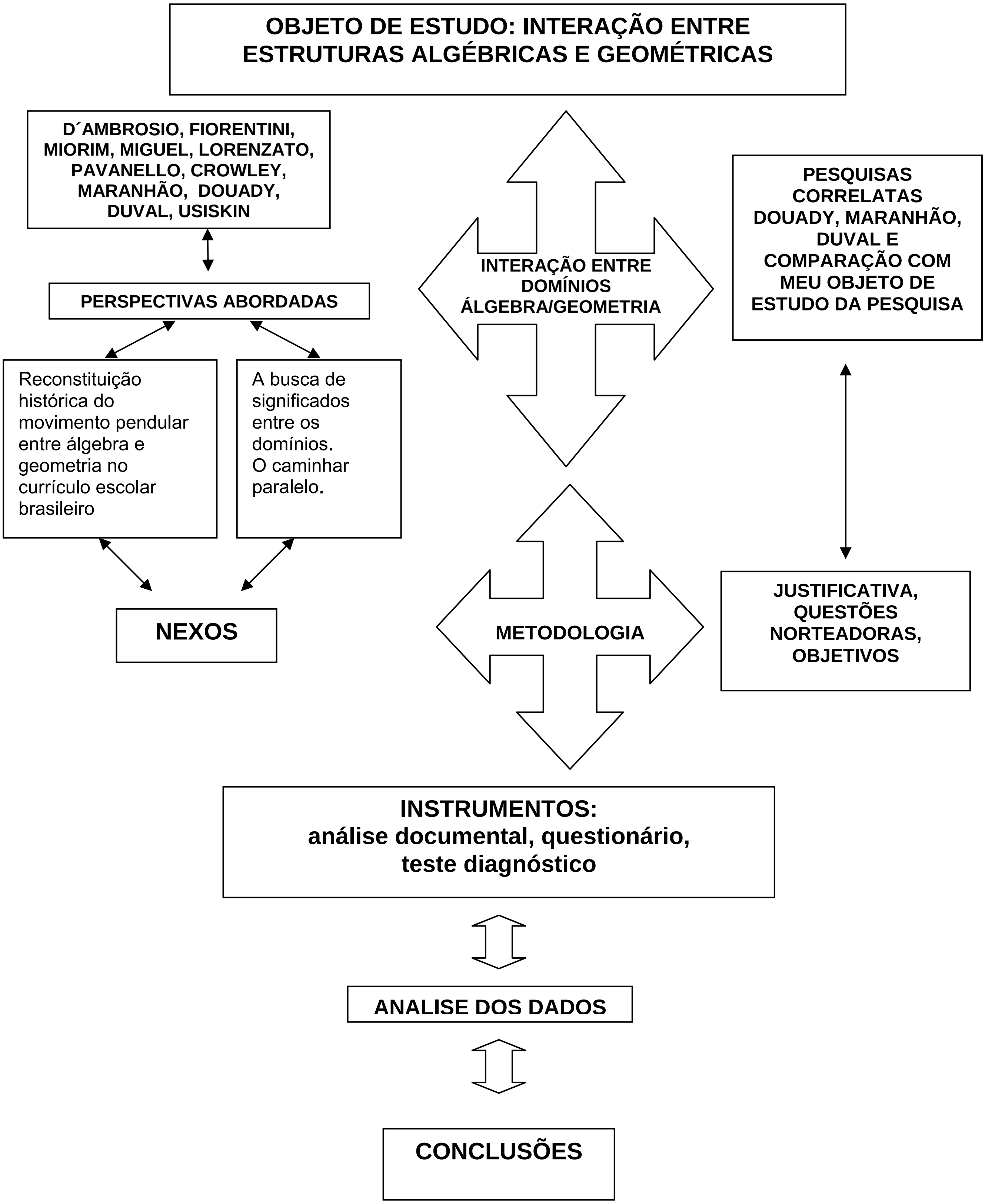
A análise dos dados aconteceu concomitantemente à sua coleta, pois de acordo com Bogdan; Biklen (1994, p. 51), nessa perspectiva a análise "[...] revela-se tanto mais eficiente quanto melhor souber aquilo que está a fazer" e uma vez que a reflexão vai surgindo à medida que se vai descobrindo, enquanto se está inserido no campo de investigação.

Segundo Bogdan; Biklen (1994, p. 205):

> A análise envolve o trabalho com os dados, a sua organização, divisão em unidades manipuláveis, síntese, procura de padrões, descoberta de aspectos importantes e do que deve ser aprendido e a descrição do que vai ser transmitido aos outros.

Na análise dos dados e no processo sistemático de organização dos materiais, tentamos aumentar a nossa própria compreensão do significado e abrangência do ato de pesquisar. A seguir, apresentamos o mapa da pesquisa que dá uma visão sintética do processo como um todo.

Figura 1 - MAPA DA PESQUISA



CAPÍTULO 4 – RESULTADOS E ANÁLISES

Apresentamos os resultados e as análises em tópicos referentes à coleta de acordo com os instrumentos que elucidaram os achados. São, pois, cinco seções: a primeira relativa à última parte do questionário, a segunda referente ao teste diagnóstico, a seguinte relativa aos dados dos cadernos das alunas e às atividades, a quarta, referente ao Livro Didático e a última contemplando os roteiros progamáticos.

4.1 - Relativos ao questionário

Os resultados obtidos nas duas primeiras partes do questionário aplicado aos professores foram usados para a caracterização dos sujeitos apresentada no item 1 do capítulo anterior.

A terceira parte foi formada de questões relacionadas ao tema da pesquisa. O objetivo dessa parte era descobrir se os professores identificavam diferenças e/ou semelhanças entre as estruturas dos pensamentos algébrico e geométrico e, principalmente, se trabalhavam na perspectiva de interação entre esses dois pensamentos.

Optamos por não perguntar diretamente aos professores se eles tinham conhecimento da existência desses dois tipos de estruturas. Elaboramos, então, algumas questões que proporcionassem esclarecimentos desse fato.

Com a primeira questão, pretendíamos saber se os professores conseguiriam identificar as contribuições específicas de cada tipo de estruturas de pensamento necessárias ao desenvolvimento do aluno. Quanto ao pensamento algébrico, os professores apontaram como contribuições: desenvolvimento do processo de análise de um problema; aquisição da capacidade de generalização de situações do seu cotidiano e de sistematização; instrumentalização para resolução de situações-problema através de suas ferramentas algébricas e fundamentação das operações com estruturas matemáticas abstratas.

Nas contribuições apresentadas pelos professores, encontramos aspectos relacionados às duas funções da Álgebra apresentadas por Falcão (2003). Segundo o autor, pesquisas em Didática da Álgebra indicam esta dupla função: representar fenômenos e relações (ferramenta representacional), e auxiliar na resolução de problemas matemáticos (ferramenta de resolução de problemas, que denominaremos de ferramenta operacional). O quadro a seguir sintetiza as diversas vertentes dessas duas funções.

Quadro 3 – Atividades em Álgebra

Ferramenta representacional	Ferramenta de resolução de problemas
Modelização: captura e descrição dos fenômenos do real. **Função**: explicitação simbólica de relações elementares. **Generalização**: passagem de descrições específicas ligadas a um contexto para leis gerais.	Algoritmos, regras sintáticas, prioridades de operações, princípio da equivalência entre equações.

Fonte: Falcão (2003, p. 31)

Identificamos, nas respostas dos professores, que o caráter de ferramenta é atribuído apenas ao que se refere à operacionalização: “O pensamento algébrico desenvolve no aluno o processo de análise de um problema e a conseqüente busca de soluções, através de suas ferramentas” (P1). Lembramos que pelo quadro apresentado anteriormente o caráter de ferramenta também é atribuído ao seu aspecto representacional.

Para Usiskin (1994, p. 13), “As finalidades da álgebra **são determinadas por, ou relacionam-se com, concepções diferentes da álgebra que**

correspondem à diferente importância relativa dada aos diversos usos das variáveis" (Grifos do autor). São quatro as concepções da Álgebra apresentadas pelo autor: i) Álgebra como aritmética generalizada; ii) Álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas; iii) Álgebra como estudo de relações entre grandezas; iv) Álgebra como estudo das estruturas. Essas concepções abrangem todas as contribuições atribuídas ao pensamento algébrico para o desenvolvimento do aluno, como foi mencionado pelos professores.

Quanto ao pensamento geométrico, os professores consideram que as estruturas desse pensamento contribuem para o aluno nos seguintes aspectos: o auxílio em conhecer melhor o espaço que o cerca; compreensão das formas e conhecimento de conceitos; desenvolvimento da capacidade de analisar situações e de estabelecer relações. De acordo com o Modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico, essas contribuições inserem-se, respectivamente, nos três primeiros níveis de compreensão que são os níveis de visualização, de análise e de dedução informal.

Nenhuma contribuição relacionada aos dois outros níveis (dedução formal e rigor) foi citada pelos professores. Segundo Crowley (1994, p. 4), na *dedução formal* "[...] a teoria geométrica é trabalhada num contexto de um sistema axiomático" e no *rigor* "[...] o aluno é capaz de trabalhar em vários sistemas axiomáticos, isto é, podem-se estudar geometrias não-euclidianas e comparar sistemas diferentes. A geometria é vista no plano abstrato".

A ausência de contribuições relacionadas a esses dois últimos níveis, mostra que os professores atribuem a fundamentação de estruturas matemáticas abstratas apenas às estruturas do pensamento algébrico. Como nessa questão não houve o direcionamento para o ensino fundamental, entendemos que essa ausência seja decorrente de lacunas provenientes da formação inicial dos professores.

Oliveira (2001) desenvolveu pesquisa durante um curso destinado a aperfeiçoamento de professores formados, na qual observou dificuldades em relação à demonstração geométrica, o que vem confirmar as deficiências da formação inicial docente. Tal pesquisa incentivou a realização de uma outra com estudantes e professores do 1º ano do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Goiás, apresentada em Araújo (2003; p. 94). Nessa pesquisa a autora concluiu:

> [...] que os elementos procedimentais, que implicam no uso ou aplicação da matemática cumprem papel importante na aprendizagem da geometria, pois dão maior ou menor sentido ao fazer matemático dos estudantes. E “[...] que em nosso curso ainda temos muito o que fazer em termos de desenvolver métodos mais eficientes que capacitem nossos alunos a se expressarem geometricamente, a visualizar e a planejar um problema, bem como capacita-los profissionalmente para trabalhar a geometria no ensino básico.

Na segunda questão, pedimos aos professores que indicassem o conteúdo mínimo de Álgebra necessário ao ensino fundamental. A questão era aberta, o que possibilitava a indicação de todos os conteúdos que cada um julgasse conveniente. Os dados coletados estão compilados na Tabela 1, que está estruturada de acordo com a ordem na qual esses tópicos são trabalhados no ensino fundamental II. Vale ressaltar que o item resolução de problemas está na última linha por perpassar todos os outros itens.

Tabela 1 – Conteúdo mínimo de Álgebra para o ensino fundamental

Conteúdo	f	%
Equações do 1º grau	5	62,5
Equações do 2º grau	4	50,0
Sistemas de equações	2	25,0
Expressões algébricas	2	25,0
Polinômios	2	25,0
Produtos notáveis	2	25,0
Fatoração	2	25,0
Regra de três	1	12,5
Noções de função	3	37,5
Resolução de problemas	5	62,5

Fonte: Pesquisa direta

As equações, conteúdo apontado com maior incidência nessa questão, correspondem a um dos aspectos considerados mais necessários no ensino e aprendizagem da Álgebra. Segundo Bekken *apud* Oliveira (2003), Lagrange, em 1798 afirmava que “[...] a principal preocupação da álgebra é a resolução de equações”, mostrando que a importância atribuída à resolução das equações observadas nas aulas de Matemática tem origem remota.

O estudo de equações, na maioria das vezes, é feito sem a devida compreensão das noções nela envolvidas. Costuma-se trabalhar a resolução como uma simples seqüência de procedimentos, fazendo com que os alunos não atribuam significados à atividade. Existe uma naturalização das noções constitutivas da idéia de equação, decorrente da falta de atenção a essa compreensão por parte de muitos professores.

É fundamental, portanto, que sejam apresentadas aos alunos as noções envolvidas no conceito de equação para que esse conceito seja construído. As noções relacionadas à idéia de equação são as de equilíbrio, igualdade, variável, incógnita ou valor desconhecido e conjunto universo. Além do amplo conhecimento dessas noções, o aluno precisa saber o que significa resolver uma equação. Segundo Oliveira (2003), os alunos acreditam que resolver uma equação é calcular um valor para **x** ou para **y**, como se essas letras fossem a personificação da incógnita ou variável. Essa falta de atribuição de significado às equações e às suas resoluções é responsável por alguns equívocos relacionados à resolução de equações.

Na maioria das vezes, os alunos consideram que as equações apresentam uma única solução e que essa solução é numérica. Desconsideram, por exemplo, a possibilidade de as equações possuírem pares ou ternos de números como solução. Desconsideram ainda que a solução de uma equação pode ser uma outra equação equivalente à original. Esse equívoco pode ser evitado, atribuindo-se significado às etapas de resolução de uma equação. O aluno deve perceber que cada equação surgida nessas etapas de resolução corresponde a uma equação equivalente à anterior. Segundo Oliveira (2003, p. 67):

> O problema está em oferecermos um único caminho de desenvolvimento, não discutindo que existem outros, e podemos estar atribuindo significado a cada uma das equações equivalentes que trabalhamos no processo de encontrar um valor final para a equação.

Para Usiskin (1994), uma das concepções da Álgebra corresponde a um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas. É fundamental trabalhar as ferramentas operacionais da Álgebra e, sobretudo, considerar que esse trabalho não pode ser isento de significado.

Na tentativa de atribuição do significado de equivalência entre equações, Oliveira (2003) sugere uma atividade na qual os alunos são solicitados a identificar, dentre uma lista de equações, as que fazem parte da mesma *família*. Apresenta 10 equações das quais 7, são equivalentes, ou seja, possuem o mesmo conjunto solução. As equações equivalentes são $2x = 8$; $4x = 16$; $x + x = 7 + 1$; $x = 4$; $2x - 5 = 3$; $\frac{x}{2} + \frac{x}{2} - 1 = 3$; $3x - x = 4 + 4$, onde uma das equações $x = 4$ é a forma mais simples de representar a equação original. Portanto, 4 é solução da equação. Muitas vezes, simplificação e resolução são duas denominações diferentes para a mesma idéia.

Os conceitos matemáticos são desenvolvidos pelos alunos pouco a pouco, ao longo do tempo, quando refletem ativamente e testam esses conceitos nos diferentes caminhos que o professor pode lhes oferecer.

Segundo Onuchic e Allevaro (2004, p. 220):

> Quanto mais condições se dêem aos alunos para pensar e testar uma idéia emergente, maior é a chance de essa idéia ser formada corretamente e integrada numa rica teia de idéias e de compreensão relacional.

No trabalho com equações equivalentes, como na atividade anterior, percebemos a transformação da representação com a manutenção do mesmo registro denominado por Duval (1993) de tratamento de uma transformação. Embora Duval (1993) considere que a conversão - transformação da representação numa outra com mudança de registro - seja mais eficaz para a aquisição de um conceito, atividades de tratamento, como a sugerida por Oliveira (2003), contribuem de forma positiva para a aquisição do conceito de equação.

Nessa perspectiva de equivalência, Polya (1986) defende que “[...] se o aluno não consegue resolver algum problema proposto, deve tentar resolver um problema afim”. A simplificação das sentenças tem o propósito de torná-las mais fáceis de entender e usar. Segundo Oliveira (2003), “[...] simplificar e resolver são mais semelhantes do que geralmente parece”.

Juntamente com as equações do 1º e 2º graus, a resolução de problemas foi apresentada pela maioria dos professores como um tópico constante da listagem do conteúdo mínimo de Álgebra necessário ao ensino fundamental.

Partindo do princípio de que um dos principais objetivos da escola é preparar o aluno para resolver situações problemáticas do seu cotidiano e da sua vida futura, a Matemática como uma das áreas da aprendizagem escolar deve, juntamente com as demais disciplinas, contribuir para esse objetivo. Portanto, é significativo perceber a grande incidência de indicação de resolução de problemas nas respostas dessa questão.

Comumente, acontecem equívocos no trabalho com resolução de problema, principalmente em considerar as situações-problema como conteúdo matemático, o que foi observado nas respostas dos professores. A resolução de problemas consiste em uma metodologia que ganhou grande destaque a partir da divulgação dos *Standards*, tratados aqui como Parâmetros Curriculares Americanos – PCA, no final dos anos 80. Posteriormente, essa idéia assume uma predominância, com a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (1997; 1998 e 1999).

Segundo Dias (2005), a partir da publicação dos PCA, surgiram três interpretações dessa metodologia e seu papel no ensino de Matemática: i) ensinar **para** a resolução de problemas; ii) ensinar **sobre** a resolução de problemas; iii) ensinar **via** resolução de problemas. Acerca da primeira perspectiva, Dias (2005, p. 48) destaca que “[...] no ensino de Matemática para resolução de problemas, a meta final é que os alunos sejam capazes de resolver certos problemas, então o conteúdo matemático é ensinado para esse fim”. Já no ensino sobre resolução de problemas, a opção é apresentar aos alunos o processo de resolução de problemas, suas fases e estratégias comumente utilizadas. O precursor dessa perspectiva é George Polya (1986) com o livro *A arte de resolver problemas*.

A última perspectiva, ensinar via resolução de problemas, defende a consideração do problema “[...] como um elemento disparador de um processo de construção do conhecimento matemático” (DIAS, 2005, p. 49). Nessa abordagem, os problemas não são apenas ponto de partida motivador, mas “[...] o próprio caminho ao longo do qual os conceitos vão sendo construídos. É na ação de resolver um problema particular que conhecimentos e procedimentos são elaborados” (DIAS, 2005, p. 49). A utilização dessa perspectiva como eixo orientador do processo de ensino e aprendizagem de Matemática está presente nos PCN (1998) e é claramente percebida nos princípios desse eixo organizador:

> [...] a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se podem apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas (BRASIL, 1998, p. 41).

Os PCN (1998) sugerem a utilização de situações-problema mobilizadoras de conhecimentos e desenvolvimento de capacidades para gerenciar as informações que estão ao seu alcance. Desse modo, os alunos poderão “[...] ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos”, alargando a visão que têm da Matemática e desenvolvendo sua autoconfiança (BRASIL, 1998, p. 40).

O recurso à resolução de problemas encontra como obstáculo a organização linear e rígida dos conteúdos que impede o professor de mudar sua prática pedagógica na tentativa de criar algumas conexões entre os conteúdos matemáticos. Para que essa rigidez seja rompida e uma conexão seja possível, faz-se necessário que o professor trace, no seu planejamento, algumas atividades que possibilitem essa conexão entre os conteúdos matemáticos. Nesse planejamento, “[...] é preciso estabelecer os objetivos que se deseja alcançar, selecionar os conteúdos a serem trabalhados, planejar as articulações entre os conteúdos e propor as situações problemas que irão desencadeá-los” como enfocam os PCN (BRASIL, 1998, p. 138).

A indicação feita por 62,5% (5) dos professores referentes à resolução de problemas nas respostas da segunda questão, não garante que a abordagem utilizada seja a mais indicada, mas anuncia a preocupação desses professores em utilizar essa metodologia.

Na questão seguinte, foram indicados os benefícios que esse conteúdo mínimo traz para os alunos. Os professores consideram que esse conteúdo mínimo favorece a interpretação, resolução e generalização de situações-problema e a realização de operações mais complexas.

Fazendo um comparativo com as respostas apresentadas na primeira questão e com o quadro 3 (Atividades em Álgebra), observamos, mais uma vez, a ausência de indicação dos benefícios relacionados às atividades que priorizam a Álgebra como ferramenta representacional, mais especificamente, nos seus aspectos de modelização – captura e descrição dos fenômenos do real - e função – explicitação simbólica de relações elementares.

A quarta questão solicitou aos professores que fossem apresentados o conteúdo mínimo de Geometria necessário ao ensino fundamental. Os conteúdos pontuados foram organizados na Tabela 2.

Tabela 2 - Conteúdo mínimo de Geometria para o ensino fundamental

Conteúdo	f	%
Ângulos	3	37,5
Áreas e volumes	1	12,5
Conhecimento completo das suas formas e das suas características	1	12,5
Elementos fundamentais	1	12,5
Estudo dos triângulos	1	12,5
Figuras espaciais	4	50,0
Figuras planas	3	37,5
Relações métricas no triângulo retângulo	2	25,0
Relações trigonométricas	2	25,0
Semelhanças	1	12,5
Posições relativas das retas	2	25,0

Fonte: Pesquisa direta

A maior incidência nas respostas dessa questão aconteceu na indicação de figuras espaciais, apontadas por metade dos professores como sendo um dos itens do conteúdo mínimo de Geometria para o ensino fundamental. A importância do trabalho com figuras espaciais para esse nível se ensino pode ser observada em atividades como a sugerida por Pohl (1994) que trata da construção de objetos[19] mostrando os conceitos espaciais, e a representação plana das figuras espaciais com o objetivo de desenvolver no aluno a habilidade de percepção visual, de codificação e de decodificação de figuras. A atividade de construção de poliedros proporciona ao aluno a oportunidade de descobrir várias propriedades espaciais neles contidas. Nesse momento, o professor encontra um clima adequado para introduzir os elementos formadores dos poliedros acompanhados de um vocabulário específico.

[19] Uma atividade de construção de poliedros está sugerida no texto: Visualizando o espaço tridimensional pela construção de poliedros (POHL, 1994). A atividade consiste em construir poliedros com o uso de linha, agulha, canudos de plástico, régua e tesoura.

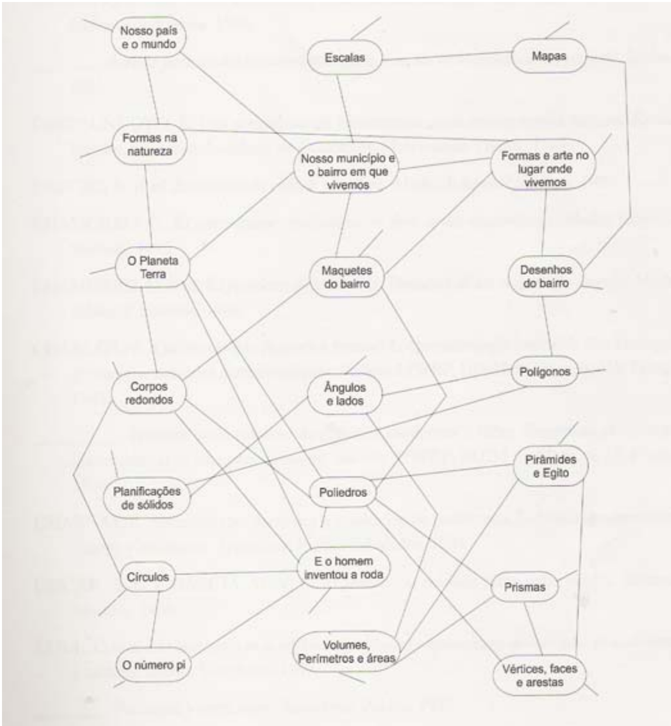
A construção e a manipulação de sólidos possibilitam o desenvolvimento da habilidade de visualização espacial. Sua posterior representação favorece a habilidade de manipular mentalmente, rodar, dobrar ou inverter a posição desses objetos representados em duas dimensões.

Os PCN sugerem que as situações do cotidiano sirvam de contexto para o trabalho com os conhecimentos matemáticos para que se possa estabelecer conexões entre os conteúdos e, assim, quebrar a abordagem linear e hierarquizada levando em consideração a sua complexidade. É necessário proporcionar ao aluno mais oportunidades de exploração dos conteúdos em outros contextos. Para quebrar a rigidez dessa organização, o professor deve se dispor a traçar um planejamento com conexões entre os conteúdos matemáticos. Segundo Brasil (1998, p. 138):

> [...] ao construir o planejamento, é preciso estabelecer os objetivos que se deseja alcançar, selecionar os conteúdos a serem trabalhados, planejar as articulações entre os conteúdos, propor as situações-problemas que irão desencadeá-los.

A Figura 2 contem um exemplo de possibilidades de estabelecimento de conexões entre poliedros, ângulos, polígonos, vértices, faces e arestas, planificações de sólidos, corpos redondos e desses conhecimentos matemáticos com os temas transversais. A Figura 2 ressalta a importância do trabalho com as formas espaciais, destacada por 50,0% dos professores. Apresenta ainda, alguns possíveis contextos para situações-problema, expostas no Quadro 4.

Figura 2 - Espaço e forma: o lugar em que se vive, os objetos do entorno



Fonte: Brasil (1998, p. 141)

Quadro 4 – Contextos para situações-problema

As embalagens das coisas – planificações
As pirâmides do Egito
Construção de maquetes
Decomposição da luz - prismas
Formas e órbitas dos planetas
Guias da cidade e mapas

Fonte: Brasil (1998, p. 142)

O trabalho com poliedros ajuda a preparar os alunos para enfrentar problemas como o do cálculo da diagonal de um paralelepípedo, do volumes da pirâmide entre outros. Prepara ainda para os gráficos tridimensionais presentes nos cursos superiores.

Os professores equivocadamente indicaram resolução de problemas como constante do conteúdo mínimo de Álgebra, pois se trata de uma metodologia. Tínhamos como expectativa encontrar o mesmo equívoco no conteúdo mínimo de Geometria, o que não se confirmou. O não aparecimento desse item nas respostas dessa questão, nos faz inferir que os professores não trabalham na perspectiva de resolução de problemas geométricos. No entanto, Milauskas (1994) [20] afirma que o contato dos alunos com *problemas criativos* de Geometria pode favorecer o desenvolvimento de *resoluções criativas* de problemas. Segundo Milauskas (1994, p. 86):

> [...] enfatizar a resolução de problemas não significa inserir alguns 'problemas especializados' aqui e ali na sala de aula. Ao contrário, a resolução de problemas deveria ser o tema subjacente das aulas de matemática. Toda tarefa escolar deveria incluir problemas planejados para estimular a flexibilidade e o raciocínio.

Para o autor, o aluno que está em constante contato com problemas variados atribui mais significado à Matemática.

A questão seguinte, na qual foi solicitada a indicação dos benefícios que o conteúdo mínimo de Geometria pode trazer para o aluno, possibilitou o levantamento dos seguintes ganhos para os alunos: elaboração de modelos da sua realidade, compreensão do espaço em que vive, orientação espacial e desenvolvimento do raciocínio dedutivo e do poder de abstração.

Dos cinco benefícios citados, apenas dois apresentarem maior força de relação com as figuras espaciais, pois referem-se a espaço e orientação espacial. Todos esses benefícios surgem o trabalho com a Geometria Espacial, que foi o item com maior freqüência. Tais indicações demonstram a coerência das respostas dessas duas questões.

---

[20] No texto "Problemas de geometria criativos podem levar à resolução criativa de problemas criativos", o autor identifica alguns tipos de problemas que diferem quanto ao nível de complexidade e em seguida apresenta uma coletânea de 38 problemas acompanhada de pistas e resoluções.

A indicação do desenvolvimento do raciocínio dedutivo como um dos benefícios promovidos pelo conteúdo de Geometria encontra respaldo no modelo Van Hiele de pensamento geométrico, no qual dos cinco níveis de compreensão, dois correspondem aos tipos de dedução: informal e formal. Segundo Crowley (1994) a maioria dos cursos de Geometria é ministrada até o nível de dedução formal e não chega ao nível de rigor.

Houve coerência entre as respostas da quarta e quinta questões, no entanto, encontramos uma contradição entre um item constante na quinta questão em relação a um item na primeira. Nas respostas da primeira questão, a abstração tinha sido relacionada apenas ao pensamento algébrico e na quinta, a abstração surge também relacionada ao pensamento geométrico. Apesar dessa contradição, a indicação desse benefício promovido pelo pensamento geométrico está fundamentada no Modelo Van Hiele, mencionado anteriormente. Segundo esse modelo, para que o trabalho com Geometria seja completo, é preciso contemplar sequencialmente os cinco níveis de compreensão para atingir o rigor indispensável à utilização da geometria abstrata.

Na sétima questão, referente à utilização da perspectiva de interação entre Álgebra e Geometria na prática pedagógica, 87,5% (7) dos professores responderam afirmativamente e, apenas, um professor deixou essa questão em branco o que equivale a 12,5%.

A oitava questão pretendia identificar os momentos nos quais os professores fazem a interação entre os conteúdos de Geometria e Álgebra. Foram apresentadas as seguintes opções: apresentação do conteúdo; apresentação de exemplos; resolução de exercícios; texto e atividades complementares. Cada professor poderia assinalar mais de uma opção. Vide Tabela 3.

Tabela 3 – Momentos de interação entre Álgebra e Geometria

Quantidade de momentos utilizados	f	%
1	1	12,5
2	1	12,5
3	3	37,5
4	2	25,0
Sem informação	1	-
Total	8	100,0

Fonte: Pesquisa direta

Com os dados contidos na tabela anterior, constatamos que 25,0% (2) dos professores promovem a interação nos quatro momentos sugeridos; 37,5% (3) o fazem em três desses momentos, ou seja, 62,5% (5) dos professores afirmam que promovem a interação em, pelo menos, três momentos, o que significa um bom grau de interação. Os demais professores, ou seja, 25,0% (2) promovem a interação em um ou dois momentos.

Dos possíveis momentos de interação entre Álgebra e Geometria sugeridos pelo questionário, o mais indicado pelos professores foi o de *resolução de exercícios*, com a incidência de 75,0% (6) dos professores. Os momentos de *apresentação do conteúdo* e *apresentação dos exemplos* foram indicados por 62,5% (5) deles e a utilização de *textos ou atividades complementares*, por 50,0% (4).

Observamos um bom grau de interação na prática dos pesquisados, no entanto, constatamos que um professor deixou em branco da sexta à décima primeira questão, justificando que não haveria necessidade de indicar os conteúdos e os momentos passíveis de integração, pois tudo deve ser integrado:

> Faz-se necessário que o estudo da Álgebra e da geometria (sic) se faça de forma integrada. Se trabalhamos os conteúdos interdisciplinares não faz sentido a Geometria ser vista de forma fragmentada e isolada da Álgebra. (P3)

Mesmo afirmando a necessidade de interação entre esses ramos da Matemática, esse professor não informou como promove a interação. Portanto, inferimos que a desejada e necessária integração fica apenas a nível do discurso.

A nona questão tratava das principais dificuldades encontradas para trabalhar essa interação. Os professores destacaram as seguintes dificuldades: a inadequação do livro didático; professores diferentes para esses dois ramos da Matemática; falta de tempo para planejamento de atividades; resistência de pessoas envolvidas; conhecimento insuficiente para fundamentar a interação. Dessas dificuldades, a inadequação do livro didático teve a maior incidência com a indicação de 50,0% (4) dos professores. Cada uma das demais dificuldades foi apresentada por apenas um dos professores.

Pires; Campos (2006, p. 14) relacionam os três fatores que para Kieran "[...] são potenciais contribuintes para as dificuldades que os estudantes têm em aprender Álgebra: aprendizagem, ensino e conteúdo". Com relação ao ensino, as autoras destacam que, para Kieran, os resultados das poucas pesquisas realizadas com os professores de Álgebra revelam que as concepções estruturais da Álgebra são favorecidas no ensino, porém os alunos não são capazes de desenvolver concepções estruturais maduras.

No âmbito da aprendizagem, as pesquisas sugerem dois temas dominantes: "[...] a acessibilidade de interpretações processuais em relação às estruturas e a dificuldade para a aquisição de uma concepção estrutural da Álgebra" (PIRES; CAMPOS, 2006, p. 14).

Relativamente ao conteúdo, é destacado o papel do livro didático no processo de ensino e aprendizagem.

> [...] Kieran avalia que se os estudantes sentem dificuldade com a Álgebra que é ensinada por seus professores e os professores ensinam a Álgebra que é apresentada nos livros didáticos, então o principal fator que vem contribuindo para a dificuldade em Álgebra poderia ser atribuído, por falta de outra razão, ao conteúdo da Álgebra como disposta na maioria dos livros (PIRES; CAMPOS, 2006, p. 15).

Consideramos que esses três fatores aumentam as dificuldades encontradas professores quando trabalham a interação entre Álgebra e Geometria. Os professores indicaram dificuldades relacionadas apenas ao ensino e ao conteúdo. No quadro a seguir, relacionamos as dificuldades citadas pelos professores com esses dois fatores sugeridos por Kieran *apud* Pires; Campos (2006).

Quadro 5 – Principais dificuldades para trabalhar a interação entre Álgebra e Geometria

Fatores	Dificuldades
Ensino	• falta de tempo para planejamento de atividade • resistência de pessoas envolvidas • professores diferentes para esses dois ramos da Matemática
Conteúdo	• livro didático inadequado • conhecimento insuficiente para fundamentar a interação

Fonte: Elaboração própria

Na décima questão, foi solicitada aos professores a indicação dos conteúdos de Álgebra que podem ser interados à Geometria. Os dados coletados estão apresentados na Tabela 4.

Tabela 4 – Conteúdos de Álgebra que podem ser interados à Geometria

Conteúdo	f	%
Equações	4	50,0
Inequações	1	12,5
Noções de funções	3	37,5
Sistemas de equações	1	12,5
Polinômios	1	12,5
Produtos notáveis	1	12,5

Fonte: Pesquisa direta

Dos seis conteúdos apresentados nas respostas desta questão, 66,67% (4) estão relacionados à concepção da Álgebra denominada por Usiskin (1994) de “A álgebra como estudo das relações entre grandezas”, na qual existe uma generalização, mas que não se parece com a aritmética. Trata-se de um modelo fundamentalmente algébrico.

> [...] Talvez devido à sua natureza intrinsecamente algébrica, alguns educadores em matemática acham que a álgebra deveria ser introduzida através dessa utilização da variável (USISKIN, 1994, p. 16).

Os outros 33,33% (2) dos conteúdos de Álgebra que foram indicados pela possibilidade de interação à Geometria estão relacionados com outra concepção da Álgebra, denominada pelo autor de “A álgebra como estudo das estruturas”. Nessa concepção, não temos nenhuma função ou relação. A variável não é um argumento e não atua como uma incógnita, pois não há equação nenhuma para ser resolvida. Nessa concepção, “[...] a variável é pouco mais que um símbolo arbitrário” (USISKIN, 1994, p. 18).

Esses conteúdos estão relacionados às concepções da Álgebra, aparentemente, distantes dos outros ramos da Matemática, mas encontramos na literatura material que favorece à compreensão e à aceitação das possibilidades de interação entre a Álgebra e a Geometria. Nessa perspectiva, Maranhão (1999, p. 122) apresenta um exemplo[21] no qual “[...] as representações cartesianas funcionam como suporte para a interação de diversos conhecimentos, na forma de conceitos, propriedades e procedimentos matemáticos, dos domínios algébrico, numérico e geométrico”.

A situação apresentada tem por objetivo a criação da representação de uma função do segundo grau, no qual são requeridos conhecimentos (conceitos ou propriedades) e procedimentos do domínio geométrico.

---

[21] As etapas que devem ser seguidas na condução da situação estão detalhadamente descritas em Maranhão (1999, p. 121- 129). No decorrer da descrição, a autora identifica todos os conhecimentos e procedimentos numéricos, algébricos e geométricos envolvidos na atividade, sejam disponíveis ou em produção.

A décima primeira questão visava identificar os conteúdos de Geometria que poderiam ser interados à Álgebra. Os resultados obtidos estão compilados na Tabela 5.

Tabela 5 - Conteúdos de Geometria que podem ser interados à Álgebra

Conteúdos	f	%
Ângulos	2	25,0
Fórmulas para cálculo de áreas	5	62,5
Perímetro	2	25,0
Relações métricas	1	12,
Semelhança	1	12,5
Volume	4	50,0

Fonte: Pesquisa direta

Dos seis conteúdos citados como possíveis de interação à Geometria, o cálculo de áreas foi apontado por 62,5% (5) dos professores como sendo o conteúdo com possibilidade de interação à Álgebra. Esse conteúdo está relacionado à concepção da Álgebra denominada por Usiskin (1994, p. 13) de “A Álgebra como estudo entre grandezas” e está presente em um dos exemplos de mudança de quadros apresentados a seguir.

Bongiovanni (2006) apresenta dois exemplos[22] de atividade de Geometria que favorecem a mudança de quadro defendida por Douady pois levam à produção de novos conhecimentos colocam em interação os conhecimentos dos domínios em jogo. A primeira atividade consiste em provar que as diagonais de um paralelogramo se intersectam nos respectivos pontos médios. Para tanto, o autor sugere que é necessário prova que a intersecção existe e, em seguida, que essa intersecção acontece exatamente nesse ponto médio. Existe dificuldades em achar uma solução no quadro no qual a questão é proposta, ou seja, o quadro geométrico, por isso o autor trabalha com uma mudança para o quadro algébrico das coordenadas.

[22] Os dois exemplos estão apresentados em Bongiovanni (2006, p. 13-14) acompanhados das respectivas soluções.

O segundo exemplo de mudança de quadro é apresentado na resolução do seguinte problema: dado um segmento AB, obter um ponto C pertencente ao segmento AB tal que o quadrado construído sobre o lado AC seja equivalente ao retângulo de lados AB e BC. Embora o problema esteja enunciado no quadro geométrico, o autor sugere a mudança para o quadro algébrico no qual encontramos ferramentas para resolvê-los.

Esses exemplos nos fazem perceber a total possibilidade de interação entre as estruturas constitutivas dos pensamentos algébrico e geométrico. Dificilmente esse tipo de mudança é favorecida pelo livro didático, principal recurso utilizado pelo professor como orientação da sua prática pedagógica. Dessa forma não têm acesso a esse tipo de atividade, que possibilita mudanças de quadros.

Percebemos, nesse momento, a total coerência com dois itens citados pelos professores na nona questão, relativa às principais dificuldades encontradas para trabalhar a interação. Metade dos oito professores 50,0% indicou como principal dificuldade a inadequação do livro didático e um professor 12,5% declarou não ter o conhecimento suficiente para fundamentar a interação.

4.2 - Relativos ao teste diagnóstico

Aplicamos a dois professores, que lecionam Álgebra e Geometria na 8ª série do ensino fundamental, um teste diagnóstico em dois momentos distintos. Na primeira aplicação, os professores foram solicitados a resolver as questões apresentadas. Após a digitalização dos resultados fizemos uma montagem das questões, que foram reapresentadas aos professores; nessa versão, constavam as soluções desenvolvidas na primeira aplicação. Na segunda etapa, o teste foi reaplicado com a seguinte orientação:

Prezado professor, Suponha que as soluções por você desenvolvidas no teste diagnóstico foram apresentadas aos seus alunos de 8ª série e que eles não a compreenderam. Que outra abordagem você daria às referidas questões, na tentativa de proporcionar uma melhor compreensão? Obrigada por dedicar seu tempo e interesse em responder às questões. Cordialmente, Mércia Pontes

O teste diagnóstico objetivava não a avaliação dos professores, mas verificar em que *quadro*[23] a resolução seria apresentada. Na segunda aplicação, os professores poderiam adotar três procedimentos: fazer a *mudança de quadro;* desenvolver uma outra resolução no mesmo quadro ou usar o mesmo tipo de representação, nas duas resoluções.

O instrumento era composto de sete questões descritas, anteriormente, no item *instrumentos de investigação* integrante do terceiro capítulo que trata dos aspectos metodológicos. Das sete questões, seis foram apresentadas no quadro geométrico e uma no quadro algébrico. Das seis questões apresentadas no quadro geométrico, duas (2ª e 7ª questões) possuíam indicação no enunciado de utilização de recursos do quadro algébrico e as outras quatro (1ª, 3ª, 4ª e 5ª questões) não faziam nenhuma indicação de resolução.

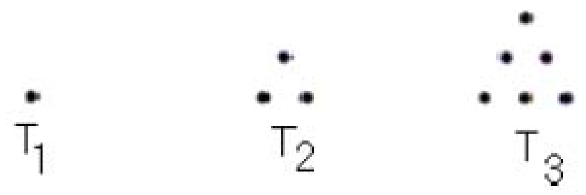
Nesse item, apresentamos a análise das resoluções desenvolvidas por apenas um dos professores, pois não tivemos retorno do outro participante desta etapa da pesquisa.

A primeira questão é parte integrante de uma sugestão de aula elaborada por Perez; Almeida (2005) com o objetivo de dar significado às expressões algébricas através de uma seqüência de números poligonais.

[23] Essa análise está baseada na teoria de Douady.

Figura 3 – 1ª questão do teste diagnóstico

Desenhe a 7ª figura da seqüência e diga quantas bolinhas tem.



Quantas bolinhas tem na 2000ª figura (T_{2000})?

Fonte: Perez; Almeida (2005)

Na primeira resolução, o professor escreveu as quantidades correspondentes aos números T_4, T_5 e T_6 a partir da observação de que T_4 era igual à soma dos quatro primeiros números naturais; T_5 era igual à soma dos cinco primeiros números naturais e, assim, sucessivamente. Concluiu então que T_n era igual à soma dos n primeiros números naturais. Portanto, para indicar a quantidade de bolinhas da figura $T_{2000,}$ somou os 2000 primeiros números naturais, usando como recurso a soma de um par de termos eqüidistantes multiplicada pelo número de vezes que os pares de termos eqüidistantes aparecem (soma dos termos de uma progressão aritmética - P.A).

Na reaplicação do teste, o professor usou a idéia de que cada um dos números é formado pelo anterior acrescido do valor correspondente ao seu índice, ou seja, $t_2 = t_1 + 2$; $t_3 = t_2 + 3$; $t_4 = t_3 + 4$ e, em seguida, generalizou essa observação escrevendo $t_n = t_{n-1} + n$. Calculou $T_{1998,}$ usando o mesmo recurso da resolução da primeira aplicação e a partir dele, calculou T_{1999} e T_{2000}.

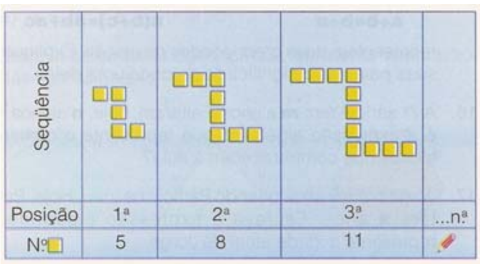
Comparando as duas resoluções apresentadas para essa questão, observamos que o professor, na primeira, usou fórmulas aritméticas e esboçou de modo muito discreto a generalização dos termos dessa seqüência. Na segunda, partiu também de uma fórmula aritmética que o levou a uma fórmula algébrica

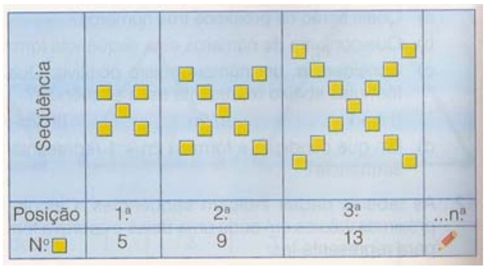
($t_n = t_{n-1} + n$), mesmo que esta não seja uma fórmula muito eficiente. Concluímos que o professor transitou pelos mesmos quadros, pois, certamente, estava preocupado em registrar de forma mais elaborada a segunda resolução. Nos registros, identificamos a utilização apenas de linguagens aritmética e algébrica. Consideramos que o professor poderia ter feito uso de outras linguagens, tais como: linguagem natural e figuras geométricas. Contudo, percebemos como aspecto positivo: houve a conversão do registro geométrico para a linguagem aritmética e desta para a linguagem algébrica, embora essa última pudesse ter sido feita de forma mais elaborada.

A segunda questão, assim com a primeira, parte de registros geométricos, tendo por objetivo, a elaboração de uma generalização que possibilita o cálculo da quantidade de quadrinhos das figuras pertencentes às seqüências, qualquer que seja a sua posição. A utilização de linguagem algébrica é sugerida no próprio enunciado, que solicita a escrita de uma fórmula.

Figura 4 – 2ª questão do teste diagnóstico

Encontre em cada seqüência a fórmula que permite calcular a quantidade de quadrinhos das figuras em qualquer posição.

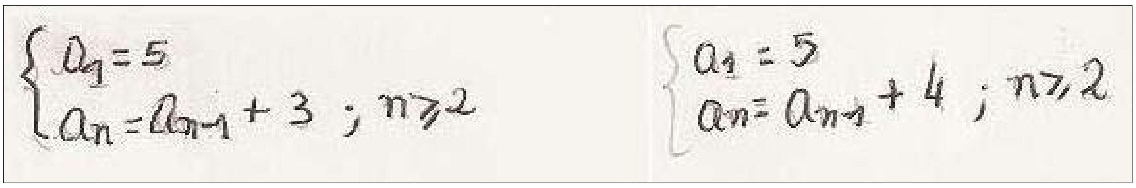




Fonte: Isolani, (1999, p. 73-74)

Na primeira resolução, o professor apresenta uma fórmula para o cálculo das quantidades de quadrinhos, partindo da segunda posição na qual é utilizada a quantidade de quadrinhos da figura anterior, conforme Figura 5, o que demonstra a não praticidade dessa generalização.

Figura 5 – 1ª resolução da 2ª questão



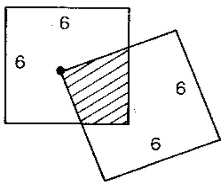
Fonte: Pesquisa direta

O professor passou do registro geométrico para a linguagem algébrica sem a utilização da linguagem aritmética. Na reaplicação do teste, houve uma pequena diferença no registro, o que não interfere na compreensão da resolução pelos dos alunos. A indicação do termo, a partir do qual a generalização é válida, foi feita como n ≥ 2, na primeira resolução, e na segunda, passou a ser expressa por n > 1 e apareceu a informação do conjunto dos números naturais como conjunto universo. Nessa segunda resolução, o professor escreve na linguagem natural o que está representado na fórmula. Portanto, as duas resoluções foram apresentadas dentro do mesmo quadro.

A terceira questão apresentada na Figura 6 faz parte de uma coletânea[24] de 38 questões criativas sugeridos por Milauskas (1994) para desenvolver a capacidade de solucionar criativamente problemas de Geometria.

Figura 6 – 3ª questão do teste diagnóstico

Dois quadrados congruentes de 6 cm x 6 cm sobrepõem-se, conforme mostra a figura. Um vértice de um dos quadrados está no centro do outro quadrado. Qual é o maior valor possível da área hachurada? (O primeiro quadrado é móvel, mantendo-se fixo apenas o vértice que está no centro do outro, conforme mostra a figura).

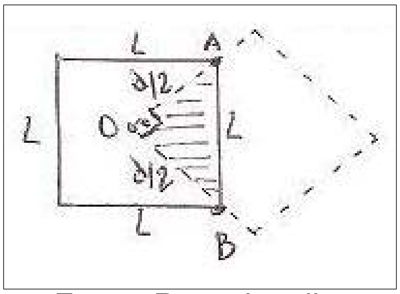


Fonte: Milauskas (1994, p. 92)

[24] Essa coletânea está presente no *texto Problemas de geometria criativos podem levar à resolução criativa de problemas criativos* (MILAUKAS, 1994)

Na primeira resolução apresentada, o professor executou um deslocamento no primeiro quadrado, conforme Figura 7, de forma que, a área hachurada corresponda ao triângulo retângulo cuja hipotenusa seja o lado do quadrado e os catetos, a metade das diagonais. Considerando $d = l\sqrt{2}$, calculou a área do triângulo retângulo como $A = \frac{(cat.).(cat)}{2}$.

Figura 7 – Figura apresentada na 1ª resolução da 3ª questão do teste diagnóstico

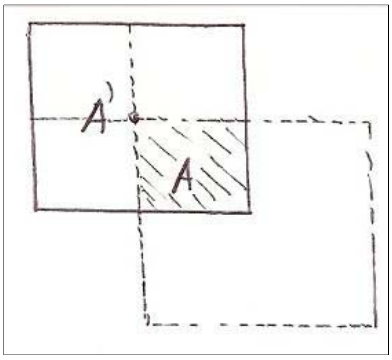


Fonte: Pesquisa direta

O deslocamento foi feito para possibilitar o uso da fórmula da área do triângulo (relações entre grandezas). A aplicação dessa estratégia caracteriza a utilização de estruturas do pensamento algébrico.

Na reaplicação, o deslocamento foi feito de forma que a área hachurada cobrisse a quarta parte do quadrado, como vemos na Figura 8.

Figura 8 – Figura apresentada na 2ª resolução da 3ª questão do teste diagnóstico



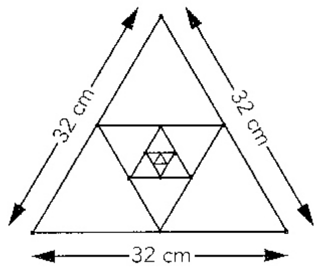
Fonte: Pesquisa direta

Calculou a área do quadrado e, em seguida, a sua quarta parte. Observamos a permanência no quadro geométrico. Mesmo não tendo ocorrido a mudança de quadro, a estratégia utilizada proporcionou a comparação entre as áreas dos quadrados com o estabelecimento de relação entre eles. A descoberta dessa relação mantém-se constante entre o quadrado e a área hachurada, qualquer que seja a deslocamento feito.

A quarta questão apresenta quatro triângulos inscritos em um triângulo eqüilátero com os vértices apoiados nos pontos médios dos lados do triângulo anterior.

Figura 9 – 4ª questão do teste diagnóstico

Calcule a medida de cada lado do menor triângulo da figura, considerando que os vértices estão sempre nos pontos médios dos lados.



Fonte: Dante (2003, p. 126)

A resolução elaborada pelo professor manteve-se no mesmo quadro no qual a questão foi apresentada, aquela que usou registros na linguagem natural para justificar a indicação da seqüência formada pelas medidas dos lados dos triângulos. Como o triângulo inicial é eqüilátero e os vértices do primeiro triângulo inscrito estão apoiados nos pontos médios dos seus lados, “[...] cada triângulo está tendo o seu lado reduzido à metade, temos que 32 será dividido por 2, deduzindo assim que o lado do 2º triângulo (interior) será igual a 16” (P4, Teste diagnóstico, 2006, p. 3). Escreveu logo após a seqüência das medidas dos lados dos triângulos inscritos (16, 8, 4, 2), identificando o valor 2 como a medida dos lados do menor dos triângulos. Em nenhum momento, o professor recorreu a procedimentos algébricos. Observamos, além do registro na linguagem natural, a utilização de registros na linguagem aritmética. No entanto, não apresentou outra solução para esta questão na reaplicação do teste diagnóstico.

A questão seguinte apresentava este enunciado: “mostre a relação existente entre a medida do lado e o perímetro de um quadrado, e entre a medida do lado e a área da região quadrada”, adaptado de Dante (2003, p. 245-246).

Na primeira resolução, o professor apresentou as relações de forma bem direta. O perímetro do quadrado é a soma dos seus quatro lados, portanto, o lado do quadrado é a quarta parte do perímetro, considerando que, por definição, o quadrado é um quadrilátero que possui quatro ângulos retos e quatro lados congruentes. Partindo da relação entre as grandezas existentes na fórmula da área do quadrado, apresentou que se $A = l^2$, então $l = \sqrt{A}$.

Na resolução dessa questão na reaplicação do teste, o professor utilizou várias relações entre os elementos envolvidos, tornando-a longa e relativamente complicada para alunos de 8ª série. Partiu da aplicação do teorema de Pitágoras e percorreu passos até chegar à relação entre o lado e a área do quadrado. O professor preocupou-se mais em apresentar uma solução diferente, do que se fazer entender pelos alunos, conforme foi solicitado no início desta versão do teste diagnóstico usado para a reaplicação. As duas soluções permaneceram no quadro algébrico, portanto, foram utilizados apenas registros algébricos.

Consideramos necessário registrar que em Dante (2003) a solução sugerida transita pelos quadros geométricos, algébrico e numérico, portanto usa o sistema cartesiano como suporte. O LD leva a essa abordagem, quando, inicialmente, sugere a construção de tabelas que relacionem a medida do lado e o perímetro, a medida do lado e a área e, no segundo momento, apresenta o plano cartesiano para a construção do gráfico representativo das duas relações.

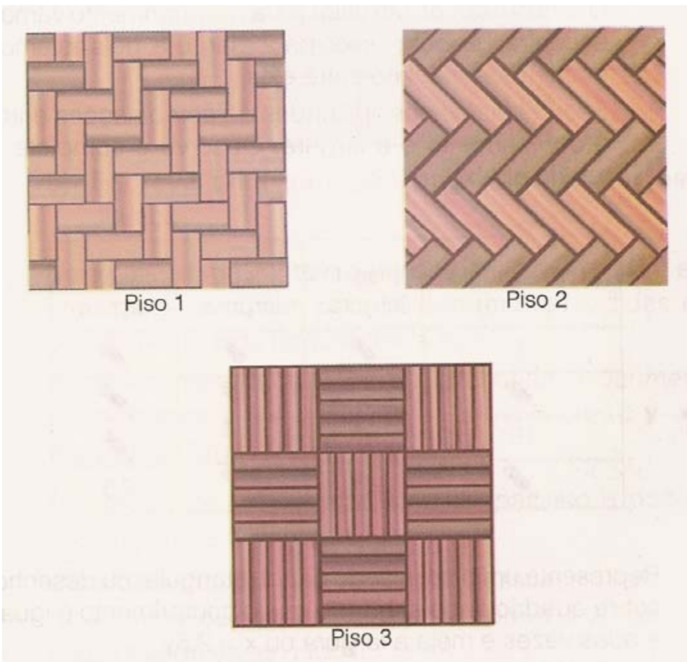
A sexta questão, adaptada de Dante (2005), pede que seja determinado o valor de n para que $4x^2 - 8x + n$ seja um trinômio quadrado perfeito. Essa questão foi a única apresentada em um quadro algébrico.

Em geral, os livros didáticos utilizam uma mudança do quadro algébrico para o quadro geométrico nesse tipo de atividade. No entanto, o professor, nas suas duas resoluções, manteve-se no quadro algébrico. Na primeira resolução, parte da afirmação de que todo quadrado perfeito é da forma $(kx - p)^2$ e manipula a utilização de propriedades abstratas, que o leva a um simbolismo extremado. Na segunda resolução, o professor não ultrapassou os limites do quadro algébrico, embora tenha conseguido proporcionar uma abordagem mais leve.

Temos na Figura 10, a apresentação da última questão que compunha o teste diagnóstico.

Figura 10 – 7ª questão do teste diagnóstico

Observe os pisos apresentados a seguir. Todos eles formam mosaicos compostos de tacos retangulares de madeira. Escreva em linguagem algébrica a relação existente em cada piso.



Fonte: Isolani (1999, p. 220)

A última questão propôs que a relação existente em cada um dos pisos representados geometricamente fosse escrita em linguagem algébrica. Trata-se de uma questão apresentada no quadro geométrico, na qual o professor deveria fazer a mudança para o quadro algébrico. A única variação identificada entre as duas resoluções do professor foi a troca da ordem das dimensões dos mosaicos retangulares e a utilização de outras letras para representar tais dimensões. Na primeira, foi usada a ordem **x** em função de **y**, sendo **x**, comprimento e **y**, largura do taco. Na segunda, a ordem usada foi **T** em função de **T'**, onde **T** indicava a largura e **T'** o comprimento do taco. Concluímos que, nas duas versões, foram apresentadas exatamente a mesma resolução. Em nenhum momento, foi utilizado recurso algébrico diferente entre as resoluções.

4.3 – Relativos aos cadernos das alunas e às atividades

Inicialmente apresentamos os resultados da análise dos cadernos das alunas A1 e A2 e, em seguida, os resultados das atividades. Os cadernos foram recolhidos no final do ano letivo de 2006. A aluna A1 disponibilizou apenas o caderno utilizado no segundo semestre enquanto a aluna A2 entregou os seus registros do ano todo.

Os registros contidos no caderno de A1 referentes à Álgebra, correspondem aos capítulos 4, 5 e 6, nos quais não localizamos o estabelecimento de nenhuma relação com a Geometria. Esse fato está coerente com a apresentação do conteúdo no livro didático que, nesses três capítulos, promove apenas abordagem algébrica dos conteúdos em uma perspectiva simbólica. Nesses três capítulos, são trabalhados algoritmos, regras e fórmulas sem indício de significado. Esse procedimento é próprio da abordagem tradicional da Matemática que provoca o desestímulo do aluno, pois favorece unicamente à memorização.

Nos registros feitos pela aluna A1, identificamos a seguinte organização: as apresentações dos conteúdos de Álgebra são sempre iguais, pois começa com a indicação do conteúdo a ser trabalhado, seguido de uma breve definição, quando possível, e uma série de exemplos; logo após essas apresentações, segue a exercitação repetitiva desse conteúdo através da resolução das questões propostas no LD. Nesse tópico, houve uma diminuta utilização de elementos geométricos em quatro exercícios que tratavam de área e perímetro. Apesar do uso de recursos geométricos no trabalho com a Álgebra, essa utilização era feita para a simples aplicação de fórmulas, o que caracterizava a não utilização das estruturas do pensamento geométrico em benefício do ensino da Álgebra.

A pesquisa de Pontes (1996) identificou a categoria exercitação ao observar o trabalho de dois professores de Matemática atuantes na 5ª e 6ª séries[25] do ensino fundamental em uma escola pública municipal. A investigação abordava o conteúdo de medidas e proporcionalidade. Tal fato mostra ser essa uma prática recorrente nas aulas de Matemática nas diversas séries desse nível de ensino, nos vários conteúdos.

No caderno da aluna A2, encontramos os registros dos conteúdos de Álgebra trabalhados ao longo do ano letivo, seguindo a mesma organização observada no caderno de A1. Esses registros contemplam todo o conteúdo de Álgebra trabalhado no ano letivo, no entanto, localizamos a utilização de elementos geométricos em apenas 6 momentos, que tratavam do cálculo de área e perímetro. Nesses momentos, era dado o mesmo tratamento, anteriormente observado no caderno de A1.

Pela análise dos registros das alunas pudemos observar a ausência de modelos geométricos na apresentação dos conteúdos de Álgebra. Inferimos, então, que apesar do LD usar amplamente esse recurso, o professor não o valoriza, o que reduz o trabalho com Álgebra à mera aplicação de técnicas e procedimentos.

Nos registros referentes à Geometria encontramos situações diferenciadas. No caderno da aluna A1, identificamos apenas resolução de exercícios dos seguintes temas: soma dos ângulos internos de um polígono, comprimento de circunferência, número de diagonais de um polígono, posições relativas de duas circunferências. Ressaltamos que não encontramos nenhum registro de conteúdo teórico, o que pode ser um indicativo de descuido relativo às

[25] Denominação de acordo com a Lei Nº 5692-71.

circunstâncias do processo de aprendizagem e/ou de dificuldades de transcrever representações geométricas.

No caderno da aluna A2, encontramos um maior volume de resolução de exercícios referentes aos seguintes tópicos: soma dos ângulos internos de um polígono, números de diagonais de um polígono, ângulos complementares e suplementares, quadriláteros, área e perímetro, posição relativa de reta em relação à circunferência. Identificamos também registros teóricos, mesmo que em diminuta quantidade.

Para complementar esta análise fazemos aqui alguns comentários decorrentes da nossa ação docente[26]. A aluna identificada sob o código A1 tem um melhor desempenho em sala de aula e apresenta rendimento escolar muito acima da média sem grandes variações. No entanto, nos seus cadernos, os registros teóricos referentes à Álgebra são satisfatórios, mas os de Geometria são inexistentes. A aluna identificada sob código A2 apresenta um rendimento escolar muito próximo à média exigida pela escola para aprovação, com constantes oscilações. Apesar disso, os registros feitos em seu caderno são detalhados e mais completos.

Inferimos que os diminutos registros teóricos referentes à Geometria, encontrados nos cadernos das alunas, podem ser uma conseqüência das inúmeras atividades desenvolvidas pelo professor de Geometria na forma de estudo dirigido.

Passamos a seguir a apresentar os resultados da análise das atividades que são constituídas pelos estudos dirigidos e pelas avaliações.

A coleta das atividades se deu no final do ano letivo de 2006 junto às duas alunas intencionalmente selecionadas para a pesquisa. Elas arquivaram uma pequena quantidade de atividades, por isso recorremos aos professores, que colocaram à nossa disposição um farto material para análise. Coletamos 24 atividades de Geometria e 17 de Álgebra. Essas atividades estão distribuídas por bimestres conforme Tabela 6.

[26] Estes comentários analíticos referentes ao desempenho das alunas A1 e A2 têm como base observações feitas em sala de aula, pois elas são nossas alunas no ano letivo em curso, 2007.

Tabela 6 – Atividades coletadas

	Estudos dirigidos		Avaliações	
	Álgebra	**Geometria**	**Álgebra**	**Geometria**
1º	2	6	3	6
2º	1	1	5	2
3º	1	6	3	1
4º	1	---	1	2
Total	5	13	12	11

Fonte: Pesquisa direta

Pela análise dos dados apresentados nesta tabela, percebemos que a quantidade de estudos dirigidos utilizados pelo professor de Geometria é consideravelmente maior do que a usada pelo professor de Álgebra. Dessa forma, fica justificada a pequena quantidade de registros teóricos observada nos cadernos das alunas, pois uma parte considerável do conteúdo teórico foi ministrado em forma de estudo dirigido. No 4º bimestre, os estudos dirigidos, também foram utilizados pelo professor, mas não foram disponibilizados para a pesquisa por questões técnicas. Um equilíbrio acontece em relação à quantidade de avaliações coletadas.

Nas atividades de Álgebra, identificamos 6 questões que abordavam área e 4 que envolviam perímetro. Nessas questões, as formas geométricas adotadas eram apenas ilustrativas, pois seu objetivo era a utilização dos algoritmos da adição e da multiplicação de polinômios. Uma questão chamou a nossa atenção por solicitar a utilização de papel quadriculado, no qual os alunos deveriam, através de desenho das peças da réplica do material dourado, verificar se os números apresentados eram quadrados perfeitos. Essa questão destacou-se por sair do padrão das demais.

Nas atividades de Geometria, localizamos 5 questões referentes aos sólidos geométricos, nas quais eram abordados os seguintes conhecimentos: número de vértices, arestas e faces, cálculo de área total e de volume. Esse fato destacou-se, pois esses conteúdos não estavam apresentados no LD[27] , nem no

[27] O LD apresenta apenas uma questão (p. 185) na qual o autor define aresta e em seguida pergunta quantas arestas têm dois sólidos que ilustram a questão. Nenhuma questão que explorasse número de vértices, de face, área total e volume de sólidos foi localizada. O LD aborda vértice apenas em relação à figuras planas.

roteiro programático[28]. Volume de sólidos parece apenas em alguns exercícios, como será indicado na análise do LD e na sessão *Explorando* (p.58-59). O trabalho com figuras sólidas desempenha uma função importante no aprendizado do aluno. No item 4.1, relativo à análise da quarta questão, que tratava do conteúdo mínimo de Geometria para o ensino fundamental, apresentamos as justificativas para o uso de figuras sólidas.

Identificamos 10 questões nas quais eram utilizadas malhas quadriculadas como recurso para desenhar triângulos e quadriláteros de acordo com as medidas e as condições indicadas.

As atividades de Geometria exploram apenas duas das concepções sobre a Álgebra apresentadas por Usiskin (1994): a Álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas; a Álgebra como estudo de relações entre grandezas.

A interação entre domínios, que leva a produção de conhecimentos, defendida por Douady, não foi identificada em nenhuma das atividades analisadas.

4.4 - Relativos ao livro didático

O Livro Didático - LD usado pelos professores é parte da Coleção A Conquista da Matemática: A + Nova, cujos autores são Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr., publicada pela Editora FTD. No relatório de avaliação do Programa Nacional do Livro Didático - PNLD 2005, encontramos uma avaliação positiva da obra em apreço: “[...] destaca a diversidade de enfoques no estudo de alguns temas e a presença de demonstrações” como pontos fortes da obra, “por estimularem o método dedutivo e o desenvolvimento do raciocínio matemático” (PNLD 2005, p. 9).

[28] No item 4.5. desse capítulo, referente à análise dos roteiros programáticos, está registrado a observação feita na análise, de que os roteiros programáticos correspondem à transcrição, quase que total, do sumário do LD.

O volume em questão é o terceiro, equivalente à atual 8ª série do ensino fundamental, que aborda conteúdos relativos aos campos algébricos e geométricos, sendo, nesse último, explorada apenas a Geometria Plana.

A abordagem é feita dentro da concepção de currículo linear, que é muito questionada nas pesquisas recentes. Esta concepção se expressa pela intenção de esgotar um assunto em uma única série, em contraposição à concepção de currículo em rede proposta por Machado (1995). Nessa mesma linha de pensamento, encontramos em Pires (2000, p. 7):

> Enfim, o que desejamos é discutir caminhos por meio dos quais possamos romper com a organização linear, tão dominante ainda, mesmo nas propostas mais recentes, buscando a construção de currículos inspirados na idéia de rede e dando ao planejamento de um curso de Matemática um novo significado, o que pressupõe novas formas de elaboração.

O LD em estudo constitui-se de 12 capítulos com os seguintes títulos: **Os números reais; Introdução ao cálculo algébrico; Estudo dos polinômios; Estudo das frações algébricas; Equações de 1º grau com uma incógnita; Sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas**; **Geometria; Ângulos formados por duas retas paralelas com uma transversal; Polígonos; Estudando os triângulos; Estudando os quadriláteros e Estudando a circunferência e o círculo**.

Os capítulos são constituídos por unidades, tópicos e seções. Cada unidade abrange um determinado aspecto do conteúdo de ensino e está subdividido em tópicos. Além disso, em diversos capítulos encontram-se seções com títulos sugestivos tais como: **Agora é com vocês; Exercícios; Troque idéias com colegas; Explorando; Retomando o que aprendeu**. Essas seções destinadas à fixação da aprendizagem, em geral, levam à interação entre os campos algébrico e geométrico.

Os 6 primeiros capítulos constituem a primeira parte do livro e destinam-se á Álgebra e os 6 últimos constituem a segunda parte e contemplam o estudo de Geometria.

Nas 5 unidades do primeiro capítulo - **Os números reais** - visualizamos as seguintes relações entre Álgebra e Geometria: a representação de um terreno cuja área é de 1024 m^2 (p. 10); a representação de um número quadrado perfeito, usando as formas geométricas compostas pelas peças do Material Dourado[29] (p. 12); atividade “explorando Geometria” (p. 13); uso de figuras geométricas e de papel quadriculado em exercícios de representação de números quadrados perfeitos (p. 17); medição do comprimento de superfícies cilíndricas com diâmetros diferentes para o cálculo do valor do π (p. 24).

Nas 4 unidades do segundo capítulo - **Introdução ao cálculo algébrico** - percebemos as seguintes relações entre os campos algébrico e geométrico: relação entre o perímetro e a área do quadrado com expressões algébricas (p.35); expressão algébrica para representação do perímetro de uma piscina retangular (p. 36); expressão algébrica para representação da enésima figura de uma seqüência de figuras geométricas (p. 36 e 37); expressão algébrica para representação da área total de um terreno cujo desenho está expresso em uma figura geométrica (p. 37); exercício para representação de expressões algébricas do perímetro de figuras geométricas dadas (p. 38); exercício para representação da expressão algébrica da área de uma figura geométrica dada (p. 38); dado o desenho de uma forma geométrica e a expressão algébrica, cujas medidas dos lados estão representadas por letras, é feita a solicitação do cálculo do valor numérico, quando as medidas dos valores das letras se alteram (p. 41).

Nas 5 unidades do terceiro capítulo – **Estudo dos polinômios** - observamos as seguintes interações entre Álgebra e Geometria: relação entre as figuras do triângulo eqüilátero e do quadrado e as expressões algébricas, que representam, respectivamente, o perímetro e a área (p. 48); relação entre área de um retângulo em que são dadas em letras as medidas do comprimento e da largura; apresentação do monômio que a representa e estabelecimento da relação entre volume de um cubo em que é dada a medida da aresta do cubo unitário e o monômio que representa o seu volume total (p. 50); desenho de 2 retângulos contíguos em que são dadas as medidas em expressões literais dos seus

[29] Material criado pela educadora médica italiana Maria Montessori (1870 - 1952).

comprimento e largura, estabelecimento da relação com a expressão algébrica que representa a área dos dois retângulos (p. 52); relação entre a área total dos degraus de uma escada e a forma geométrica representada pela sua lateral, em que são dadas as medidas dos degraus (p. 53); relação entre o volume de uma figura geométrica espacial (paralelepípedo) e a expressão algébrica que representa o seu volume (p. 56, 76 e 77); relação entre as representações geométricas de vários sólidos e os monômios que expressam seus volumes (p. 58 e 59); desenho de um quadrado cujos lados são representados pela expressão *a+b* e relacionamento da área com a expressão polinomial equivalente (p. 65 e 74); desenho de uma figura com 3 retângulos de lados *a* e *x* e 2 quadrados de lado *x* justapostos, para relacionar a área com a expressão polinomial equivalente (p. 67); desenho de uma seqüência de figuras de polígonos regulares com 3, 4, 5 e 6 lados, todos eles medindo *x*, para relacionar a cada figura a expressão algébrica de seu perímetro em função de *x* (p. 69); desenho de um quadrilátero de lados medindo $3x+\frac{1}{2}a$, $3x+a$, $3x+a$ e $4x+\frac{2}{3}a$ para relacionar o perímetro com sua expressão polinomial (p. 71); desenho de 2 retângulos consecutivos de comprimento ***2x*** e ***y*** e de altura ***x***, para representar a expressão polinomial da sua área (p.72); a explicação dos produtos notáveis: quadrado da soma, quadrado da diferença, produto da soma pela sua diferença e cubo da soma são todos expressos, pelo relacionamento da Álgebra com a Geometria (p. 84 a 88); apresentação dos casos de fatoração de polinômios: fator comum, fatoração por agrupamento, fatoração da diferença de dois quadrados, fatoração do trinômio quadrado perfeito para explicar e relacionar Álgebra e Geometria (p. 95 a 107).

Ressaltamos que no quarto capítulo – **Estudo das frações algébricas** - (p. 112 a 131), no quinto - **Equações de 1º grau com uma incógnita -** (p. 132 a 149) e no sexto - **Sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas –** (p. 150 a 173) o estudo algébrico é representado de modo teórico, sem a relação entre expressões algébricas e figuras geométricas, havendo, portanto, ênfase no algebrismo. Isto poderia ter sido evitado por meio da analogia da resolução de equações com a simulação do uso da balança de 2 pratos, conforme sugere Castro-Filho (s.d.).

Enfocamos agora a parte do livro referente à Geometria.

Nas 3 unidades do sétimo capítulo – **Geometria** (p. 174 a 199) - a interação entre a Álgebra e a Geometria só aparece no final do capítulo, nos exercícios, quando são calculadas em graus as medidas dos ângulos. Nesses exercícios, são dadas figuras geométricas e expressões algébricas das medidas dos ângulos (p. 192 e 198);

Nas 4 unidades do oitavo capítulo - **Ângulos formados por duas retas paralelas com uma transversal** (p.200 a 215) - após a apresentação do conteúdo, sucedem-se listas de exercícios, nos quais são dadas figuras geométricas e expressões algébricas das medidas dos ângulos para calculá-los (p. 204, 206, 208 e 210 a 215).

Nas 5 unidades do nono capítulo - **Polígonos** (p. 216 a 243) -encontramos a seguinte estruturação: nas 5 unidades que tratam de polígonos, a interação entre os campos algébrico e geométrico só aparece no terceiro deles, que relaciona o polígono e suas diagonais com a fórmula para calcular o número de diagonais. Para chegar a ela, foi feito o percurso em que a observação do número de diagonais que sai do vértice dos polígonos: triângulo, quadrilátero, pentágono e hexágono possibilitou a generalização do número de diagonais de um polígono qualquer (p. 226). Novamente a interação entre os dois campos aparece quando vão ser resolvidos os exercícios para o cálculo da medida dos ângulos internos de um triângulo, em que são dadas as figuras e as expressões algébricas dos seus ângulos (p. 230, 232). Na unidade, **soma das medidas dos ângulos internos de um polígono qualquer** - o autor usa a mesma estratégia para determinação das diagonais de um polígono e parte da observação do número de triângulos que são obtidos em decorrência das diagonais traçadas a partir de cada vértice. E, assim, chega por indução à generalização da fórmula $S_i = (n-2).180^o$ (p. 234). Vemos que houve uma interação entre os campos algébricos e geométricos para chegar à fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono qualquer. Para a determinação da **soma das medidas dos ângulos externos** (S_e) - **de um polígono qualquer** os autores partem da observação de que um ângulo externo somado a um interno resulta em 180^o, e chega à fórmula $S_e = 360^o$ (p. 236 e 237). Nos exercícios do final da seção, aparecem atividades em que é dada a representação de polígonos cujos ângulos são indicados por expressões algébricas para obtenção de seus valores em graus (p. 243).

Nas 7 unidades do décimo capítulo – **Estudando os triângulos** (p. 244 a 275) – é tratada a condição de existência de um triângulo, ou seja, que o *lado maior deve ser menor que a soma dos outros dois*, estabelece a relação com inequação ao apresentar exercícios (p. 248). Novamente a interação entre os dois campos analisados torna-se evidente ao estabelecer: 1. relação entre as medidas de um ângulo interno e o externo adjacente; 2. relação entre as medidas de um ângulo externo e dos dois ângulos internos não-adjacentes e 3. relação de desigualdade entre lados e ângulos de um triângulo (p. 250 a 252). A interação volta a ocorrer quando trata dos casos de congruência de triângulos (p. 266 a 271); nas propriedades do triângulo isósceles e do triângulo eqüilátero (p. 271 a 274) e nos exercícios do final da seção (p. 275).

Nas 3 unidades do décimo primeiro capítulo – **Estudando quadriláteros –** (p. 276 a 293), a interação entre Álgebra e Geometria é recorrente ao tratar da soma dos ângulos internos de um quadrilátero. Os exercícios são apresentados através das figuras geométricas e da representação por meio de expressão algébrica, ora dos lados da figura para determinação do perímetro, ora dos ângulos para determinação da medida em graus dos seus ângulos (p. 279 e 280). Nas unidades relativas aos **paralelogramos**: retângulo, losango e quadrado e aos **trapézios**, a sistemática de interação é idêntica à da unidade anterior (p. 282, 284 e 285) e nos exercícios do final da seção (p. 289 – 290 e 292 – 293).

Nas 7 unidades do décimo segundo capítulo – **Estudando a circunferência e o círculo –** (p. 294 a 321), a apresentação dos exercícios referentes às posições relativas entre uma reta e a circunferência, contém a interação entre Álgebra e Geometria. Além disso, são apresentadas a figura geométrica para a determinação do perímetro do quadrilátero, as expressões algébricas representativas dos seus lados (p. 303) e a medida de um lado do triângulo, pois dada parte da medida dos outros dois e o ponto de tangência de uma circunferência nele inscrita (p. 304). Na unidade - **arco de circunferência e ângulo**

central - também ocorre a interação entre os campos em análise, quando são apresentadas circunferências e ângulos centrais cujo lado oposto a ele é desconhecido (p. 310). O mesmo ocorre, quando é apresentado o ângulo inscrito (p. 314 - 316) e também nos exercícios (p. 314 – 316). Tratamento igual é dado ao apresentar exercícios da unidade denominada - **ângulos cujos vértices não pertencem à circunferência -** (p. 317 – 320).

Nos capítulos referentes ao ensino da Álgebra, encontramos as interações entre os 2 campos estudados de modo recorrente e efetivo, pois os aspectos teóricos são devidamente explicitados e embasam as atividades (exercícios) que serão executadas pelos alunos. As ilustrações apresentam forma e cor que possibilitam um bom grau de visualização e, assim, contribuem para o desenvolvimento do raciocínio do aluno, portanto, são adequadas e coerentes ao processo de ensino e da aprendizagem deste conteúdo. O estudo da Álgebra parte da representação figurativa para a representação algébrica, o que consideramos como um aspecto positivo deste LD.

Nos capítulos referentes ao ensino da Geometria, o processo de interação ocorre de modo correto e adequado, contudo com menor intensidade, estando restrito aos exercícios. As ilustrações são relativas à explicação do conteúdo de Geometria e contribuem para contextualizar do ensino, no entanto, não encaminham para a interação entre os campos algébrico e geométrico, o que significa uma limitação do livro em foco.

O conteúdo do LD possibilita, em geral, a interação entre a Álgebra e a Geometria nos aspectos teóricos e práticos, embora algumas vezes apresente atividade que sugerem apenas a mudança de domínios e não a efetiva interação entre domínios defendida por Douady. No entanto, os professores pesquisados[30] não conseguiram perceber essa característica uma vez que declararam como principal obstáculo à interação a inadequação do livro adotado.

---

[30] Eles afirmam que fazem a interação entre os dois campos, apesar de o LD não facilitar tal procedimento.

4.5 – Relativos aos roteiros programáticos

A análise dos roteiros programáticos de Álgebra e Geometria nos possibilitou perceber que estes correspondem a uma transcrição de todos os capítulos e quase todas as unidades apresentados no sumário.

A organização e distribuição dos conteúdos seguem rigorosamente a ordem apresentada no sumário. Porém duas unidades não foram transcritas nos roteiros programáticos: uma relativa à Álgebra, a unidade denominada "Uma consideração importante", na qual são apresentadas expressões algébricas que não representam número real para determinadas situações; e a outra relativa à Geometria, a denominada "Introdução", na qual são apresentados os conceitos intuitivos – ponto, reta e plano.

A escola utiliza a separação dos dois ramos da Matemática que são ministrados por professores diferentes, tornando possível que os dois roteiros de ensino sejam cumpridos simultaneamente. Esta foi a única quebra que percebemos nos roteiros programáticos em relação à distribuição apresentada no sumário.

Por acompanhar fielmente o proposto no livro didático, os roteiros programáticos ficam impregnados pela linearidade presente no livro adotado, e comentada no item anterior, referente à análise do livro didático. A linearidade presente na obra fica evidente, inicialmente, pela sucessão de conteúdos que devem ser trabalhados, seguindo a ordem indicada, o que sugere a existência de pré-requisitos. Criticar a linearidade não quer dizer que qualquer ordem de etapas a ser cumprida deve ser abandonada. Segundo Pires (2000, p. 68)

> [...] embora admitindo-se que existam etapas necessárias a serem cumpridas antes de se iniciar outras e que há que se escolher, enfim, um certo percurso, não se justifica o condicionamento tão forte que em geral é observado nos programas.

Ao fazer um estudo comparativo entre os conteúdos trabalhados, bimestre a bimestre pelos dois professores, observamos que praticamente não existe oportunidade de construção conjunta de conceitos pertencentes a esses dois ramos da Matemática. Contudo, o trabalho pode ser feito na perspectiva de mobilização de conhecimentos antigos, disponibilizados anteriormente, para dar início ao cumprimento das sete fases presentes na dialética-ferramenta-objeto proposta por Douady, que favorece a produção de novos conhecimentos. Podemos ainda, utilizar tais conhecimentos para proporcionar a interação entre esses dois domínios.

De acordo com essa perspectiva teórica, a abordagem dada pelo professor aos conhecimentos matemáticos e às atividades desenvolvidas em sala tem a possibilidade de promover a transposição das barreiras provocadas pela linearidade da organização curricular.

A nossa intenção de propor a interação entre o ensino da Álgebra e Geometria vem na mesma perspectiva de trabalhos feito anteriormente por outros pesquisadores tais como Maranhão e Mercadante (2006). Baseada na experiência vivenciada pela Escola Vera Cruz[31] de São Paulo, defendem a criação de um ambiente propício à interação não só entre os ramos da Matemática, mas de todas as áreas presentes na realidade escolar e desta com as demais áreas do conhecimento. Para tanto, faz-se necessária o envolvimento de toda a estrutura organizacional na busca por essa interação. Concluímos que esta nossa pesquisa está também respaldada pelo trabalho acima citado.

[31] Essa experiência está relatada em Maranhão; Mercadante (2006) que apresentam o projeto de Integração de Áreas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

No desenvolvimento de uma pesquisa, surgem hesitações, problemas e, também, múltiplas aprendizagens. Neste momento de apresentar os resultados, damos destaque às aprendizagens decorrentes dos estudos teóricos e das atividades de investigação.

No processo de construção da fundamentação teórica, tivemos oportunidade de:

- aprofundar os aspectos científicos da Matemática;
- sistematizar os conteúdos de Álgebra e Geometria;
- entender a pesquisa como indispensável para a ação docente;
- compreender que o pensamento abstrato se desenvolve e se fortalece com base no estudo da realidade;
- perceber a necessidade de o aluno ser ativo e colaborativo;
- dimensionar o fenômeno educativo em suas relações teórico-práticas.

No decorrer das atividades investigativas, surgiram hesitações e incertezas que tornaram os procedimentos metodológicos em um longo e tortuoso caminho. No entanto, fortalecemos a nossa postura de que o ensino da Matemática pode ser desenvolvido na abrangência da Educação Matemática, que postula uma integração do ensino à realidade do aluno e do professor.

Nessa perspectiva, reafirmamos, que o interesse em trabalhar com a interação entre Álgebra e Geometria surgiu da necessidade se sistematizar as observações do desempenho dos alunos ao longo da nossa ação como professora de Matemática, quando ficava patente a dissociação dessas duas áreas do conhecimento. Em uma pesquisa anterior, constatamos esse fato, pois os alunos perguntavam: “isso é Álgebra ou Geometria?” (PONTES; 2002).

Com base nos dados e informações obtidos em todo o processo de investigação, ressaltamos os seguintes aspectos:

- a interação existente entre os professores e alunos pesquisados facilitou o desenvolvimento deste trabalho e fortaleceu nossa capacidade de pesquisa;
- os professores pesquisados têm interesse em promover a interação entre a Álgebra e a Geometria, no entanto, falta-lhes um maior domínio desses campos do conhecimento;
- os professores pesquisados não conseguem identificar, no livro didático, as atividades nas quais ocorrem a interação entre Álgebra e Geometria;
- os alunos apresentam rendimento satisfatório, mas não julgam necessário o desenvolvimento do conhecimento científico;
- a necessidade de acompanhar o roteiro proposto pelo livro didático impõe a linearidade ao processo de ensino, que passa a exigir a adoção de pré-requisitos;
- a Álgebra e a Geometria são ministrados por professores diferentes, portanto, estes conteúdos são ministrados de modo paralelo, o que não favorece a sua interação;
- a interação entre domínios, que implementa a produção de conhecimentos, não foi encontrada entre as atividades desenvolvidas nos estudos dirigidos.

A interação dessas áreas pode contribuir para o fortalecimento da descentralização, ou seja, levar o aluno a ultrapassar os limites dos seus conhecimentos e de suas experiências e, assim, compreender algo a partir de um ponto de vista diferente do seu. Dessa forma, poderá tornar o aluno capaz de coordenar diversas opiniões e chegar a uma conclusão. Além disso, a interação do conteúdo de ensino de Álgebra e Geometria favorece o desenvolvimento da linguagem, da criatividade e do raciocínio dedutivo com base em situações contextualizadas. Deverá acontecer, também, a diminuição dos bloqueios apresentados pelos alunos, que se sentirão mais capacitados para aprender Matemática, desfazendo-se o mito de que só aprendem Matemática pessoas muito inteligentes.

Com este trabalho, tivemos a intenção de oferecer ao aluno a possibilidade de assumir uma postura ativa e colaborativa, o que irá contribuir para a melhoria dos processos de ensino e de aprendizagem. Esperamos, portanto, ter possibilitado o surgimento ou fortalecimento da postura científica do alunado e do corpo docente.

REFERÊNCIAS

ALVES-MAZZOTTI, A. J. **Itinerários de pesquisa**: abordagens qualitativas em sociologia da educação. Rio de Janeiro: DP&A Editora, 2003.

ARAÚJO, J. de L.; BORBA, M. de C. Construindo pesquisas coletivamente em Educação Matemática. In: ARAÚJO, J. de L.; BORBA, M. de C. **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2004. (Coleção Tendências em Educação Matemática) p. 25-45.

ARAÚJO, J. Argumentos, Linguagens e Procedimentos em Tarefas de Geometria. **Boletim GEPEM**, 2003, n. 43, p. 79-96.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em Educação**. Portugal: Porto Editora, LDA, 1994.

BONGIOVANNI, V. **Utilizando resultados de pesquisas sobre o ensino e aprendizagem em geometria**. São Paulo: PROEM, 2006.

BOOTH, L. R. As dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. **As idéias da álgebra**. São Paulo, Atual, 1994, p. 23-37.

BORBA, M. C.; MENEGHETTI, R. C. G.; HERMINI, H. A. Modelagem, calculadora gráfica e interdisciplinaridade na sala de aula de um curso de Ciências Biológicas. **Revista em Educação Matemática**. Ano 5, n. 3, 1997, p. 63-70.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais*: matemática.*** Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CARRAHER, D. W. & SCHLIEMANN, A. D. Álgebra na feira. In: CARRAHER, T.; CARRAHER, D. W. & SCHLIMANN, A. D. **Na Vida Dez na Escola Zero**. São Paulo: Cortez, 1988.

CASTRO-FILHO, J. A. de. **Balança interativa:** um ambiente para auxiliar o progresso das operações aritméticas para a álgebra. FACED/UFC [s.d.].

CASTRO, M. R. Educação Algébrica e a Resolução de Problemas: a Proposta de Interatividade do Salto Para o Futuro. **Boletim GEPEM**, 2003, n. 42, p. 11-25.

CHALOUH, L.; HERSCOVICS, N. Ensinando expressões algébricas de maneira significativa. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. **As idéias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1994, p. 37-48.

CORTEZ, A.; KAVAFISN, N. and VERGNAUD, G. From arithmetic to algebra: Negotiating a jump in the learning process. **Proceeding of the fourteenth International Conference on the Psychology of Mathematics Education**, 1990, p. 27-34, Mexico.

CROWLEY, M. L. O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico. In: LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. (Org.). **Aprendendo e ensinando geometria**. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994, p. 1-20.

CRUSIUS, M. F. Disciplina: uma das polêmicas do construtivismo. **Espaço Pedagógico**. Passo Fundo: UPF, 1994, 1(1), p. 168-172.

DAMM, R. F. Registros de Representações. In: MACHADO, S. D. A. **Educação Matemática: uma introdução**. São Paulo: EDUC, 1999, p. 135-153.

D´AMBROSIO, U. **Educação Matemática : da teoria à prática**. Campinas: Papirus, 1996.

__________. Prefácio. In: **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2004. (Coleção Tendências em Educação Matemática) p. 11-23.

DANTE, L. R. **Tudo é matemática**. São Paulo: Ática, v. 3, 2003.

DANTE, L. R. **Tudo é matemática**. 2 edição, 1 impressão. São Paulo: Ática, v. 3, 2005.

DIAS, A. L. B. Resolução de problemas. In: **Matemática** – Caderno de teoria e prática 1. Fundo de Fortalecimento da Escola - FUNDESCOLA. Programa Gestão da Aprendizagem Escolar – GESTAR II. Brasília: MEC, 2005, p. 46 – 54.

DUVAL, R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**. Strasbourg: IREM, v. 5, p. 37-65, 1993.

FALCÃO, J. T. R. Alfabetização Algébrica nas Séries Iniciais. Como Começar? In: **Boletim GEPEM**, 2003, n. 42, p. 27-36.

FIORENTINI, Dario. Alguns modos de ver e conceber o ensino de Matemática no Brasil. CEMPEM/UNICAMP: **ZETETIKÉ**. V. III, n.4, nov. 1995, p. 1-37.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A . Contribuição para um repensar a educação algébrica elementar. **Pro-Posições,** v. 4. n.1 [10], mar 1993 p.78-91.

GADOTTI, M. **História das idéias pedagógicas**. São Paulo: Ática, 1993.

GIOVANNI, J. R.; CASTRUCCI, B.;GIOVANNI JÚNIOR, J. R. **A conquista da matemática: a + nova**. São Paulo: FTD, 2002.

ISOLANI, C. M. M. et al. **Matemática e interação**. v. 3. Curitiba: Módulo, 1999.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.

MACHADO, N. J. **Epistemologia e Didática**: as concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente. São Paulo: Cortez, 1995.

MARANHÃO, M. C. S. de A. Dialética-ferramenta-objeto. In: MACHADO, S. D. A. **Educação Matemática: uma introdução**. São Paulo: EDUC, 1999, p. 115-134.

MARANHÃO, C.; MERCADANTE, S. G. (Org.). **Sala de aula**: um espaço de pesquisa em Matemática. São Paulo: Vera Cruz, 2006.

MEIRA, L. Significados e Modelagem na Atividade Algébrica. **Boletim GEPEM**, 2003, n. 42, p. 37-45.

MIGUEL, A.; FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. Álgebra ou geometria: para onde pende o pêndulo? **Pro-posições**, v. 3, n. 1[7], mar. 1992, p. 39-54.

MILAUSKAS, George A. Problemas de geometria criativos podem levar à resolução criativa de problemas criativos. In: LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. (Org.). **Aprendendo e ensinando geometria**. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994, p. 86-106.

MIORIM, M. A.; MIGUEL, A.; FIORENTINI, D. Ressonâncias e dissonâncias do movimento pendular entre álgebra e geometria no currículo escolar brasileiro. **ZETETIKÉ,** v.1, n. 1, mar. 1993, p. 19-39.

OLIVEIRA, A. A. Deficiência de argumentação dos alunos – reflexo da formação do professor? In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 7, **Anais**, Rio de Janeiro, 2001. 1 CD-ROM.

ONUCHIC, L. de la R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através de Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. de C. **Educação Matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, 2004. p. 213-231.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática**: uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2001. (Coleção Tendências em Educação Matemática)

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e conseqüências. **Zetetiké**, v. 1, n. 1, mar./ 1993. ISSN 0104-4877, p. 7-17.

PEREZ, E. P. Z; ALMEIDA, M. M. M. A construção do Pensamento Algébrico usando como recurso os números poligonais. **Anais XVIII ERPM**. Maio/2005.

PIRES, C. M. C. **Currículos de Matemática:** da Organização Linear à Idéia de Rede. São Paulo: FTD, 2000.

PIRES, C. M. C.; CURI, E.; CAMPOS, T. M. M. **Espaço & Forma:** a construção de noções geométricas pelas crianças das quatro séries iniciais do Ensino Fundamental. São Paulo: PROEM, 2000.

PIRES, C. M. C.; CAMPOS, T. M. M. **Utilizando resultados de pesquisas sobre o ensino e aprendizagem de números e funções**. São Paulo: PROEM, 2006.

POHL. V. Visualizando o espaço tridimensional pela construção de poliedros. In: LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. (Org.). **Aprendendo e ensinando geometria**. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994, p. 178-190.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. 1 Reimp. Tradução: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1986

PONTES, M. de O. **Laboratório de Matemática: um recurso para a aprendizagem da matemática**. Monografia do Curso de Especialização em Ensino de Matemática. UECE, 2002.

PONTES, M. G. de O. **Medidas e proporcionalidade na escola e no mundo do trabalho**. Tese de Doutorado em Educação. FE-DEME- UNICAMP. 1996. Campinas, 1996.

QUEIROZ, Maria Isaura P. de. **Variações sobre a técnica de gravador no registro da informação viva.** São Paulo: T. A. Queiroz, 1991.

ROXO, E. **A matemática na educação secundária.** São Paulo: Nacional, Série: atualidades pedagógicas, série 3, v. 25, 1937.

SANTOS, B. de S. **Um Discurso sobre as Ciências.** 6. ed. Porto: Afrontamento, 1993.

SOLÉ, I.; COLL, C. Os professores e a concepção construtivista. In: SOLÉ, I.; COLL, C. **O Construtivismo na Sala de Aula.** São Paulo: Ática, 1996.

SZYMANSKI, H. (org). **A Entrevista na Pesquisa em Educação:** a prática reflexiva. Brasília: Liber Livro Editora, 2004.

TULL, D. S.; HAWKINS, D. I. **Marketing Research, Meaning, Measurement and Method**. Macmillan Publishing Co., Inc., London, 1976.

USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. **As idéias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1994, p. 9-22.

YIN, R.K. **Estudo de caso**: planejamento e método. Porto Alegre: Bookman, 2001.

http://www.fnde.gov.br/home/livro_didatico

ANEXOS

ANEXO I: QUESTIONÁRIO APLICADO AOS PROFESSORES

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ

Centro de Educação – CED

Curso Mestrado Acadêmico em Educação - CMAE

N° DE IDENTIFICAÇÃO: ______

Pesquisa "As possibilidades de integração entre a Álgebra e a Geometria na 7ª série do Ensino Fundamental"

Prezado(a) professor(a),

pedimos a colaboração no preenchimento deste instrumento que é parte integrante de uma pesquisa que visa fundamentar a dissertação do Curso Mestrado Acadêmico em Educação (CMAE) da Universidade Estadual do Ceará. Nosso objetivo é conhecer a concepção dos professores que atuam no segundo segmento do Ensino Fundamental e no Ensino Médio sobre as possibilidades de integração entre Álgebra e Geometria.

Solicitamos, por gentileza, o completo preenchimento deste questionário, atentando para:

- Não há respostas certas ou erradas.
- As informações serão trabalhadas em conjunto objetivando contribuir para o aperfeiçoamento da formação docente.
- O anonimato dos sujeitos da pesquisa é garantido pela pesquisadora.

Obrigada por ter dedicado seu tempo e interesse em responder as perguntas.

Cordialmente,

Mércia Pontes

DADOS PESSOAIS:

Sexo: ( ) masculino ( ) feminino

Idade: ________ anos

Tempo de serviço em sala de aula: ________ anos

Tempo de serviço nesta instituição: ________ anos

Série(s) em que leciona: ____

Turno(s): ( ) manhã ( ) tarde

FORMAÇÃO DOCENTE:

Qual seu nível de formação? (pode marcar mais de uma opção)

( ) Ensino Médio - Ano de conclusão: _________ Instituição: ______________________________

( ) Curso Normal - Ano de conclusão: _________ Instituição: ______________________________

( ) Graduação (licenciatura) Ano de conclusão: _________ Instituição: _______________

Qual curso? ____

( ) Graduação (bacharelado) Ano de conclusão: _________ Instituição: _______________

Qual curso? ____

( ) Pós-Graduação *Lato Sensu* Instituição: ____

Qual curso? ____

Situação do curso: ( ) concluído Ano de conclusão: _______________

( ) em andamento

( ) Outros cursos ____

01. Quais as contribuições que os pensamentos algébrico e geométrico trazem para o desenvolvimento do aluno?

02. Na sua opinião, qual o conteúdo mínimo de Álgebra é necessário ao Ensino Fundamental?

03. Quais os benefícios que esse conteúdo mínimo de Álgebra poderá trazer para o aluno?

04. E de Geometria?

05. Quais os benefícios que esse conteúdo mínimo de Geometria poderá trazer para o aluno?

06. Na sua prática docente você trabalha com a perspectiva de integração entre a Álgebra e a Geometria? ( ) sim ( ) não

07. Caso você não trabalhe com essa perspectiva, justifique:

08. Em caso afirmativo, de que maneira você trabalha essa integração?

(pode marcar mais de uma opção)

Através da:

( ) Apresentação do conteúdo

( ) Apresentação dos exemplos

( ) Resolução de exercícios

( ) Textos ou atividades complementares

09. Quais as principais dificuldades que você encontra para trabalhar essa integração?

10. Quais os conteúdos de Álgebra podem ser integrados à Geometria?

11. Quais os conteúdos de Geometria podem ser integrados à Álgebra?

ANEXO II: TESTE DIAGNÓSTICO

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ

Centro de Educação - CED

Curso Mestrado Acadêmico em Educação - CMAE

N° DE IDENTIFICAÇÃO: ______

Pesquisa "As possibilidades de interação entre as estruturas algébricas e geométricas na 8ª série do Ensino Fundamental"

Prezado professor,

pedimos a colaboração na resolução das questões deste instrumento que é parte integrante de uma pesquisa que visa fundamentar a dissertação do Curso Mestrado Acadêmico em Educação (CMAE) da Universidade Estadual do Ceará. Nosso objetivo é conhecer a concepção dos professores que atuam na 8ª série do Ensino Fundamental sobre as possibilidades de interação entre as estruturas algébricas e geométricas.

Solicitamos, por gentileza, a resolução de todas as questões, atentando para os seguintes aspectos:

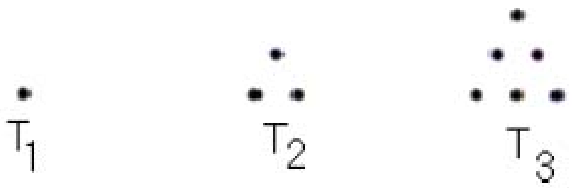
- O instrumento objetiva a identificação de abordagens na resolução das questões.
- O anonimato dos sujeitos da pesquisa é garantido pela pesquisadora.

Obrigada por dedicar seu tempo e interesse em responder às questões.

Cordialmente,

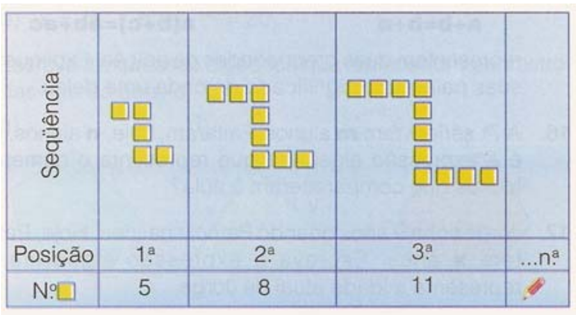
Mércia Pontes

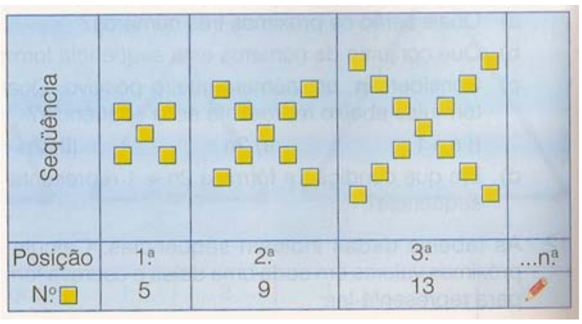
01. Desenhe a 7ª figura da seqüência e diga quantas bolinhas tem.



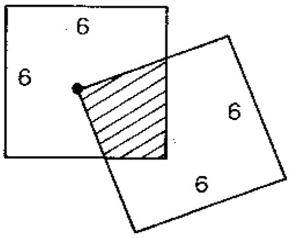
Quantas bolinhas tem na 2000ª figura (T_{2000})?

02. Encontre em cada seqüência a fórmula que permite calcular a quantidade de quadrinhos das figuras em qualquer posição.

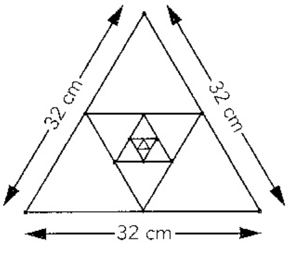




03. Dois quadrados congruentes de 6 cm x 6 cm sobrepõem-se, conforme mostra a figura. Um vértice de um dos quadrados está no centro do outro quadrado. Qual é o maior valor possível da área hachurada? (O primeiro quadrado é móvel, mantendo-se fixo apenas o vértice que está no centro do outro, conforme mostra a figura.)



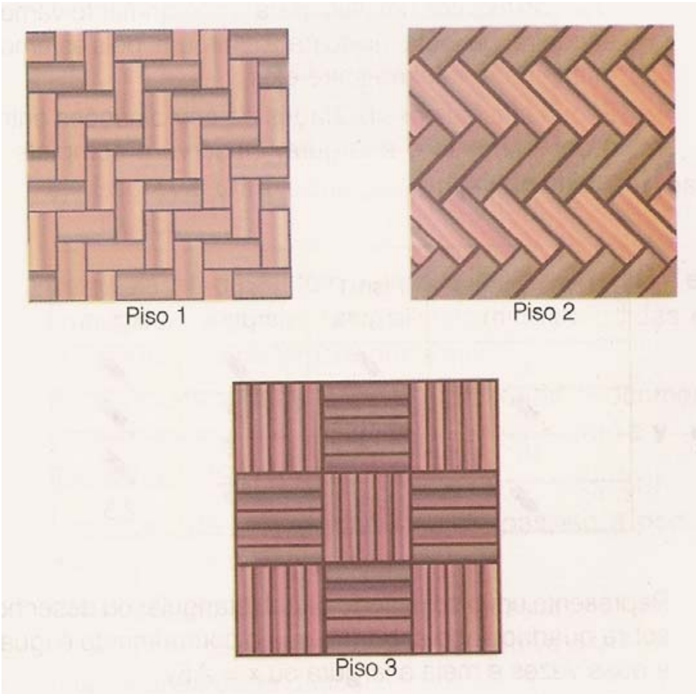
04. Calcule a medida de cada lado do menor triângulo da figura, considerando que os vértices estão sempre nos pontos médios dos lados.



05. Mostre a relação existente entre a medida do lado e o perímetro de um quadrado, e entre a medida do lado e a área da região quadrada.

06. Determine o valor de n para que $4x^2 - 8x + n$ seja um trinômio quadrado perfeito.

07. Observe os pisos apresentados a seguir. Todos eles formam mosaicos compostos de tacos retangulares de madeira. Escreva em linguagem algébrica a relação existente em cada piso.



Piso 1 Piso 2

Piso 3

ANEXO III: ROTEIROS PROGRAMÁTICOS

MATEMÁTICA – GEOMETRIA

I. OBJETIVOS

- Desenvolver no educando a habilidade de estabelecer relações, interpretar, analisar, estimar possíveis soluções e decidir que procedimentos utilizar para resolver situações-problema em contextos numéricos, geométricos e métricos.
- Favorecer e desenvolvimento da autonomia nas resoluções das atividades.
- Valorizar o trabalho coletivo em sala de aula.

II. CONTEÚDO

1º BIMESTRE

Geometria

- A reta
- Ângulos

Ângulos formados por duas retas paralelas com uma transversal

- Retas paralelas e reta transversal
- Ângulos correspondentes
- Ângulos alternos
- Ângulos colaterais

Polígonos

- O polígono e seus elementos
- Perímetro de um polígono
- Diagonais de um polígono

2º BIMESTRE

Polígonos

- Ângulos de um polígono convexo
- Ângulos de um polígono regular

Triângulos

- Elementos de um triângulo
- Condição de existência de um triângulo
- Os ângulos no triângulo
- Classificação dos ângulos
- Altura, mediana e bissetriz de um triângulo
- Congruência de triângulos
- Propriedades do triângulo isósceles e do triângulo eqüilátero

3º BIMESTRE

Quadriláteros

- Os quadriláteros e seus elementos
- Os paralelogramos
- Os trapézios

4º BIMESTRE

Circunferência e círculo

- A circunferência
- O círculo
- Uma reta e uma circunferência: posições relativas
- Posições relativa de duas circunferência
- Arco de circunferência e ângulo central
- Ângulo inscrito
- Ângulo cujos vértices não pertencem à circunferência

MATEMÁTICA – ÁLGEBRA

1º BIMESTRE

Os números reais

- Raiz quadrada exata de um número racional
- Raiz quadrada aproximada de um número racional
- Os números racionais e sua representação decimal
- Os números irracionais
- Os números reais

Introdução ao cálculo algébrico

- O uso de letras para representar números
- Expressões algébricas
- Valor numérico de uma expressão algébrica

Polinômios

- Monômio ou termo algébrico
- Polinômios

2º BIMESTRE

Polinômios

- Os produtos notáveis
- Fatorando polinômios
- Cálculo do mmc de polinômios

3º BIMESTRE

Frações algébricas

- Frações algébricas
- Simplificação de frações algébricas
- Adição e subtração de frações algébricas
- Multiplicação e divisão de frações algébricas

Equações do 1º grau com uma incógnita

- Equação do 1º grau com uma incógnita
- Equação fracionária de 1º grau com uma incógnita

4º BIMESTRE

Equações do 1º grau com uma incógnita

- Equações literais de 1º grau na incógnita x

Sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas

- Equações do 1º grau com duas incógnitas
- Sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas
- Resoluções de sistemas de duas equações de 1º grau com duas incógnitas