UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ

Luciana de Lima

A APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DO CONCEITO DE FUNÇÃO NA FORMAÇÃO INICIAL DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Fortaleza – Ceará

2008

Universidade Estadual do Ceará

Luciana de Lima

A APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DO CONCEITO DE FUNÇÃO NA FORMAÇÃO INICIAL DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Educação da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de mestre em Educação. Área de Concentração em Formação de Professores.

Orientadora: Profa. Dra. Maria Gilvanise de Oliveira Pontes

Fortaleza – Ceará

2008

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ

Curso de Mestrado Acadêmico em Educação

TÍTULO DO TRABALHO: A APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DO CONCEITO DE FUNÇÃO NA FORMAÇÃO INICIAL DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

AUTORA: Luciana de Lima

Defesa em: 24 / 03 / 2008 Nota obtida: 10,0

Banca Examinadora

Profa. Dra. Maria Gilvanise de Oliveira Pontes (Presidente)

Centro de Educação/CED/UECE

Prof. Dr. José Aires de Castro Filho (Avaliador Externo)

Depto. de Fundamentos da Educação/FACED/UFC

Rogéria Gaudêncio do Rego

Profa. Dra. Rogéria Gaudêncio do Rego (Avaliador Externo)

Depto. de Matemática/CCEN/UFPB

Prof. Dr. Júlio Wilson Ribeiro (Suplente)

Depto. de Computação/UFC

A minha querida filha
Isabella, presente de Deus, luz dos
meus caminhos.

AGRADECIMENTOS

À minha orientadora, professora Dra.Maria Gilvanise de Oliveira Pontes, pela disponibilidade, acessibilidade e facilidade de comunicação.

Aos professores Dr. José Aires de Castro Filho, Dra. Rogéria Gaudêncio do Rêgo e Dr. Júlio Wilson Ribeiro por aceitarem compor a banca examinadora e contribuírem enormemente para a melhoria do trabalho.

À professora Dra. Rita de Cássia Barbosa Paiva Magalhães por ter contribuído, nas disciplinas e na qualificação, com colocações pertinentes para a pesquisa.

À professora Ms. Natália Barroso por auxiliar na leitura do texto, na escrita do trabalho e nas definições matemáticas.

Ao prof. Dr. Ronaldo Ramos pelo apoio e suporte técnicos.

Aos professores Ms. Aluísio Cabral de Lima e Luíza Pontello pelo auxílio e plena disponibilidade na aplicação inicial da pesquisa.

Ao professor Luciano Moura Cavalcante por permitir o desenvolvimento da pesquisa e ao professor José Maildo Nunes por auxiliar no desenvolvimento inicial das atividades na UECE.

Aos alunos voluntários do CEFETCE e da UECE que participaram ativamente da pesquisa e contribuíram de forma relevante para o desenvolvimento deste trabalho.

A todos os colegas do Curso de Mestrado em Educação da UECE, parceiros de momentos árduos e inesquecíveis.

Ao meu esposo João Andrade e à minha filha Isabella, pela compreensão, apoio e carinho. À minha mãe Mara Hilzete Lima pela força e pensamentos positivos de sempre.

RESUMO

A dissociação dos conteúdos disciplinares, a supervalorização da aprendizagem dos procedimentos em detrimento da aprendizagem dos conceitos e o pouco aprofundamento no estudo de conhecimentos voltados para a educação básica são problemas que contribuem para uma formação inicial inadequada do professor de matemática. O estudo do conceito de função, mesmo sendo considerado pelos estudiosos da área como um conceito de extrema importância pela sua vasta utilização em situações da vida cotidiana e científica, ainda é um conceito pouco estudado na formação docente. Tanto alunos quanto professores apresentam dificuldade em conceituar esse saber matemático e utilizá-lo adequadamente. A proposta do presente trabalho é descrever como os licenciandos em matemática da UECE ressignificam o conceito de função diante de uma aprendizagem significativa baseada nos pressupostos teóricos de Ausubel. A pesquisa realizada entre maio e outubro de 2007, caracteriza-se como um Estudo de Caso. A metodologia utilizada se subdivide em duas etapas: Levantamento e Intervenção. Na 1ª etapa busca-se a compreensão dos conhecimentos prévios apresentados pelos alunos sobre o conceito de função e seus conceitos subjacentes com a aplicação de entrevistas e questionários. Na 2ª etapa são desenvolvidas 22 sessões com média de 67 minutos para cada intervenção, totalizando 11 semanas de trabalho. A meta para esta etapa é descrever como os alunos se estruturam mentalmente para ressignificar o conceito de função utilizando principalmente os conceitos teóricos de Dirichlet, século XIX, e de Lages Lima (1998). A estruturação desta etapa subdivide-se em três fases e se baseia nos Princípios Programáticos de Ausubel: Diferenciação Progressiva e Reconciliação Integradora, Organização Seqüencial e Consolidação. Na 1ª fase os alunos discutem além do conceito de função, os conceitos de equação, expressão algébrica, variável, incógnita, domínio, contradomínio e imagem. Na 2ª fase, desenvolvem mapas conceituais para organizar e relacionar o conceito de função a seus conceitos subjacentes. Na 3ª fase, aplicam o conceito de função em resoluções de problema. Dos quatro alunos que participam da pesquisa, apenas dois estão sendo analisados de forma interpretativa. A análise dos dados segue o princípio da Assimilação preconizada por Ausubel e utiliza como estratégia a triangulação de fonte de dados e a triangulação metodológica. Na etapa do Levantamento é possível perceber as dificuldades e contradições apresentadas pelos alunos ao definirem o conceito de função. Essas dificuldades se tornam ainda mais presentes na etapa da Intervenção, em especial, na relação entre os conceitos de função, contradomínio e imagem. A Diferenciação Progressiva e a Reconciliação Integradora são princípios que auxiliam no desenvolvimento da capacidade de questionamento e reflexão sobre o conceito de função e seus conceitos subjacentes. O desenvolvimento dos mapas conceituais contribui com maior detalhamento dessas relações previamente estabelecidas, por meio da organização hierárquica do conhecimento adquirido. O processo de ressignificação conceitual modifica os conceitos prévios dos alunos sobre o conceito de função sem a necessidade de memorização dos novos conceitos, estimula a reflexão e a análise de suas elaborações mentais, possibilitando um processo contínuo de auto-avaliação. Essas modificações também se refletem na visão pedagógica da pesquisadora que compreende a necessidade da valorização dos conhecimentos prévios dos alunos e do ensino de conceitos matemáticos.

Palavras-chave: educação matemática, conceito de função, aprendizagem significativa.

ABSTRACT

The disassociation of the educational content, the undue importance given to learning procedures, to the detriment of concepts, and the shallowness of studies focusing on basic education are problems which contribute to the inadequate training of math teachers. The study of the concept of function, even though considered by experts as being of great importance, due to its wide use in everyday situations and for scientific purposes, is as yet little used in forming teachers. Students and teachers have problems in this field of mathematical knowledge. This study's objective is to describe how UECE's math graduates understand the concept of function, in face of significant learning based on Ausubel's theoretical presuppositions. The research, undertaken from May, 2007 to October, 2007, is characterized as Case Study. The used methodology subdivides in 2 stages: Data Collection and Intervention. In the first stage, an understanding is sought of the students' prior knowledge regarding the concept of function and subjacent concepts, in interviews and questionnaires. In the second stage, 22 sessions are developed with average of 67 minutes for each intervention, totaling 11 weeks of work. The goal for this stage is to describe how the students are structured mentally to understand the concept of function, using Dirichlet's (19^{th} century) and Lages Lima's (1998) theoretical concepts. Their structuring is subdivided in three phases, based on Ausubel's programmatic principles: Progressive Differentiation and Integrating Reconciliation, Sequential Organization, and Consolidation. During the first phase the students discuss the concept of function, as well as the concepts of equation, algebraic expression, variation, unknown quantity, domain, counter-domain and image. During the second phase, conceptual maps are developed to organize and list the concept of function and the subjacent concepts. In the third phase the concept of function is applied to problem solving. Of the four students participating in the research, only two are being analyzed in an interpretative manner. The analysis of the data follows the principle of Assimilation proposed by Ausubel and it uses the strategies of data source triangulation and methodological triangulation. In the stage of the Data Collection it is possible to notice the difficulties and contradictions presented by the students to define the function concept. Those difficulties become still more presents in the stage of the Intervention, especially, in the relationship among the concept of function, counter-domain and image. The Progressive Differentiation and the Integrating Reconciliation are beginnings that aid in the development of the asking capacity and reflection on the concept of function and their subjacent concepts. The development of the conceptual maps contributes with larger comprehension of those relationships previously established, through the hierarchical organization of the acquired knowledge. The process of conceptual comprehension modifies the students' prior concepts of function without the need to memorize new concepts and stimulates reflection and the analysis of intellectual development, making possible a continuous process of self-evaluation. Those modifications are also reflected in the researcher's pedagogic vision that understands the need of the valorization of the students' previous knowledge and of the teaching of mathematical concepts.

Key Words: math education, concept of function, significant learning.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE SIGLAS

CEFETCE	-	Centro Federal de Educação Tecnológica do Ceará
CESAT	-	Centro de Ensino Superior Anísio Teixeira
FAPESP	-	Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo
FUNEDUCE	-	Fundação Educacional do Estado do Ceará
PCNEM	-	Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio
PUC/RJ	-	Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
PUC/SP	-	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
REDIN	-	Recursos Digitais Interativos
SIPEM	-	Simpósio de Pesquisa em Educação Matemática
UECE	-	Universidade Estadual do Ceará
UFPB	-	Universidade Federal da Paraíba
UFRGS	-	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UFRN	-	Universidade Federal do Rio Grande do Norte

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A formação da pesquisadora como professora de Matemática é do início da década de 90. Na época, a única distinção entre Licenciatura e Bacharelado estava nas disciplinas consideradas "humanas": Didática, Estrutura e Funcionamento do Ensino, Psicologia da Aprendizagem e do Desenvolvimento, Práticas de Ensino I e II, dos últimos semestres do curso de Licenciatura.

Obteve muitas informações sobre Matemática, outras sobre como o aluno aprende, como se deve ensinar, nenhuma de esclarecimento de como ensinar Matemática especificamente. Sua formação fica partida e polarizada. Ultrapassar o abismo que separa a Matemática da educação continua sendo uma busca pessoal.

Na experiência em sala de aula, percebeu que a aprendizagem da Matemática é um processo profundo e complexo. Saber Matemática não garante que, na relação ensino-aprendizagem, o aluno também compreenda e internalize os conteúdos. Verifica-se que a prática não acontece sem a teoria, e esta sem aquela.

Na busca da formação continuada, procura, com maior profundidade, encontrar elementos de explicação da formação de professores, de como ela acontece na história brasileira, e quais os elementos necessários à formação do professor de Matemática que aproximam os conteúdos matemáticos dos educacionais.

Autores dedicados ao estudo dessa formação contribuem com informações relevantes acerca dos problemas que enfrentam as instituições promotoras da formação docente.

Tardif (2002) revela que, na formação de professores, existe a preocupação com o ensino das teorias concebidas, sem nenhuma relação com o ensino nem com a realidade da vida cotidiana do ofício do professor. As disciplinas geralmente não se relacionam entre si. Constituem unidades independentes, fechadas e de curta duração, causando pouco impacto nos alunos.

Na maioria das instituições, os alunos passam grande parte da formação assistindo às aulas para, em seguida, estagiar e aplicar os conhecimentos. Só então começam a trabalhar sozinhos, aprendendo na prática e passam a constatar que os conhecimentos disciplinares lhes são pouco úteis.

Tardif (2002) conclui que o modelo de formação de professores, modelo aplicacionista do conhecimento, ao tratar os licenciandos como "espíritos virgens", sem considerar suas crenças e representações anteriores, acaba por não modificá-las. Forma profissionais despreparados para a atuação em sala de aula, proporcionando um ensino de baixa qualidade.

Na formação do professor de matemática, os problemas também se fazem presentes. Nos cursos de Licenciatura, até a década de 90, as disciplinas específicas são cursadas, nos três primeiros anos e as disciplinas pedagógicas ministradas nos últimos anos da graduação, seguida do estágio supervisionado. A dissociação entre Licenciatura e Bacharelado não é única, nestas, observa-se que as disciplinas são cursadas separadamente, sem interconexões entre conhecimentos algébricos, geométricos e aritméticos.

O ensino polarizado converge para o surgimento de novos problemas. Os procedimentos matemáticos são mais valorizados do que os conceitos que os embasam. O licenciando exerce o papel de aluno na maior parte das disciplinas, não desenvolvendo a habilidade de articular o papel de futuro professor. A formação do professor de Matemática ainda hoje não possibilita ao licenciando o desenvolvimento de profissional autônomo e capaz de articular o conhecimento específico ao pedagógico.

Paiva (2002) comprova a situação da formação inicial do professor de Matemática. O curso de Licenciatura privilegia as disciplinas específicas, ao desarticulá-las das disciplinas pedagógicas. Além disso, o ensino teórico dos conteúdos matemáticos e didático-pedagógicos é repassado de forma pronta, inquestionável. Conclui-se que o ensino não parte do conhecimento prévio dos alunos, nem considera relevantes as experiências profissionais que muitos já apresentam como professores.

Campos (2004) considera que a desarticulação entre os conhecimentos específicos e pedagógicos ainda continua um dos grandes problemas na formação do profissional. O fato é decorrente da visão que ainda se tem do professor de Matemática: um profissional que transmite oralmente conteúdos ordenados baseando-se no conteúdo de livros textos e outras fontes de informação.

Essa postura, segundo a autora, é decorrente da formação que envolve o processo que valoriza a atenção, memorização, fixação de conteúdos e o treino procedimental com atividades mecânicas e repetitivas. O licenciando vivencia situações em que o aluno é agente passivo e individual no processo de aprendizagem.

Cyrino (2006) defende que a formação está centrada no paradigma da racionalidade técnica herdada do positivismo. A atividade profissional é considerada instrumental e dirigida para a solução de problemas por meio de aplicação rigorosa de teorias e técnicas científicas. A relação entre teoria e prática, quando existe, não permite ao licenciando a oportunidade de questionar, investigar e refletir sobre o saber e o saber-fazer.

O conhecimento matemático é composto por uma variedade de postulados, teoremas, corolários e está intimamente relacionado à vida cotidiana. As dificuldades dos alunos na compreensão perpassam pelos conhecimentos específicos da Aritmética, Geometria e Álgebra. Também surgem na compreensão dos conceitos e dos procedimentos relacionados aos respectivos conhecimentos específicos.

Para Rêgo (2000) e Lopes (2003), o conceito de função é também um conhecimento de difícil compreensão, não só para os alunos da educação básica, mas também para os alunos da educação superior e professores. Por sua ampla utilização em diversas áreas do conhecimento e propiciação ao desenvolvimento de habilidades mentais relacionadas à Lógica e à Matemática, necessita ser pesquisado na formação docente.

Para Zuffi e Pacca (2000), a simples apresentação e formalização do conceito de função não são suficientes para ampliar o conhecimento dos licenciandos para além do que foi aprendido no Ensino Médio. Constatam que a linguagem matemática dos licenciandos está determinada muito mais pela cultura matemática escolar estabelecida do que pelos aspectos lógicos e formais com os quais têm contato no curso superior.

Regras e procedimentos da comunidade escolar e os livros didáticos apresentam destaque maior do que os significados matemáticos e sócio-culturais. Os problemas de aprendizagem do conceito de função, na formação inicial do professor de matemática, se tornam aparentes no momento do exercício do trabalho docente.

Os autores constatam que os professores pouco discutem as condições de domínio e a unicidade das imagens na definição de função e casos de não-funcionalidade. Apresentam ainda dificuldades em visualizar a inversão dos papéis de x e y, como variáveis dependente e independente comumente utilizadas. Os professores apresentam noções simplificadas do conceito de função matemática, introduzindo, na prática docente, “[...] um formalismo vazio, carente da maior parte dos significados que lhe caberiam” (ZUFFI; PACCA, 2002, p. 8).

Rossini (2006) afirma que geralmente os professores organizam a seqüência didática para o conceito de função de forma compartimentada, sem integração entre as diferentes tarefas, seguindo geralmente os livros didáticos. Desenvolvem poucas atividades sobre o conceito de variável. Para esta autora, os professores não incorporaram, nos discursos, o conceito de função vinculado ao de variação. Ao utilizarem números, os professores preferem trabalhar com números inteiros não negativos, evitando os números racionais e reais.

É necessário desenvolver pesquisas que busquem alternativas para sanar as dificuldades e tentar quebrar “o círculo vicioso” do aluno que não aprende o conceito porque o professor o desconhece com profundidade, pois, em toda a formação, não lhe foi possibilitada a oportunidade de também estudá-lo adequadamente. Tratar do ensino e aprendizagem do conceito de função, na formação inicial do professor de Matemática torna-se urgente.

Para autores[1] que estudam a formação de professores, reconstruir saberes específicos e incorporar novos saberes pedagógicos auxilia o professor a colocar em ação novas práticas.

Autores[2] que pesquisam a formação do professor de Matemática corroboram com esse pensamento e acrescentam que os saberes matemáticos devem se relacionar não só aos saberes pedagógicos, mas também, aos saberes históricos, filosóficos e epistemológicos.

A articulação das disciplinas matemáticas e educacionais deve acontecer diante da construção de conceitos matemáticos, de conhecimentos básicos que já dispõem, por meio do diálogo, da investigação, do questionamento e da reflexão. É fundamental que o professor desenvolva o hábito de duvidar, de pensar os fatos de diferentes formas.

Ao contemplar o estudo do conceito de função na formação do professor de matemática, possibilita-se o estudo da relação de diversos tópicos da Matemática, sobretudo aqueles estudados no Ensino Médio. A adequada compreensão do conceito de função, de acordo com os pesquisadores[3] da área, pode garantir ao licenciando um bom desenvolvimento acadêmico já que este conceito é um dos principais pré-requisitos para as disciplinas do Ensino Superior.

Pode auxiliar também no desenvolvimento de técnicas de modelagem da vida real e na compreensão de diferentes áreas do conhecimento: Economia, Química, Física, Biologia, inclusive outras áreas de conhecimento da própria Matemática. É fundamental que o licenciando perceba a importância do estudo desse conceito, sua concepção pessoal não só sobre o conhecimento, mas como o aprendeu na educação básica.

---

[1] Tardif (2002), Mizukami (2006)
[2] Ponte (1992), Garnica (1997), Paiva (2002), Faria (2006), Cyrino (2006)
[3] Rêgo (2000), Lopes (2003)

Contempla-se neste trabalho, a valorização dos conhecimentos prévios dos alunos sobre conhecimentos matemáticos e de aprendizagem de conceitos, conhecimentos que sustentam o desenvolvimento dos procedimentos, diante das motivações epistemológicas e históricas dos próprios matemáticos.

Descrever o processo mental do licenciando, ao tentar ressignificar o conceito de função existente em sua estrutura cognitiva, diante da aprendizagem conceitual reflexiva, é o desafio da pesquisa.

A teoria mais bem adequada às propostas de investigação deste trabalho é a Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel, Novak e Hanesian (1980). Além de valorizar a aprendizagem de conceitos, ela promove, na estrutura cognitiva do aluno, a generalização significativa do conhecimento como produto da atividade reflexiva. Permite ao aluno o domínio dos conceitos e proposições verbais pelas experiências prévias dos conhecimentos.

A Instituição utilizada para o desenvolvimento da pesquisa é a Universidade Estadual do Ceará. Desde a criação, na década de 70, apresenta características voltadas para a formação docente, em diferentes cursos científicos, entre eles, de Matemática.

Por se tratar de instituição de nível superior cearense, a investigação pode contribuir para a compreensão da formação atual do professor de Matemática, em Fortaleza, e por haver poucas pesquisas na área, com público específico.

As perguntas que emergem diante dos problemas e das justificativas apresentados são:

- quais são os conhecimentos prévios dos alunos sobre o conceito matemático de função?
- como os alunos se estruturam mentalmente para ressignificar o conceito de função?

O objetivo deste trabalho é descrever como os alunos do primeiro ano da Licenciatura em Matemática da UECE ressignificam o conceito matemático de função, diante de processo interventivo, baseado na Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel.

O que se pretende realizar especificamente é:

- avaliar os conhecimentos prévios dos alunos sobre os conceitos de função e seus conceitos subjacentes[4];

[4] Domínio, contradomínio, imagem, lei de formação, equação, expressão algébrica, variável e incógnita

- descrever como os alunos ressignificam o conceito de função e conceitos subjacentes com análise interpretativa baseada nas fases do princípio da Assimilação de Ausubel.

Os capítulos que compõem este trabalho são apresentados a seguir.

No capítulo 1 são apresentados os conceitos básicos sobre formação e formação inicial de professores, saber docente e aprendizagem do professor. A ênfase está nos aspectos básicos a serem considerados na formação docente: a valorização do conhecimento prévio do licenciando e a reflexão sobre o processo de aprendizagem.

No capítulo 2 é apresentado o contexto histórico da formação do professor de Matemática, discussão sobre os temas discutidos nas pesquisas nacionais e internacionais sobre os problemas da formação do professor de Matemática e a influência do saber matemático na concepção que os professores têm sobre este saber.

No capítulo 3 são apresentadas as dificuldades que matemáticos, professores e alunos enfrentam ao se deparar com o conceito de função e os conteúdos que precisam ser abordados sobre o conceito na formação do professor de Matemática.

No capítulo 4 apresenta-se o conceito de aprendizagem significativa de acordo com a Teoria de Ausubel, Novak e Hanesian (1980) e a Teoria dos Mapas Conceituais desenvolvidos por Novak (1976).

No capítulo 5 descreve-se a metodologia, os momentos iniciais da pesquisa, as entrevistas com o professor da disciplina de Fundamentos de Cálculo Diferencial e Integral I e os alunos voluntários, e os resultados dos questionários aplicados com os alunos.

No capítulo 6 são descritas algumas intervenções previamente selecionadas em três fases: assimilação, organização e aplicação do conceito de função baseadas nos Princípios Programáticos da teoria de Ausubel, Novak e Hanesian (1980).

1. A FORMAÇÃO DE PROFESSORES

O objetivo principal deste capítulo é apresentar as contribuições dos teóricos da área da formação de professores, dos saberes e da aprendizagem docente para esta pesquisa.

O conceito de formação é apresentado conforme as idéias de Charlot (2005), Lastória e Mizukami (2002) e Nunes (2002) diante da relação estreita entre saber e cultura. A formação inicial se desenvolve pelos conceitos preconizados por Mizukami (2006) relacionando-a com construção sistemática e contextualizada do ser professor e do saber ensinar.

De todos os conceitos que permeiam a formação de professores, dois são enfatizados nesse trabalho, pois estruturam e fundamentam a formação de professores: o conceito de saber e de aprendizagem docente.

São apresentadas as discussões sobre a relação entre formação e saber e as características do saber profissional docente de acordo com a visão de Tardif (2002) sobre o que define saber: a relação entre conhecimento, competência, habilidade e atitudes valorizados pelo meio social.

Na discussão dos saberes são destacados os trabalhos de Shulman (1986), de Guimarães (2005) que apresenta o trabalho de Gauthier (1998) e de Mizukami (2006) que divulga o trabalho de Darling-Hammond e Baratz-Snowden (2005). Este último traz maiores contribuições à pesquisa proposta ao valorizar a relação entre os conhecimentos prévios dos alunos e o novo conhecimento, e ao enfatizar a necessidade de o professor conhecer os conceitos do trabalho docente.

A aprendizagem docente é apresentada de acordo com os trabalhos de Nunes (2002) que contribui com as características dos aprendizes adultos e de Blanco (2003) e Mizukami (2006) que complementam suas idéias sobre a caracterização do ensino superior capaz de possibilitar aprendizagem adulta que considere características básicas no processo de aprendizagem docente.

1.1. O Conceito de Formação e a Formação Inicial de Professores

Charlot (2005) explica que, nos séculos XI e XII, o significado de formar era exatamente “dar forma”. No século XIX, a palavra toma um outro significado mais voltado para a formação profissional, ao caracterizar o universo da profissão. Na década de 1950, começa a caracterizar as capacidades específicas a partir da análise da função individual no trabalho.

Já na década de 1990, qualidades como transferibilidade, adaptação, flexibilidade da mente e das condutas são incorporadas ao conceito. Assim, o autor define que "formar alguém é torná-lo capaz de executar práticas pertinentes a uma dada situação" (CHARLOT, 2005, p. 90).

Acrescenta ainda que a lógica da formação se baseia na lógica das práticas contextualizadas e organizadas para atingir objetivos determinados, diante da situação imposta. Para o autor, formar professores é torná-los competentes para que possam gerir as tensões de sala de aula, construir as mediações entre práticas e saberes por meio da prática dos saberes e do saber das práticas.

Para Lastória e Mizukami (2002), a formação de professores é um processo complexo capaz de gerar conhecimentos durante a vida do professor, envolvendo diferentes tempos, comunidades de aprendizagens e experiências.

De acordo com Nunes (2002), a formação de professores é um processo que se inicia antes do exercício das atividades pedagógicas, prossegue ao longo da carreira e passa pela prática profissional.

Na perspectiva de Schön (1992), citado por Nunes (2002), essa formação deve conduzir, de forma crítica, ao aperfeiçoamento e enriquecimento da competência profissional diante da concepção de conhecimento com base na relação dialética entre teoria e prática.

Para este trabalho, a formação do professor é contemplada como um processo de desenvolvimento da consciência crítica da atuação profissional, diante do conhecimento que constrói sobre os conteúdos formais, matemáticos e pedagógicos, e humanos, sobre os alunos e sobre si mesmo, processo de construção da identidade profissional coletiva e individual que acontece a partir da formação inicial.

Aprender a ensinar acontece em diferentes momentos da vida do professor. Porém o momento, no qual a aprendizagem é sistematizada e focada em objetivos específicos, é a formação inicial.

Mizukami (2006, p. 216) define esta formação como "um momento formal em que processos de aprender a ensinar e aprender a ser professor começam a ser construídos de forma mais sistemática, fundamentada e contextualizada". Assim, a formação inicial apresenta como função básica o desenvolvimento de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores, dentro do espaço que possibilite a compreensão e o comprometimento com a aprendizagem do licenciando, ao longo da vida. Deve ainda, segundo Mizukami (2006), fornecer formação teórico-prática que estimule os processos de aprendizagem e o desenvolvimento profissional na trajetória docente.

É função da formação inicial auxiliar os licenciandos na compreensão do processo formativo e a conceberem a profissão do professor como domínio de conceitos, habilidades, atitudes, comprometimento e investigação.

1.2. Os Saberes na Formação Docente

Os variados conceitos da formação docente abordados neste trabalho, relacionam-se a saberes dos professores e à aprendizagem desses saberes. Compreender os conceitos básicos e sua influência para a formação de professores pode contribuir para a formação da base teórica deste trabalho.

Para Tardif (2002), o saber está vinculado não somente aos conhecimentos, mas também às competências, habilidades e atitudes consideradas pela sociedade como importantes para o processo de formação institucionalizado.

Historicamente, o conhecimento e os saberes dos professores estão ligados à profissionalização do ensino, ao seu trabalho e formação, ao pensamento, à sua história de vida e à relação entre cultura escolar e cultura do professor.

A relação entre formação e saber se baseia em três considerações. A primeira diz respeito ao professor como sujeito do conhecimento. Se o professor é dotado de conhecimento, deve ter o direito de tomar decisões sobre a própria formação profissional.

A segunda se relaciona ao aspecto do conhecimento do trabalho do professor. Se o profissional trabalha com conhecimentos específicos sua formação deve basear-se nesses conhecimentos.

A terceira consideração diz respeito à organização do conhecimento. Se o professor vai trabalhar com conhecimento integrado, sua formação deve contemplar a unificação e inter-relação entre os conhecimentos a serem aprendidos.

Diante das considerações, Tardif (2002) relaciona quatro características básicas dos saberes profissionais docentes. A primeira característica se relaciona à temporalidade do saber. A história de vida escolar do professor influencia fortemente a concepção de ensino e seu papel como profissional. Suas pesquisas revelam que os alunos, muitas vezes, passam pelos cursos de formação inicial de professores sem alterar ou abalar as concepções iniciais de ensino. Por outro lado, os primeiros anos de prática profissional são decisivos, segundo o autor, para a aquisição do sentimento de competência e para o estabelecimento de rotinas de trabalho do saber experimental.

Os saberes são utilizados e desenvolvidos durante a carreira. Tardif (2002, p. 262) afirma que "saber como viver numa escola é tão importante quanto saber ensinar na sala de aula", e o saber não se adquire na formação universitária, mas sim na formação prática e experimental adquirida com o tempo.

A segunda característica se baseia na pluralidade e heterogeneidade do saber profissional. Os saberes são provenientes de diversas fontes: cultura pessoal, conhecimentos disciplinares, didáticos e pedagógicos, conhecimentos curriculares, do próprio saber relacionado à experiência de trabalho e na relação com profissionais e tradições do ofício.

São também variados, não formam um repertório de conhecimentos unificado em torno de uma disciplina, de uma tecnologia, de uma concepção do ensino. São ecléticos e sincréticos. Os professores utilizam muitas teorias, concepções, técnicas, em busca de diferentes objetivos ao mesmo tempo. São heterogêneos pelo fato de os professores utilizarem uma variedade de habilidades ou competências para gerência de sala de aula e uma diversidade de objetivos: emocionais, sociais, cognitivos, coletivos. Como os saberes estão na ação, a serviço dela, e nela assumem significado e utilidade, o autor atribui também a característica de unicidade ao saber docente.

A terceira está pautada na personalização e na situação do saber. Os saberes dos professores estão intrinsecamente associados às pessoas, à experiência, à sua história de vida social, inclusive da situação de trabalho. As pessoas que, em seu ofício, se relacionam com seres humanos precisam contar consigo mesmas, com recursos, com capacidades pessoais, com a própria experiência, com a capacidade de controlar o ambiente de trabalho. Além disso, os saberes são construídos e utilizados em função de situação específica do trabalho, caracterizando-o como saber situado.

A quarta característica se baseia na idéia de que o fato de o objeto de trabalho docente ser humano implica que o saber do professor carrega as marcas do humano. O saber do professor também deve ser composto pela disposição em conhecer e compreender os alunos nas particularidades e evolução em sala de aula. Deve apresentar ainda componente ético e emocional. O trabalho diário com os alunos provoca, no professor, o desenvolvimento do conhecimento de si, das emoções, dos valores, da natureza, de sua maneira de ensinar.

Assim, o conhecimento do outro implica a busca do conhecimento de si mesmo que auxilia conseqüentemente na compreensão do outro, diante do processo dialético da construção do saber.

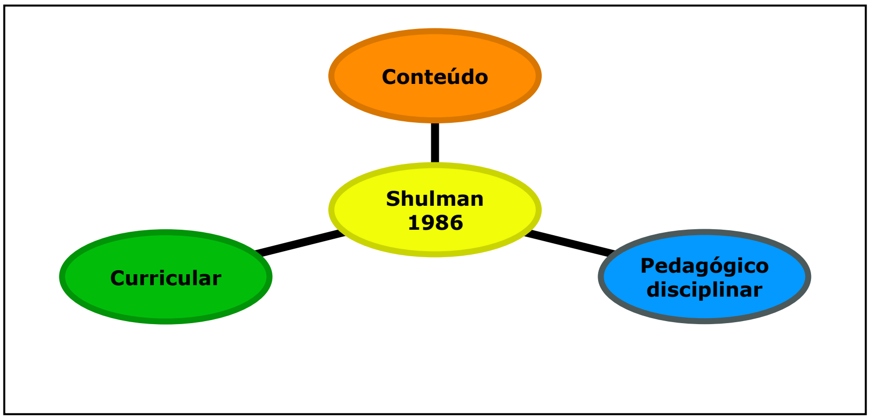
1.3. Tipos de Saberes na Formação Docente

Muitos autores estudam a temática praticamente sob o mesmo enfoque: subdivisão do conhecimento em científico, pedagógico e curricular.

Shulman (1986), um dos pesquisadores pioneiros na área apresenta três categorias de conhecimentos dos professores (figura 1):

- conhecimento do conteúdo da disciplina;
- conhecimento pedagógico-disciplinar;
- conhecimento curricular.

Figura 1 – Tipos de Saberes na Formação Docente de Shulman



Fonte: Elaboração própria

O conhecimento do conteúdo se refere ao conjunto e à organização do conhecimento na mente do professor. O professor deve conhecer a disciplina de acordo com diferentes perspectivas e estabelecer relações entre vários tópicos do conteúdo disciplinar, além de relacionar o conteúdo da disciplina com o conteúdo de outras áreas do conhecimento.

O conhecimento didático ou pedagógico-disciplinar está relacionado ao saber ensinar. Trata da visão do conhecimento disciplinar como saber a ser ensinado, diferentes formas de apresentá-lo, de representá-lo, as estratégias necessárias para a reorganização da compreensão dos alunos, bem como as concepções, crenças e conhecimentos dos estudantes sobre a disciplina são saberes a serem adquiridos pelos professores na formação.

O conhecimento curricular engloba o conhecimento dos objetivos e conteúdos, de materiais de ensino, da capacidade de articular esse conteúdo e da história em sua evolução. O currículo e sua associação a materiais são, para Shulman (1986), a matéria-prima da pedagogia, conhecimentos fundamentais para que o professor possa desenhar as ferramentas de ensino.

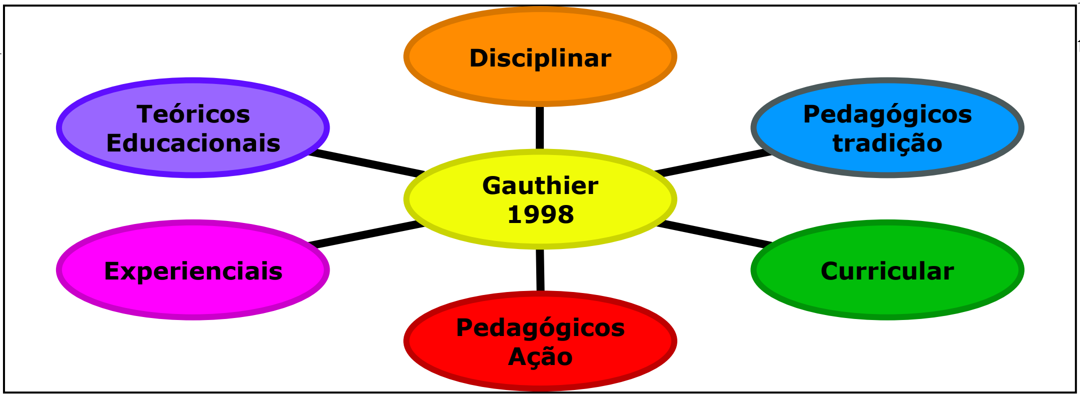
Guimarães (2005), expondo as discussões de Gauthier (1998) sobre o conjunto de saberes da profissionalidade docente, apresenta três posições importantes para a compreensão atual do saber docente.

A primeira posição defende a docência como ofício de saberes. Basta saber o conteúdo para ser bom professor. A segunda posição trata o conjunto de saberes docentes sem ofício, sem correspondência com a realidade. A partir de uma caracterização tecnicista, define o saber como técnico e aplicativo. A terceira posição trata dos saberes construídos na ação e de maneira pessoal.

Diante das posições e discussões suscitadas pelos antagonismos é que Gauthier (1998) define seis tipos de saberes docentes (figura 2):

- disciplinares, apoiados no saber da matéria, das ciências e do conhecimento;
- curriculares, saberes de programas e manuais que orientam o planejamento;
- teóricos educacionais, tratam do funcionamento e da organização da escola, da evolução da criança e da profissão de professor;
- pedagógicos na tradição, dizem respeito ao fazer profissional, a maneira de ensinar e ao uso da profissão;
- experienciais, conhecimentos próprios dos professores, a partir de experiências repetidas;
- pedagógicos na ação, a partir do saber da experiência, ao se tornar público e verificado por pesquisas em sala de aula.

Figura 2 – Tipos de Saberes na Formação Docente de Gauthier



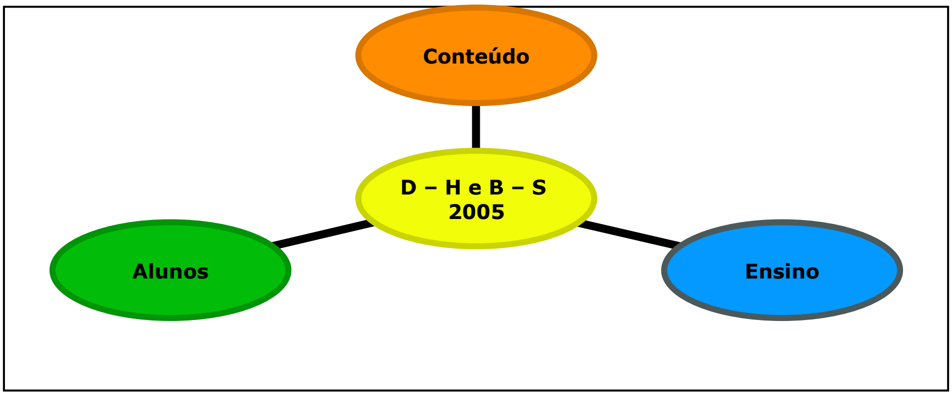
Fonte: Elaboração própria

Gauthier (1998) trata do saber docente de uma forma mais detalhada do que Shulman (1986), subdividindo o conhecimento pedagógico e acrescentando o saber da experiência como saber também a ser adquirido na formação docente. A base de saberes, porém, continua a mesma: o saber científico, o saber pedagógico e o saber curricular continuam a ser contemplados de acordo com as idéias de Shulman (1986).

Mizukami (2006) indica três áreas gerais do saber que os professores iniciantes devem construir na formação (figura 3) a partir dos resultados das pesquisas desenvolvidas por Darling-Hammond e Baratz-Snowden (2005):

- conhecimentos sobre os alunos, como aprendem e se desenvolvem;
- conhecimento da matéria e objetivos curriculares;
- conhecimento do ensino.

Figura 3 – Tipos de Saberes na Formação Docente de Darling-Hammond e Baratz-Snowden



Fonte: Elaboração própria

A primeira área abrange os conhecimentos e as habilidades dos alunos. Dessa forma, os autores afirmam ser necessários o conhecimento da natureza construtiva do ato de conhecer e como estabelecer a relação entre as experiências prévias dos alunos e o novo conhecimento. Além disso, conhecer como os alunos processam as informações implica conhecer: o que os alunos pensam, como pensam e quais as estratégias necessárias e mais apropriadas para desenvolvimento do processo de aprendizagem adequadamente.

A segunda área trata da necessidade do professor em identificar, no conteúdo que ensina, os conceitos centrais que possibilitam a compreensão da matéria. É necessário ainda que os professores saibam diagnosticar o que os alunos já sabem e o nível de compreensão para delinear planos curriculares e desenvolvê-los de acordo com as metas que considerem o conhecimento que os alunos já apresentam sobre o saber a ser ensinado em sala de aula.

A terceira área diz respeito ao ensino do conteúdo. É necessário que o professor domine o conhecimento específico da área, tenha conhecimento pedagógico do conteúdo, de como ensinar alunos diferentes, de avaliação e sobre atividades apropriadas de manejo de classe.

Em pesquisas mais recentes, como as de Darling-Hammond e Baratz-Snowden (2005), o tripé básico citado anteriormente, advindo das idéias de Shulman (1986), ainda continua a existir. O conteúdo científico e pedagógico passa a coexistir de maneira integrada em um único saber. O saber curricular passa a ser contemplado diante da visão relativa, e não mais absoluta, já que os conhecimentos prévios dos alunos precisam ser considerados na formação do saber.

A contribuição passa a ser o conhecimento que o professor precisa ter sobre o aluno e sobre os aspectos que lhe dizem respeito e que podem influenciar o processo de aprendizagem.

1.4. A Aprendizagem docente

Diante dos saberes básicos do professor em formação, o processo da aprendizagem precisa ser explicitado para que os objetivos da formação inicial sejam alcançados. Dentre as várias perspectivas de pesquisas de formação de professores, Nunes (2002) apresenta a vertente que investiga a perspectiva do desenvolvimento e da aprendizagem adulta.

A autora, baseada na perspectiva teórica de pesquisas, apresenta as características básicas de aprendizes adultos:

- capacidade de autogerenciar e autodeterminar a aprendizagem;
- acúmulo de várias experiências como recurso para aprendizagem;
- orientação de desenvolvimento para competências sociais e profissionais;
- avaliação de progressos tendo em vista as metas estabelecidas e a preferência por aprender por meio de resoluções de problemas.

Dessa forma, o ensino, na formação dos professores, contempla aspectos da aprendizagem pautada em situações específicas, que consideram a natureza e a aprendizagem adulta.

Blanco (2003) apresenta características de ensino que possibilitam essa aprendizagem, dentre elas:

- valorização do conhecimento e das crenças dos futuros professores;
- interpretação das experiências a partir de estruturas conceituais para ampliar e modificar os conhecimentos;
- mobilização do processo social-interativo entre grupos de pessoas;
- valorização da participação ativa do aluno diante de proposta de desenvolvimento de atividades significativas e de resolução de problemas.

Os processos de aprender a ensinar, de aprender a ser professor, segundo Mizukami (2006), são lentos, iniciam-se antes da formação inicial, e se prolongam por toda a vida. Tanto a escola como outros espaços de conhecimento são contextos a serem considerados na aprendizagem da docência.

A literatura para a compreensão do processo vem indicando algo mais do que Blanco (2003) apresenta. A reflexão como processo de questionamento sobre a prática com o objetivo de superar desafios e problemas também precisam ser considerados. Além disso, a aprendizagem docente precisa ser situada e socialmente distribuída a fim de que os diferentes tipos de conhecimentos componham gradativamente a base de conhecimento do futuro professor.

Assim, para Mizukami (2006), a organização das situações de ensino capazes de possibilitar aprendizagens de alunos diferentes, de trajetórias pessoais e culturais diversas, e a construção de conhecimentos de ensino dos diferentes componentes curriculares, são pontos centrais em qualquer processo formativo da docência e importantes para se preparar professores que propiciem aos alunos condições adequadas de aprendizagem.

O foco deste trabalho se concentra na formação inicial do professor de matemática tendo em vista o desenvolvimento de saberes matemáticos. Dentre eles, destacam-se os saberes de conhecimentos dos alunos e do conhecimento da matéria desenvolvidos por Darling-Hammond e Baratz-Snowden (2005), apresentados por Mizukami (2006).

A escolha se justifica pelo fato de os autores contemplarem a formação de professores, diante da compreensão da relação entre os conhecimentos prévios dos alunos e o novo conhecimento. A valorização dos saberes matemáticos se apresenta como marco inicial do desenvolvimento da pesquisa.

Além disso, os autores defendem a tese de que o professor necessita identificar, no conteúdo, os principais conceitos que possibilitam sua compreensão. A proposta é utilizada como aspecto principal da pesquisa. O estudo dos conceitos matemáticos, na formação inicial do professor da área, pode contribuir para que o aluno em formação possa atribuir aos conceitos matemáticos a mesma importância de seus procedimentos.

A pesquisa sofre influências das idéias de Blanco (2003) e Mizukami (2006). Por se tratar de aprendizagem docente, no período das intervenções, é enfatizada a participação ativa dos alunos diante do processo social interativo entre eles. Além da prática da reflexão e do questionamento dos conceitos de cada atividade, possibilitando não só a reflexão sobre o pensamento dos colegas, mas, sobretudo, uma reflexão sobre o próprio pensamento.

2. OS SABERES NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

O objetivo deste capítulo é apresentar, diante da perspectiva histórica, o surgimento da formação de professores de matemática no Brasil, a evolução das pesquisas nacionais e internacionais sobre o tema, bem como as concepções e os saberes dos licenciandos em matemática.

O estudo realizado do desenvolvimento histórico da formação do professor de matemática, no Brasil, procura evidenciar conforme trabalhos de Valente (2005), as transformações, na década de 1930, que perduram até hoje. Com a formação dicotômica do professor de matemática, os problemas da compreensão científica começam a surgir e a se agravar com os anos. As pesquisas nacionais e internacionais surgem justamente nesse período, entre a década de 1960 e 1970, em busca de compreender a formação de professores, inclusive a dos professores de matemática.

Os trabalhos de Paiva (2002), Sztajn (2002) e Ferreira (2003) caracterizam as pesquisas internacionais, na evolução que parte da solução de problemas práticos, na década de 1960, passa pela busca da eficácia do ensino, na década de 1970 e chega aos anos 1990 com o objetivo de compreender o pensamento do professor, crenças, concepções e valores a partir do estudo do saber do profissional.

As pesquisas brasileiras sobre a formação de professores são apresentadas na mesma lógica de pensamento. Os trabalhos de Ferreira (2003) e as pesquisas organizadas por Nacarato e Paiva (2006) revelam evolução semelhante das pesquisas internacionais. As pesquisas de compreensão da estrutura dos cursos de licenciatura, na década de 1970, evoluem para compreensão mais subjetiva do professor em formação, com enfoques em saber docente, desenvolvimento profissional, aprendizagem do professor e a constituição de sua subjetividade e identidade.

Em relação especificamente ao saber matemático, as pesquisas de Ponte (1992), Brito e Alves (2006), Pires, Silva e Santos (2006) denotam similaridades e indicam a concepção do professor de Matemática voltada para o aspecto absolutista e instrumental, em que o conhecimento é mais valorizado do que o ensino desse conhecimento. Outro aspecto se baseia na concepção do professor do saber necessário na relação ensino-aprendizagem, a partir da dissociação entre teoria e prática, caracterizando o paradigma da racionalidade técnica. Considera-se que a formação das concepções dos licenciandos em matemática seja causada pelos aspectos dicotômicos da formação.

2.1. A evolução histórica da Formação dos Professores de Matemática no Brasil

De acordo com Valente (2005), a Matemática do século XVII é utilizada para suprir as necessidades de práticas de guerra e de defesa do território colonial como ingrediente da formação militar. Em 1808, com a vinda da Corte Portuguesa para o Brasil, estabeleceram-se a Academia Real dos Guardas-Marinha e Academia Real Militar. Os cursos das Academias contemplavam Aritmética, Álgebra e Geometria/Trigonometria com base em compêndios franceses, por professores militares brasileiros e portugueses. Dessa forma, os professores tornavam-se autores de livros didáticos de Matemática, em liceus e cursos preparatórios do período. O *status* do professor de Matemática é técnico ministrando cursos especializados para líderes militares.

Com a criação dos cursos jurídicos em Olinda e São Paulo, em 1827, a Matemática constitui saber de cultura geral da escola, sendo a Geometria o conhecimento mais valorizado. Assim, de acordo com o autor, os militares professores de Geometria passam a ter público voltado também para os cursos jurídicos e para escolas de medicina. Pela situação imposta, os professores da ciência matemática se multiplicam provenientes de escolas militares e politécnicas, do colégio Pedro II e de outros poucos estabelecimentos oficiais das diferentes províncias. Os professores são para formar o grupo social de poder político e econômico do período imperial.

Com a Independência e a instauração do regime político-republicano, poucas mudanças se dão. Os professores da cátedra de Matemática são admitidos por concursos idênticos aos realizados para ingresso no magistério de ensino superior com defesa de tese, prova escrita e prova didática, considerada mais como avaliação oral do que propriamente avaliação de condições para ser professor. Os candidatos, segundo Valente (2005), são alunos egressos dos cursos de engenharia, e, para ser professor catedrático de Matemática do ensino secundário, o candidato deve caracterizar-se muito mais como matemático do que como professor.

O Brasil se caracteriza como um país de milhões de analfabetos. Vive, segundo Nagle (2001), o período de entusiasmo pela educação, acreditando que pela multiplicação das instituições escolares, é possível incorporar grandes camadas da população em direção ao progresso nacional, e do otimismo pedagógico, depositando, no escolanovismo, a responsabilidade da verdadeira formação do novo homem brasileiro. O objetivo é romper as estruturas oligárquicas agrárias de analfabetismo e ignorância. O processo de modernização é urgente para que a civilização agrário-comercial se torne urbano-industrial.

Em 1924, com a fundação da Associação Brasileira de Educação, as discussões das questões educacionais se fazem mais presentes. De acordo com Schwartzman, Bomeny e Costa (2000), a grande bandeira do movimento pela educação é a discussão sobre a escola pública, universal, gratuita e leiga. A função da educação é formar cidadãos livres e conscientes a serem incorporados no que os autores denominam de "grande Estado Nacional" (SCHWARTZMAN; BOMENY; COSTA, 2000, p. 70). O movimento pela Escola Nova adota princípios pedagógicos não autoritários, não repetitivos, aproximando-se de processos mais criativos de aprendizagem.

Assim como no século XVII, o professor de Matemática desempenha o papel de formador dos que detêm o poder econômico como forma de garantia de perpetuação desse *status*. As discussões e propostas de mudança da educação brasileira se tornam mais ativas a partir da Reforma Francisco Campos de 1927, caracterizada a princípio, segundo Vidal e Faria Filho (2002), pela reforma do ensino primário, técnico-profissional e Normal, em Minas Gerais.

Com o objetivo de renovar a educação, o Departamento Nacional de Ensino e a Associação Brasileira de Educação aprovam e apóiam, em 1928, a iniciativa do diretor e professor catedrático em Matemática do Colégio Pedro II, Euclides Roxo, a renovação do ensino da Matemática. Ele pretende fazer com que a Matemática brasileira acompanhe a evolução da Matemática mundial. Preocupa-se em dar tratamento diferenciado ao ensino, tornando as idéias brasileiras do conhecimento o mais atual possível. Busca ainda, entrelaçar os três conhecimentos matemáticos: Aritmética, Álgebra e Geometria, separados até então.

A renovação do ensino de Matemática, no secundário, implica também renovar a formação dos professores da área de atuação. De acordo com Valente (2005), Euclides Roxo destaca a necessidade que o país tinha em estruturar a formação do professor secundário em Matemática, é que, apresentando conhecimento profundo na área, nada compreendia de ensino. Para Roxo há a necessidade de criar a escola normal para professores secundários, nos moldes americanos, formando-os em uma cultura especializada, com conhecimentos de psicologia infantil, de novas metodologias e de pedagogia.

Com a Revolução, na década de 1930, diante da necessidade do novo governo em realizar reformas urgentes para obtenção de mais apoio à revolução, as modificações ocorridas do Colégio Pedro II devem ser estendidas aos demais estados da federação, configurando uma "*mudança concreta, de boa visibilidade e de apelo popular*" (BRAGA, 2006, p. 72).

Em 1934, com a fundação da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da USP e, em 1939, com a fundação da Faculdade Nacional de Filosofia, no Rio de Janeiro, são criados os primeiros cursos de formação do professor secundário, servindo de modelo para outros cursos do país constituídos pela formação do Bacharel em 3 anos e para a formação do Licenciado em 1 ano. Assim, o professor de Matemática, como afirma Valente (2005), tem uma formação de Matemática, em 3 anos e, de Didática em 1 ano, tornando-se Bacharel e Licenciado em Matemática.

Apesar da oficialização, a discriminação, em relação à Licenciatura, é grande. Valente (2005, p. 15) afirma que "os próprios catedráticos da subseção de Matemáticas se encarregam de difundir junto aos alunos a tese da inutilidade dos estudos pedagógicos". Diante de críticas sobre a renovação do ensino da Matemática e de pressões políticas subseqüentes, é que, sob a forma legislativa, atesta-se o fracasso da nova reforma do ensino, a partir da promulgação em 1942, com a Reforma de Gustavo Capanema, da separação dos ramos da Matemática, descartando a idéia de fusão de conteúdos, como evidencia Valente (2002).

Os conhecimentos de Aritmética, Álgebra e Geometria são ensinados conjuntamente, em cada série e de forma independente, com a inserção de gráficos e textos com biografias de cientistas, sem grandes modificações na concepção do ensino da Matemática.

As mudanças influenciam de forma diferenciada, cada estado brasileiro. No Ceará, as mudanças levam, em 1944, ao Ministério da Educação o encaminhamento da proposta de refederalização da Faculdade de Direito do Ceará. A iniciativa suscita a autorização do funcionamento, em 1947, da Faculdade Católica de Filosofia do Ceará responsabilizando-a também pela formação Matemática e pedagógica dos professores do ensino secundário.

A Lei no. 8.423, de 3 de fevereiro de 1966 (CEARÁ, 2006) encampa a Faculdade Católica de Filosofia do Ceará sob a denominação de Faculdade de Filosofia do Ceará. Subordinada à da Secretaria de Educação e Cultura, a faculdade tem como obrigação manter os cursos de Letras, Geografia, História, Pedagogia, Filosofia e Matemática, no turno da noite. Observa-se que ainda não existia o curso de formação específica do professor de Matemática, determinando a dicotomia entre conteúdos científicos e pedagógicos. Em 18 de outubro de 1973, a Lei no. 9.753 autoriza o Poder Executivo a instituir a FUNEDUCE.

Após dois anos da resolução no. 2, de 05 de março de 1975, referendada pelo Decreto no. 11.233 que a Universidade Estadual do Ceará é criada. O fato se dá pela reunificação das Escolas de Enfermagem São Vicente de Paula, de Serviço Social e da Faculdade de Filosofia do Ceará, do Conservatório de Música Alberto Nepomuceno e da Faculdade de Filosofia Dom Aureliano Matos em Limoeiro do Norte. Sua instalação é concretizada apenas em 1977, com atenção aos cursos considerados mais necessários ao desenvolvimento do Estado, dentre eles, de Ciências Tecnológicas, que inclui o curso de Matemática e Ciências Sociais, com inclusão do curso de Pedagogia (UECE, 2007).

A formação do professor de Matemática continua até a década de 1970, a apresentar característica voltada para a valorização dos conhecimentos específicos matemáticos, em detrimento dos conhecimentos pedagógicos e, até mesmo, da inter-relação entre eles. Até a década de 1990, essa configuração dicotômica, na formação do professor de Matemática, perdura. Nos cursos de Licenciatura em Matemática, as disciplinas específicas são estudadas nos primeiros três anos, para que as disciplinas pedagógicas se ministrem no último ano da graduação, seguidas do estágio supervisionado.

A dissociação entre Licenciatura e Bacharelado não é a única, as disciplinas específicas Matemáticas também são estudadas separadamente, sem interconexões entre conhecimentos algébricos, geométricos e aritméticos. Em face da problemática da formação de professores e do aumento da quantidade de crianças, nas escolas, os problemas de compreensão da matemática tornam-se mais explícitos. O significado do saber matemático se vincula ao fato de ser conhecimento de difícil acesso, restrito aos poucos com capacidade de compreendê-lo.

Para o estudo dessa problemática e a busca de soluções, as pesquisas, nacionais e internacionais, têm suas contribuições. Compreender a formação de professores e como se processa, inclusive para professores de matemática, é o grande desafio dos pesquisadores.

2.2. As pesquisas Internacionais sobre a Formação do Professor de Matemática: perspectiva histórica

As pesquisas internacionais da formação de professores de Matemática iniciam na década de 1970 incentivadas pelos estudos na área de formação de professores que vinha se desenvolvendo desde a década de 1960, impulsionadas pelas transformações, na década de 1980, atualmente com ênfase em estudos em ascensão.

Segundo Ferreira (2003), a formação de professores da década de 1960 é estudada nos cursos de licenciatura ou de programas emergenciais voltados para a solução de problemas práticos. A educação e pesquisas são pouco valorizadas pelas políticas públicas vigentes.

Na década de 1970, a pesquisa educacional baseia-se em estudos experimentais quantitativos para avaliar diferentes métodos de treinamento de professores. O objetivo é "modelar o comportamento do professor e examinar os efeitos de determinadas estratégias de ensino" (FERREIRA, 2003, p. 21). A busca caracteriza um ensino eficiente. O paradigma dominante desse período se fundamenta no paradigma processo-produto pela compreensão da influência dos elementos do processo de ensino-aprendizagem a fim de garantir produto eficiente. A crítica às pesquisas se baseia na utilidade dos resultados por parte dos políticos, formadores, professores, escolas, administradores escolares, e, pelo fato de não ter alcançado a eficácia desejada.

Na década de 1980, Ferreira (2003) indica que as pesquisas educacionais já se pautavam em métodos naturalistas ou interpretativos de investigação. O foco das temáticas também se modifica. O pensamento do professor, bem como as influências do curso de formação de professores sobre seu desenvolvimento moral e cognitivo, aos poucos, substituem a visão tecnicista da década anterior. Sztajn (2002) afirma que os pesquisadores buscam entender o efeito do professor nos alunos. O foco das pesquisas de comportamento do professor e eficácia do ensino não discute o saber disciplinar de cada um.

Com o objetivo de elevar os padrões educacionais diante das reformas da educação, as idéias sobre a formação de professores, na segunda metade da década de 1980, tornaram-se díspares. De um lado, pesquisadores se preocupam com a formação como treinamento e investigam as habilidades específicas do profissional experiente na escola. De outro lado, grupos de pesquisadores se preocupam com a formação na perspectiva educativa e buscam investigar o pensamento dos professores, crenças, concepções, valores, considerando como fator fundamental para essa formação a cognição e o contexto do ensino.

A pesquisa do segundo grupo prevalece. As perguntas centrais mudam de foco e busca-se compreender o que os professores conhecem sobre os conteúdos, o conhecimento essencial para o ensino e quem produz esse conhecimento. Segundo Sztajn (2002), as pesquisas explicitam o que os professores entendem e como processam as informações que recebem. É perceptível que as teorias formuladas estão voltadas para a importância do conhecimento do professor.

Os trabalhos de Shulman (1986) impulsionam os estudos da eficácia do professor e os estudos dos processos de pensamento do docente, ao considerar a questão disciplinar e os aspectos particulares do ensino de disciplina específica. Diante dos fatos, para ser professor eficaz, ele deve desenvolver diversos saberes, em particular, o saber pedagógico-disciplinar, inclusive o que querem que os alunos aprendam e as melhores formas de ajudá-los na construção dos conceitos.

Mesmo com as mudanças, em muitos casos, de acordo com Ferreira (2003), os estudos ainda enfatizam as inconsistências e a inadequação do professor, proporcionando uma visão descontextualizada do que pensa o profissional.

As pesquisas, na área da formação de professores de Matemática, nesse período, revelam que, no caso específico da Matemática, houve maior dificuldade de acompanhamento das mudanças dos teóricos e pesquisadores. Paiva (2002) indica que saber conteúdos matemáticos é condição necessária e suficiente para ser um bom professor. Assim, pelas idéias de Shulman (1986), o professor de Matemática precisa desenvolver:

- domínio amplo da matéria, diversificado, em variados enfoques;
- conhecimento epistemológico do assunto a fim de garantir autonomia intelectual a partir da construção do próprio currículo;
- capacidade de transformação do conhecimento adquirido em algo significativo e esteja em nível das habilidades e conhecimentos dos alunos.

Na década de 1990, as pesquisas de formação de professores se consolidam em dois focos apresentados por Ferreira (2003):

- processo de aprender a ensinar dos professores;
- crenças, concepções e valores dos profissionais.

O objetivo, no momento, é analisar os processos de mudança e as inovações mediante informações baseadas nas organizações, currículo, nas didáticas e nos próprios profissionais. Esses processos devem "considerar o impacto que as inovações possam ter sobre as crenças e os valores dos professores" (FERREIRA, 2003, p. 25). O professor deixa de ser visto como objeto passivo de estudo e passa a ser considerado como profissional capaz de pensar, refletir e articular a prática, diante de valores, crenças e saberes, elemento fundamental do processo de formação e mudança.

Paiva (2002) acrescenta ainda que os pesquisadores começam a valorizar os saberes da experiência adquiridos na formação e vida profissional. Além disso, iniciam o processo que vem se fortalecendo ainda hoje, nas pesquisas de formação de professores e o desenvolvimento profissional do professor. Conhecer como os saberes se constróem e se desenvolvem é tão importante quanto conhecer os conhecimentos e saberes dos professores.

No início da década de 1990, a discussão na Educação Matemática, relacionada aos saberes dos professores, considera, de acordo com Sztajn (2002):

- o conhecimento específico matemático;
- o conhecimento do fazer matemático;
- o conhecimento emocional desenvolvido a partir da autopercepção apresentada pelo indivíduo, na relação com o conteúdo como dimensões inter-relacionadas do saber matemático.

Assim, para pesquisadores da época, o saber explícito do professor se articula à concepção de Matemática e natureza da disciplina. Os pesquisadores criam oportunidades para exploração do conhecimento conceitual do professor em diferentes contextos.

Outro pensamento no início da década de 1990 evidencia que o saber do professor precisa ser compreendido como saber integrado, contemplado em diversas dimensões, conforme Sztajn (2002):

- conhecimento matemático do professor;
- conhecimento das representações matemáticas;

- conhecimento dos alunos;
- conhecimento de como ensinar e do processo de tomada de decisão em sala de aula.

Pelo estudo das dimensões, pode-se compreender “como o professor transforma seu saber disciplinar em saber ensinável” (SZTAJN, 2002, p. 22). Assim, o conhecimento do professor, dos alunos e processos cognitivos, a escolha das atividades para o ensino de conceitos matemáticos, bem como a dimensão de domínio, familiaridade e relação do professor com o conteúdo matemático em si, são aspectos abordados nas pesquisas que investigam e compreendem a formação do professor de Matemática.

As pesquisas desse período revelam que o professor, com domínio do conhecimento matemático e conhecimento pedagógico, é um profissional mais flexível nas decisões em sala de aula, capaz de escolher tarefas mais apropriadas ao desenvolvimento de discussões matemáticas significativas. Além disso, a utilização de material curricular renovado pode influenciar positivamente a concepção do conteúdo matemático de professores experientes, assim como o trabalho reflexivo e colaborativo.

A evolução das pesquisas internacionais, na área da Educação, influenciou as pesquisas na formação de professores, sobretudo, na formação de professores de Matemática. Ao considerar o profissional como ser ativo, diante do conhecimento que apresenta, de sua experiência prática e dos aspectos subjetivos intrínsecos, as pesquisas avançaram não só em quantidade, mas, sobretudo, em qualidade.

Ainda assim, os resultados não conseguem explicar, de uma maneira global, como acontece a aquisição do saber pelo professor diante da diversidade de fatores racionais e emocionais que influenciam o processo. Além disso, os resultados das pesquisas são pouco utilizados nas instituições de ensino que se propõem a desenvolver o trabalho de formação de professores. Certamente a efervescência das discussões acerca do tema, no mundo exterior, influenciou e contribuiu para as discussões no Brasil. A evolução das pesquisas brasileiras de formação do professor, mais especificamente, a formação do professor de Matemática, é apresentada a seguir.

2.3. As pesquisas Nacionais sobre a formação do professor de Matemática: perspectiva histórica

A preocupação dos pesquisadores brasileiros, com relação à formação dos professores de Matemática, tem início na década de 1970 com os primeiros trabalhos desenvolvidos em programas de pós-graduação em educação, no mesmo paradigma das pesquisas internacionais da área. Os objetivos das pesquisas são:

- estruturar os cursos de licenciatura em Matemática;
- desenvolver pedagogia voltada para a prática de ensino e o estágio supervisionado;
- desenvolver programas caracterizados como módulos de ensino;
- estudar a influência do professor sobre o aluno;
- investigar a eficiência no treinamento dos professores.

Para isso, utilizam metodologia descritiva, exploratória e diagnóstica, mediante instrumentos estruturados, questionários, entrevistas, exercícios de alunos, testes e documentos. Os resultados genéricos destacam o desempenho dos indivíduos estudados fazendo uso de medidas estatísticas com ênfase no aumento das competências dos professores.

As pesquisas iniciadas na década de 1980, além de se caracterizarem em paradigma positivista pela investigação restrita aos programas de licenciatura, fazem-se de maneira escassa. O foco das pesquisas volta-se para o treinamento e formação de professores de Matemática. De acordo com Ferreira (2003), as pesquisas se subdividem em quatro categorias:

- avaliação de cursos de licenciatura;
- atitudes dos professores de Matemática diante das novas tecnologias;
- concepções e percepções dos professores de Matemática;
- prática pedagógica dos professores de Matemática.

Com a mudança de paradigma das pesquisas internacionais, as pesquisas brasileiras também começam um processo de transformação de investigação do treinamento e formação de professores. Ferreira (2003) afirma que estes aspectos começam a ser contemplados nas investigações:

- contexto do professor, realidade e necessidades da comunidade da qual faz parte;
- habilidade e competência do professor em elaborar projetos;
- diferentes experiências vivenciadas pelo professor no ensino da Matemática;

- visão crítica da avaliação dos cursos de licenciatura;
- conhecimentos dos licenciandos;
- opiniões de professores e futuros professores sobre dificuldades na elaboração metodológica.

O paradigma do pensamento do professor, nas pesquisas internacionais, sobre o tema, aparece nas pesquisas brasileiras lentamente fazendo com que a atenção dos pesquisadores se volte para as "cognições dos professores acerca de sua própria formação" (FERREIRA, 2003, p. 29).

Na década de 1990, a investigação dos programas de formação de professores persiste e se intensifica. As pesquisas buscam a identificação dos problemas e obstáculos de formação, avaliação de programas institucionais, discussão de questões polêmicas e proposição de novos rumos em novas perspectivas. As pesquisas também sofrem transformações nesse período. Ferreira (2003) destaca os tipos básicos:

- discussão sobre as conseqüências de determinadas teorias nos cursos de formação de professores;
- descrição do processo de formação com ênfase nos materiais de referência utilizados na formação, no perfil dos profissionais, nas sugestões de trabalho e nos materiais alternativos;
- construção coletiva do conhecimento, currículo e atividades.

A metodologia se pauta nos estudos de caso descritivo-analíticos, com ou sem tratamento estatístico, nos estudos fenomenológico-hermenêuticos, crítico-dialéticos, nas pesquisas participantes e nos estudos histórico-descritivos. A nova tendência de investigações da formação dos professores faz eclodir o trabalho colaborativo, as considerações da produção acadêmica brasileira na área e o processo de formação acadêmica de professores de Matemática.

As mudanças, na década, são de perspectiva. Em anos anteriores, enquanto a busca era compreender a estrutura dos cursos de licenciatura, as disciplinas, estratégias mais eficazes, as tecnologias emergentes diante da visão, das concepções e crenças dos licenciandos e professores de Matemática, agora é pela compreensão da reflexão do professor, pela investigação do trabalho colaborativo e da relação dialética entre teoria e prática.

As pesquisas brasileiras refletem, segundo Ferreira (2003), tendência de mudança mundial no modo como a formação inicial é estudada e desenvolvida. Dessa forma, a formação de professores passa a ser compreendida como processo contínuo, em que o professor aprende a ensinar diante da visão de inter-relação entre teorias, princípios e modelos. Os estudos de formação consideram o professor objeto de estudo que desenvolve o processo de mudança de fora para dentro, esforçando-se para assimilar conhecimentos em base teórica.

As pesquisas internacionais de formação do professor indicam nova tendência de sua compreensão por meio do paradigma do desenvolvimento profissional. Por esses aspectos, os pesquisadores se dedicam a compreender quem é o professor de Matemática, como pensa e como se relaciona com sua prática, evidenciando a busca pela compreensão das mudanças internas do professor como objeto de estudo.

A partir de 2000, são criados no Brasil encontros para divulgação de pesquisas sobre Educação Matemática, como o caso do SIPEM, estruturado por grupos de trabalho, com o objetivo de reunir pesquisadores de instituições nacionais e internacionais para compartilhar pesquisas e formar parcerias. As tendências e perspectivas das pesquisas de formação de professores de Matemática vão evoluindo a cada encontro. No 1º encontro ocorrido em 2000, apresentam-se apenas três trabalhos dos 19 inscritos sobre “saber docente”. O 2º encontro, em 2003, apresenta, de acordo com Nacarato e Paiva (2006), três focos temáticos:

- o professor como produtor de saberes;
- o professor como agente de sua própria formação;
- o professor e a pesquisa.

Em relação ao primeiro, os autores destacam a influência dos trabalhos de Shulman (1986) e Zeichner (1998) para as discussões sobre os saberes na formação do professor de Matemática. Em relação ao segundo, os autores destacam a nova tendência de estudos na área de formação de professores: o desenvolvimento profissional. Os temas mais discutidos foram os trabalhos coletivos e colaborativos. Já no terceiro, a ênfase das discussões se volta para a formação dos formadores de professores.

De acordo com Nacarato e Paiva (2006), as pesquisas não devem enfatizar somente a relação entre profissão docente e saberes, ou desenvolvimento profissional, mas ampliar o foco de estudo contemplando inclusive os processos de aprendizagem do professor, a constituição de sua subjetividade e de sua identidade.

Em relação aos procedimentos metodológicos, as pesquisas devem articular o referencial teórico adotado e a dinâmica discursiva e referenciar os instrumentos por meio da descrição detalhada dos procedimentos metodológicos utilizados.

2.4. As concepções dos licenciandos sobre o saber matemático

Pelas tendências das pesquisas sobre a formação de professores de Matemática, verifica-se que o saber matemático vai além do conhecimento específico do conteúdo, perpassa também pelos valores, crenças e concepções dos professores como objeto de estudo. O levantamento prévio das concepções pode auxiliar na compreensão da relação do professor com o saber matemático.

Ponte (1992) afirma que a concepção dos professores de Matemática, do saber matemático, na maioria, é absolutista e instrumental, já que a acumulação de fatos, regras, procedimentos e teoremas se tornam mais valorizados do que os aspectos de ensino dos conteúdos. Existem profissionais que assumem a concepção dinâmica do saber, considerando a Matemática como domínio em evolução conduzido por problemas e sujeito a revisões significativas.

Para o autor, os professores sabem pouca Matemática, o conhecimento é limitado e pouco profundo; apresentam ainda cultura Matemática reduzida, sabem pouco sobre sua História e Filosofia, e, suas principais áreas de aplicação. Os resultados de pesquisas, em Portugal, revelam que os professores apresentam dificuldade em falar sobre suas concepções da Matemática já que não têm o hábito da reflexão; apresentam uma visão geral e periférica do domínio escolar, e uma crise de identidade, não se percebem como matemáticos, nem como engenheiros.

Brito e Alves (2006), ao analisar a reformulação dos saberes pedagógicos, disciplinares e curriculares pelos licenciandos em Matemática, em Didática da Matemática, na UFRN, percebem que os professores têm concepções diferenciadas do saber matemático:

- a concepção da Matemática como potencialidade para o desenvolvimento do raciocínio lógico;
- a concepção histórica e instrumental;

- a concepção de que a Matemática é de difícil compreensão e destinada a poucas pessoas.

Uma concepção foi se desenvolvendo no grupo, na aplicação da pesquisa. Os licenciandos percebem que existe de fato a Matemática na vida diária das pessoas e é dever do professor explicitar aos alunos as relações entre Matemática do cotidiano e Matemática formal. A concepção dos futuros professores sobre o processo ensino-aprendizagem está pautada:

- na transmissão do conhecimento do professor para o aluno com a visão de que o professor é o detentor do saber;
- na dissociação entre teoria e prática com uma visão baseada no paradigma da racionalidade técnica de formação de professores;
- na desvinculação entre as teorias estudadas e a organização escolar;
- na utilização do livro didático como recurso que direciona o trabalho docente.

Pires, Silva e Santos (2006), em pesquisa com os coordenadores dos cursos de licenciatura, no Brasil, constatam que a preocupação dos profissionais está voltada para os conhecimentos que os alunos trazem para a Universidade. O aluno, para os profissionais, precisa ter a visão de professor dos conteúdos básicos e não mais a visão de aluno, já que seus conhecimentos são ainda muito frágeis.

Os objetivos dos cursos de licenciatura pautam-se na revisão e nivelamento dos alunos iniciantes, muito mais como uma retomada para amparar outras disciplinas do curso do que propriamente para revisar os conteúdos sob a perspectiva de docente. De acordo com as percepções dos coordenadores sobre o público, os licenciandos em Matemática, os autores revelam que as concepções básicas dos alunos sobre o saber matemático se apresentam de duas formas:

- ensinar Matemática depende do quanto se sabe sobre Matemática e não sobre o ensino de Matemática;
- ensinar Matemática depende do quanto se pode articular conhecimento matemático e pedagógico, a Matemática e o ensino.

Concluem, então, que saber conteúdo específico não significa saber ensiná-lo.

Apesar de as buscas em pesquisas de formação de professores de Matemática estarem voltadas para a compreensão mais subjetiva do professor, nos variados aspectos formativos, os resultados de concepção dos licenciandos sobre o saber matemático revelam um pensamento ainda voltado para o paradigma tecnicista da década de 1970.

O processo de transformação ocorre lentamente para as pesquisas brasileiras e para a reflexão e incorporação dos resultados nas instituições de ensino superior.

Ao constatar que a formação do professor de matemática apresenta configuração dicotômica entre disciplinas pedagógicas e matemáticas e, até mesmo, entre as disciplinas matemáticas entre si, é de se esperar que os licenciandos apresentem também perspectiva dicotômica em relação à própria formação. Mesmo com as contribuições das pesquisas nacionais e internacionais, na área da formação de professores e respectivas evoluções e conquistas, a modificação do paradigma tem acontecido lenta e gradualmente.

Nessa situação, este trabalho se utiliza de sugestões de pesquisadores que estudam a formação do professor de matemática. A importância de construção e desenvolvimento dos saberes matemáticos dos licenciandos, a exploração de seus conhecimentos conceituais, a busca pela compreensão das transformações cognitivas inerentes ao desenvolvimento do futuro professor são aspectos contemplados neste trabalho.

Assim, em face da proposta de Nacarato e Paiva (2006), esta pesquisa procura descrever os processos cognitivos dos licenciandos na aprendizagem docente, por meio do estímulo da reflexão e de visão mais profunda do conteúdo escolar. A tentativa busca minimizar os problemas apresentados por Ponte (1992), sobre os saberes dos licenciandos em matemática.

3. O CONCEITO DE FUNÇÃO: SABER ESPECÍFICO NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Este capítulo tem como finalidade apresentar, dentre os diversos saberes de Matemática, o saber específico do conceito de função. São apresentadas, a princípio, não só as dificuldades dos alunos da Educação Básica e Superior, na compreensão do conceito de função, mas também as dificuldades dos matemáticos, bem como as dificuldades dos próprios professores ao deparar com situações que necessitam desse conceito.

Sierpinska (1992) revela, em estudos epistemológicos, que o conceito de função, até alcançar o século XX, passa por diversos obstáculos: problemas relacionados à utilização do conceito na prática, problemas numéricos, algébricos e geométricos. Para os alunos da Educação Básica e Superior, diversos autores, entre eles Dubinsky e Harel (1992), Artigue (1992), Rêgo (2000) e Pelho (2003), revelam muitas dificuldades na compreensão desse conceito.

As dificuldades mais relevantes dizem respeito aos diferentes tipos de representação das funções, às suas transformações, a trocas conceituais entre o conceito de função e equação, aos conceitos de domínio, contradomínio e imagem de funções e a distinção entre variáveis dependentes e independentes.

Carneiro, Fantinel e Silva (2003) e Rossini (2006) afirmam que os professores em formação inicial e continuada, também apresentam erros conceituais nas concepções do conceito de função, bem como dificuldades na compreensão. É importante ressaltar que os problemas são semelhantes aos vivenciados pelos alunos da formação básica e superior, o que leva a crer que seja necessário o auxílio do professor em formação, no sentido de modificar sua concepção e de ressignificar os conceitos matemáticos, sobretudo o conceito específico de função.

Está sendo contemplado, neste trabalho, o estudo das variáveis e das representações algébricas a partir de situações que estimulem a reflexão do conceito de função em várias frentes. A utilização de situações cotidianas e científicas e a resolução de problemas são aquelas contempladas pelos autores citados. Outra frente que pretende trazer contribuições inovadoras da problemática diz respeito à aprendizagem significativa do conceito de função.

3.1. As dificuldades na compreensão do conceito de função

As dificuldades na compreensão do conceito de função estão longe de ser problema específico dos alunos. Os próprios matemáticos, na evolução da ciência, depararam-se com dificuldades que modificaram sua compreensão do conceito levando a evoluções teóricas durante séculos, para serem estabelecidas e aceitas pela comunidade acadêmica.

Professores de matemática, alunos da Educação Superior e alunos da Educação Básica, assim como os matemáticos, também vivenciam as dificuldades na compreensão do conceito de função.

São apresentadas, então, as dificuldades vivenciadas por todos os níveis educacionais, de matemáticos, estudantes e professores, sobre a compreensão do conceito de função diante de resultados de pesquisas, nacionais e internacionais, que tratam do tema.

- **As dificuldades epistemológicas**

Os primórdios do conceito de função surgem com os babilônios e gregos, povos que introduziram tabelas de relações numéricas para explicação de fenômenos naturais. Entre os babilônios, as tabelas são construídas para relacionar quadrados e raízes quadradas, bem como cubos e raízes cúbicas. Para os gregos, a noção de função é estabelecida como relação especial entre entes geométricos.

Sierpinska (1992) apresenta, para esse momento, os primeiros obstáculos epistemológicos sobre Matemática:

- a Matemática não se preocupa com problemas práticos;
- não se preocupa também com técnicas computacionais usadas na produção de tabelas numéricas.

Na evolução do pensamento humano, no período aristotélico, a noção de função, ainda expressa por meio de tabelas ou por verbalizações, identifica os processos de alteração de quantidade e de qualidade de entes geométricos. A noção de função tem sentido relacionado à “mudança” de fenômenos, porém, sem generalizações. A ação mental de compreensão, segundo Sierpinska (1992) está relacionada com a identificação dos sujeitos de mudança por meio de estudo dessas mudanças.

Deriva daí o terceiro obstáculo epistemológico:

- a preocupação das mudanças como fenômeno focado na mudança e não no objeto que muda.

A partir do século XIII, cientistas europeus como Oresme, Galileu, Stevin e Newton relacionam as pesquisas com a concepção de número. Galileu, por exemplo, pautava-se nas mensurações, sobretudo nos estudos astronômicos. Oresme, por sua vez, trabalhando com latitudes, atribui aos números coletados valor qualitativo, estudando, inclusive, casos de dependência de quantidades variáveis.

A ação mental de compreensão da época pauta-se na generalização e síntese da noção de número. Surge daí, o quarto obstáculo epistemológico:

- a compreensão do mundo de acordo com a filosofia Pitagórica em que tudo é número.

Ao mesmo tempo, pensava-se também em quantidades e uma dúvida paira nas mentes dos cientistas: como diferenciar os conceitos de número e quantidade? Surge então nova ação mental de compreensão: discriminação entre as duas entidades. Discriminar número e magnitude física, por exemplo, tem significado diferente da percepção de relações entre leis físicas e funções Matemáticas. Assim, as sínteses da noção de número e as discriminações entre número e quantidade são necessárias para compreensão do conceito de função.

A partir do século XVI, a noção de função começa a ter novas representações. Aliadas ao aspecto geométrico, as expressões algébricas adentram o universo científico da época. Descartes define a noção de função segundo a equação em x e y que introduz a dependência entre quantidades variáveis, permitindo calcular o valor de uma variável em correspondência com o valor da outra.

Leibinz, em 1673, introduz a palavra função atribuindo-lhe o significado de relação entre segmentos de retas e curvas. Bernoulli, em 1718, constrói a primeira definição explícita de função de uma variável, definindo-a como quantidade composta por essa variável e por constantes. Euler, em 1748, traz novo conceito que revoluciona a

Matemática. Utilizando a definição de Bernoulli, Euler substitui o conceito de quantidade por expressão analítica, introduzindo assim o conceito algébrico para a definição de função.

Vem daí a concepção de função baseada em relações descritas por fórmulas analíticas, gerando o quinto obstáculo epistemológico:

- forte crença no poder das operações formais como expressões algébricas.

A ação mental de compreensão subseqüente expressa a necessidade de discriminação entre uma função e as ferramentas analíticas utilizadas para descrição de suas leis. No século XIX, Dirichlet, em 1837, constrói o conceito de função que traz inovações a partir da restrição do domínio da função a um intervalo.

Assim, Dirichlet define função: "Se uma variável y está relacionada com uma variável x de tal modo que, sempre que é dado um valor numérico a x, existe uma regra segundo a qual um valor único de y fica determinado, então diz-se que y é função da variável x" (BRAGA, 2006, p.50).

Vem daí novo obstáculo epistemológico:

- a concepção de definição, considerada como uma descrição de um objeto, não é lógica, nem determina o objeto.

A ação de compreensão diante desse obstáculo é a discriminação entre a definição matemática e a descrição de objetos.

No século XX, na década de 30, Bourbaki traz nova concepção de função, baseada na Teoria dos Conjuntos. O conceito de função é definido, de acordo com o grupo de cientistas matemáticos, como operação que associa o elemento x de determinado conjunto a um único elemento y de outro conjunto com o primeiro relacionado. O ato de compreensão está relacionado com a discriminação entre os conceitos de função e relação.

Com o Movimento da Matemática Moderna, na década de 60, do século XX, a comunidade científica Matemática adota a concepção estrutural de função de Bourbaki. A idéia de dependência funcional é eliminada do conceito de função, com tendência a enfatizar as interpretações estruturais mais do que as processuais.

A construção do conceito de função dos matemáticos dá-se paulatinamente, ao longo de séculos, conforme as exigências da vida cotidiana e científica.

- **As dificuldades dos alunos da Educação Básica**

A dificuldade em compreender o conceito de função não é apenas nacional. Existem pesquisas internacionais que se propõem a descrever e explicar a situação do aluno que não compreende o conceito de função e do professor que não sabe articular conhecimentos para ensiná-lo.

As pesquisas com as dificuldades dos alunos do ensino básico e superior, por professores de Matemática em formação inicial e continuada e por professores em serviço, tiveram grande relevância a partir da década de 80.

Em revisão bibliográfica, Kieran (1992) apresenta resultados de pesquisadores como Markovits (1983) e Bruckheimer (1986) que evidenciam dificuldade dos alunos na passagem da forma gráfica das funções para a forma algébrica; Kerslake (1980), Yerushalmy (1988) e Kaput (1988), que mostram em pesquisas, as dificuldades dos alunos, em tarefas de interpretação de informações contidas em representações gráficas; Freudenthal (1982), a importância de enfatizar a noção de dependência na construção do conceito de função; e Cotret (1988) que denuncia a exclusão dos conceitos de variação e dependência na apresentação das definições modernas de função, tornando o conceito inacessível aos alunos do curso secundário já que não os permitem chegar à compreensão intuitiva de função.

As pesquisas estão evoluindo na busca da compreensão das dificuldades do conceito matemático, e na busca de investigação de situações que auxiliem o ensino e aprendizagem. Akkoç e Tall (2002), em pesquisa com estudantes secundaristas, concluem que o estudo de funções constantes evidencia perturbações na compreensão do conceito de função ao associá-la ao conceito de variação. Além disso, o conceito de função está baseado na definição coloquial de interligação de um conjunto de diagramas e respectivos pares ordenados. Os gráficos e as fórmulas são compreendidos por meio de exemplos conhecidos anteriormente.

Almeida e Scalon (2002), ao pesquisarem os fatores determinantes do ensino-aprendizagem de funções Matemáticas em alunos de 8ª série de escolas públicas e privadas da cidade de Três Corações – MG, concluem de forma quantitativa que, ao final do ano letivo, a maioria dos alunos não domina totalmente o conceito de função.

As pesquisas de Moura e Moretti (2003), sobre aprendizagem do conceito de função com estudantes de 8ª série, de escola pública paulista, que ainda não tinham estudado tal conceito, denotam que a grande dificuldade se encontra no fato de os alunos não conseguirem generalizar os problemas por meio de formalização da linguagem.

Os estudos de Pelho (2003) com estudantes do 2º ano do Ensino Médio que já haviam estudado função na série anterior, constatam primeiramente que os alunos chegam ao Ensino Médio sem compreensão do conceito. Além de o conceito ser de difícil apreensão pelos alunos, estes preferem trabalhar com função utilizando a representação de expressões algébricas ou de relações numéricas. Porém, ao apresentar respostas a questões relacionadas ao conceito matemático, fazem-no por meio de linguagem natural, carente de clareza e rigor.

Lopes (2003), por sua vez, desenvolvendo pesquisa com os alunos de 8ª série, em escola da periferia do Estado de São Paulo, verifica que os alunos apresentam dificuldades na interpretação da representação gráfica e de sua conversão para a linguagem algébrica.

São muitas dificuldades do conceito matemático de função para os alunos da Educação Básica. A representação de função, seja ela na forma gráfica ou algébrica, bem como as respectivas interpretações, além da transformação de representação em outra, evidenciam o desconhecimento do conceito de função por parte dos alunos que saem do ensino básico e se voltam para o ensino superior.

As pesquisas com a compreensão do conceito matemático, em novo nível de ensino, demonstram falhas ainda mais profundas na estruturação e na utilização do conceito.

- **As dificuldades dos alunos da Educação Superior**

Dubinsky e Harel (1992), ao estudar os conceitos agregados ao conceito de função na visão de alunos ainda não graduados da Universidade de Purdue, Estados Unidos, relatam que os alunos geralmente podem vinculá-lo aos conceitos de letras, gráficos, pares ordenados, tabelas e equações. Apresentam dificuldades também na construção dos processos vinculados ao conceito de função e na autonomia para desenvolvê-los, confundindo as propriedades intrínsecas ao conceito de função, em suas relações.

Nos trabalhos de Artigue (1992), na Universidade de Paris, conclui-se que os alunos apresentam dificuldades na interpretação e nos registros geométricos e na relação entre os aspectos cognitivos e didáticos, diante da utilização do conceito de função por eles internalizados.

As pesquisas de Mendes (1994) com estudantes universitários, nas disciplinas de Introdução ao Cálculo e Cálculo I da PUC/RJ, indicam que os alunos citam o termo equação ao se referirem à função, caracterizando-a como relação ou como expressão. Os alunos não estão cientes do conceito de domínio na definição de função, esperam uma peridiocidade simples e reconhecível no gráfico, não conseguem construir associações entre as representações algébricas, gráficas e tabulares de uma função, e estabelecem distanciamento entre o conteúdo de função estudado e seu significado.

Oliveira (1997), em pesquisa com alunos do primeiro ano de Engenharia da PUC/SP, constata também que os alunos relacionam o conceito de função ao de equação. Funções dadas por mais de uma expressão algébrica não são bem compreendidas pelos alunos, denotando ainda mais o fato destes não terem internalizado o conceito básico de função.

Rêgo (2000), ao desenvolver pesquisas com alunos dos Cursos de Engenharia Civil e Mecânica, na disciplina de Introdução ao Cálculo na UFPB, verifica que as deficiências em relacionar as representações algébricas e geométricas, ausência de conceitos de domínio, contradomínio e imagem de função, e a concepção pouco intuitiva e útil baseada muito mais no conceito de equação do que no conceito de variação de quantidades estão presentes.

Segundo revisão bibliográfica realizada de Almeida e Scalon (2002), as maiores dificuldades dos estudantes universitários, em relação ao conceito, relacionam-se ao registro na representação gráfica de função, na mudança para registro algébrico, nas definições de domínio e contradomínio, na construção de tabelas de valores numéricos, na distinção entre variável dependente e independente e na notação Matemática.

Bianchini e Puga (2004), por sua vez, ao aplicarem teste diagnóstico com os alunos do Curso de Ciência da Computação da PUC/SP na disciplina de Cálculo, observam que os alunos, na maioria, costumam fornecer definições por meio de exemplos, relacionam função com equação, apresentam dificuldades nas representações gráficas e na transformação destas em representações algébricas. Autores afirmam ainda que os alunos manuseiam com mais freqüência apenas um registro de representação simbólica por vez.

Nos universitários de Engenharia, Computação, Física, por exemplo, que utilizam o conceito como ferramenta básica para aquisição e aplicação de novos conhecimentos, o comprometimento das dificuldades diz respeito mais ao aspecto pessoal, à possibilidade de mau desempenho acadêmico do próprio aluno.

Quanto aos alunos de formação em curso de Licenciatura e que têm como objetivo retornar à sala de aula no papel de professor, as falhas podem ser comprometedoras, não só para seu desenvolvimento pessoal acadêmico, mas também para a aprendizagem de seus futuros alunos.

- **As dificuldades dos professores de Matemática**

Pesquisas preliminares de Rossini (2006), na Formação Continuada de professores de Matemática da rede pública de Ensino de São Paulo, mostram que os professores confundem os conceitos de equação e de função. Tendo em vista a compreensão mais profunda do trabalho da autora, as atividades com o símbolo f(x) são as que mais suscitam dúvidas, para escrever as leis de formação dos problemas, e para estabelecimento da correspondência e dependência entre variáveis.

Nas atividades de construção de gráficos, denota-se o descaso com a escala, com construções que sempre caracterizam curva contínua para representação de dados discretos. Em relação aos diagramas de flechas, os professores preferem os conjuntos finitos no domínio e no contradomínio de cada função. Houve ainda, dificuldade na representação algébrica de funções, em estabelecer relação funcional entre proporcionalidades, na relação entre variáveis dependentes e independentes.

A dificuldade na compreensão do conceito de função perpassa por todos os níveis que retratam a relação ensino-aprendizagem e em diferentes aspectos do conhecimento do conceito. Os matemáticos historicamente superam obstáculos para alcance, depois de séculos, da formalização do conceito de função. Os professores de Matemática, por sua vez, também apresentam dificuldades em compreender, interpretar e atribuir significados ao conceito.

Os alunos do Ensino Superior apresentam uma concepção que não lhes garante o conhecimento necessário para o desenvolvimento de habilidades, em especial, o aluno que se dedica à formação docente. Com essa visão, realmente é de se esperar que os alunos do Ensino Básico tenham grandes dificuldades em compreender o conceito de função.

Por outro lado, as dificuldades não se apresentam de forma superficial. As trocas conceituais ou conceitos mal construídos, as representações e respectivas transformações e os significados contraditórios atribuídos ao conceito revelam a necessidade de ações que vão além da mera investigação.

Nessa perspectiva, é necessário pensar a formação que possa modificar a conjuntura atual. Quais os conhecimentos de função, os professores precisam desenvolver em sua formação? Como esses conhecimentos teóricos podem ser abordados na formação?

3.2. Aspectos teóricos enfatizados do conceito de função na formação inicial do professor de Matemática

Os pesquisadores de dificuldades na aprendizagem do conceito de função, muitas vezes, dispõem de sugestões que objetivam possíveis soluções capazes de minimizar os problemas. As sugestões reunidas e classificadas pelas suas características básicas buscam auxiliar na compreensão do que está sendo pesquisado e aplicado na prática, em relação à aprendizagem do conceito de função.

O estudo dos gráficos como representação e significação do conceito de função é o conhecimento mais abordado pelos pesquisadores. Rêgo (2000) afirma que a manipulação de variáveis familiares aos alunos, em gráficos de jornais e revistas, pode facilitar a formação de idéias centrais do conceito de função. Trindade e Moretti (2000) acrescentam que o trabalho com gráficos deve ser realizado de forma diferenciada a fim de que o professor em formação possa visualizar padrões algébricos, além de perceber que existem gráficos não definidos algebricamente.

Os PCNEMs (2000), Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, também preconizam a representação e a análise gráfica de funções analíticas e não-analíticas, além de associá-la ao estudo de seqüências numéricas. Rossini (2006) sugere ainda que os professores sejam capazes de leitura pontual e global de gráficos e de utilizar escalas e construções adequadas para a função a ser representada.

Os estudos de tabelas são apresentados em pesquisas como representação necessária e útil para a compreensão do conceito de função. Sierpinska (1992) revela ser necessário um trabalho voltado para a interpolação numérica em tabelas para que as regularidades possam ser externalizadas e melhor compreendidas.

Meira (1997) também considera que o trabalho com tabelas é importante, pela representação e visualização de pares ordenados e construção de seqüências numéricas capazes de evidenciar as transformações. Rêgo (2000) evidencia que o trabalho com tabelas é importante por serem estas mais familiares aos alunos, deixando-os mais à vontade no estudo do conceito de função.

Rossini (2006) destaca não só a leitura de tabelas como pertinentes para a ressignificação do conceito dos professores, mas também sua análise e respectivos significados. As tabelas, para a ressignificação do conceito de função, podem auxiliar os professores na visualização das regularidades numéricas, associando os resultados às representações gráficas, integrando, assim, os tipos de conhecimento de função.

O estudo e a compreensão de variáveis são outro assunto enfatizado pelos pesquisadores como pertinente ao aprendizado do conceito de função. Para Rêgo (2000), analisar experimento de decrescimento de variável dependente, como variável independente, com dados gerados, registrados e analisados pelo próprio aluno, pode causar impacto significativo e positivo nas estruturas mentais dos alunos sobre o conceito de função.

Trindade e Moretti (2000) acreditam que explorar o significado de variável, dependência, regularidade e generalização pode fazer com que os alunos compreendam de fato o conceito. Carneiro, Fantinel e Silva (2003) destacam a importância do estudo das variáveis a partir do momento que evocam relação unívoca e que seja perceptível para quem aprende ou ressignifica o conceito. Rossini (2006) também destaca sua importância e enfatiza a escolha e o estudo do tempo como variável independente, como fonte a ser utilizada para a compreensão do conceito de função.

As expressões algébricas, apesar de serem as mais valorizadas pelos professores, no ensino do conceito de função, devem ser apresentadas aos alunos sem deixar de relacioná-las aos demais aspectos de representação e de significação do conceito. Para Sierpinska (1992), as expressões algébricas devem aparecer como ferramentas na modelagem de situações da vida real ou científica. Para Barbosa e Darsie (2003), são as expressões que explicitam as leis que regem as relações entre as grandezas Matemáticas, como fórmulas.

Nos PCNEMs (2000), a expressão algébrica tem a função de auxiliar a construção de leis de formação de seqüência numérica. Para Rossini (2006), as expressões algébricas podem auxiliar os professores na visualização de funções definidas por mais de uma sentença, na identificação do coeficiente "a" em $y = ax + b$ como taxa de variação, bem como na construção do significado de $f(x)$ e das fórmulas para representação de funções.

A utilização de padrões geométricos e numéricos, como base para o desenvolvimento do conceito de função, é para Rêgo (2000) uma das formas de compreendê-la melhor, pelo estudo de formas de representação. Para Carneiro, Fantinel e Silva (2003), as transformações geométricas, sejam elas translação, rotação, homotetia ou reflexão de figuras, podem auxiliar a compreensão do conceito de função de acordo com perspectiva diferenciada e não usual. Para Rossini (2006) as transformações e configurações geométricas auxiliam no estudo do conceito de função já que possibilitam o desenvolvimento do processo de generalização.

As pesquisas revelam também que o estudo de funções, de acordo com modelos reais e científicos, pode auxiliar a compreensão do conceito matemático. Meira (1997) evidencia que experiências realizadas com modelos físicos podem auxiliar na compreensão e na utilização das funções lineares. Rêgo (2000) confirma que materiais instrucionais mecânicos, como roldanas e molas, em atividades voltadas para a compreensão do conceito de função, podem ser bastante úteis para definir regularidades e transformações. Rossini (2006) acredita ser necessário enfatizar também o estudo da função linear como modelo de proporcionalidade.

No que diz respeito ao estudo dos conjuntos para o ensino do conceito em questão, os autores divergem. Para Sierpinska (1992), o conceito de função pelos alunos da educação básica deve ser desenvolvido menos formalmente, mais voltado para as idéias de Dirichlet a respeito da dependência de variáveis e da relação de unicidade entre elas. No Ensino Superior, conceitos mais formais devem ser apresentados aos alunos, inclusive a definição de conceito mais moderno de função que inclui o da Teoria dos Conjuntos.

Rêgo (2000) acredita serem necessários utilizar diagramas de flecha para demonstração da imagem da função como expressão algébrica. Para Lopes (2003), as funções devem expressar as leis de correspondência estabelecidas entre conjuntos numéricos, evidenciando inclusive pares ordenados no plano cartesiano. Barbosa e Darsie (2003) evidenciam a importância do estudo dos conjuntos, acrescentando ainda a introdução do conceito de domínio, contradomínio e imagem, a relação de unicidade e totalidade, representação por diagrama de setas e formação de pares ordenados.

Rossini (2006) afirma que mais importante do que estudar esses conceitos é fazer com que o professor de Matemática observe, de uma forma crítica, as vantagens e desvantagens dos diagramas, do estudo do domínio, do contradomínio e da imagem. Os PCNEMs (2000) solicitam aos professores que enfatizem outras linguagens e significados diferentes dos da Teoria dos Conjuntos. Carneiro, Fantinel e Silva (2003) acreditam ser desnecessária a introdução do conceito de função como tipo particular de relação no estudo dos conjuntos.

Apesar das controvérsias, acredita-se que o estudo das funções sob esse ponto de vista seja importante, para o professor em formação, para que possa reparar os conceitos mal construídos e aprofundar seu conhecimento, mesmo que não o utilize em sala de aula.

Além dos requisitos listados anteriormente com maior ênfase pelos pesquisadores da área, existem outros que podem auxiliar na compreensão do conceito de função. Sierpinska (1992) defende que os pré-requisitos são valiosos para quem inicia o estudo. É necessário que o aluno tenha cultura Matemática para que possa ter o mínimo de compreensão sobre do conceito.

Rêgo (2000) e Rossini (2006) identificam que aprender pela idéia de máquinas de entrada e saída pode auxiliar na compreensão. Os PCNEMs (2000) complementam que o conceito de função deve também ser estudado em seqüências numéricas, progressões e noção de infinito, variações exponenciais e logarítmicas, funções seno, cosseno e tangente e taxa de variação de grandezas.

3.3. Como os aspectos teóricos podem ser abordados no processo de aprendizagem do conceito de função

Apresentar aos alunos apenas os conteúdos de uma forma estanque, pode não contribuir para a compreensão do conceito de função. Dessa forma, as pesquisas enfocam, de uma maneira mais geral, sugestões de desenvolvimento nos alunos, do conceito matemático.

O aspecto das múltiplas representações de função é fator considerado importante em muitas pesquisas. Sierpinska (1992) afirma que dar aos alunos largo espectro das maneiras de se conceber uma função pode auxiliar na aquisição da flexibilidade no uso dos modos de representação e expressão das funções em estudo. Trindade e Moretti (2000) acreditam ser necessário oferecer aos alunos a oportunidade de familiarização com as diversas formas de representação de cada função, além de articulá-las de forma permanente.

Os pesquisadores afirmam ainda que, na representação gráfica, é importante serem trabalhados os gráficos de setores, de barras, histogramas e pirâmides. Para os

PCNEMs (2000), ao aprender o conceito de função, o aluno deve ser capaz de associar diferentes funções a gráficos correspondentes, além de saber ler as diferentes linguagens e representações de variação de grandezas.

Discutir semelhanças e diferenças entre causalidades e funcionalidades de relação é, para Sierpinska (1992), outro aspecto a ser considerado no desenvolvimento de trabalho para a aprendizagem do conceito de função. Os PCNEMs (2000) ressaltam que a percepção das relações e identidades entre diferentes formas de representação do objeto, bem como o reconhecimento da conservação contida nas igualdades, congruências e equivalências são aspectos a serem considerados na aprendizagem do conceito matemático.

A compreensão de regularidades e transformações pode ser imprescindível ao desenvolvimento do conceito de função na estrutura cognitiva do aprendiz. Sierpinska (1992) afirma que explicar as mudanças, encontrar as regularidades nas mudanças, e ainda explicar que mudanças acontecem e como acontecem, auxilia o aluno na compreensão do significado do conceito de função.

Para Trindade e Moretti (2000), o estudo analítico de funções deve surgir diante de atividades realizadas pelas representações numéricas e gráficas, com a finalidade de auxiliar o aluno a compreender as transformações e regularidades dos fenômenos. Rêgo (2000) traz afirmativas que confirmam o pensamento dos pesquisadores. Para a autora, observar mudanças dos fenômenos que nos cercam e perceber relações e regularidades nessas mudanças propicia aprendizagem mais significativa do conceito de função.

Para os PCNEMs (2000), os alunos devem ser capazes de identificar as regularidades e transformações de fenômenos por meio do estabelecimento de regras, algoritmos e propriedades, do reconhecimento da existência de invariantes ou identidades, da identificação das transformações entre grandezas ou figuras, da interconexão entre variáveis e da interpretação dessas regularidades em expressões Matemáticas.

Estudar o conceito de função, em situações contextualizadas, é a maneira de auxiliar a aprendizagem dos alunos na compreensão do conceito. Para isso, Sierpinska (1992) ressalta que se deve utilizar os conhecimentos de funções nas explanações dos fenômenos cotidianos e científicos. Meira (1997) revela que o professor em formação precisa aprender a pesquisar possibilidades pedagógicas que lhe permitam a criação de tarefas e de contexto de atividades e discussões que conduzam à participação do aluno e processo de construção de conhecimentos na sala de aula.

Os PCNEMs (2000) defendem que o conceito de função deve ser compreendido por meio de estudos e de exemplos que ressaltam os fenômenos da vida cotidiana, os fenômenos naturais, as grandezas de conhecimento científico, estabelecendo entre eles conexões que podem ser estudadas dentro e fora da Matemática.

O desenvolvimento da linguagem Matemática com caráter funcional é considerado pelos pesquisadores como relevante para a compreensão do conceito de função. Sierpinska (1992) considera necessário os alunos perceberem e verbalizarem os sujeitos das mudanças, no estudo das regularidades e transformações dos fenômenos escolhidos. Trindade e Moretti (2000) ressaltam a importância de linguagem própria para descrever a lei que rege os fenômenos, apresentando, para isso, argumentos que justifiquem a validade da lei para qualquer caso e em qualquer tipo de representação.

Rêgo (2000), porém, ressalta que o domínio de nova linguagem, como na linguagem conceitual, deve acontecer de uma forma gradual para que o aluno possa lidar com as dificuldades inerentes à representação de função. Para os PCNEMs (2000), a linguagem formal deve ser relativizada. Ainda assim, o aluno deve ser capaz de reconhecer e utilizar a linguagem algébrica nas ciências para modelagem de situações-problema.

A busca de significados na aprendizagem do conceito de função é um dos pontos chave para a compreensão do conceito. Meira (1997) afirma ser necessário buscar significados para os símbolos representados no papel. Carneiro, Fantinel e Silva (2003) revelam que repetir corretamente a definição de função não significa que o aluno ou o professor tenham conhecimento de funções. É necessário que o aluno em formação inicial também contemple os diferentes significados que podem ser atribuídos ao conceito.

Para isso, a aprendizagem deve se basear na construção de situações ricas de significados, com exemplos e identificações. Autores como Rêgo (2000), Costa e Thomaz Neto (2004) consideram ainda que privilegiar a resolução de problemas de aplicação deve ser estratégia a ser utilizada como ponto de partida na aprendizagem do conceito de função. Rêgo (2000) ressalta, ainda, a necessidade de abordagens alternativas à tradicional para a evolução do conceito de função.

Uma das dificuldades mais citadas pelos pesquisadores dos problemas de aprendizagem do conceito de função se relaciona ao fato de os alunos, de qualquer nível educacional, vincularem o conceito de função ao conceito de equação. As dificuldades perpassam, com bastante freqüência, pela compreensão dos aspectos algébricos das funções, sobretudo no estabelecimento de relações de dependência entre variáveis.

Apesar de os autores constatarem que representações gráficas e as transformações destas em representações algébricas são dificuldades enfrentadas pelos mesmos alunos, optou-se, para pesquisa, o estudo da representação algébrica de funções. Possibilitar a compreensão das relações entre variáveis expressas por representações algébricas pode auxiliar os alunos no esclarecimento das diferenças entre conceitos de função e de equação. Os alunos podem inclusive compreender a necessidade das definições do domínio e do contradomínio de função, diante da representação algébrica.

Ao contemplar-se o estudo algébrico do conceito de função, utilizam-se os conhecimentos voltados para a compreensão dos fenômenos cotidianos e científicos, para que a aprendizagem se baseie em situações significativas. A reflexão de problemas e a análise das regularidades e transformações, nas relações entre as variáveis que representam os elementos do problema, são utilizadas em vários períodos da pesquisa.

Os aspectos apresentados estão sendo utilizados, conforme sugestões deste capítulo. Outros aspectos são inseridos na pesquisa e podem contribuir com novas sugestões para a aprendizagem do conhecimento. Conhecer como os alunos ressignificam o conceito de função, pelos conhecimentos adquiridos e como o transforma significativamente diante de processo interventivo que possibilite questionamentos e reflexões dos próprios conhecimentos, são aspectos inseridos neste trabalho a serem discutidos no próximo capítulo, sob a luz da Teoria de Ausubel, Novak e Hanesian (1980).

4. A APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA NA FORMAÇÃO INICIAL DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Para trabalhar o processo de ensino-aprendizagem do Conceito de Função, utiliza-se a teoria da Aprendizagem Significativa de Conceitos defendida por Ausubel, Novak e Hanesian (1980), bem como os autores que estudam e aplicam essa teoria: Moreira (1999), Praia (2000), e, Ribeiro e Nuñez (2004).

As idéias da Aprendizagem Significativa de Ausubel, os Princípios Programáticos e o princípio da Assimilação estão sendo utilizados na pesquisa como ferramentas úteis e princípios metodológicos que fundamentam a seqüência didática planejada e aplicada para a investigação da ressignificação do conceito de função, na formação inicial do professor de matemática.

4.1. A Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel

David. P. Ausubel, nascido nos EUA, desenvolveu seus trabalhos, na década de 60, com o objetivo de propor uma teoria de como se processa a aprendizagem não mecânica, com aplicabilidade em sala de aula. A proposta é estudar a aquisição da organização do conhecimento no ensino formal.

Ausubel, Novak e Hanesian (1980) defendem a tese de que a aprendizagem, por meio da metacognição, fazendo com que os alunos evoluam em níveis de conhecimento e utilizando-se de estratégias organizadas, pode ser mais efetiva já que se adequa melhor às dificuldades cognitivas encontradas no processo da construção mental do conhecimento por parte do aluno.

Essa aprendizagem é um processo que considera o conhecimento do aprendiz sobre o assunto. Ribeiro e Nuñez (2004) enfatizam que o objetivo a ser alcançado, na

Aprendizagem Significativa preconizada por Ausubel, é fazer com que o aluno aprenda utilizando os conhecimentos existentes em sua estrutura cognitiva. Pela relação entre o que se sabe e o novo conteúdo, dá-se a compreensão do assunto estudado com significado e não apenas memorização mecânica. Dessa forma, existe a integração do novo conhecimento ao que se sabe, cuja inter-relação possibilita a transformação de novas idéias em informação por meio de associações, trazendo significado ao novo.

Na visão de Moreira (1999), a Aprendizagem Significativa de Ausubel "é um processo por meio do qual uma nova informação se relaciona, de maneira substantiva (não-literal) e não-arbitrária, a um aspecto relevante da estrutura cognitiva do indivíduo" (MOREIRA, 1999, p.11). A não-arbitrariedade é a relação entre o material potencialmente significativo e as estruturas cognitivas especialmente relevantes do aprendiz denominadas de subsunçores. As novas idéias e conceitos são aprendidos com significado a partir do momento em que idéias e conceitos do próprio aprendiz estejam disponíveis em sua estrutura cognitiva servindo-lhe como pontos de ancoragem.

Subsunçor é, então, um conceito, idéia ou proposição já existente na estrutura cognitiva do aprendiz com a capacidade de ancorar nova informação para o sujeito lhe atribuir significado. A substantividade, por sua vez, é o que é incorporado na estrutura cognitiva do aprendiz, tornando-se substância do novo conhecimento por meio do estabelecimento de variadas representações para um único significado. Assim, para a aprendizagem significativa, as idéias e os conceitos não podem depender exclusivamente do uso de signos específicos, mas de uma variedade deles.

Em face das definições, as condições básicas a serem consideradas para a efetivação da Aprendizagem Significativa, de acordo com Ribeiro e Nuñez (2004), apresentam-se da seguinte forma:

- o novo conhecimento deve ser potencialmente significativo;
- a estrutura cognitiva prévia deve comportar a existência de inclusores prévios;
- o sujeito que aprende deve ter predisposição, atitude ativa a respeito do conteúdo de aprendizagem.

O fato de o conhecimento ser potencialmente significativo vincula-se a outras condições: o significado lógico da natureza do material e o significado psicológico da relação entre material logicamente significativo e a estrutura cognitiva individual do aprendiz.

Para o material ter significado lógico, é necessário que se relacione, de maneira substantiva e não-arbitrária, às idéias e aos conceitos no domínio cognitivo humano. Essa característica é inerente ao próprio material e, segundo Moreira (1999), o conteúdo das disciplinas ensinadas na escola geralmente é apresentado com significado lógico, entre eles, o conceito de função.

Para o significado psicológico do material, é necessário que o relacionamento substantivo e não-arbitrário com a estrutura cognitiva do aprendiz, em particular, seja capaz de transformar o significado lógico do material em psicológico, tornando o conteúdo do material potencialmente significativo.

Moreira (1999, p. 22) conclui que "a emergência do significado psicológico depende não somente da apresentação, ao aprendiz, de um material logicamente significativo, mas também da disponibilidade, por parte desse aprendiz, do necessário conteúdo ideacional". O conhecimento prévio deve servir de matriz organizacional para incorporação, compreensão e fixação de novos conhecimentos, no momento da conexão com conhecimentos especificamente relevantes e pré-existentes, na estrutura mental do aprendiz.

A Aprendizagem Significativa pode ser subdividida em três (3) tipos diferentes de acordo com características específicas:

- representacional;
- conceitual;
- proposicional.

A Aprendizagem Representacional é a aprendizagem dos símbolos individuais e do que representam, ao se estabelecer a equivalência entre os símbolos arbitrários e seus correspondentes passando a remeter o indivíduo ao mesmo significado.

A Aprendizagem Conceitual é um caso especial da aprendizagem representacional. Os conceitos, as idéias e as categorias podem também ser representados por símbolos individuais e arbitrários, estabelecendo equivalência entre a palavra que representa o conceito e o próprio conceito.

A Aprendizagem Proposicional está relacionada com a aprendizagem dos significados das idéias expressas por grupos de palavras combinadas em proposições ou sentenças. Pretende-se aprender o significado que vai além dos significados das palavras ou conceitos da proposição.

Da Aprendizagem Conceitual e da Proposicional, Ausubel, Novak e Hanesian (1980) fazem subclassificações:

- aprendizagem Subordinada;
- aprendizagem Superordenada;
- aprendizagem Combinatória.

No primeiro caso, o novo conhecimento está subordinado de forma hierárquica a uma idéia já existente. É a Aprendizagem Subordinada Derivativa, se a nova informação é aprendida como apenas um exemplo do conceito já existente. Por outro lado, tem-se a Aprendizagem Subordinada Correlativa quando o material aprendido é a extensão, modificação ou limitação de conceito previamente aprendido.

No segundo caso, os conceitos de estrutura cognitiva são reconhecidos como exemplos mais específicos na nova idéia vinculando-se a ela. Existe interação entre as âncoras originando outras mais abrangentes. No terceiro caso, a nova idéia não é considerada mais inclusiva nem mais específica do que outras novas idéias, e a aprendizagem ocorre por analogia.

A Aprendizagem Significativa pode acontecer de duas formas não dicotômicas como afirmam Ribeiro e Nuñez (2004):

- por Recepção, em que o aluno é o receptor das informações e as relaciona com o que tem internalizado mentalmente, criando novos significados;
- por Descoberta, em que o aluno constrói sozinho seu conhecimento relacionando-o com as idéias prévias a respeito do assunto abordado.

A Aprendizagem por Recepção e a Aprendizagem por Descoberta podem ser utilizadas em sala de aula de uma forma significativa. Para Ausubel, ambas são importantes e necessárias para o aprendiz. Qual delas utilizar depende do objetivo que se pretende alcançar. Moreira (1999, p. 16) afirma que “em termos de aprendizagem de conteúdo, o que é descoberto torna-se significativo da mesma forma que aquilo que é apresentado ao aprendiz na aprendizagem receptiva”.

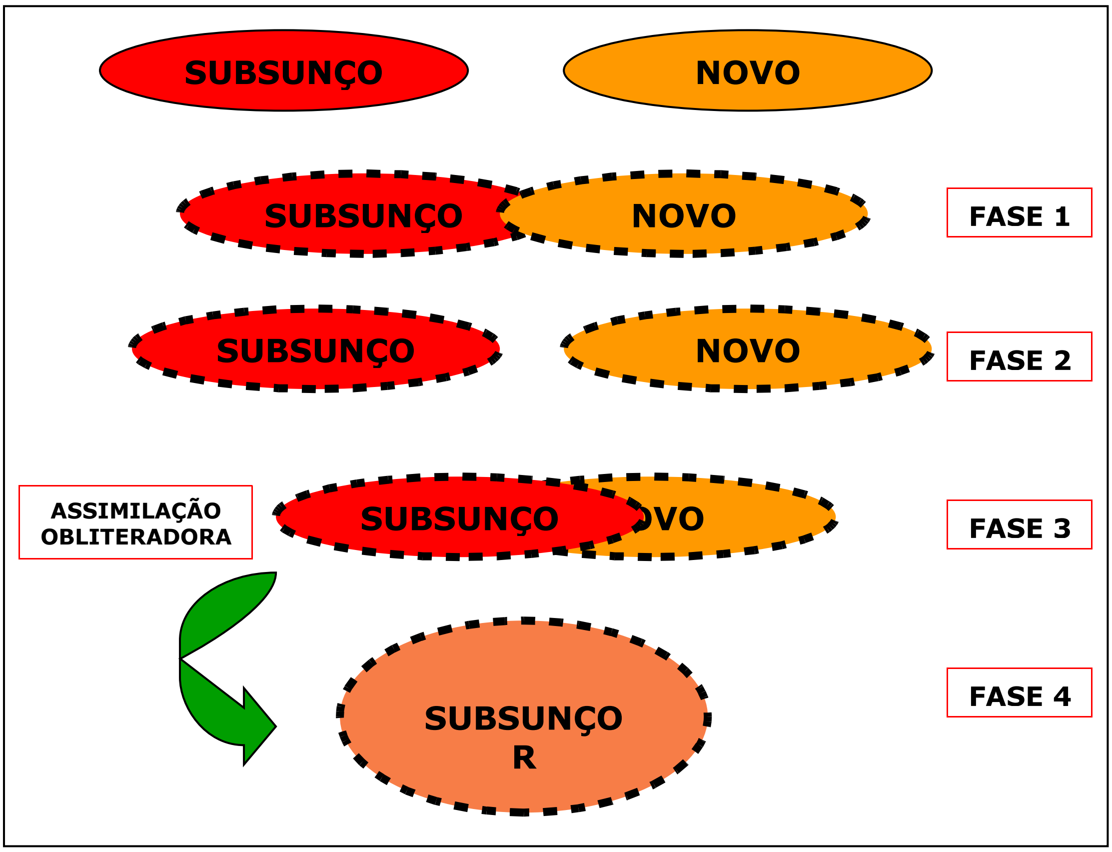
Para Ausubel, Novak e Hanesian (1980), a estrutura cognitiva é formada pelo conteúdo total organizado das idéias do indivíduo, em área particular de conhecimentos. Os conhecimentos são organizados por meio do princípio da assimilação, processo que ocorre quando uma nova informação, potencialmente significativa, é relacionada e assimilada pelo conceito subsunçor da estrutura cognitiva do aprendiz.

A nova informação, ao ser apresentada ao aluno, sofre transformações. O mesmo ocorre com os subsunçores. As transformações se dão devido ao novo conhecimento entrar em contato com os subsunçores da estrutura cognitiva do aluno. Dessa forma, os elementos da estrutura cognitiva podem assumir nova organização e novo significado.

Cada grupo de idéias tem por base a idéia-âncora que pode ser um conceito ou proposição mais ampla que subordina outros conceitos na estrutura cognitiva e funciona como ancoradouro no processo de assimilação. O que acontece na Aprendizagem Significativa é que as novas idéias tornam-se progressivamente menos dissociáveis das idéias-âncora, até não estarem disponíveis individualmente.

A assimilação, (fase 1 da figura 4) inicia quando o novo conhecimento é apresentado ao aluno entrando em contato com os subsunçores, conhecimentos prévios a respeito do assunto. Com o contato, o subsunçor e o novo conhecimento se transformam e geram, como produto, um terceiro conhecimento, ainda em processo de elaboração.

Figura 4 – Modelo do processo de assimilação da Aprendizagem Significativa de Ausubel



Fonte: Elaboração própria

Ausubel, Novak e Hanesian (1980) afirmam que o produto interacional real do processo de aprendizagem significativa não é composto pelo novo significado do subsunçor, nem pelo novo significado do conhecimento, mas pelo significado do composto SUBSUNÇOR + NOVO CONHECIMENTO. A assimilação seqüencial de novos significados tem como resultado a diferenciação progressiva dos conceitos que proporciona refinamento de significados e o incremento do conhecimento para posterior aprendizagem significativa.

Após o estabelecimento de relações entre os conceitos, surgem novos significados, nem sempre compreendidos pelos alunos. Os que apresentam significado conflitante podem ser resolvidos por meio da reconciliação integradora. O significado do novo conhecimento recentemente modificado pode ser inicialmente dissociado da relação estabelecida com o significado do subsunçor também transformado. Os novos significados guardam ainda consigo algumas características básicas (fase 2 da figura 4).

À medida que o processo de assimilação continua, os significados não conseguem mais ser dissociados. O significado das novas idéias vão sendo assimilados ou reduzidos aos significados das idéias contidas nos subsunçores. Ausubel, Novak e Hanesian (1980, p. 108) afirmam que "é mais econômico e menos difícil fixar apenas os conceitos e proposições básicos mais estáveis e estabelecidos do que evocar as novas idéias que são assimiladas em relação às básicas". Assim, o significado do novo conhecimento torna-se progressivamente menos dissociável das idéias que compõem os subsunçores transformados, até deixar de estar disponível individualmente e ser esquecido (fase 3 da figura 4).

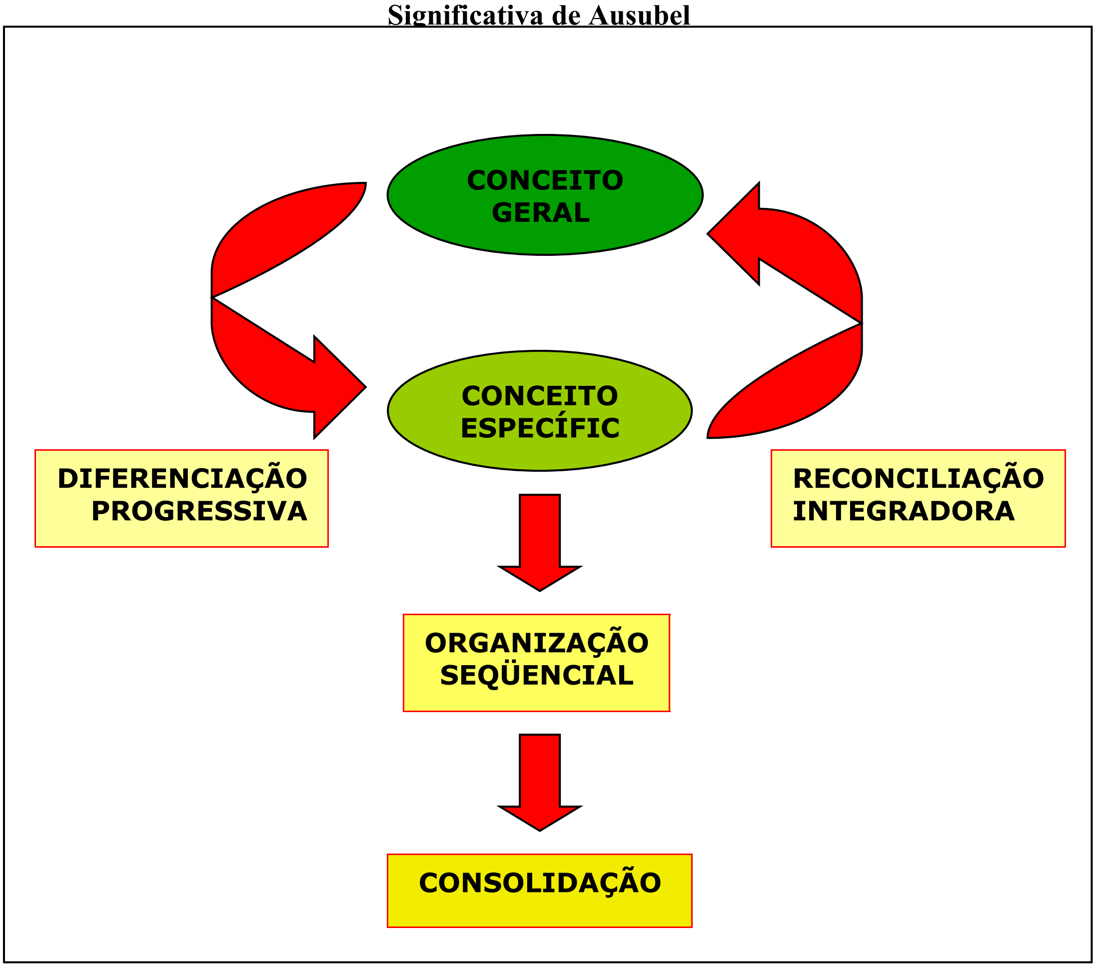
O produto interacional do subsunçor modificado e do novo conhecimento também alterado reduz-se ao próprio subsunçor modificado que se amplia incorporando definitivamente os novos significados (fase 4 da figura 4). Ao processo de "esquecimento" do novo conhecimento transformado atribui-se a denominação de assimilação obliteradora.

De acordo com Praia (2000), o desenvolvimento cognitivo é um processo dinâmico em que os novos conhecimentos estão em constante interação com os já existentes. Dessa forma, Ausubel, Novak e Hanesian (1980) propõem quatro (4)

Princípios Programáticos (figura 5) com a finalidade de auxiliar o professor na construção da Aprendizagem Significativa:

- Diferenciação Progressiva;
- Reconciliação Integradora;
- Organização Seqüencial;
- Consolidação.

Figura 5 – Esquema gráfico dos Princípios Programáticos da Aprendizagem Significativa de Ausubel



Fonte: Elaboração própria

Segundo Moreira (1999), o sistema cognitivo humano se constrói em hierarquia. As idéias mais inclusivas e explicativas ocupam o topo da estrutura e englobam progressivamente idéias, proposições, conceitos e fatos menos inclusivos. Além disso, torna-se mais fácil para o aluno perceber aspectos diferenciados do todo mais geral do que perceber as partes que compõem esse todo.

Na Diferenciação Progressiva, portanto, as idéias mais gerais e inclusivas devem ser apresentadas em primeiro lugar para que sejam diferenciadas em detalhes e nas especificidades. Dessa forma, a Diferenciação Progressiva é definida como "parte do processo da aprendizagem significativa, da retenção e da organização que resulta numa elaboração hierárquica ulterior de conceitos ou proposições na estrutura cognitiva do 'topo para baixo'" (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980, p. 523).

A programação do conteúdo deve proporcionar a Diferenciação Progressiva do conhecimento, explorando as diferenças e semelhanças relevantes, com a finalidade de reconciliar inconsistências reais ou aparentes, preconizadas no segundo princípio, a Reconciliação Integradora, definida como "parte do processo da aprendizagem significativa que resulta na delineação explícita de semelhanças e diferenças entre idéias relacionadas" (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980, p. 526). A aprendizagem deve iniciar com os conceitos mais gerais, ilustrando os conceitos intermediários a eles relacionados para que seja possível introduzir em seguida os conceitos mais específicos, a partir do que retorna-se, por meio de exemplos, ao conceito mais geral na hierarquia, sem perder a visão do todo.

Os tópicos ou unidades de estudo devem ser seqüenciados de maneira coerente com as relações de dependência existentes no conteúdo a ser trabalhado. Este é o momento de fazer com que a nova informação se ancore aos conceitos relevantes existentes na estrutura cognitiva do aprendiz por meio da Organização Seqüencial dos conteúdos. Moreira (1999) recomenda a utilização de Mapas Conceituais desenvolvidos por Novak (1976) ou do Vê Epistemológico, preconizado por Gowin (1981).

Na Consolidação, o conteúdo deve ser explorado ao máximo fazendo uso de práticas e exercícios, antes de introduzir um novo conceito. Deve-se assegurar a alta probabilidade de êxito na aprendizagem seqüencialmente organizada. A dinâmica termina quando o aluno internaliza o conceito, compreendendo-o com significado.

São duas as maneiras de utilização da Aprendizagem Significativa na prática pedagógica:

- substantivamente, por meio da seleção de conteúdos básicos, da coordenação e da integração dos mesmos em diferentes níveis;
- programaticamente, ordenando a seqüência da matéria de estudo, respeitando a organização lógica interna do conteúdo juntamente com as atividades práticas.

Sabe-se que, para haver Aprendizagem Significativa, é necessário que existam idéias-âncora na estrutura cognitiva do aluno com as quais os novos conceitos venham a interagir, garantindo a assimilação do novo conhecimento. O que fazer quando não existem esses conhecimentos prévios apropriados? Ausubel, Novak e Hanesian (1980) defendem o desenvolvimento de recursos denominados Organizadores Prévios. Eles servem de âncora a novas aprendizagens proporcionando o desenvolvimento das idéias prévias.

Neste trabalho, entre os aspectos apresentados da Aprendizagem Significativa, a teoria que trabalha com mapas conceituais é a que está sendo utilizada com maior ênfase, especialmente para a organização dos conceitos de formação do conceito matemático de função. Os licenciandos, sujeitos ativos da pesquisa, podem, diante de representação gráfica, explicitar sua compreensão das discussões, apresentá-la para o grupo de trabalho e modificá-la diante dos erros técnicos ou conceituais cometidos.

4.2. **A Teoria dos Mapas Conceituais de Novak**

Os mapas conceituais foram criados por Joseph Novak, na década de 60, concomitantemente ao desenvolvimento da Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel. Segundo Ribeiro e Nuñez (2004), os mapas conceituais são instrumentos de aprendizagem que se expressam por esquemas visuais com a intenção de possibilitar a representação das relações significativas dos conceitos estabelecidos pelos alunos.

Podem apresentar três tipos de interpretações: como estratégia, como instrumento e como recurso esquemático. Neste trabalho, os mapas conceituais têm conotação instrumental, já que são utilizados para orientar a construção do significado do conceito de função por meio de elaborações conceituais e de suas relações.

As características básicas que diferenciam os mapas conceituais de outros recursos gráficos e outras estratégias cognitivas, de acordo com Ontoria et al. (2005), são três: a hierarquização, a seleção e o impacto visual.

Nos mapas conceituais, os conceitos são trabalhados do maior para o de menor abrangência, sendo este primeiro denominado de inclusor. E, diante do processo hierárquico de construção do mapa conceitual, cada conceito só pode ser visualizado apenas uma vez. Em seguida, faz-se a escolha dos conceitos mais importantes por meio de síntese que contém o aspecto mais significativo do objeto de estudo. Segundo

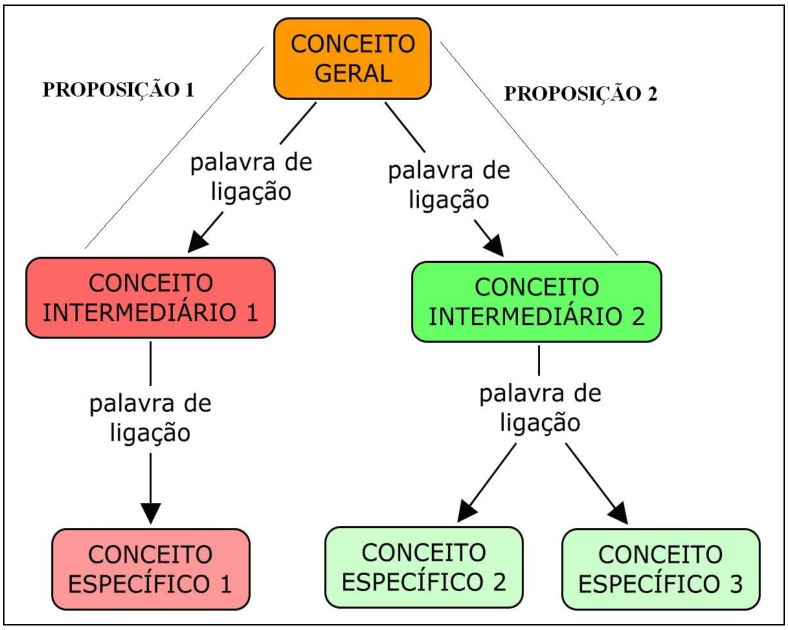
Ontoria et al. (2005), é necessário eleger os termos que referenciem os conceitos antes da construção. A sugestão do autor é que se trabalhe a confecção de mapas diante de variados níveis de generalidade: um mais abrangente que apresenta panorama global do assunto, e outro, mais específico, centrado em subtemas mais concretos.

O impacto visual é uma de suas características mais presentes e deve ser valorizada na construção, diante de apresentação concisa e simples, com esquemas visuais que diferenciem os conceitos inclusores dos demais, seja com letras diferentes, seja com contrastes ou representações geométricas. Por meio desse trabalho, as novas informações podem, na relação de inclusão, se relacionar com os subsunçores do aprendiz, de acordo com os pressupostos da Aprendizagem Significativa de Ausubel.

A estrutura dos mapas conceituais é formada por três componentes básicos: conceitos, proposições e palavras de ligação (figura 6). Os conceitos são símbolos que provocam imagens mentais permitindo a operacionalização com o mundo real e o mundo simbólico. De acordo com Ontoria et al. (2005, p. 44), os conceitos são “as imagens mentais que provocam em nós as palavras ou signos com os quais expressamos regularidades”.

As imagens mentais apresentam elementos comuns para os indivíduos. Porém apresentam também a natureza pessoal peculiar a cada experiência acumulada pelo indivíduo da realidade. As proposições são formadas por dois ou mais termos conceituais atribuindo-lhes significado, formando, assim, a unidade semântica por meio da afirmação ou negação de característica do conceito. Para Ontoria et al. (2005), a proposição é a menor unidade semântica que pode afirmar ou negar alguma característica do conceito. As palavras de ligação são os elos entre os conceitos e mostram o tipo de relação entre eles, não provocando imagens mentais.

Figura 6 – Esquema gráfico da estrutura dos mapas conceituais



Fonte: Elaboração própria

Para Ontoria et al. (2005), a melhor maneira de auxiliar os alunos a aprender, de forma significativa, é ajudá-los na percepção da natureza dos conceitos e suas relações.

Os mapas conceituais são úteis a partir do momento que compilam poucos conceitos e idéias, que trabalham exemplos e análises de idéias simples e estabelecem a condição da representação dos conceitos de forma hierárquica. O autor destaca ainda a necessidade de isolar os conceitos e as palavras de ligação e da construção repetida de um mesmo mapa conceitual para que as falhas possam ser reparadas e a aprendizagem aconteça pela compreensão dos erros.

Paiva e Freitas (2005) afirmam existirem várias estratégias na construção de mapas conceituais. O que varia é a aplicação e os objetivos que se pretende atingir. No trabalho realizado pela leitura de artigos, livros ou textos, o objetivo é modelar a compreensão do aluno, em relação ao assunto e de como desenvolve a relação entre os conceitos. Para isso os autores destacam a seqüência básica de ações que podem auxiliar no trabalho de estruturação de seqüência didática, em sala de aula:

- leitura inicial do texto;
- releitura para destaque dos conceitos mais importantes;
- retirada das palavras ou expressões destacadas;
- organização das palavras;
- conexão entre elas pela utilização de verbo ou expressão que caracterizam a ação atribuindo-lhes significado; e,
- reorganização dos conceitos para que as interligações se tornem claras.

Na construção dos mapas conceituais, pelos conhecimentos prévios dos alunos, o objetivo passa a ser a verificação dos conceitos já incorporados, diante da representação gráfica, das ligações mentais e da interconexão entre os variados conhecimentos adquiridos, atribuindo-lhes significado. Assim, o procedimento a ser utilizado é basicamente o mesmo do caso anterior.

Em trabalho no curso de Licenciatura em Matemática, no CESAT, Espírito Santo, Paiva e Freitas (2005) adotam mapas conceituais para mapeamento dos conteúdos matemáticos das disciplinas de Fundamentos de Matemática Elementar, Geometria e Práticas Pedagógicas. Os alunos são levados a construí-los de acordo com estudos de conceitos primordiais de proporcionalidade. Os pesquisadores concluem que a maneira mais produtiva de utilizá-los no ensino e aprendizagem da Matemática é fazer com que os alunos produzam os próprios mapas conceituais, quando da sua familiaridade com o conhecimento. Nos resultados finais alcançados, os pesquisadores observam aumento na motivação pela aprendizagem da Matemática e a possibilidade de se trabalhar com vários conceitos simultaneamente, sem tornar o processo de ensino-aprendizagem árduo e cansativo.

Almouloud, Manrique, Silva e Campos (2004), em pesquisa financiada pela FAPESP, com os alunos da PUC/SP, cujo objetivo é investigar questões relacionadas à aprendizagem da geometria, nas séries finais do ensino fundamental a fim de reconhecer as representações dos professores, no que se refere ao papel da geometria, no processo de formação do aluno, contribuem com resultados significativos para a utilização dos mapas conceituais no ensino da Matemática.

O grupo buscou os mapas para levantamento das palavras na mente dos professores, relacionadas à palavra-chave dada a priori. Como cada professor é responsável pelo desenvolvimento do próprio mapa conceitual, é elaborado relatório explicitando a complexidade dos processos de mudança, após a aplicação da técnica dos mapas conceituais e da discussão dos diferentes mapas. Segundo os autores, “essa maneira de utilizar os mapas conceituais permitiu que o professor tomasse consciência do seu processo de mudança e refletisse sobre os fatores que o estavam influenciando” (ALMOLOUD; MANRIQUE; SILVA; CAMPOS, 2004, p. 12).

Os autores concluem que, apesar de os mapas serem diferentes para cada professor, houve muitas palavras iguais no grupo de professores. E, apesar de a utilização dos mapas estar relacionada com a criatividade, os autores percebem que seu estudo conceitual indica que os usuários observam as ações necessárias para o ensino da geometria representativas de parcela importante no processo de ensino-aprendizagem.

Os mapas conceituais são citados como instrumentos no Projeto REDIN da UFRGS (2005), projeto voltado para disponibilização de recursos digitais interativos com o objetivo de auxiliar a prática de ensino em Educação a Distância na Formação de Professores em sala de aula. Os mapas conceituais, no caso específico, são utilizados para acompanhamento e avaliação de processos de conceituação atribuída pelos professores que utilizam recursos digitais. A justificativa dos autores, na escolha do instrumento, se baseia, entre outros fatores, na possibilidade de avaliação dos processos de conceituação dos aprendizes.

Para o estudo de ressignificação do conceito de função pelos licenciandos em matemática da UECE faz-se necessário primeiramente conhecer os subsunçores dos alunos deste conhecimento e de que forma os relacionam mentalmente. Pela compreensão, os novos conceitos são apresentados aos alunos para que possam iniciar o processo da aprendizagem significativa.

O estudo dos gráficos, das tabelas, das expressões algébricas e das inter-relações, de padrões geométricos e numéricos, de acordo com modelos de situações reais e científicas, de suas regularidades e transformações, são aspectos teórico-matemáticos considerados no desenvolvimento da seqüência didática que procura proporcionar uma aprendizagem com significado.

Os Princípios Programáticos são utilizados como base para o desenvolvimento do esquema metodológico da pesquisa. A fase das intervenções faz uso desse conhecimento para a estruturação de cada encontro com os alunos.

O Princípio da Assimilação é utilizado como base para a análise dos dados coletados nas intervenções. A análise é desenvolvida após as interpretações dos dados e busca identificar, a cada encontro, em qual das fases do processo de assimilação os alunos se encontram.

Os mapas conceituais são trabalhados com os professores em formação inicial, com o objetivo de explicitar, no momento da Organização Seqüencial, terceira etapa dos Princípios Programáticos da teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel, como os alunos se organizam mentalmente ao relacionar os conceitos nas discussões com o conceito de função. Por serem os mapas instrumentos capazes de demonstrar o significado que o aluno atribui aos conceitos estudados e de revelar com clareza sua organização cognitiva, é que se caracterizam como instrumentos importantes para a proposta da pesquisa.

O desenvolvimento do trabalho investigativo de ressignificação do conceito de função, na perspectiva da aprendizagem significativa de Ausubel, pode ainda não ter sido pesquisado. Dessa forma, compreender como os licenciandos em matemática reestruturam mentalmente o conceito de função, pela valorização de conhecimentos prévios, pode ampliar a compreensão que ainda hoje se tem das dificuldades que os alunos enfrentam, ao enunciar e ao utilizar esse conceito.

5. O PERCURSO METODOLÓGICO E A ETAPA DO LEVANTAMENTO

Define-se o percurso metodológico da pesquisa por meio de sua caracterização enquanto Estudo de Caso, da escolha do público alvo, da estruturação em etapas, e suas respectivas fases e períodos, bem como, o desenvolvimento da coleta e análise de dados baseados nos pressupostos de Stake (1998) e no princípio da Assimilação de Ausubel, Novak e Hanesian (1980).

Os primeiros momentos da pesquisa são evidenciados diante do desenvolvimento do estudo piloto no CEFETCE, na caracterização do curso de Licenciatura em Matemática da UECE e os contatos iniciais com o professor de Fundamentos de Cálculo Diferencial e Integral I e os alunos recém-ingressos na Universidade, período 2007.1.

5.1. O percurso metodológico

Diante das dificuldades dos licenciandos no estudo dos conceitos matemáticos, em sua formação, de uma forma que os permita refletir sobre os saberes, diante das dificuldades relacionadas especificamente à aprendizagem do conceito de função, é que se apresenta o percurso metodológico desta investigação. Questiona-se de que forma os alunos da formação inicial em Matemática ao aprenderem um conceito de forma significativa, transformam sua compreensão.

Esta pesquisa depende da lógica de planejamento e de estratégia baseada nos Princípios Programáticos da Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel; preocupa-se com processos subjetivos e não propriamente com quantidades; investiga o fenômeno contemporâneo da vida real, na formação inicial do professor de Matemática; não exige o controle sobre eventos comportamentais, já que é importante para os resultados finais que os participantes estejam livres para expressar seu pensamento utilizando os instrumentos fornecidos (YIN, 2005). Dessa forma, a metodologia que atende às necessidades é o Estudo de Caso.

A pesquisa qualitativa de paradigma interpretativo traz como eixo temático ético a aprendizagem do conceito de função. Os temas émicos, de acordo com os pressupostos de Stake (1998), são os que podem surgir no decorrer da pesquisa, já que dizem respeito aos temas apresentados pelos próprios atores da investigação, no caso, os alunos de graduação da Licenciatura em Matemática.

O grupo de pessoas escolhido para representar a formação docente inicial em Matemática é composto pelos alunos do 1º ano da Licenciatura em Matemática da UECE, no período de 2007.1. Compreender os conhecimentos prévios dos alunos sobre o conceito de função e como se desenvolvem mentalmente, para atribuição de novos significados, pode auxiliar na caracterização dos alunos que ingressam na Universidade, especialmente sobre saberes em relação ao conceito de função.

Desenvolver o trabalho com todos os alunos matriculados, apesar de ser o ideal, torna a pesquisa inviável. Dessa forma, são selecionados quatro alunos representantes da turma de 2007.1 do período diurno. Os alunos do período noturno não o foram por falta de tempo extra para a participação na pesquisa. A seleção faz-se mediante diálogo entre pesquisadora e alunos, sobre o desenvolvimento da pesquisa nas primeiras aulas do semestre 2007.1, em junho desse mesmo ano. Os alunos escolhidos optam pela participação voluntária e se dispõem a participar dos encontros em horário extra curricular.

A escolha do horário é feita em conjunto e se justifica pela inviabilidade de aplicação em horário convencional, pelo fato de o conteúdo da pesquisa não estar diretamente e explicitamente relacionado aos conteúdos da grade curricular.

A pesquisa se subdivide em duas etapas (figura 7):

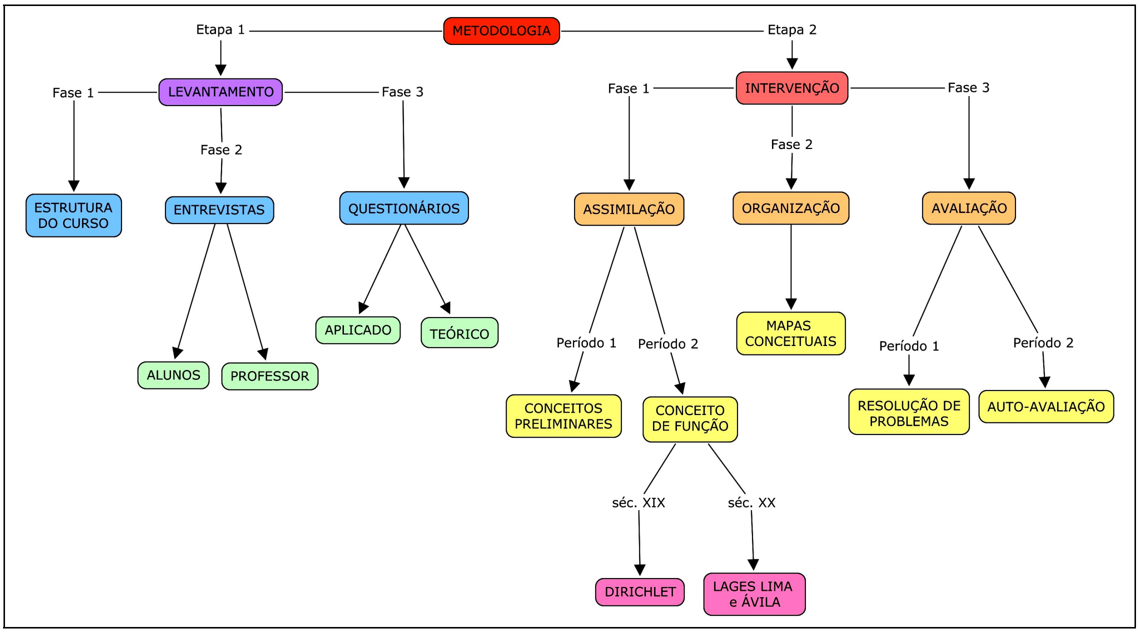
- etapa do Levantamento; e
- etapa da Intervenção.

Na primeira etapa, como são investigados os conhecimentos prévios dos alunos sobre o conceito de função, a pesquisa apresenta caráter exploratório. Na segunda, como são investigadas as diferentes maneiras de transformação do conceito de função para os alunos da formação inicial em Matemática, tem caráter descritivo.

O objetivo do Levantamento é contextualizar o estudo e conhecer o público da pesquisa com:

- a apresentação da estrutura do curso de Licenciatura em Matemática da UECE, no período 2007.1;
- entrevista com o professor da disciplina de Fundamentos de Cálculo Diferencial e Integral I do período diurno;
- entrevistas com os alunos voluntários;
- o desenvolvimento dos questionários teórico e aplicado relativos aos conhecimentos prévios sobre o conceito de função e conceitos subjacentes.

Figura 7 – Estrutura da Metodologia da pesquisa



Fonte: Elaboração própria

A investigação da estrutura do curso de Licenciatura em Matemática da UECE foi realizada pela análise documental da grade curricular do curso, da carga horária disponível para o semestre 2007.1 e da ementa da disciplina de Fundamentos de Cálculo Diferencial e Integral I. A análise procura demonstrar a ênfase às disciplinas de conhecimentos matemáticos comparativamente às disciplinas de conhecimentos não matemáticos, à disponibilidade de tempo dos alunos, aos conteúdos específicos da disciplina, momento de estudo do conceito de função.

A entrevista semi-estruturada com o professor da disciplina apresenta roteiro específico (Apêndice I) e busca compreender, de forma mais aprofundada, a estrutura da disciplina e a justificativa de sua carga horária maior do que as demais disciplinas do curso. Também são abordados, na entrevista, os saberes dos alunos ao ingressarem na Universidade, interesses profissionais e dificuldades em relação aos conhecimentos matemáticos, mais especificamente, em relação ao conceito de função.

A entrevista com alunos voluntários também é semi-estruturada, com roteiro específico (Apêndice II). Conhece-se o perfil dos alunos pela história de vida escolar, de seus interesses profissionais, das dificuldades em relação aos saberes escolares, e, mais especificamente, o que eles compreendem sobre o conceito de função e os conceitos a ele relacionados. As entrevistas são gravadas com o consentimento dos participantes, posteriormente transcritas, armazenadas e catalogadas em banco de dados.

Os questionários são aplicados em dois momentos (Apêndice III):

- questionário teórico; e
- questionário aplicado.

A finalidade desse instrumento de investigação é buscar a compreensão mais aprofundada dos conhecimentos prévios dos alunos, em relação ao conceito de função e as relações entre ele conceito e conceitos subjacentes. Como pensar os conceitos e suas relações de forma teórica pode ser diferente de pensá-los de forma aplicada, a subdivisão auxilia na compreensão de possíveis contradições e inconsistências conceituais dos alunos, no momento inicial.

O questionário teórico contempla perguntas do conceito de função e dos conceitos diretamente relacionados: domínio, contradomínio e imagem, bem como perguntas sobre o conceito de equação, expressão algébrica, variável, incógnita, variável dependente e variável independente.

O questionário aplicado subdivide-se em duas partes relativas aos conjuntos e às representações algébricas. A subdivisão se justifica pelo fato de os alunos geralmente, de acordo com pesquisas citadas no Capítulo 3, estudarem e relacionarem o conceito de função ao conceito de conjuntos e o confundirem com o conceito de equação. As respostas obtidas nos questionários (Apêndice IV) são armazenadas em banco de dados.

O objetivo da Intervenção é descrever o processo de ressignificação do conceito de função, subdividindo-o em três fases, conforme pressupostos de Ausubel nos Princípios Programáticos da Aprendizagem Significativa (figura 7):

- Diferenciação Progressiva e Reconciliação Integradora (fase 1);
- Organização Seqüencial (fase 2); e
- Consolidação (fase 3).

Na fase 1, os alunos são estimulados à discussão sobre o conceito de função e os conceitos subjacentes e a organizá-los, de forma hierárquica descendente, do conceito abrangente para o específico e ascendente, do conceito específico para o abrangente. Ela compreende três períodos:

- conceitos preliminares;

- conceito de função de Dirichlet;
- conceitos de função de Lages Lima e Ávila.

No primeiro período, o objetivo é refletir sobre os conceitos subjacentes ao conceito de função: conceito de equação, expressão algébrica, variável, incógnita, variável dependente e independente, e, possíveis relações. No segundo, os alunos têm o primeiro contato com o conceito de função para que desenvolvam a reflexão sobre a relação de unicidade entre variáveis e o conceito de função. No terceiro, os alunos fazem contato com outras definições formalizadas sobre função: definições de Elon Lages Lima e de Geraldo Ávila.

O terceiro período é inserido na pesquisa, devido à necessidade dos próprios alunos do grupo, em definir função utilizando conhecimentos prévios sobre conjuntos. O objetivo é estimular a reflexão dos alunos sobre a necessidade de se definir função a partir dos conjuntos, bem como a necessidade da definição de regra para verificação das condições de existência e de unicidade.

Na fase 2, organização seqüencial, os alunos são estimulados a construir mapas conceituais dos conceitos discutidos e organizados na fase anterior, integrando-os em uma única representação. Essa fase tem subdivisões. Inicialmente os alunos compreendem o conceito de mapas conceituais, seus elementos, composição e estratégias de construção. Posteriormente, constróem mapas conceituais do conceito de função e conceitos subjacentes para verificar como cada grupo organiza os conceitos e estabelece as relações.

No terceiro momento, os alunos criticam os mapas conceituais dos colegas e desenvolvem novos mapas conceituais em face das críticas dos colegas e pesquisadora. O objetivo é verificar de que forma os alunos modificam ou não a maneira de pensar o conceito de função e organizá-lo de forma esquemática.

Na fase 3, consolidação, os alunos aplicam seus conhecimentos na solução de problemas sobre função utilizando os conceitos apresentados e discutidos em fases anteriores. O objetivo é verificar como os alunos utilizam esse conceito na aplicação de situações práticas e modelagem de problemas, destacando, sobretudo, os conceitos considerados mais relevantes.

No último encontro, os alunos são submetidos a uma auto-avaliação. Os questionários são-lhes devolvidos para que as modificações conceituais relevantes sejam executadas. Esse momento também é destinado à avaliação de todo o processo vivenciado na intervenção. O objetivo principal é verificar se o aluno percebeu seu desenvolvimento durante o processo proposto e de que forma essa percepção contribui para alterar a compreensão do conceito de função.

Em cada encontro da Intervenção, as discussões são gravadas em vídeo e posteriormente transcritas (Apêndice V). Os alunos desenvolvem trabalho escrito, com suas próprias palavras, nos protocolos de intervenção (Apêndice VI). Além disso, os conceitos formalizados teoricamente são utilizados como terceira fonte de dados, como base comparativa para as informações obtidas.

A coleta de dados se baseia em várias fontes de evidência. Documentos, transcrições de entrevistas, questionários semi-estruturados, protocolos escritos, transcrições das intervenções e textos com conceitos teóricos são instrumentos-chave de comprovação das evidências. Os dados coletados são organizados em tabelas, com o auxílio do software Access da Microsoft, que possibilita que, com a entrada de dados da tabela básica, as informações sejam reagrupadas em outros formatos, automaticamente, de acordo com a necessidade dos elementos da pesquisa.

A análise dos dados se fundamenta nos pressupostos de Stake (1998), buscando-se a compreensão dos fenômenos por meio da descrição dos fatos obtidos de forma cronológica sem esperar explicação causal. Dessa forma, os episódios são observados e representados por meio de interpretação direta dos relatos para que o leitor possa compreender o fenômeno estudado, observado e analisado de uma maneira mais geral para que os aspectos mais singulares possam ser aprofundados de forma gradativa, pelo conhecimento do grupo e de suas inquietações.

A análise dos dados é pela interpretação direta dos dados coletados buscando-se encontrar os significados dos acontecimentos e suas inter-relações. Destaca-se o tempo, o lugar e as pessoas envolvidas, diante de explicações narrativas, apresentações cronológicas e descrições personalistas, com o intuito de fornecer informações para o desenvolvimento de generalização naturalista pelo próprio leitor por meio de experiência indireta.

A estratégia de análise se baseia na triangulação dos dados obtidos a fim de garantir a validação da pesquisa, ao tentar reduzir, ao mínimo, as falsas representações e interpretações. De acordo com a tipologia de estratégias de triangulação de Stake (1998), são utilizados dois tipos:

- triangulação de fontes de dados; e
- triangulação metodológica.

No primeiro caso, verifica-se como os alunos compreendem o conceito de função, ao serem estimulados de diferentes maneiras, em cada encontro da Intervenção: conceitos teóricos, verbalizados e escritos. No segundo caso, confronta-se os resultados obtidos com os dados coletados em diferentes instrumentos, entrevista, questionário e intervenções. Com o enfoque múltiplo, esclarecem-se influências externas.

A pesquisa tem início em maio de 2007, com a aplicação de pesquisa piloto, cujo objetivo é testar os instrumentos produzidos para as etapas previstas e a conduta da pesquisadora. A aplicação é realizada no CEFETCE, pela instituição apresentar características semelhantes às da UECE, no que diz respeito à formação inicial de professores de Matemática.

Após modificações de instrumentos e reflexões sobre a forma de conduta da pesquisadora, na aplicação das intervenções, a pesquisa é aplicada na Universidade Estadual do Ceará, entre os meses de junho e outubro de 2007. Os detalhes específicos de cada momento da pesquisa são apresentados nos capítulos subseqüentes.

5.2. Os primeiros momentos da pesquisa

O estudo piloto desenvolvido no CEFETCE é fundamental para a escolha das atividades e problemas matemáticos relacionados ao conceito de função e, também, para a compreensão de como aplicar a pesquisa. O levantamento da estrutura e o do funcionamento do curso de Licenciatura em Matemática na UECE auxilia a estruturação da pesquisa e a compreensão da disciplina de Fundamentos de Cálculo Diferencial e Integral I na qual se ensina o conceito de função.

Os primeiros encontros com os alunos recém-ingressos à Universidade, turma 2007.1, são decisivos para a definição e caracterização do público da pesquisa: alunos voluntários comprometidos em trabalho extracurricular.

5.2.1. O Estudo Piloto

A Pesquisa Piloto tem o objetivo de testar os instrumentos da pesquisa propriamente dita e avaliar a conduta da pesquisadora na aplicação desses instrumentos, especialmente na intervenção. A pesquisa preliminar é realizada com os alunos do CEFETCE, turma 2007.1 do Curso de Licenciatura em Matemática, entre os meses de maio e agosto. Pelo fato da instituição apresentar perfil semelhante ao da Universidade

Estadual do Ceará, ao formar futuros professores de matemática, sobretudo por se tratar de alunos recém-ingressos na Educação Superior, é que se faz a escolha dessa instituição.

Os primeiros contatos com a Coordenadora do Curso e o professor da disciplina de Fundamentos de Matemática dão-se em maio de 2007. Após entrevista com o professor da disciplina, agenda-se a data para a apresentação da proposta de participação da pesquisa aos alunos do CEFETCE como voluntários. O primeiro encontro aconteceu em junho de 2007. Seis alunos se apresentam como voluntários, apenas cinco, porém, puderam participar dos encontros pela disponibilidade de horário extra.

O segundo encontro, com os alunos já selecionados, faz-se no mesmo mês de junho, com os seguintes objetivos: definir as regras de atuação de alunos e pesquisadora para encontros subseqüentes, sobretudo as intervenções, e, assinar o termo de participação da pesquisa exigido pelo Comitê de Ética, bem como fornecer os dados pessoais.

As entrevistas são feitas com apenas dois alunos em 20/06/07, pela manhã, nas instalações do próprio CEFETCE. Os questionários, teórico e aplicado, sobre o conceito de função e seus conceitos subjacentes são desenvolvidos com os cinco alunos voluntários em 26/06/07, na própria instituição. Devido o grupo ter utilizado tempo bastante longo para as respostas e considerar cansativa a tarefa, decide-se que, na pesquisa da UECE, os questionários seriam distribuídos em dias diferentes.

Acerta-se com o grupo que as intervenções acontecem duas vezes por semana, à tarde. Assim, a primeira intervenção é em 03/07/07, no CEFETCE. As discussões conceituais teóricas da primeira fase da pesquisa dão-se em seis encontros, terminadas em 31/07/07. Para discussão e construção dos mapas conceituais do conceito de função, são feitos dois encontros, com término em 07/08/07. O último, em 14/08/07, é destinado à resolução de problemas.

A participação dos alunos no processo não é muito regular. Dois alunos desistem logo no início das atividades, por motivos pessoais. Outros dois fazem-no na metade do processo interventivo. Apenas um aluno participa de todos os encontros.

As fases da pesquisa, após a pesquisa piloto, são as mesmas. Porém a seqüência dos conceitos discutidos é alterada. As relações entre os conceitos mais abrangentes e os mais específicos são respeitadas, de acordo com os pressupostos da Teoria de Ausubel, Novak e Hanesian (1980), para a compreensão mais profunda do pensamento do aluno ao realizar as conexões conceituais. É importante ressaltar que a pesquisa piloto e a da UECE se desenvolvem paralelamente, com intervalo de tempo determinado. Ainda assim, a pesquisa do CEFETCE esteve sempre à frente da desenvolvida na UECE, conservando os seus propósitos.

O aspecto mais importante da pesquisa piloto, de grandes contribuições à pesquisa da UECE, relaciona-se ao comportamento da pesquisadora. Os papéis de professora e de pesquisadora, inicialmente, confundem-se na aplicação da pesquisa piloto. Para separá-los, a pesquisadora busca, em todos os momentos, diferenciar os objetivos próprios do professor, dos objetivos próprios do pesquisador. Ao final do processo, a pesquisadora compreende seu papel e se considera apta a desenvolver as intervenções voltadas aos interesses da pesquisa e não aos da sala de aula, como professora.

5.2.2. A Estrutura do Curso de Licenciatura em Matemática da UECE em 2007.1

O curso de Licenciatura em Matemática da UECE prepara licenciados para o Ensino Médio, com direito a lecionar Ciências e Matemática no Ensino Fundamental. O objetivo geral do curso, de acordo com a proposta curricular, é dotar o profissional docente de base instrumental para desenvolvimento de projetos de pesquisa e extensão, que possibilitem a produção do conhecimento, contribuindo para o desenvolvimento científico e cultural do Estado do Ceará. Ele pode ser cumprido no prazo de 4 a 7 anos, desde que concluídos 168 créditos dispostos em 2.790 horas. Pode ainda ser no período noturno ou diurno.

Pela análise da grade curricular do semestre de 2007.1 (Anexo I), o curso oferta 29 disciplinas obrigatórias, entre elas, 16 de estudo do Cálculo Diferencial Integral, da Geometria Euclidiana, Analítica e Descritiva, do Desenho Geométrico, da Álgebra, da Teoria dos Números, do Cálculo Numérico e da Estatística Descritiva. As demais dizem respeito à disciplina Introdutória ao curso e à Universidade, às voltadas para as novas tecnologias, às específicas de Ciências e às Humanas que contemplam o estudo da Psicologia Evolutiva e da Aprendizagem, Didática Geral, Estrutura e Funcionamento do Ensino Fundamental e Médio e as disciplinas de Prática de Ensino de Ciências e de Matemática. No 1º semestre, mais especificamente, os alunos optantes pelo horário diurno, têm as aulas concentradas no período da tarde.

As disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática da UECE, do referido semestre, são as seguintes:

- Introdução à Universidade e ao Curso;
- Geometria Euclidiana I;
- Fundamentos da Computação;
- Fundamentos de Cálculo Diferencial e Integral I.

A Introdução à Universidade e ao Curso, com um total de 30 horas/aula, é ministrada quinzenalmente. Geometria Euclidiana I, com 60 horas/aula, e Fundamentos da Computação, com 90 horas/aula, são realizadas no horário AB, entre 13h30min e 15h10min, respectivamente, às terças-feiras e quintas-feiras, e às segundas-feiras, quartas-feiras e sextas-feiras, de forma intercalada na semana. Fundamentos e Cálculo Diferencial e Integral I, com maior carga horária, 150 horas/aula, é ministrada diariamente, de 2ª à 6ª feira no horário CD, entre 15h30min e 17h.

A disciplina de Fundamentos e Cálculo Diferencial e Integral I contempla o saber matemático a ser abordado e o conceito de função. Seus objetivos contemplam a revisão de tópicos estudados no 2º grau e a introdução do cálculo diferencial e integral, propriamente dito (Anexo II). O primeiro conteúdo programático da disciplina é o conceito de função, conjuntos numéricos, tipos de funções e respectivas correlações entre conceitos de equação, progressão aritmética, progressão geométrica, trigonometria e números complexos. Os próximos conteúdos contemplam os conceitos de limite e continuidade, de derivada, integral definida e indefinida, bem como as aplicações em situações científicas e cotidianas.

Apesar de a disciplina apresentar tópicos semelhantes aos da pesquisa, sobretudo os que dizem respeito ao conceito de função, a pesquisa não pôde ser desenvolvida no horário convencional de aula. A disciplina é de um conteúdo programático extenso, na qual vários conceitos, teoremas e aplicações são desenvolvidos. A pesquisa interventiva, por sua vez, exige desenvolvimento de longo prazo. Os fatos levam a pesquisadora a optar pelo trabalho em horário extra curricular, sem coincidência com o horário da tarde.

Com a análise das informações, a pesquisadora entra em contato com o Coordenador do Curso e com o professor específico da disciplina de Fundamentos e Cálculo Diferencial e Integral I para conhecer e autorizar o desenvolvimento da pesquisa com os alunos recém-ingressos na Universidade, no período de 2007.1.

5.2.3. Os primeiros contatos com a turma do Curso de Licenciatura em Matemática da UECE de 2007.1

Os alunos do curso de Licenciatura em Matemática da UECE, no período de 2007.1, matriculados em Fundamentos e Cálculo Diferencial e Integral I, totalizam 56: 11 mulheres e 45 homens. O primeiro contato com a turma dá-se em 26/06/07, 20 dias após o início do ano letivo. O professor de Fundamentos e Cálculo Diferencial e Integral I cede tempo para a pesquisadora explanar o trabalho da pesquisa de mestrado e convidar os alunos interessados.

Terminada a aula, os alunos identificados com a proposta se aproximam para compreender melhor os detalhes do trabalho. São apresentados os objetivos e as fases da pesquisa, as regras de atuação da pesquisadora e as regras de operacionalização da pesquisa, incluindo a necessidade de filmar as intervenções. Como a pesquisa se faz em horário extra curricular, dos 10 alunos interessados em participar, apenas 4 realmente confirmam presença no próximo encontro, do dia 02/07/07, sendo 3 mulheres e 1 homem.

Inicialmente, os encontros subseqüentes poderiam ocorrer às terças-feiras e quintas-feiras, entre as 17h e 18h, em sala de aula, onde é ministrada a disciplina de Cálculo I. Resolve-se que, nos próximos encontros, serão realizadas entrevistas, com termo de consentimento livre e esclarecido, exigido pelo Comitê de Ética, e preenchida a ficha com os dados pessoais de cada aluno.

5.3. As Entrevistas

As entrevistas têm o objetivo de caracterizar e conhecer melhor os alunos participantes da pesquisa, recém-ingressos à UECE no período letivo de 2007.1. Com a entrevista do professor de Fundamentos de Cálculo Diferencial e Integral I, procura-se compreender a estrutura da disciplina, bem como os conteúdos matemáticos. A visão do professor sobre os alunos da Universidade é necessária para que os saberes dos licenciandos possam ser mapeados, especialmente no que diz respeito ao conceito de função.

Pela entrevista dos alunos, conhecem-se por meio da experiências escolares e profissionais, seus objetivos no curso de matemática e objetivos na profissão. O acompanhamento da história de vida escolar é necessário para que os alunos possam ser caracterizados, diante das preferências e dificuldades da trajetória. Como objetivo principal, compreender como aprendeu-se o conceito de função, as dificuldades enfrentadas no processo e os elementos formadores dos subsunçores, é o ponto-chave desse momento da pesquisa.

5.3.1. A Entrevista com o Professor de Fundamentos de Cálculo Diferencial e Integral I

A entrevista com o professor de Cálculo I não foi difícil: marcados data e horário é feita sem qualquer adiamento. Com a utilização da câmera, é mais fácil a transcrição do material da entrevista. Realizada em 20/06/07, às 15h 15 min, nas instalações da UECE, a entrevista dura pouco mais de 23 minutos, em que o professor discorre sobre seus dados profissionais, sobre a disciplina de cálculo, bem como sobre os saberes dos licenciandos (Apêndice IV).

O professor afirma que a disciplina é de pré-cálculo, com estudo de conjuntos numéricos até funções, com a inclusão da Geometria Analítica, e em seguida, Cálculo Diferencial e Integral. No que diz respeito ao conteúdo de função, os alunos trabalham com o conceito de lei de definição e construção de gráficos, especialmente quando estudadas as derivadas.

O professor caracteriza os alunos do curso de Licenciatura em Matemática da UECE como despreparados, com grandes dificuldades em relação aos conteúdos matemáticos. São, por outro lado, de fácil relacionamento e, reconhecendo não saber matemática, querem aprender. No geral, as dificuldades são causadas pela grande defasagem dos conteúdos do Ensino Médio, o que justifica a ampliação do curso de Cálculo I para 10 créditos. A falta do hábito de escrever e argumentar, de resolver questões sem se interessar pelo seu desenvolvimento e problemas sem apresentar justificativa são as dificuldades básicas dos alunos “novatos”.

A dificuldade com as simbologias matemáticas é muito forte, mas a organização do raciocínio e a utilização da linguagem também são dificuldades a serem superadas. Quanto à função, o professor afirma que a grande dificuldade dos alunos está em formalizar o conceito, além de calcular, em alguma situação específica, o valor pontual, de compreender a regra da função como caminho a ser seguido. Compreender função sob o ponto de vista teórico e prático, diferenciar variável e incógnita, confundir o conceito de função com o de equação, trabalhar com funções com mais de uma variável, compreender e diferenciar o que são variáveis dependentes e independentes são dificuldades subjacentes, de acordo com o profissional, cuja experiência como professor já ultrapassa os 30 anos de carreira e os 20 anos de UECE.

As dificuldades relatadas pelo professor entrevistado, sobre os conteúdos matemáticos dos alunos recém-ingressos na Universidade não surpreendem. Os autores citados no Capítulo 3 apresentam, em suas pesquisas, dificuldades semelhantes no trabalho com funções. Se os problemas existem, precisam ser investigados enfatizando os conceitos de função, variável, incógnita, equação, expressão algébrica, variável dependente e independente por meio de processos investigativos diante de levantamentos de informações e de intervenções.

5.3.2. A entrevista com o aluno GATO[5]

A entrevista é feita em 02/07/07, por volta das 14h 30min., nas instalações da UECE, durante 34 minutos, em que o aluno discorre sobre dados pessoais, sua história de vida escolar, como conheceu o conceito de função e como o compreende atualmente. (Apêndice IV).

Nascido em Fortaleza/CE, em 1989, sua vida escolar inicia aos 3 anos de idade, em Aquiraz, até a alfabetização, em colégio particular. Da antiga 1ª série até a 5ª série, em colégio público, o mesmo de sua formação infantil. De volta ao colégio particular, estuda com bolsa, da 5ª até a 8ª série. No Ensino Médio, estuda em instituição pública, no CEFETCE.

A maior dificuldade, em relação aos conteúdos matemáticos, é na 5ª série. As frações e as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão lhe trazem grande confusão. Somente no final da 6ª série, transpõe as dificuldades. Acredita que isso é por seu professor não estar preparado para o ensino de Matemática. Formado em Agronomia, no ano seguinte deixa de ensinar Matemática para ensinar Biologia, com cujo conteúdo se identifica mais.

Em relação a outros conteúdos, sempre apresenta dificuldades na compreensão de História, para o que teve que se esforçar. Fazer resumos, muitas atividades, é rotina

[5] Pseudônimo atribuído pela pesquisadora pelo fato do aluno ter se apegado aos gatinhos que passaram a freqüentar os encontros marcados na sala G1 da UECE, Campos do Itaperi.

de estudo. Inglês torna-se difícil, mas, com o curso extra, fora da escola, compreende melhor.

No Ensino Médio, a maior dificuldade é Física, por não haver aprendido os conceitos de maneira mais aprofundada na 8ª série. Os conteúdos de Química são igualmente difíceis, mas com o tempo, consegue compreender melhor que os de Física. Mesmo assim afirma que Química é a disciplina favorita, seguida de Matemática, Biologia e Filosofia. Conclui o Ensino Médio, no CEFETCE aos 19 anos de idade, em 2005, e, ao prestar vestibular pela primeira vez, ingressa na UFC cursando Bacharelado em Matemática no período diurno.

Como não se identifica com o curso, ao término do 2º semestre letivo, presta vestibular novamente para o curso de Licenciatura em Matemática na UECE. No ano de 2007 estuda nas duas Universidades. Não tem experiência como professor de matemática. Diz apenas ter contato com o ensino ao ministrar aulas particulares há sete anos, na própria casa, com a participação de poucos alunos. Gosta de ensinar matemática. A matemática pura e simples não o atrai. Por outro lado, ensinar outros conteúdos também não. Seu objetivo é seguir a carreira vinculada ao ensino da matemática para aprender a repassar conhecimentos matemáticos.

Pretende concluir o curso de Licenciatura em Matemática da UECE e prosseguir a pós-graduação, no curso de especialização na área e, em seguida, no Mestrado. Relata ainda que, nesse período, gostaria de estar atuando em sala de aula. Se pudesse escolher, gostaria de ensinar na cidade onde mora, Aquiraz, no colégio público que freqüentou no Ensino Fundamental I.

Seu primeiro contato com o conceito de função acontece na 7ª série, conhecimento utilizado nos anos subseqüentes, inclusive na Faculdade. O professor ensina o conceito de função utilizando a Teoria dos Conjuntos e a correspondência dos elementos de um conjunto em outro, por meio do Diagrama de Venn e as setas de conexão de cada par de elementos.

Suas maiores dificuldades no conceito se relacionam ao fato de os elementos de domínio de função apresentarem uma única correspondência com os elementos do conjunto contradomínio e os elementos do contradomínio apresentarem a possibilidade de ter mais de uma correspondência com o conjunto domínio. Além disso, diferenciar imagem de contradomínio é de difícil compreensão. Ele afirma que se confunde em relação aos conceitos.

Os elementos que caracterizam função, em sua opinião, são: a lei de correspondência entre dois conjuntos, o domínio e o contradomínio. Os conceitos de variável, de incógnita, de relação e de equação também se relacionam ao conceito de função, mas acredita não existir diferença entre incógnita e variável, são conceitos idênticos. Para representar função, prefere utilizar gráfico. Além de melhor visualizar a função e seu comportamento, ele acredita que o domínio e o contradomínio ficam explícitos.

Apresenta a primeira definição de função da seguinte forma: "*considerando dois conjuntos A e B, chama-se função a relação que existe entre o conjunto A com o conjunto B, uma certa lei de formação, a lei da função, (...) um elemento no conjunto A pode ter uma única imagem no conjunto B*". Ao fim, parece estar esquecendo alguma coisa, mas prefere não complementar.

Os elementos subsunçores do aluno sobre o conceito de função se relacionam basicamente com a visão de função associada aos conjuntos, isto é, elementos como lei de formação, domínio, contradomínio e imagem fazem parte de conhecimentos adquiridos. Vale ressaltar que, para esse aluno, função é a relação entre dois conjuntos em que a lei de formação é fator preponderante, bem como o fato de a imagem ser única para cada elemento do domínio.

5.3.3. A entrevista com o aluno PEIXE[6]

A entrevista é realizada em 03/07/07, às 17h, nas instalações da UECE, durante 20 minutos em que o aluno discorre sobre dados pessoais, sua história de vida escolar, como conheceu o conceito de função e como o compreende atualmente (Apêndice IV).

Nascido em Fortaleza/CE, em 1988, sua vida escolar iniciou pela alfabetização. A educação básica até o Ensino Médio é sempre no mesmo colégio particular, por escolha dos pais e pelo fato de ser próximo ao local de morada.

As dificuldades em relação aos conteúdos matemáticos são os estudos de tabuada de multiplicação, no Ensino Fundamental I, e no Ensino Médio, o conteúdo de Probabilidade. Assuntos de Geometria Espacial ou Plana, afirma não gostar de estudar, mas com dedicação consegue compreendê-los. Em relação a outros conteúdos, não gosta de História, Língua Inglesa e Portuguesa, por não apresentarem conteúdos exatos, o que se perpetua até hoje. As disciplinas favoritas são Matemática e Física. Sua

[6] Pseudônimo escolhido pelo próprio aluno.

exatidão o atrai e, mesmo que precise ler e interpretar problemas, considera que o pensamento é diferente do utilizado para pensar sobre conteúdos lingüísticos.

Conclui o Ensino Médio no Colégio Dom Quintino, aos 17 anos de idade, em 2005, e, ao prestar vestibular, ingressa na UECE, cursando Licenciatura em Matemática no período diurno. Tenta o curso de Engenharia Mecânica na UFC e o curso de Mecatrônica no CEFETCE, sem êxito. Não apresenta experiência como professor de matemática. Diz apenas ter contato com o ensino, ao ministrar aulas particulares para os amigos, de Matemática e Física. Gosta de estudar conteúdos exatos, sem dupla interpretação. Pretende seguir a carreira de docente e seu objetivo com o curso de Licenciatura é se tornar professor.

Seu primeiro contato com o conceito de função é na 8ª série, utilizando esse conhecimento nos anos subseqüentes. Seu professor apresenta o conceito de função utilizando a Teoria dos Conjuntos e a correspondência dos elementos de um conjunto em outro por meio do Diagrama de Venn e as setas de conexão de cada par de elementos.

Sua maior dificuldade é com a interpretação gráfica. Diz ter aprendido a reconhecer e a compreender gráficos praticamente sozinho pelo método de acertos e erros. Os conceitos sobre vértice, ponto máximo, ponto mínimo, por exemplo, não foram ensinados na escola. Para o aluno, não existem elementos específicos de função. O que normalmente se faz, ao trabalhar esse conceito, é "*calcular alguma coisa a partir de outra*". O conceito de variável, de incógnita, de relação e de equação também se relacionam ao conceito de função, mas acredita que o conceito de variável e incógnita são iguais. Para representar uma função, prefere utilizar expressão algébrica. Por meio dessa representação, ele é capaz de verificar o grau da função, número de raízes e o tipo do gráfico.

Sua primeira definição de função é: "*uma função matemática é uma expressão algébrica que me permite calcular alguma coisa a partir de outra*". Não quis acrescentar outras informações.

Os elementos subsunçores do aluno, sobre o conceito de função, se relacionam basicamente com a visão da função associada aos conjuntos. Não explicita os elementos de uma função, tais como domínio, contradomínio e lei de formação. O conceito se pauta no conceito de cálculo e de relação entre duas "coisas" levando a compreender, de forma interpretativa, que seja uma relação entre conjuntos.

O aluno GATO e o aluno PEIXE apresentam origens diferentes, com trajetórias de vida também diferentes, que, em alguns momentos, apresentam características semelhantes, por exemplo, estão juntos não só no curso de Licenciatura em Matemática da UECE, como também nesta pesquisa. Gostam de matemática, pretendem ser professores da área, estudaram função pela Teoria dos Conjuntos, consideram que variável e incógnita são conceitos idênticos, acreditam que equação, relação, variável e incógnita são elementos relacionados ao conceito de função, e reconhecem ter dificuldades em alguns aspectos desse conhecimento.

Enquanto o aluno GATO tem conceitos explícitos de função, como domínio, contradomínio e lei de formação, o aluno PEIXE os tem de forma implícita, externalizando somente a relação capaz de transformar um elemento de um conjunto em elemento de outro conjunto. Constata-se assim que os elementos formadores dos subsunçores de ambos são diferentes, embora tenham aprendido função pelo conhecimento de conjuntos. Para as análises subseqüentes, serão consideradas as estruturas cognitivas individuais, apesar de o trabalho ter sido realizado em conjunto.

5.4. Os Questionários

Os questionários têm o objetivo de saber mais profundamente os conhecimentos prévios dos alunos, em relação aos conceitos básicos de função diante da visão teórica e aplicada da matemática. Essa fase da pesquisa é realizada em dois dias, o primeiro para o desenvolvimento do questionário teórico, e o segundo, para o questionário aplicado. Nesse ínterim, os alunos ficam livres para pesquisar o tema e se aprofundar em questões que lhes suscitem dúvidas.

O Questionário Teórico é realizado em 09/07/07, às 15h, na sala G1 do Campus do Itaperi. As perguntas teóricas buscam compreender o que os alunos pensam sobre os conceitos de:

- função, domínio, contradomínio, imagem e lei de correspondência;
- expressão algébrica e possível relação com o conceito de função;
- equação e possível relação com o conceito de função;
- variável e incógnita e suas relações com o conceito de função;
- variável dependente e variável independente.

O Questionário Aplicado é realizado em 10/07/07, às 15h, na sala G1 do Campus do Itaperi. As perguntas apresentam situações matemáticas aplicadas, subdividindo-se em duas partes:

- aplicação com conjuntos;
- aplicação com álgebra.

Na primeira parte, o objetivo é verificar como o aluno reconhece uma função a partir da leitura dos Diagramas de Venn; caracteriza os conjuntos domínio, contradomínio e imagem de uma função; reconhece sua lei de correspondência e suas variáveis; caracteriza a variável dependente e a variável independente.

Na segunda parte o objetivo é verificar como o aluno reconhece uma função a partir da leitura de uma situação algébrica; reconhece os elementos formadores dessa função; reconhece uma equação e uma expressão algébrica; e caracteriza o domínio, o contradomínio e a imagem da função.

5.4.1. O Questionário Teórico do aluno GATO

O aluno responde o questionário em 33 minutos (Apêndice V). Ao definir função, afirma que "*Função é uma relação que ocorre geralmente entre dois conjuntos que utiliza uma característica para relacionar os elementos desses conjuntos*". Exemplifica a definição da seguinte maneira: "*a quantidade de dinheiro que gasto em relação à quantidade de livros que compro*".

O aluno ressalta o conceito de função, no questionário teórico, como relação entre dois conjuntos, da mesma forma que na entrevista. Acrescenta novo elemento, a palavra "característica". Supõe-se, relacionado ao conceito de lei de formação da função expressa na entrevista. É interessante ressaltar que, no exemplo, o aluno não explicita os conjuntos, nem a lei de formação de relação, afirmando apenas a existência da relação. Pode-se concluir, a princípio, que o conceito de relação esteja relacionado ao conceito de função.

O domínio e o contradomínio e a imagem são definidos como conjuntos formadores de uma função. O domínio é formado pelos elementos que iniciam a relação; o contradomínio, pelos elementos que podem se relacionar com os elementos do domínio; e, a imagem, pelos elementos do contradomínio que apresentam um correspondente no domínio.

A lei de formação é definida como "*característica utilizada para corresponder um elemento do domínio com o contradomínio*". Acrescenta ainda que a lei de formação também pode ser uma equação e apresenta como exemplo "$y = 2x + 5$". Pode-se concluir que a palavra "característica" se relaciona ao conceito de lei de formação da função. E, como está relacionado ao conceito de equação existe a possibilidade de que o conceito de equação esteja vinculado ao conceito de função por meio do conceito de lei de formação.

Define equação como "*uma expressão algébrica que contém uma igualdade*". E, como exemplo, coloca que "$3x + 1 = 5$" representa uma equação. O aluno não utiliza o termo função para definir equação, o que pode significar que o conceito de equação, em sua compreensão, não seja igual ao conceito de função. Ainda assim acredita que uma equação pode representar uma função já que é possível estabelecer "*uma correspondência entre os elementos do domínio e do contradomínio*" por meio de uma equação.

Define expressão algébrica como "*uma expressão que pode relacionar números e variáveis*" e utiliza "2a + 3b + c" como exemplo. O aluno não utiliza o conceito de função para definir expressão algébrica. Isso pode significar que o conceito de expressão algébrica não seja igual ao conceito de função. Na realidade, o aluno afirma que a expressão algébrica não pode representar uma função porque "*não há como corresponder dois elementos de conjuntos distintos (no caso domínio e contradomínio)*". Conclui-se que o conceito de expressão algébrica não está relacionado ao conceito de função.

Ao definir incógnita, escreve que "*é uma letra que representa um valor desconhecido*". Ao definir variável, coloca que "*é o mesmo que incógnita*". Em nenhuma das definições, os conceitos de equação e função estão presentes. Porém afirma que uma incógnita (ou variável) pode ser utilizada numa equação, já que ela pode ser representada por valores conhecidos ou não. Isso pode significar que os conceitos de equação estão relacionados aos conceitos de incógnita e variável. O aluno afirma que uma incógnita (ou variável) pode representar uma função, porque normalmente ela é representada por uma equação. Conclui-se que os conceitos de incógnita e variável também se relacionam ao conceito de função.

Variáveis dependentes "*são aquelas que dependem do valor de outra variável*" e variáveis independentes "*não dependem de uma outra variável*". Como exemplo coloca que "$y = 2x$" é uma relação onde y representa uma variável dependente, e x uma variável independente. Ainda assim não utiliza os conceitos de função e de equação nessas definições. E, apesar do conceito de variável estar relacionado ao conceito de função e de equação, nada se pode afirmar da relação entre variável dependente e independente e o conceito de função.

5.4.2. O Questionário Teórico do aluno PEIXE

O aluno realiza o questionário em outra data, 10/07/07, às 15h43min, em 45 minutos (Apêndice V). Ao conceituar função, afirma que "*Função matemática é uma relação entre dois números, onde um dos números é obtido a partir do outro*". E, como exemplo, coloca que uma função pode ser "*f(x) = 2x + 1*". O que na entrevista era concebido como expressão algébrica, agora é citado como relação entre dois números. É interessante ressaltar que, no exemplo, o aluno representa função algebricamente. Conclui-se que o conceito de função está relacionado ao fato de um número ser obtido a partir de outro, por meio de uma igualdade que os relacione. O conceito de relação pode estar vinculado ao conceito de função, em sua estrutura cognitiva.

O domínio, o contradomínio e a imagem não são definidos como conjuntos formadores do conceito de função, mas pelo que eles representam na função. O domínio "*representa os valores que o número x pode assumir*", o contradomínio "*representa os valores que o número f(x) pode assumir*", e, a imagem "*representa os valores que f(x) assume para um determinado valor de x*".Utiliza-se em várias situações, a representação algébrica. Até mesmo os elementos dos conjuntos apresentam a representatividade algébrica. E, apesar do domínio, contradomínio e imagem não estarem explícitos, na definição sobre função, o aluno os reconhece como elementos integrantes do conceito.

A lei de formação é definida como "*relação entre o seu domínio e o seu contradomínio*". Como exemplo, coloca que "*f: R -> N*" representa uma lei de formação. Não considera a lei de formação como sendo uma equação. E, apesar de ter exemplificado uma função utilizando os elementos da equação, considera que a lei está relacionada à representação da relação entre o domínio e o contradomínio.

O aluno considera a equação como "*uma igualdade entre dois números*". Exemplifica o conceito da seguinte maneira: "*4x + 8 = 0*". Não utiliza, no conceito de equação, o conceito de função, mas concorda com a possibilidade de a equação representar uma função, pois uma "*função representa uma igualdade*". É possível que o conceito de equação esteja relacionado ao conceito de função, mas não necessariamente relacionado ao conceito de lei de formação. Ainda assim, é possível considerar que o conceito de equação seja diferente do conceito de função em sua estrutura cognitiva.

Define expressão algébrica como "*uma expressão que representa um único número*". Exemplifica a expressão algébrica da seguinte maneira: "*4x + 3*". Não utiliza o conceito de função para definir expressão algébrica. Isso pode significar que o conceito de expressão algébrica não esteja relacionado ao conceito de função. O aluno afirma que a expressão algébrica realmente não pode representar uma função porque "*uma função representa uma relação entre dois números e uma expressão algébrica representa apenas um número*". Conclui-se que o conceito de expressão algébrica não está relacionado ao conceito de função.

Ao definir incógnita, escreve que "*é um número que é representado por uma letra e que representa a relação de uma equação*". Ao definir variável, coloca que "*é um número que pode variar de acordo com o resultado que se queira chegar*". É possível que o conceito de incógnita esteja relacionado ao de equação, o que não necessariamente acontece com o conceito de variável. Esse fato se comprova, ao afirmar que uma incógnita pode ser utilizada na equação porque "*é justamente o que dá sentido a uma equação*". Porém, no que diz respeito à variável, o aluno considera que ela não pode ser utilizada numa equação porque o valor da incógnita representa a solução da equação e a solução não vai variar.

Se a incógnita está na equação e a equação representa uma função, por transitividade lógica, a incógnita também pode estar na função. Dessa forma, o aluno afirma que "*a incógnita pode ser representada pela letra x de uma função e pode também representar sua solução*". Acredita-se que, ao falar sobre solução, ele esteja se referindo à solução da equação. Apesar de considerar que a variável não está presente na equação, considera que ela é um elemento formador de função afirmando que, "*embora existam funções sem variáveis (funções constantes), a variável é que compõe a função*". Conclui-se que incógnita e variável são dois conceitos relacionados ao conceito de função.

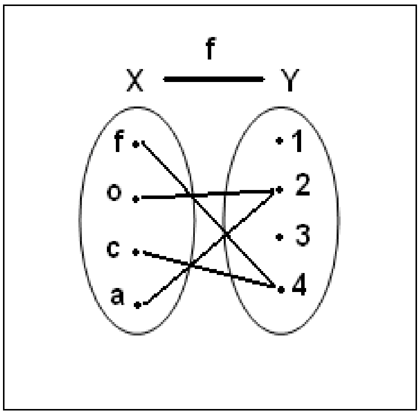
O aluno não consegue reconhecer a variável dependente, nem uma variável independente. Dessa forma, não consegue estabelecer relação entre elas, nem apresentar exemplos para identificá-las ou relacioná-las ao conceito de função.

5.4.3. O Questionário Aplicado do aluno GATO

O aluno realiza o questionário em outra data, em 11/07/07, às 15h25min, em outro local, também no Campus do Itaperi, em 17 minutos, um tempo menor do que o questionário anterior (Apêndice V).

Na 1ª parte do Questionário Aplicado, o aluno escolhe a representação A (figura 8) para caracterizar uma função, justificando que a situação obedece à "*lei da função*".

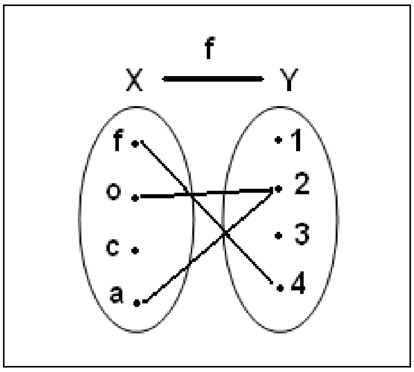
Figura 8 – Situação A do Questionário Aplicado – Parte 1



Fonte: Elaboração própria

Rejeita a situação B (figura 9) porque "*um dos elementos de x que é consoante não está ligado a um elemento em y*" e a situação C (figura 10) porque "*o elemento c possui duas imagens*".

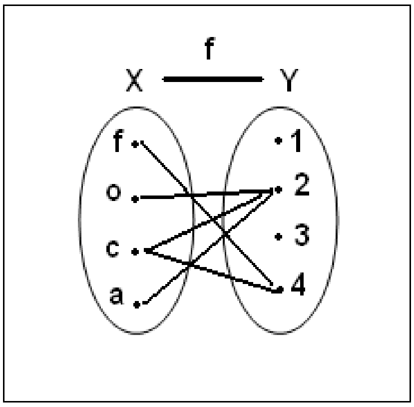
Figura 9 – Situação B do Questionário Aplicado – Parte 1



Fonte: Elaboração própria

O aluno considera a definição do domínio, do contradomínio e da lei de formação suficiente, para uma relação se definir como função. É necessário que os elementos do domínio apresentem um único correspondente no contradomínio. Existem condições a serem consideradas. Reconhece o domínio como um conjunto formado pelos elementos do conjunto X, o contradomínio como um conjunto formado pelos elementos do conjunto Y e a imagem como os elementos do contradomínio que apresentam uma correspondência no domínio, enfatizando o que definiu no Questionário Teórico.

Figura 10 – Situação C do Questionário Aplicado – Parte 1



Fonte: Elaboração própria

Os elementos do domínio e do contradomínio são caracterizados como variáveis, sendo que a variável independente pertence ao primeiro conjunto e a variável dependente, ao segundo conjunto citado. O aluno reconhece que as variáveis estão na função e que, devido à relação entre elas, uma pode se caracterizar como dependente e outra como independente, inclusive no que diz respeito aos conjuntos.

Na 2ª parte do Questionário Aplicado, a função v: R $\rightarrow$ R pode ser caracterizada por "*x + y = 10*", pois essa representação mostra a relação existente entre x e y numa equação. Descarta-se a opção "*x + y*" porque "*não é uma equação*" e a opção "*x + 1 = 10*" porque "*não há como relacionar x com y*". Nessa situação, as condições para ser função não citadas pelo aluno. Para ser função é necessário que se tenha uma equação representada por duas letras que possam se relacionar entre si. Com duas letras, não sendo equação, ou se for equação e não tiver duas letras, não é possível se construir uma função.

Para o aluno, x e y representam incógnitas e variáveis, sendo que x é considerada variável dependente e y, variável independente. Os resultados ratificam os apresentados no Questionário Teórico sobre o fato das variáveis se relacionarem ao conceito de função.

Interrogado sobre qual situação representa equação, escolhe a opção "$x + 1 = 10$", não fazendo qualquer menção à situação "$x + y = 10$" que considera representar uma função por ser equação. O fato pode denotar que o aluno, ao compreender uma situação como função, deixa de compreendê-la como equação, mesmo que considere a relação entre os conceitos de equação e função.

Caracteriza expressão algébrica como "$x + y$". Percebe-se que, apesar de a função e a expressão algébrica serem formadas por incógnitas e variáveis, elas representam conceitos diferentes e não estão, aparentemente, relacionadas entre si. Reconhece o domínio, o contradomínio e a imagem como sendo o conjunto R dos números reais. Mesmo diante de representação algébrica, o aluno reconhece os conjuntos como elementos básicos de uma função.

5.4.4. O Questionário Aplicado do aluno PEIXE

O aluno realiza o questionário em outra data, 11/07/07, às 15h25min, em outro local, também no Campus do Itaperi, com o aluno GATO, em 33 minutos, tempo semelhante ao levado para o questionário anterior (Apêndice V).

Na 1ª parte do Questionário Aplicado, o aluno escolhe a representação A (figura 8) para caracterizar uma função, justificando que a situação obedece a "*todas as leis da função*". Rejeita a situação B (figura 9) porque "*o elemento ′c′ deveria estar ligado a um número par não primo, mas não está*" e a situação C (figura 10) porque "*o elemento ′c′ não deveria estar ligado ao elemento 2*".

Reconhece o domínio como conjunto formado pelos elementos do conjunto X, o contradomínio como o conjunto formado pelos elementos do conjunto Y e a imagem como os elementos do contradomínio que apresentam correspondência no domínio, enfatizando o que havia definido no Questionário Teórico.

Define como variável apenas os elementos pertencentes ao domínio e justifica afirmando que "*são os elementos do domínio que variam para definir a sua imagem*". E, apesar de não saber definir variáveis dependentes e independentes, conforme os resultados do Questionário Teórico, o aluno considera que a variável k se comporta como variável independente e não existe variável dependente.

Na 2ª parte do Questionário Aplicado, a função v: R $\rightarrow$ R pode ser caracterizada por "$x + y$", pois a situação "*é a única que não representa uma equação*", descartada a opção "*$x + 1 = 10$*" porque "*considera ser uma equação*" e a opção "*$x + y = 10$*" pelo mesmo motivo.

Para ser função, é necessário que se tenha uma expressão algébrica representada por duas letras que não caracterizem uma equação. É importante ressaltar que, na Entrevista e no Questionário Teórico, o aluno afirma que uma equação pode representar uma função. Já, no Questionário Aplicado, o aluno afirma justamente o contrário. Até que ponto o conceito de equação pode estar relacionado ao conceito de função?

Nessa situação, x e y representam variáveis, e, em ambos os casos, variáveis independentes. Para ele não existem variáveis dependentes. Na 1ª parte do questionário e na 2ª, o aluno consegue reconhecer apenas variáveis independentes. O fato de não saber definir o conceito de variável dependente e independente pode influenciar na compreensão desses conceitos também em situações aplicadas.

Interrogado sobre qual situação representa equação, escolhe a opção "*$x + 1 = 10$*" e a situação "*$x + y = 10$*". Justifica sua escolha afirmando que essas situações "*não representam função e nem simples expressões algébricas*". O resultado ratifica o fato de uma equação não poder representar uma função. Contradiz, porém, o apresentado no Questionário Teórico.

Ao caracterizar a expressão algébrica, reconhece-a como "*$x + y$*", justificando que a situação "*não apresenta sinal de igualdade*". Ao caracterizar a função, o aluno também utiliza a mesma representação algébrica utilizando praticamente a mesma justificativa. Pode-se concluir que o conceito de expressão algébrica está relacionado ao de função. O fato contradiz o apresentado no Questionário Teórico, a respeito do conceito de expressão algébrica. Nessa situação, o aluno afirmou que a expressão algébrica não representa uma função porque toda função representa uma relação entre dois números, o que a expressão algébrica não é capaz de fazer. Conclui-se que o conceito de expressão algébrica pode estar ou não relacionado ao de função. Ainda suscita dúvidas.

Reconhece o domínio, o contradomínio como sendo o conjunto R dos números reais. Porém não faz qualquer menção ao conjunto imagem. É importante ressaltar que, mesmo com a representação algébrica, o aluno é capaz de reconhecer conjuntos como elementos básicos de uma função.

Para o aluno GATO, o conceito de função aparece, em diferentes situações, vinculado ao de relação entre conjuntos, em que a lei de formação é o aspecto mais relevante. Reconhece também a função pela relação entre variáveis. Para o aluno

PEIXE, o conceito aparece mais diversificado, vinculado à relação entre dois números, e à relação entre conjuntos e entre variáveis, em que o conceito de lei de formação aparece de forma implícita.

. Os conjuntos domínio, contradomínio e imagem são, para ambos, conceitos relacionados ao conceito de função. As condições de existência e de unicidade de uma função são apresentadas pelos alunos em situações que requeiram pensamento voltado para conjuntos. O aluno GATO explicita as duas condições, já o aluno PEIXE explicita apenas a condição de existência. Os conceitos de equação e de expressão algébrica diferenciam a formação da estrutura cognitiva de cada um. Para o aluno GATO, o conceito de equação está relacionado ao conceito de função. Para o aluno PEIXE, a relação acontece no aspecto teórico, não se revelando em situações aplicadas.

É compreensível que o conceito de expressão algébrica, para o aluno GATO, não está relacionado ao de função. Porém, para o aluno PEIXE, a relação ainda suscita dúvidas. Teoricamente, o aluno considera não haver relação, porém, em situações aplicadas da matemática, a vinculação ocorre enfaticamente.

Os conceitos de variável e de incógnita são idênticos, a princípio, para ambos. Porém, num segundo momento, o aluno PEIXE modifica sua opinião e afirma que, na função, existem apenas variáveis, o que pode denotar que variável e incógnita apresentam, para o aluno, conceitos diferentes. O aluno GATO, por sua vez, mantém sua opinião em todos os questionamentos.

Em relação às variáveis dependentes e independentes, o aluno GATO consegue se manter fiel a sua definição teórica vinculando o conceito de variável dependente ao domínio, e o conceito de variável independente do conceito de contradomínio. O aluno PEIXE, porém, não definindo teoricamente os conceitos, faz menção apenas às variáveis independentes, no plano das aplicações, afirmando que não existem variáveis dependentes no que reconhece como função.

Ao refletir sobre o conceito de função, é perceptível que os alunos tragam em sua estrutura cognitiva, conceitos semelhantes, bem como conceitos singulares que dizem respeito a cada um especificamente. O aspecto específico pode contribuir para que a aprendizagem significativa do conceito de função, na fase da intervenção, ocorra diferentemente para ambos. O processo pode tomar rumos distintos, embora a intervenção seja única e direcionada para todos os alunos.

6. A ETAPA DAS INTERVENÇÕES

A etapa das Intervenções é inspirada nos Princípios Programáticos da Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel, subdividindo-se, em três fases (figura 7):

- Fase 1 – Assimilação do conceito de função – Diferenciação Progressiva e Reconciliação Integradora;
- Fase 2 – Organização do conceito de função – Mapas Conceituais;
- Fase 3 – Aplicação do conceito de função – Consolidação.

O objetivo dessa etapa da pesquisa é descrever como os alunos se estruturam mentalmente para ressignificar o conceito de função, diante de situações e questionamentos que estimulem o pensamento para justificar as afirmativas e compreensão de possíveis contradições. Assim, cada fase apresenta um objetivo específico a ser alcançado no processo.

As atividades da fase 1 se subdividem em três períodos (figura 7):

- Período 1 – Conceitos Preliminares;
- Período 2 – Conceito de Função – Dirichlet;
- Período 3 – Conceito de Função – Elon Lages Lima e Geraldo Ávila.

Nessa fase, o primeiro objetivo é trabalhar com o refinamento do significado dos conceitos básicos de sustentação ao conceito de função, como conceito de expressão algébrica, variável, equação, incógnita, variável dependente e variável independente. E, num segundo momento, discutir novos conceitos relacionados ao conceito de função, aos conceitos de Dirichlet, do século XIX, e de Elon Lages Lima e Geraldo Ávila, do século XX.

Os dados são coletados em quatro fontes: dados teóricos em dicionários da língua portuguesa, tais como, Larousse (1992) e Ferreira (2004), dicionários específicos da matemática, Imenes e Lellis (1998), Soares (2005) e Sodré (2007), dados teóricos de obras de autores matemáticos, dados escritos de alunos nos protocolos e os dados verbalizados pelos alunos por meio da gravação das discussões e posteriores transcrições.

Cada encontro se subdivide em quatro momentos. No 1º, mais especificamente, são realizadas discussões teóricas sobre cada conceito específico, pelo estudo da formalização de significados, seguida de formulação de palavras na qual os alunos destacam o significado central de cada conceito e realizam posterior reformulação conceitual. No 2º, as discussões tratam do aspecto aplicado da matemática. Problemas de estruturação simples são apresentados para que os alunos possam discutir os conceitos de forma hierárquica, respeitando o aspecto da Diferenciação Progressiva, seguida de preenchimento do protocolo com quadro-resumo. No 3º, os alunos utilizam o protocolo para elaborar conceitos discutidos com suas próprias palavras. E, no 4º, é desenvolvido trabalho voltado para a Reconciliação Integradora, no qual os alunos pensam sobre os conceitos a partir de problema matemático estruturado, no sentido inverso do apresentado no 2º momento do encontro.

Na fase 2, o primeiro objetivo é apresentar o conceito de Mapa Conceitual, estrutura, forma de organização dos conceitos discutidos, bem como a importância e a aplicabilidade da ferramenta pedagógica. Posteriormente, o objetivo é compreender como os alunos se organizam mentalmente para dispor de forma gráfica, os conceitos estudados e relacioná-los entre si utilizando técnicas de construção de mapas conceituais.

O desenvolvimento das atividades ocorre, nessa fase, de forma diferenciada. Os alunos se reúnem em duplas compostas por dois alunos para construção de cada mapa conceitual, em trabalho colaborativo, com estímulo e discussão durante o processo. As duplas são determinadas pela pesquisadora. Os critérios de escolha se baseiam na afinidade entre os integrantes do grupo, como também na convicção de atuar como profissional docente em matemática. Os alunos GATO e PEIXE participam de grupos diferentes. Na Intervenção 14, portanto, os alunos representam os integrantes dos respectivos grupos nomeados: grupo GATO e grupo PEIXE.

Os conceitos utilizados para ressignificar o conceito de função são retirados especificamente da obra de Lages Lima (1998) e das tabelas-resumo utilizadas durante as intervenções de 1 a 12, da Fase 1 da pesquisa.

Os dados são coletados em protocolos das duplas, com a construção dos mapas conceituais e das transcrições realizadas em cada intervenção. Ao produzirem os mapas conceituais, os alunos utilizam apenas lápis, caneta e papel. Para a reprodução dos resultados se utiliza o software CMapTools, com a finalidade de organizar os mapas conceituais produzidos, de forma a facilitar a interpretação do leitor. O software é desenvolvido especificamente para a construção de mapas conceituais com o auxílio do computador.

A fase 3 se subdivide em dois períodos (figura 7):

- Período 1 – Resolução de Problemas;
- Período 2 – Auto-avaliação;

O objetivo principal é descrever como os alunos se organizam mentalmente para utilização do conceito de função na resolução de problemas contextualizados de matemática de acordo com os preceitos dos PCNEMs (2000). O desenvolvimento das atividades dá-se nessa fase, de forma diferenciada das demais. Os alunos voltam a trabalhar individualmente, porém um voluntário escolhido pelo próprio grupo desenvolve o processo de resolução dos problemas na lousa. Coincidentemente, os alunos escolhidos são os alunos GATO e PEIXE.

Os problemas para representar situações de relacionamento da matemática com a vida cotidiana e os conhecimentos científicos são retirados e adaptados dos livros didáticos de Giovanni e Bonjorno (2000) e Dante (2003), apresentados pela leitura da pesquisadora. Cada intervenção se destina ao trabalho de um problema específico. A intervenção 18 relaciona o conceito de função ao conhecimento de Progressão Aritmética; a intervenção 19, aos conhecimentos de Matemática Financeira; a intervenção 20, aos conhecimentos da Física; e a intervenção 21, aos conhecimentos da Biologia.

Todos os dados coletados são apresentados de forma descritiva seguindo uma ordem cronológica dos acontecimentos para cada Intervenção. A análise é apresentada conjuntamente com a descrição dos dados de forma interpretativa, pela triangulação entre conhecimentos teóricos, verbais e escritos, bem como triangulação entre os momentos de cada intervenção: apresentação, aplicação e descrição dos conceitos. As interpretações apresentam também como base teórica o princípio da Assimilação preconizado por Ausubel. Os dados são interpretados em comparação entre os passos dessa teoria e as modificações conceituais dos alunos GATO e PEIXE.

Apresenta-se um resumo (quadro 1) de todas as intervenções desenvolvidas na pesquisa, evidenciando suas respectivas fases, períodos, conceitos abordados, data e tempo de execução.

Quadro 1 – Etapa da Intervenção

FASE	PERÍODO		NI[7]	CONCEITOS[8]	DATA	TEMPO[9]
ASSIMILAÇÃO	**Conceitos Preliminares**		**1**	EA e V	19/07	55
			2	EA, EN e V	24/07	55
			3	EA, EN, V e E	31/07	55
			4	EA, E, V e I	02/08	66
			5	EA, E, V e I	07/08	57
			6	VD, VI, E, V e I	09/08	63
			7	VD, VI, E, V e I	16/08	69
	Conceito de Função	**Dirichlet**	**8**	F, EA e E	21/08	67
			9	F e C	23/08	80
			10	F	28/08	65
		Lages Lima e Ávila	**11**	F e CN	30/08	72
			12	F	04/09	75
ORGANIZAÇÃO	**Mapas Conceituais**	**Conceito**	**13**	CN	11/09	74
		Construção	**14**	F	12/09	81
			15	F e CS	13/09	66
		Discussão	**16**	F e CS	18/09	68
			17	F e CS	20/09	72
AVALIAÇÃO	**Resolução de Problemas**		**18**	F e PA	25/09	60
			19	F e MF	27/09	72
			20	F e FI	02/10	68
			21	F e B	04/10	82
	Auto-Avaliação		**22**	F	09/10	60
Total					**Minutos**	1.482
					Semanas	11
Tempo médio					**Min/Intervenção**	67

Fonte: elaboração própria

---

7 Número da Intervenção

8 Significado das siglas: **EA**Expressão Algébrica**I**Incógnita**C**Condições**V**Variável**VD**Variável Dependente**CN**Conjuntos**EM**Expressão Numérica**VI**Variável Indepente**CS**Conceitos Subjacentes**E**Equação**F**Função**PA**Progressão Aritmética**MF**Matemática Financeira**FI**Física**B**Biologia

9 Tempo calculado em minutos.

Nos próximos subcapítulos são apresentadas as principais intervenções desenvolvidas para cada fase da pesquisa, aquelas que apresentam destaque na utilização da metodologia e na resposta fornecida pelos alunos, dentre elas:

- Intervenção 9 – O conceito de função e as condições de existência e unicidade;
- Intervenção 11 – Os conceitos modernos de função – Elon Lages Lima e Geraldo Ávila;
- Intervenção 14 – Os mapas conceituais sobre o conceito de função;
- Intervenção 18 – Problema 1 – Função e Progressão Aritmética;
- Intervenção 22 – A auto-avaliação e a ressignificação do conceito de função.

Vale acrescentar que, para a compreensão do processo de ressignificação do conceito de função por parte dos alunos analisados, é necessário que seja realizada a leitura de todas as intervenções. Dessa forma, o leitor que tiver interesse em conhecer maiores detalhes sobre a pesquisa poderá buscar a complementação da leitura no Apêndice ????. Nele consta a descrição de todas as outras intervenções, com exceção apenas das Intervenções 19 e 20, que, em termos de resultados obtidos, assemelham-se às Intervenções 18 e 21.

6.1. Intervenção 9 – O conceito de função e as condições de existência e unicidade

Este encontro acontece em 23/08/07 totalizando 80 minutos e, são abordados o conceito de função, de variável dependente, variável independente com ênfase nas condições de existência e unicidade do conceito de função. É apresentada aos alunos a definição formalizada de Dirichlet seguida de um quadro-resumo com as informações que os próprios alunos desenvolveram na intervenção 8.

Os objetivos desse encontro são refletir sobre a definição de função de Dirichlet a fim de possibilitar a compreensão da relação de dependência entre variáveis, bem como as condições a ela inerentes: para todo valor atribuído à variável independente, sempre existe um valor correspondente para a variável dependente e esse valor é único.

É importante ressaltar que para cada situação apresentada aos alunos, o conceito de função é refletido de forma direta e inversa para que possam compreender a situação de dependência e independência das variáveis sem o suporte direto da visualização algébrica. Além disso, a representação tabular também é considerada para a compreensão do conceito.

Na 1ª parte deste encontro, os alunos optam por fazer a leitura das informações sem alterar nenhum dos dados fornecidos. Preferem passar para a discussão posterior relativa à parte aplicada da matemática. As atividades propostas procuram estimular o aluno a refletir sobre as relações específicas entre função e as condições de existência e unicidade, utilizando-se problemas matemáticos (quadro 2).

- **A variável preço em função da variável número de fotos**

Na representação P = 12,00 + 0,65n (quadro 2 – problema 1) em que P é considerada uma variável dependente e n uma variável independente, todos os alunos concordam que sempre vai existir um valor de P quando for atribuído um valor para n, e, ainda que esse valor é único. O aluno GATO acrescenta verbalmente que não existem dois valores de P para cada n.

Quadro 2 – Problemas da Intervenção 9

<table>
<tr><th>PROBLEMA</th><th>ENUNCIADO</th><th>REPRESENTAÇÃO</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Na revelação de um filme, uma óptica calcula o preço a ser cobrado usando a fórmula P = 12,00 + 0,65n, onde P é o preço, em reais, a ser cobrado e n o número de fotos reveladas do filme.</td><td>P = 12,00 + 0,65n</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Algumas tarifas praticadas pelo correio do país Alfa para o envio de carta não comercial e cartão postal se baseiam na relação expressa pela tabela abaixo:
<table>
<tr><th>“Peso” (gramas)</th><th>Custo básico (moeda local)</th></tr>
<tr><td>Até 20</td><td>0,30</td></tr>
<tr><td>Mais de 20 até 50</td><td>0,50</td></tr>
<tr><td>Mais de 50 até 100</td><td>0,80</td></tr>
<tr><td>Acima de 100</td><td>Peso/100</td></tr>
</table></td><td>dados da tabela</td></tr>
</table>

Fonte: Adaptado de Giovanni e Bonjorno (2000)

Os alunos, GATO e PEIXE, concordam que P está em função de n. O aluno GATO afirma verbalmente que esse fato acontece porque existe uma relação de dependência, uma condição e também uma regra. O aluno PEIXE afirma que existe sim a relação de dependência, mas o fato de n ser natural também é relevante.

Os resultados apresentados no protocolo convergem para uma resposta também afirmativa, ou seja, a variável P está em função da variável n. As justificativas, porém, diferem. O aluno GATO se justifica dizendo que existe "*uma relação de dependência entre as variáveis e para cada valor de n o valor de P será único*". Não ressalta desta vez a existência da regra, nem explicita a condição de existência da função.

O aluno PEIXE justifica a existência da função afirmando que "*para cada valor atribuído a n existirá um único valor de P*". Não ressalta a relação de dependência entre as variáveis, e como seu colega, também não explicita a necessidade da regra, nem da condição de existência da função. É possível que a condição de unicidade da função esteja se tornando um elemento relevante para a ressignificação do conceito.

- **A variável número de fotos em função da variável preço**

Na representação P = 12,00 + 0,65n em que a situação das variáveis se altera, onde P é considerada uma variável independente e n, uma variável dependente, ocorre uma discussão entre os alunos. A primeira discussão acontece em torno da característica da variável n. A princípio o aluno GATO afirma que para qualquer valor atribuído à variável P sempre existirá um valor para a variável n. O aluno PEIXE, discordando do pensamento do colega, afirma que pelo fato de n representar o número de fotos não poder ser, por exemplo, 12,30. O aluno GATO refletindo sobre a afirmação do colega afirma que não é possível revelar fotos com 10 reais, mas com 20 reais é possível, porém sobram alguns centavos.

O aluno PEIXE discorda dessa afirmativa, para ele não é possível obter um correspondente para 20 reais porque o valor obtido para a variável n não é um número natural e o problema não pode ser satisfeito. Conclui afirmando que o número de fotos não pode ser zero, nem negativo, precisa ser um número natural. O aluno GATO concorda com a idéia do colega afirmando que n será natural se o valor pago pelas fotos for R$ 19,80. Ambos concluem que sempre que se atribuir um valor para P, o valor de n vai ser único, somente quando este valor existir, ou seja, a situação satisfaz a condição da unicidade, mas não satisfaz a da existência. Assim, n não está em função de P porque não satisfaz a uma das condições para ser função.

Esse mesmo resultado se faz presente nos protocolos. Ambos afirmam que sempre que for dado um valor numérico a P não existirá um valor para n. O contra-exemplo apresentado pelo aluno GATO é "*P = 10 implica em* $n = \frac{-2}{0,65}$", ou seja, o valor de n é negativo. O contra-exemplo apresentado pelo aluno PEIXE é "*P = 20 implica em n = 12,30*" e não satisfaz o problema porque n é um número decimal.

Por outro lado, sempre que for dado um valor numérico a P, o valor de n sempre será único. O fato da relação não cumprir uma condição não interfere no fato dela obedecer à outra condição. Interfere, porém, na caracterização da função. Dessa forma, os alunos escrevem que, nesta situação, onde P é a variável independente e n a variável dependente, a relação P = 12,00 + 0,65n não representa uma função. É importante ressaltar que a modificação da situação da variável interfere na compreensão que os alunos têm sobre o problema.

Até então o fato do número de fotos ser um número natural não era relevante. Porém, diante da inversão da situação das variáveis, a discussão da natureza da variável emerge. Este é o primeiro momento que os alunos têm contato com uma situação que determinar o conjunto numérico com o qual se trabalha é realmente necessário, embora a definição de Dirichlet não faça menção a esse tipo de restrição.

- **A variável custo em função da variável peso**

Ainda na 2ª parte, propõe-se um novo problema para se discutir as características básicas do conceito de função (quadro 2 – problema 2). Nas discussões verbais realizadas, o aluno PEIXE afirma que o custo está em função do peso pois para cada valor do peso é possível encontrar um único valor do custo, o que, para ele, significa que existe uma relação de dependência entre as variáveis.

O aluno GATO coloca que ao se atribuir um valor ao peso existirá um valor para o custo e, a princípio considera que esse valor não é único. Em seguida reconhece que se confundiu e afirma que se tiver um peso de 1 grama até 20 gramas o custo é de 30 centavos, então para cada valor atribuído à variável independente existirá sim um único valor para a variável dependente. Conclui então que o custo está em função do peso e justifica afirmando que para cada valor do peso sempre existirá um valor único do custo.

As respostas obtidas com o protocolo ratificam o que é discutido. O aluno GATO e o aluno PEIXE afirmam que sempre que for dado um valor numérico ao peso sempre existirá um valor para o custo e esse valor será único. As justificativas apresentadas nos protocolos complementam aquelas apresentadas verbalmente. Para o aluno GATO, além da condição de unicidade estar sendo obedecida, a existência de uma “regra” também é citada para justificar o fato dessa relação ser função. Para o aluno PEIXE, a existência da relação de dependência é uma característica preponderante, considerando também que a condição da unicidade também o é.

Uma discussão interessante que acontece nesse momento da intervenção se relaciona à representação algébrica do problema. Como os alunos podem escrever algebricamente a situação apresentada em forma de tabela? E, diante dessa caracterização, o que pode ser considerada uma equação?

Todos acreditam que a tabela em si representa a regra da função, embora não esteja escrita na forma algébrica. Assim, o aluno GATO, elabora seu pensamento explicitando-o verbalmente da seguinte forma: “$para\ x > 0\ e\ x < 20 \Rightarrow y = 0{,}30$”. O aluno PEIXE solicita a troca da variável x por p, por se referir ao peso, e a variável y por c por se referir ao custo. Dessa forma, o aluno GATO continua explicitando a situação da seguinte maneira: ”

$$\begin{array}{l} se\ x < 20\ e\ x \geq 50 \Rightarrow c = 0{,}50 \\ se\ x > 50\ e\ x \leq 100 \Rightarrow c = 0{,}80 \\ se\ x > 100 \Rightarrow c = \dfrac{x}{100} \end{array}$$

”.

Afirma que todas essas expressões não são equações, mas um conjunto de condições que a função obedece dependendo do valor de x. A equação seria apenas $c = \frac{x}{100}$. O aluno PEIXE intervém afirmando que x = 9, por exemplo, representa a equação de uma reta paralela ao eixo y. Diante desse argumento, o aluno GATO afirma que c = 0,80 é uma equação de uma reta que passa em y = 0,80 e concorda que essas expressões representam um conjunto de equações que pode ser caracterizada como função.

Dessa vez, o aluno GATO menciona tanto a condição de existência quanto a condição da unicidade como situações a serem satisfeitas para que a relação estabelecida possa se caracterizar como função. Explicita também a necessidade da regra ser obedecida, fato que não mencionou no problema anterior. O aluno PEIXE atribui maior ênfase à condição de unicidade e, embora, não mencione a importância da regra, concentra-se no aspecto da relação de dependência entre as variáveis.

Apesar das discussões serem realizadas com todos os integrantes do grupo, cada um, escolhe seu caminho de compreensão conceitual, e, parece estar pautado nos seus conhecimentos prévios. Para o aluno que compreende função como uma relação entre dois números, a ênfase está na relação de dependência entre duas variáveis. Para o aluno que compreende função como uma relação de dependência entre variáveis, a ênfase está nas condições necessárias para ser função, sobretudo na condição de existência.

- **A variável peso em função da variável custo**

Ao tornar a variável c uma variável independente e a variável p, uma variável dependente, invertendo, portanto, a situação de cada uma delas no problema 2, os alunos chegam a conclusões diferentes.O menor custo possível do problema equivale a 30 centavos na moeda local. Se esse valor for utilizado, os alunos reconhecem que ficará difícil determinar o peso da carta porque poderia ser 1 grama, 2 gramas, 10 gramas, até 20 gramas, ou seja, à esse valor existem vários valores possíveis atribuídos à variável peso.

O aluno GATO diz ser possível encontrar um número, mas não um número exato. Ambos concordam que os valores para o peso existem, mas não são exclusivos para cada valor atribuído ao custo. Assim, consideram verbalmente que essa relação não é uma função.

Os resultados dos protocolos ratificam as conclusões verbais. O aluno GATO, assim como o aluno PEIXE, concorda que sempre que for dado um valor numérico ao custo sempre existirá um valor para o peso e acrescenta que "*sempre há uma condição para encontrar possíveis valores de peso*". Ambos também discordam do fato desse valor para o peso ser único. O contra-exemplo apresentado pelo aluno GATO diz que "*para c = 0,30 podemos ter p = 2 gramas ou p = 3 gramas, entre outros valores*". O contra-exemplo apresentado pelo aluno PEIXE revela que "*para c = 0,30, p = 1g ou p = 10g ou p = 15g*" é suficiente para dizer que o valor de p não será único.

O aluno GATO afirma que o peso não está em função do custo porque "*não satisfaz a condição de que o peso deve ser único quando se atribui um custo*". Para o aluno PEIXE o peso não está em função do custo porque "*para cada valor atribuído ao meu custo será encontrado mais de um valor para o ´peso´ da correspondência*".

- **Reflexões sobre os conceitos de regra e condição de uma função**

Na 3ª parte desta Intervenção são propostas aos alunos questões teóricas e verbais para as reflexões sobre os conceitos que ao longo das interações trouxeram dúvidas e indagações importantes. A primeira delas diz respeito às condições que uma relação deve obedecer para se tornar uma função.

O aluno GATO afirma que para existir uma função os valores atribuídos à variável dependente devem existir e serem únicos para todo x, ou seja, para todo valor atribuído à variável independente. O aluno PEIXE afirma que ao se definir uma função, define-se apenas uma única condição, o fato dos valores atribuídos à variável dependente serem únicos para cada valor atribuído à x pertencente ao domínio da função. Enquanto o primeiro aluno explicita duas condições, o segundo explicita apenas uma delas, utilizando inclusive nomenclaturas que ainda não foram discutidas, mas que fazem parte de seus conhecimentos prévios sobre função.

A segunda reflexão acontece em relação aos conceitos de regra e condição de função já que durante o processo de elaboração conceitual alguns alunos ora tratam a regra de uma função como condição, ora tratam a condição de uma função como regra. Para o aluno GATO e para o aluno PEIXE, a regra de uma função é determinada somente pela equação. O que representa a condição dessa mesma função é o fato da variável n ter que ser um número natural não nulo. Ao refletir melhor sobre a pergunta, o aluno GATO afirma que a condição está relacionada ao fato de existir um único valor da variável dependente para todo valor da variável independente. Nesse momento, então, realmente pode-se comprovar a dubiedade que esse conceito suscita na mente dos alunos.

Ao continuar a discussão diante do desafio de estabelecer a diferença entre regra e condição, o aluno GATO afirma que regra é a lei da função que está relacionada à equação. Não explica, porém, o que representa essa condição. O aluno PEIXE afirma que uma regra nunca se altera, mas a condição pode ser modificada, dependendo da situação. Para ambos o que representa a regra do problema 1 é a equação $p = 12 + 0,65n$.O aluno GATO afirma que o fato de n pertencer a N^* (conjunto dos números naturais não nulos) é a condição para que a função se torne verdadeira, ou seja, representa o domínio dessa função. Enquanto que o fato de existir um único valor de p para todo valor atribuído a n representa a condição para ser função.

O aluno PEIXE resume a situação da seguinte forma utilizando como base o problema 1, a regra é representada por $p = 12 + 0,65n$, o domínio se relaciona ao fato de n pertencer a N^* e a condição, ao fato dos valores atribuídos à variável p serem únicos.

Conclui que para ser função, a relação tem que obedecer a condição e a regra. O aluno GATO acrescenta que não basta ter apenas uma regra porque se uma das condições não for atendida então não se tem a representação de uma função.Novamente a problemática relacionada ao conceito e à caracterização de uma função por meio da utilização de conjuntos se faz presente.

O conceito de função de Dirichlet não trata a relação entre as variáveis por meio da relação entre conjuntos. Esse fato pode ter contribuído para a dubiedade nas interpretações sobre os conceitos de regra e condição de uma função. Decide-se inserir um novo conceito sobre função mais moderno e mais próximo de seus conhecimentos prévios, utilizando, portanto, o conceito de relação entre conjuntos, introduzida a partir da Intervenção 11.

Ausubel, Novak e Hanesian (1980) consideram que após os primeiros contatos entre o subsunçor e o novo conceito, eles se modificam, tornando-se cada qual um novo elemento na estrutura cognitiva do aprendiz. O processo de assimilação não se encerra nesse momento. Este autor afirma que após essa modificação, ambos os conceitos se distanciam um do outro para que o indivíduo possa se apropriar de cada novo conhecimento surgido, mantendo ainda parte de suas características originais.

O fato, portanto, dos alunos necessitarem da explicitação do domínio da função e o fato de utilizarem constantemente a palavra condição para tratar sobre o conceito de função, pode revelar essa conservação das características originais. Por outro lado, o fato de considerarem a relação entre variáveis como uma relação que deve respeitar a unicidade da variável dependente para todo valor atribuído à variável independente também pode trazer consigo uma conservação das características do novo conceito, o conceito de função de Dirichlet, recentemente modificado. Conclui-se então que, na compreensão dos alunos:

- para que uma relação seja uma função é necessário que as condições de existência e de unicidade sejam obedecidas e que a regra esteja estabelecida;
- o conceito de regra de uma função se relaciona ao conceito de equação;

6.2. Intervenção 11 – Os conceitos modernos de função – Elon Lages Lima e Geraldo Ávila

Este encontro acontece em 30/08/07 durante 72 minutos e, são abordados os conceitos de função que utilizam como base a Teoria dos Conjuntos, de acordo com os autores Elon Lages Lima (1998) e Geraldo Ávila (1993). Os objetivos deste encontro são refletir e discutir sobre os elementos que surgem com a introdução de conceitos mais modernos sobre função, bem como, construir os conceitos de domínio, contradomínio, imagem e lei de formação diante de uma discussão teórica e aplicada da matemática.

Na 1ª parte, os alunos têm seus primeiros contatos com uma nova forma de interpretar e compreender o conceito de função. Iniciam um novo processo de assimilação do conceito diante da utilização de seus subsunçores já modificados e o novo conceito pautado nas idéias de dois diferentes autores.

Para Lages Lima (1998, p. 38), "dados os conjuntos X, Y, uma função $f: X \to Y$ é uma regra que diz como associar a cada elemento $x \in X$ um elemento $y = f(x) \in Y$". O autor acrescenta que o conjunto X é denominado de domínio de f, o conjunto Y, de contradomínio de f e o elemento f(x), pertencente ao contradomínio, é denominado de imagem de x pela função f.

A princípio o autor não trata das condições de uma função. Porém, posteriormente, apresenta a idéia de que a regra de uma função está sujeita a duas condições: não deve haver exceções e não pode haver ambigüidades. No primeiro caso, o autor diz que "a fim de que a função f tenha o conjunto X como domínio, a regra deve fornecer f(x), seja qual for $x \in X$ dado" (LAGES LIMA, 1998, p. 41). No segundo caso, explica que "a cada $x \in X$, a regra deve fazer corresponder um único f(x) em Y". (LAGES LIMA, 1998, p. 41).

Para Ávila (1992, p. 78) "uma função ´$f: D \to Y$´ é uma lei que associa elementos de um conjunto D, chamado o domínio da função, a elementos de um outro conjunto Y, chamado o contradomínio da função". O autor enfatiza a idéia de domínio e contradomínio afirmando que este último geralmente é um conjunto fixo o que não acontece com o domínio, já que cada função apresenta o seu próprio domínio e ainda que "todos os elementos do domínio são objeto de ação da função" (Ávila, 1992, p. 78).

Outro aspecto que o autor explicita é a caracterização das variáveis dependente e independente, aspecto este não apresentado pelo autor anterior. Ávila afirma que ao se utilizar a notação $y = f(x)$, "x denota qualquer valor no domínio D, por isso mesmo chama-se variável de domínio D, a chamada variável independente" (ÁVILA, 1992, p. 79). Acrescenta que y é imagem de x pela função f caracterizada como variável dependente dessa função.

A leitura do material entregue aos alunos é realizada pela pesquisadora que precisa recorrer várias vezes à sua releitura no decorrer das discussões. Nos comentários iniciais dos alunos, o aluno GATO afirma que a definição de Lages Lima lhe parece mais direta. E, apesar de ter considerado interessante a ênfase dada ao conceito de domínio por Ávila, ele prefere a definição de Lages Lima. O aluno PEIXE concorda verbalmente com o colega sem tecer outros comentários.

Na percepção de ambos os conceitos de regra e de lei da função são iguais. Constatam que os dois autores tratam inicialmente do conceito de função de uma forma similar. Outra percepção importante se relaciona à presença de conjuntos. Diferentemente do conceito de Dirichlet discutido nos dois encontros anteriores, para se definir uma função é necessária a determinação do seu domínio e do seu contradomínio. Afirmam que a unicidade na função é um elemento imprescindível e que para todo x pertencente ao domínio existe um único y pertencente ao contradomínio.

O aluno GATO afirma verbalmente que a imagem é formada por todos os elementos que apresentam um correspondente no domínio. Mesmo considerando que a imagem faz parte do contradomínio, afirma que a variável y representa os elementos do conjunto imagem. O aluno PEIXE intervém e afirma que a variável y representa os elementos do contradomínio porque o conjunto imagem é um subconjunto do contradomínio. Conclui que para todo x pertencente ao domínio existe um único y pertencente ao contradomínio, e não à imagem.

Pelo fato do aluno GATO ter se mostrado relutante em seu ponto de vista, a pesquisadora intervém utilizando a definição de Ávila, afirmando que “D é um conjunto chamado de domínio e Y é chamado de contradomínio. A função associa os elementos de D aos elementos de Y, não é verdade?”. O aluno GATO afirma que o outro autor, Lages Lima, coloca que para cada elemento pertencente ao X (domínio), o elemento f(x) pertence ao Y, e este f(x) denomina-se imagem.

A pesquisadora pergunta “O que é ser imagem?” e o aluno GATO responde que é ter um correspondente no X (domínio). O aluno conclui que para cada x pertencente ao X existe um f(x) pertencente ao Y que se chama imagem da função f. Novamente a pesquisadora pergunta “O que é Y?” e o aluno GATO afirma ser o contradomínio. Continua a afirmar que para todo x pertencente ao domínio existe um único y pertencente ao contradomínio, e que esta é a condição de ser função. Não fica muito claro neste momento se o aluno percebe que utiliza um conceito diferente trocando a palavra imagem por contradomínio.

Como conclusão da discussão, o aluno GATO resume suas idéias afirmando que o que falta na definição de Dirichlet são apenas os conjuntos, que a idéia principal de ser função está implícita em sua apresentação teórica. Na opinião deste aluno, para se definir função é obrigatório definir domínio e contradomínio. Considera a imagem subconjunto do contradomínio. A variável x caracterizada como variável independente representa os elementos do domínio e a variável y caracterizada como variável dependente representa os elementos do conjunto imagem. Neste momento, não utiliza o nome contradomínio, mas imagem. Esta pode ser um prova de que ao trocar um conceito por outro na discussão anterior ainda se encontra em processo de elaboração mental na relação entre o conceito de função e os conceitos de contradomínio e imagem. O aluno PEIXE não se pronuncia verbalmente. Parece concordar com todas as idéias do colega.

Nos protocolos, o aluno GATO ressalta que os elementos que formam uma função são "*variáveis, relação de dependência, regra, conjunto e condição (para todo x pertencente a D, existe um único y pertence a CD)*". É importante considerar que D significa domínio e CD contradomínio e não imagem como afirmou anteriormente. Para o aluno PEIXE os elementos formadores de uma função são "*conjuntos (2), variáveis (VD e VI), regra, condição (*$\forall\ x \in D, \exists!\, y \in CD$*), relação de dependência entre variáveis*". Em relação às condições necessárias para uma relação entre dois conjuntos ser uma função, os alunos citam a condição de existência e de unicidade, nesta ordem, assim como apresentou Lages Lima em sua definição sobre função.

As atividades propostas procuram estimular o aluno a refletir sobre as relações específicas entre função e as condições de existência e unicidade, utilizando-se problemas sobre conjuntos (quadro 3).

Quadro 3 – Problemas da Intervenção 11

PROBLEMA	ENUNCIADO	LEI DE CORRESPONDÊNCIA
1	Dados os conjuntos A = {0, 5, 15} e B = {0, 5, 10, 15, 20, 25} seja a relação R de A em B expressa pela fórmula y = x + 5, com x ∈ A e y ∈ B.	**y = x + 5**
2	Dados os conjuntos Y = {a, b, c, d, e}, X = {0, 1, 2, 3, 4} e uma relação D: Y -> X cuja lei de correspondência é expressa pela seguinte condição: cada	**x = par se y = vogal** **x = ímpar se** **y = consoante**

	vogal de Y corresponde a um número par de X e cada consoante de Y corresponde a um número ímpar de X.	
3	A relação T: Z -> R é definida como $p = \sqrt{s}$ onde p ∈ Z e s ∈ R.	$p = \sqrt{s}$

Fonte: adaptado de Giovanni e Bonjorno (2000)

- **Problema 1 – A relação R é uma função**

Na resolução do problema 1, automaticamente os alunos pedem a utilização dos diagramas de Venn, denominado pelo aluno PEIXE como “ovinhos”. O aluno GATO, descrevendo o processo verbalmente, acrescenta que após a representação dos conjuntos é necessária a substituição dos elementos do conjunto A na regra com a finalidade de encontrar correspondentes no conjunto B. Todas as ações são feitas pela pesquisadora utilizando-se da lousa.

Em relação à 1ª pergunta “Todos os elementos de A apresentam um elemento correspondente em B?”, os alunos respondem afirmativamente. O aluno PEIXE acrescenta que, neste caso, a condição da existência está sendo satisfeita. Em relação à 2ª pergunta “Cada elemento de A apresenta uma única correspondência em B?”, os alunos também se manifestam positivamente. O aluno PEIXE novamente acrescenta que a condição da unicidade está sendo satisfeita. Ambos concluem, sem discutir, que a relação R se caracteriza como função.

O aluno GATO justifica sua escolha, tanto verbalmente quanto no protocolo, afirmando que R é uma função porque satisfaz as condições. O aluno PEIXE utiliza duas justificativas diferentes. Verbalmente afirma que a relação R é função porque tem variável; no protocolo revela que a relação R é função porque satisfaz a todas as condições. O aluno GATO conclui posteriormente que a condição é o aspecto mais importante da função.

Diante da afirmação, a pesquisadora pergunta “E se não tivesse y = x + 5?”. O aluno responde que a condição e a regra são os aspectos mais importantes da função. Refletindo, afirma que na verdade, tudo é importante. É necessário definir os elementos do domínio, os elementos do contradomínio, a regra que estabelece a relação entre os dois conjuntos e se essa relação satisfaz as condições.

Tanto o aluno GATO quanto o aluno PEIXE concordam que o domínio é representado pelo conjunto A = {0, 5, 15}, o contradomínio pelo conjunto B = {0, 5, 10, 15, 20, 25} e a imagem pelo conjunto {5, 10, 20}. Para o aluno GATO o conjunto imagem não é o conjunto B porque nem todos os elementos que pertencem a ele têm um correspondente no domínio. Ao serem solicitados a justificar o porquê da escolha do conjunto A como domínio, os alunos afirmam que se trata da posição do conjunto, ou seja, o fato de estar do lado esquerdo da representação matemática R: A$\rightarrow$ B.

A pesquisadora questiona “E se fosse colocado assim: R: B $\leftarrow$ A?”. O aluno GATO a princípio afirma que não podem ser modificados os padrões. Em seguida, afirma que o conjunto domínio deve estar no início da reta, na origem. O aluno PEIXE afirma que a variável x é representante do domínio, e sendo ela uma variável independente, os valores devem ser atribuídos a ela. Assim, independente da posição, o conjunto que for representado pela variável independente é o domínio da função.

O aluno GATO concordando com o colega afirma que a variável independente pertence ao domínio e a variável dependente representa os elementos do contradomínio. Em seguida, afirma que a variável dependente representa os elementos da imagem. Neste momento, o próprio aluno percebe que realmente está confuso sobre a relação entre variável, contradomínio e imagem.

- **Problema 2 – A relação D não é uma função, a condição da unicidade não é satisfeita**

Utilizando a mesma representação do diagrama de Venn e estabelecendo a relação de cada elemento de Y a cada correspondente de X por meio de setas, o aluno GATO percebe que a variável independente representa o conjunto Y.

Em relação à pergunta “Todos os elementos de Y apresentam um elemento correspondente em X?” o aluno GATO se posiciona afirmativamente tanto verbalmente quanto no protocolo. O aluno PEIXE diz verbalmente que nem todos os elementos de Y apresentam um correspondente no conjunto X. Porém, no protocolo se posiciona de forma contrária. Reconhece posteriormente que confundiu a condição da existência com a condição da unicidade.

Em relação à pergunta “Cada elemento de Y apresenta uma única correspondência em X?”, ambos os alunos se posicionam negativamente. Reconhecem que as vogais do conjunto Y apresentam mais de uma correspondência no conjunto X. Concluem que a relação D não é uma função. O aluno GATO afirma verbalmente que basta um elemento do domínio não satisfazer a condição da unicidade, a relação deixa de ser função, mesmo que a condição de existência seja satisfeita, mesmo que essa relação tenha domínio, contradomínio e que a regra esteja explicitamente apresentada.

A justificativa nos protocolos é similar à apresentada pelo aluno GATO. Afirmam que uma das condições não está sendo satisfeita e, portanto a relação D não é uma função. Afirmam ainda que, pelo fato dessa relação não ser função não tem domínio, contradomínio, nem imagem.

- **Problema 3 – A relação T não é uma função, a condição da existência não é satisfeita**

Neste problema, é explicado aos alunos que devem considerar Z o conjunto dos números inteiros e R o conjunto dos números reais. O aluno GATO inicia a discussão afirmando que o número -1 não tem um correspondente. Logo em seguida, revela que se confundiu. Percebe que deve atribuir valores a p porque p é uma variável independente e representa os valores do domínio. O aluno PEIXE afirma que nem todos os elementos de Z apresentam um elemento correspondente em R, os números negativos, por exemplo. Para os alunos, somente esse fato é suficiente para dizer que a relação T não é função, pois a condição de existência não é satisfeita.

O aluno GATO acrescenta que para transformar essa relação em função é necessário modificar o domínio, do conjunto dos números inteiros, para o conjunto dos números naturais. O aluno PEIXE intervém e prefere modificar o domínio para o conjunto dos reais para que a relação se torne uma função. Tanto verbalmente quanto nos protocolos, os alunos concluem que existem elementos do conjunto Z que não apresentam correspondência no conjunto R. Manifestando-se apenas nos protocolos, os alunos posicionam-se de forma positiva para a condição da unicidade. Ainda assim concluem que a relação T não é uma função pelo fato de não satisfazer a uma das condições. Afirmam novamente que essa relação não apresenta domínio, contradomínio, e imagem.

Durante todo o encontro é perceptível que os alunos trabalham de forma mais natural, sem grandes contradições, com maior fluência nas colocações verbais e também escritas. Praticamente em todos os momentos, o aluno GATO e o aluno PEIXE utilizam o conceito de função relacionado ao conceito de relação entre variáveis, mesmo que as novas definições tratem de uma relação entre conjuntos.

Acredita-se que pelo fato dos subsunçores do conceito de função terem sido desenvolvidos a partir do conceito de relação entre conjuntos, ao longo de suas vidas escolares, a ancoragem do novo conhecimento sobre função se torna mais simples já que os subsunçores e o novo conhecimento são semelhantes.

Outro ponto importante a ser ressaltado é o fato dos alunos ora tratarem a variável dependente como representante do contradomínio da função, ora tratarem-na como representante do conjunto imagem. É possível que, pelo fato dessa relação entre variáveis e conjuntos ser um conhecimento novo, ele esteja ainda em processo de elaboração mental. Pensar em ambas as relações ao mesmo tempo, ou alternadamente, pode ser uma forma de testar qual é a relação mais adequada. Além disso, os alunos preferem compreender a imagem como conjunto e não como elemento. A principal relação se estabelece entre imagem como subconjunto do contradomínio.

- **Definições escritas dos conceitos**

Na 4ª parte dessa intervenção, é solicitado aos alunos o preenchimento dos protocolos com suas próprias palavras para enunciar os conceitos de função, lei de correspondência, domínio, contradomínio e imagem respectivamente.

O aluno GATO escreve que função "*é uma relação de correspondência entre dois conjuntos que obedece a uma regra e a uma condição (para todo x pertencente a D, existe um único y pertencente a CD) onde D e CD são os conjuntos que fazem parte dessa relação*". O aluno PEIXE escreve que função "*é uma regra que associa um elemento de um conjunto a outro conjunto*".

O aluno GATO que no período inicial da Entrevista e do Questionário trouxe a idéia de função vinculada ao conceito de relação entre conjuntos, retorna às origens. O aluno PEIXE também modifica seu pensamento. Caracterizou função a princípio como uma relação entre números, passou para a relação entre variáveis e chega na relação entre conjuntos. É possível que, de acordo com os pressupostos de Ausubel, Novak e Hanesian (1980), seus subsunçores sofreram alterações no decorrer das discussões. Por outro lado, o conceito de função apresentado tanto por Lages Lima (1998) quanto por Ávila (1993) também sofrem modificações.

Pode-se perceber que nenhum dos autores define função exatamente como uma relação entre conjuntos como apresentado pelo aluno GATO. Também não definem função como uma regra que associa elementos de conjuntos diferentes. Lages Lima (1998) afirma que função é uma regra que diz como associar elementos de conjuntos distintos. Na realidade não é a regra que faz a ação de associar, ela simplesmente dita as normas de como acontece essa associação, pois, na realidade quem associa é a própria função.

Em relação ao conceito de lei de correspondência, o aluno GATO escreve que "*é a regra que diz como deve ser associado os elementos do domínio com os do contradomínio*". O aluno PEIXE afirma que "*é a regra que leva um elemento do domínio ao contradomínio*". É possível que ambos associem o conceito de lei de correspondência ao conceito de regra, aquela que diz como deve ser o comportamento da função.

Para o conceito de domínio, o aluno GATO coloca que "*é um conjunto ao qual pertence a variável independente*". O aluno PEIXE afirma ser "*o conjunto que contém as variáveis independentes*". Novamente ambos consideram o domínio como um conjunto e o relaciona ao conceito de variável independente. Essa relação surge nas discussões das intervenções, pois não foi contemplada a relação entre conjuntos e variáveis nos questionários.

Para o conceito de contradomínio, o aluno GATO afirma que "*é o conjunto ao qual os elementos do domínio podem se relacionar*". O aluno PEIXE afirma ser "*o conjunto que contém as variáveis dependentes*". A idéia dos alunos toma rumos diferentes. Enquanto o aluno PEIXE conserva a relação entre conjuntos e variáveis, o aluno GATO prefere não fazê-lo. É possível que o aluno GATO prefira estabelecer relação entre o conjunto domínio e contradomínio do que entre variável dependente e contradomínio por ainda não ter certeza que esta última relação seja verdadeira.

Para o conceito de imagem, o aluno GATO escreve que "*são os elementos do contradomínio que possuem um elemento correspondente no domínio*". O aluno PEIXE afirma que "*é um subconjunto do contradomínio que contém somente os elementos que estão associados através da função ao domínio*". Apesar de utilizar linguagens próprias e diferentes os alunos trazem o mesmo significado para o conceito de imagem. Associam-na aos conceitos de contradomínio e de domínio, como um produto final dessa relação. Não fazem qualquer menção sobre a relação existente entre variável dependente e conjunto imagem, como apresentada pelo aluno GATO durante vários momentos desta intervenção. O conceito que traziam inicialmente sobre conjunto imagem se manteve inalterado, diferentemente do que ocorreu com o conceito de domínio e contradomínio.

Percebe-se que, na compreensão dos alunos:

- função é uma relação entre conjuntos que obedece a uma regra;
- a lei de correspondência de uma função é a regra da relação estabelecida entre os elementos do domínio e do contradomínio;

- domínio é o conjunto que contém elementos representados pela variável independente da função;
- imagem é o conjunto que contém os elementos do contradomínio que apresentam correspondência com os elementos do domínio;

6.3. Intervenção 14 – Os mapas conceituais sobre o conceito de função

Este encontro acontece em 12/09/07 durante 81 minutos e, é abordado o conceito de função de Lages Lima (1998), devido ao fato dos alunos o terem escolhido por contribuir com elementos mais significativos sobre o conceito. O objetivo é compreender e descrever como os alunos se organizam mentalmente para escolher e relacionar o conceito de função e seus conceitos subjacentes.

Na 1ª parte, os alunos recebem dois exemplos de mapas conceituais, bem como o mapa conceitual que desenvolveram sobre o tema "noção de conjuntos". Ao realizarem as leituras não fazem comentários. Na 2ª parte é apresentado aos alunos as fases para a construção de mapas conceituais como sugestão para o desenvolvimento do trabalho, baseados nos pressupostos teóricos de Ontoria et al. (2005) e nas estratégias desenvolvidas por Paiva e Freitas (2005):

1. **Escolher os principais conceitos** – selecionar os conceitos-chave do conteúdo do texto ou do tema;
2. **Distribuir os conceitos hierarquicamente** – selecionar os conceitos por ordem de inclusão;
3. **Relacionar os conceitos** – estabelecer as relações entre os conceitos por meio das linhas ou setas;
4. **Escolher e aplicar as palavras de ligação entre os conceitos** – explicitar as relações entre os conceitos para construir unidades semânticas por meio das linhas que são indicadas por uma ou mais palavras de enlace (ou de ligação)
5. **Atribuir significados** – atribuir significados aos conceitos e às conexões entre os conceitos;
6. **Construir proposições** – construir as proposições simples por dois conceitos unidos por palavras de enlace (ou de ligação);
7. **Estabelecer relações** – estabelecer as relações horizontais e verticais.

O texto que trata sobre o conceito de função de acordo com as idéias de Lages Lima (1998) também é disponibilizado para os grupos da seguinte maneira:

"Dados os conjuntos X, Y, uma função f: X -> Y é uma regra que diz como associar a cada elemento $x \in X$ um elemento $y = f(x) \in Y$. O conjunto X chama-se o domínio e Y o contradomínio da função f. Para cada $x \in X$, o elemento $f(x) \in Y$ chama-se a imagem de x pela função f, ou o valor assumido pela função f no ponto $x \in X$. A natureza da regra que ensina como obter f(x) quando é dado x é inteiramente arbitrária, sendo sujeita apenas a duas condições:

a) Não deve haver exceções: a fim de que a função f tenha o conjunto X como domínio, a regra deve fornecer f(x), seja qual for $x \in X$ dado.

b) Não pode haver ambigüidades: a cada $x \in X$, a regra deve fazer corresponder um único f(x) em Y." (Adaptado de LAGES LIMA, 1998, p. 38 e 41).

A leitura é realizada a princípio pela pesquisadora, mas no decorrer de todo o encontro os alunos recorrem várias vezes ao texto para consultar o que é apresentado pelo autor. Na 3ª parte, os alunos recebem o protocolo a ser preenchido gradativamente com formatação baseada nas fases de construção de mapas conceituais, acima citadas. Seu preenchimento não é obrigatório, embora os grupos tenham utilizado parcialmente o material.

A preocupação inicial dos alunos é visualizar o esquema gráfico, a disposição dos conceitos no plano e estabelecer rapidamente as relações conceituais. Em alguns momentos utilizar as estratégias sugeridas entra em confronto direto com o desejo que aparentam ter em relação à visualização do mapa pronto e acabado. Esse fato pode justificar a utilização parcial dos protocolos escritos, em prol da utilização de folhas de rascunho para construir os esquemas visuais.

O grupo GATO inicia seu processo destacando os principais conceitos apresentados no texto. Foram eles: função, conjuntos, contradomínio, domínio, imagem, regra, elemento, condições $\forall x \in D, \exists ! y \in \mathrm{Im}$. Considera-se que D representa o conjunto domínio e Im o conjunto imagem. O grupo PEIXE lista as seguintes palavras: função, regra, conjunto, domínio, contradomínio, imagem, condição $\forall x \in X, \exists ! y \in Y$. Sabe-se que o conjunto X representa o domínio da função, porém, o conjunto Y, ainda não tem classificação.

O grupo GATO realiza a hierarquização dos conceitos da seguinte maneira:

1. conceito de função;

2. conceitos de conjunto, contradomínio, domínio e imagem, considerando-os como integrantes de um mesmo nível hierárquico;
3. conceitos de elemento, regra e condição.

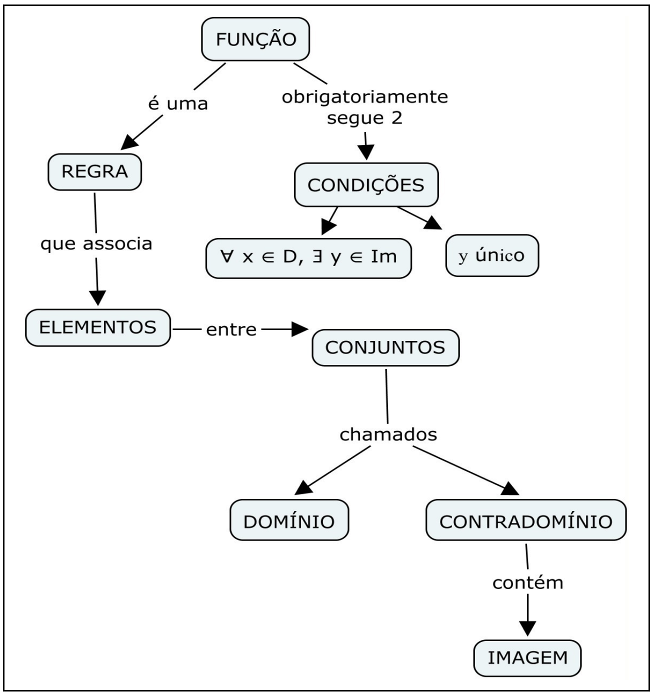
A disposição hierárquica considerada pelo grupo PEIXE se desenvolve de forma diferenciada, conforme a listagem abaixo:

1. conceito de função;
2. conceitos de regra, conjunto, domínio e contradomínio no mesmo nível hierárquico, e;
3. imagem e condição.

Os alunos desenvolvem a relação entre os conceitos considerando a hierarquização desenvolvida anteriormente. O grupo GATO relaciona o conceito de função diretamente aos conceitos de regra, conjuntos e condição, desconsiderando parcialmente a ordem hierárquica. É importante observar que este grupo se preocupa em utilizar os conceitos principiais sem repeti-los. A valorização parece estar concentrada mais no aspecto visual e na significação das relações do que propriamente na hierarquização dos conceitos. Os alunos trabalham com as interligações conceituais, atribuindo a cada relação suas respectivas palavras de ligação.

A princípio, o grupo GATO considera que "*função é uma regra que associa elementos entre conjuntos chamados domínio e contradomínio*", (figura 11) apresentando um raciocínio diferente daquele relatado anteriormente no qual considerava que uma função é uma relação entre conjuntos que obedece a uma regra representada por uma equação. Além disso, o fato da função ter que obedecer a duas condições é considerado relevante, pois as explicita separadamente na representação gráfica.

Figura 11 – Construção do Mapa Conceitual de função – grupo GATO

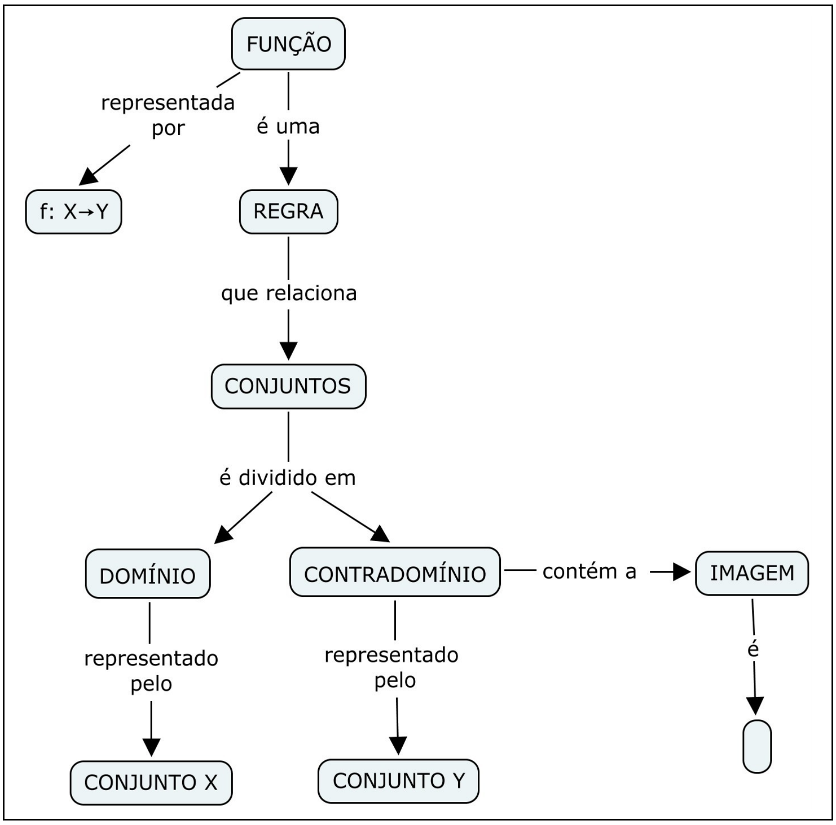


Fonte: grupo GATO

Uma observação deve ser feita em relação à palavra “obrigatoriamente”. A definição de Lages Lima (1998) não apresenta essa palavra, nem ao menos considera as condições de uma função obrigatórias, mas uma conseqüência da definição de ser função. Esse aspecto parece ter sido utilizado pelo próprio grupo para se certificar da necessidade da utilização dessas condições como garantia da relação matemática se tornar função.

O grupo PEIXE apresenta um esquema visual de forma diferente do grupo anterior (figura 12). Considera que “*função é uma regra que relaciona conjuntos e é dividido em domínio, representado pelo conjunto X, e contradomínio, representado pelo conjunto Y*”. Utiliza uma definição diferente daquela apresentada na Fase 1 onde enfatizava que o conceito de função é uma relação entre dois conjuntos que obedece uma regra. Esse grupo não ressalta as condições apresentadas por Lages Lima (1998) para que essa regra se caracterize função.

Figura 12 – Construção do Mapa Conceitual de função – grupo PEIXE



Fonte: grupo PEIXE

O grupo GATO subdivide seu protótipo de mapa conceitual em duas partes: definição e condição. Fica explícito neste momento que o grupo necessita separar as condições da função da própria definição. Criam inclusive significados diferenciados para nomear cada parte de suas construções. O grupo PEIXE atribui significados às relações estabelecidas entre os conceitos após ter realizado algumas alterações em seu esquema original. Acrescenta as condições das funções apresentadas por Lages Lima (1998), além da representação da função e da relação entre contradomínio e imagem.

Ao realizar as modificações o grupo GATO cria novas proposições para o protótipo de mapa conceitual: "*função é uma regra que relaciona conjuntos através da condição que é* $\forall x \in X, \exists! y \in Y$" e "*função é uma regra que relaciona conjuntos que é dividido em domínio e contradomínio*". A separação entre a definição de função e suas respectivas condições, pode denotar uma forma de desvinculação dessas condições em relação ao conceito de função propriamente dito. Esse fato se torna mais evidente na atribuição dos significados a grupos de informações que os alunos visualizam no esquema gráfico.

Diferentemente do outro grupo, os alunos do grupo PEIXE constróem quatro conjuntos de significados para seu protótipo de mapa conceitual: definição de função, definição dos conjuntos da função, definição do conjunto domínio, definição do conjunto contradomínio. Além das condições serem consideradas como parte integrante da definição do conceito de função, a representação dessa função também é considerada relevante e integrada à organização esquemática do conceito.

O grupo GATO após atribuir os significados para seu esquema gráfico construído prefere incrementar novos elementos à estrutura desenvolvida. Especifica a função, os elementos e os conjuntos atribuindo-lhes uma representação algébrica. Amplia o conceito de função e, de acordo com a opinião do grupo, considera essa apresentação visual mais compreensível do que a anterior. Os alunos desenvolvem, diante da leitura e da atribuição de significados de suas construções, algumas proposições relevantes. No caso do grupo GATO, os alunos afirmam que:

- função é representada por f: A -> B;
- função obrigatoriamente obedece a duas condições:
- qualquer que seja x pertencente a D, existe um y pertencente a CD;
- qualquer que seja x, existe um único y.
- função é uma regra que associa o elemento x pertencente ao conjunto A (denominado Domínio) ao elemento y pertencente ao conjunto B (denominado contradomínio).

O grupo destaca a representação, as condições e a definição de função separadamente. Considera ainda que função é uma regra capaz de associar elementos de dois conjuntos definidos como domínio e contradomínio.

No caso do grupo PEIXE, os alunos afirmam que:

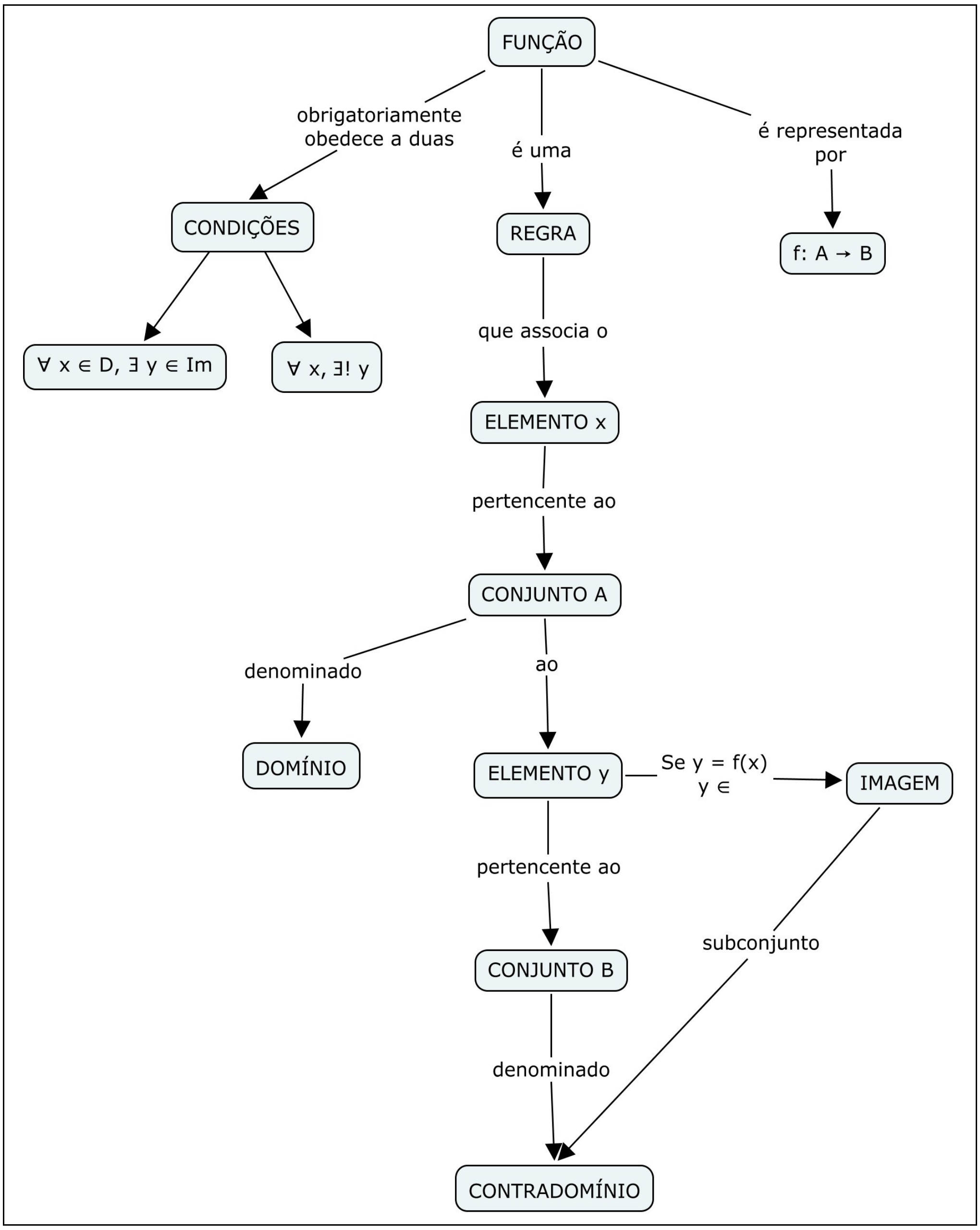
- função é uma regra que relaciona conjuntos, através da condição que é qualquer que seja x pertencente a X, existe um único y pertencente a Y;
- função é representada por f: X -> Y;
- os conjuntos são divididos em contradomínio e domínio;
- domínio é representado pelo conjunto X;
- contradomínio é representado pelo conjunto Y;
- contradomínio contém o Conjunto Imagem, definido por y pertencente a Y; f(x) = y.

É possível identificar que o grupo destaca a definição e a representação da função, bem como a representação do domínio e do contradomínio e sua relação com o conjunto imagem. Considera também que função é uma regra capaz de relacionar conjuntos por meio de uma condição de unicidade.

A confecção dessas proposições e a leitura de cada uma delas proporciona novos momentos de reflexão e intensa discussão entre os integrantes de cada grupo. Enquanto o maior desafio para o grupo GATO é encontrar uma maneira de representar a relação entre contradomínio e imagem, para o grupo PEIXE é simplificar a conceituação de função a fim de proporcionar uma leitura mais linear do conceito.

O que se pode compreender do mapa conceitual final do grupo GATO (figura 13) é que "*Função é uma regra que associa o elemento x pertencente ao Conjunto A, denominado Domínio, ao elemento y pertencente ao Conjunto B, denominado Contradomínio*". Verifica-se uma modificação na apresentação do conceito de função. Apesar dos elementos básicos continuarem a ser os mesmos, ou seja, os conceitos de regra, condição, domínio e contradomínio ainda são enfatizados e contemplados nas definições, a ênfase em determinados conceitos se altera. O conceito de função é definido a partir do conceito de regra e não mais do conceito de relação entre conjuntos.

Figura 13 – Mapa Conceitual de Função – grupo GATO



Fonte: grupo GATO

O contato com um novo conceito, como o conceito de Lages Lima (1998), pode ter contribuído com novos elementos para os subsunçores relacionados ao conceito de função. Só este fato, porém, não significa que obrigatoriamente há uma real modificação do que os alunos pensam sobre o conceito de função. Esses resultados parciais são apenas indícios de que os subsunçores se modificaram. Por outro lado, é importante destacar que o conceito teórico apresentado aos alunos também sofre modificações, como preconiza Ausubel no princípio da Assimilação.

Lages Lima (1998) afirma que função é uma regra que diz como associar elementos de dois conjuntos. Para o grupo GATO, função é uma regra que associa elementos de um conjunto em outro. O que pode se deixar transparecer é que, neste último caso, é a regra que associa elementos e não a função. As idéias são muito próximas, mas não são exatamente iguais. Esse aspecto pode exemplificar o que Ausubel afirma sobre o contato entre o subsunçor e o novo conhecimento. Não são somente os subsunçores que se modificam, o novo conhecimento também se transforma.

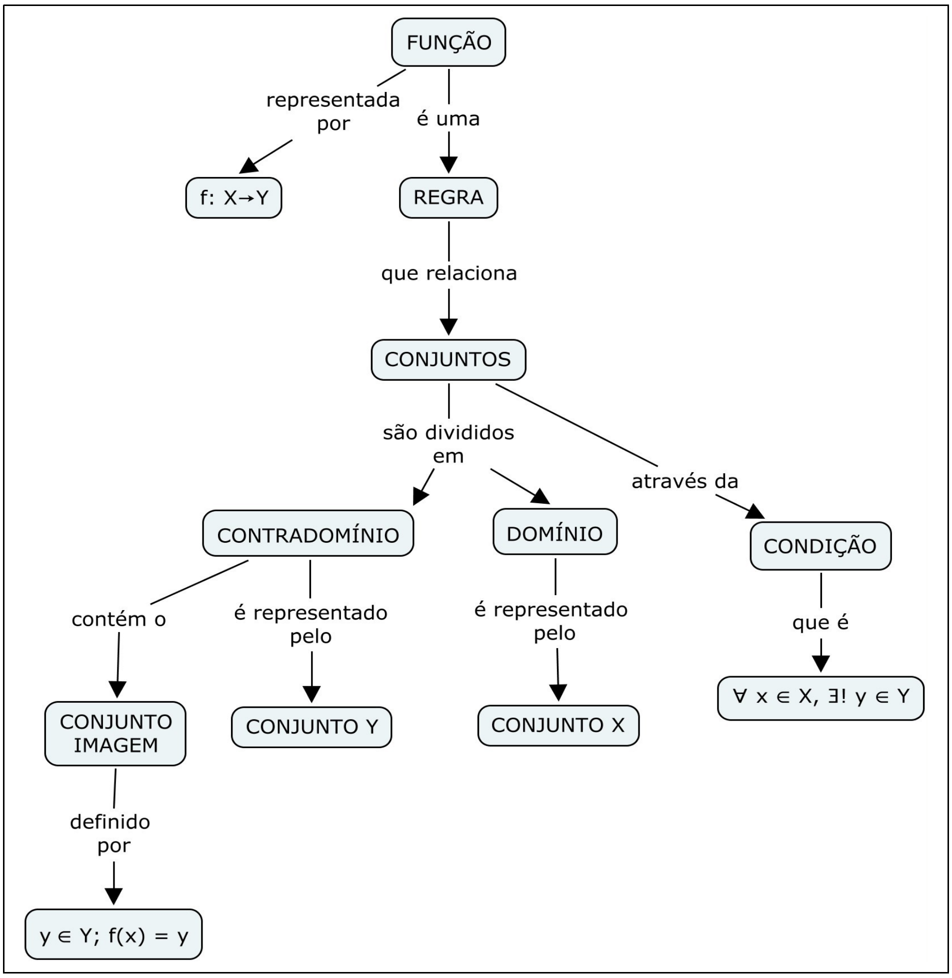
Esse aspecto foi identificado na Fase 1, tanto nos primeiros contatos com a definição de Dirichlet, quanto nos primeiros contatos com a definição de Lages Lima. Parece que, na construção dos mapas conceituais, os alunos vivenciam constantemente esses momentos, alterando seus subsunçores, bem como as novas definições sobre função. Pode ser que estejam se aprofundando nas discussões de uma única idéia sobre o conceito.

Compreende-se do mapa conceitual final do grupo PEIXE (figura 14) que "*Função é uma regra que relaciona Conjuntos através da condição que é* $\forall x \in X, \exists! y \in Y$". Outra leitura também pode ser realizada: "*Função é uma regra que relaciona Conjuntos divididos em Domínio e Contradomínio*". Verifica-se que, também neste caso, alterações são realizadas no conceito de função. O que antes era classificado como uma relação de dependência entre conjuntos, com ênfase na regra, agora se torna a própria regra. Conceitos básicos como domínio, contradomínio e elementos ainda são contemplados no mapa conceitual.

Observa-se que, diferentemente do grupo anterior, os integrantes deste grupo preferem conservar o significado da palavra relação, mesmo que o autor principal não a tenha utilizado. É possível que seus subsunçores tenham se alterado e incrementado novos elementos ou enfatizando elementos já existentes. O grupo PEIXE também não utiliza o conceito de Lages Lima na íntegra, incorporando todos os elementos e atribuindo-lhes os mesmos significados. Afirmar que função é uma regra que relaciona conjuntos apresenta um significado diferente de afirmar que função é uma regra que diz como associar elementos de dois conjuntos.

Esse fato também ilustra a modificação que o novo conhecimento sofre ao entrar em contato com os subsunçores do aprendiz. Além disso, apesar da definição do autor não apresentar como elemento principal o conceito de condição de função, esse grupo prefere incluí-lo como conceito integrante e fundamental para a definição de função.

Figura 14 – Mapa Conceitual de Função – grupo PEIXE



Fonte: grupo PEIXE

Apesar de modificações nos subsunçores e no novo conhecimento terem acontecido, elementos próprios de cada um deles são conservados. Os conceitos de conjuntos, domínio, contradomínio e imagem continuam a existir. O conceito de condição, sobretudo, a condição de unicidade, torna-se um elemento fundamental para a caracterização de função.

O conceito de variável não é citado em nenhum mapa conceitual. Como o texto apresentado não trata desse conceito é possível que não tenha suscitado a necessidade de contemplá-lo na confecção dos mapas. Pode ser também que esse conceito ainda esteja em processo de ancoragem em seus subsunçores e tenha entrado no processo de assimilação obliteradora. Como não é possível obter alguma comprovação de uma situação ou de outra, a intervenção 15 tenta provocar nos alunos o interesse pela busca de novas relações para o conceito de função diante da proposta de estabelecer conexões entre o conceito abordado e os conceitos discutidos na Fase 1 da pesquisa.

6.4. Intervenção 18 – Problema 1 – Função e Progressão Aritmética

Este encontro acontece em 25/09/07 durante 60 minutos e, é abordado o conceito de função de Lages Lima (1998), bem como os conceitos de equação e expressão algébrica de Imenes e Lellis (1998), variável dependente, variável independente, variável e incógnita de Soares (2005) e a interconexão entre função e variável dependente e independente de Ávila (1993). O objetivo é compreender e descrever como os alunos se organizam mentalmente para desenvolver um padrão algébrico diante de problemas de Progressão Aritmética e como os alunos caracterizam esse padrão como função.

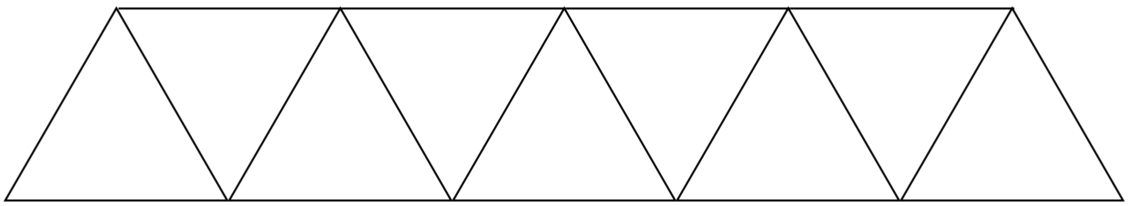
O aluno PEIXE não participa deste encontro por motivos pessoais. Mesmo assim, responde às perguntas do protocolo em momento posterior. Na 1ª parte, os alunos recebem os conceitos formalizados sobre função e os demais conceitos subjacentes, além dos últimos mapas conceituais desenvolvidos.

- **O problema proposto e o processo de desenvolvimento de padrão algébrico**

Na 2ª parte, o enunciado do problema, é apresentado para os alunos para que possam ler e interpretar em conjunto seu significado.

“Para formar triângulos com palitinhos dispostos conforme a figura (15), qual é a relação matemática que se pode estabelecer entre o número de palitos utilizados e o número de triângulos formados?”

Figura 15 – Triângulos dispostos em palitos



Fonte: Elaboração própria

Os alunos escolhem o aluno GATO para ir ao quadro e desenvolver o problema com o auxílio dos colegas e dos questionamentos da pesquisadora. Este aluno, portanto, inicia o processo desenhando os triângulos conforme apresentado no protocolo. Em seguida, apresenta a seguinte relação para triângulos e palitos:

$$
\begin{aligned}
&1\ t \rightarrow\ 3\ p\\
&2\ t \rightarrow\ 3 + 2\\
&3\ t \rightarrow\ 3 + 2 + 2 = 3 + 2.2
\end{aligned}
$$

Explica verbalmente que com 2 triângulos pode escrever 3 + 2 palitos, com 3 triângulos, pode escrever 3 + 2 + 2 palitos, que é o mesmo que 3 + 2.2. Após a explicação completa o raciocínio da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
&1\ t \rightarrow\ 3\ p + 0.2\\
&2\ t \rightarrow\ 3 + 1.2\\
&3\ t \rightarrow\ 3 + 2.2\\
&4\ t \rightarrow\ 3 + 3.2\\
&n\ t \rightarrow\ 3 + (n - 1).\ 2
\end{aligned}
$$

A pesquisadora questiona quais elementos estão se modificando. O aluno GATO responde que são o número de palitos e o número de triângulos representados respectivamente por n e 3 + (n – 1). 2. Todos os alunos discordam dessa idéia e o aluno GATO, concordando com os colegas, troca os significados, de tal forma que n representa a quantidade de triângulos e 3 + (n – 1).2, a quantidade de palitos.

Ainda para refletir sobre a situação, este aluno verbaliza que para construir 1 triângulo são necessários 3 palitos; 2 triângulos, 5 palitos e assim sucessivamente. O grupo não concorda com a utilização da letra n para a representação das variáveis porque pode trazer a idéia tanto do número de triângulos quanto do número de palitos. Assim, a letra t representa a quantidade de triângulos e p, a quantidade de palitos.

Ao serem questionados como os elementos se modificam, o aluno GATO afirma que o número de palitos inicia com 3 e depois o incremento acontece de dois em dois. O número de triângulos inicia com 1 e aumenta de 1 em 1, formando a seqüência 1, 2, 3, 4, etc. Por fim, afirma que a relação entre o número de palitos e o número de triângulos é $p = 3 + (t - 1).\ 2$. Todos os alunos reconhecem essa representação algébrica como a fórmula geral da progressão aritmética, caracterizando o número 3 como seu primeiro elemento e 2 como sua razão.

Em relação ao preenchimento dos protocolos, o aluno GATO escreve a relação entre o número de palitos e o número de triângulos da seguinte forma: "*1 t* $\rightarrow$ *3 p + 0.2* $\Rightarrow$ *...* $\Rightarrow$ *p = 3 + (t – 1).2*" . O aluno PEIXE utiliza uma representação semelhante: "*p = 3 + (t – 1).2*". De acordo com o que diz Sierpinska (1992) é necessário que ao se trabalhar o conceito de função, as variáveis sejam compreendidas dentro do problema. Os alunos devem reconhecer quais delas se modificam e como se modificam na relação que estabelecem. Esse processo é estimulado diretamente pela pesquisadora o que pode ter auxiliado os alunos a reconhecerem as variáveis e suas relações na construção do padrão matemático do problema.

- **A aplicação do padrão algébrico em situações reais**

O objetivo é questionar se o padrão desenvolvido é verdadeiro para quaisquer valores numéricos e com isso prepará-los para definir os conjuntos base para o desenvolvimento da relação enquanto função. O primeiro questionamento é proposto da seguinte forma: "Quantos palitos são necessários para construir 20 triângulos?".

O aluno GATO escreve na lousa a seguinte seqüência:

p = 3 + 2.(t – 1)
p/ t = 20
p = 3 + 20. (20 – 1)
p = 3 + 20. 19
p = 3 + 380
p = 383

O grupo sinaliza que esse resultado não está correto porque o número de palitos aumenta de dois em dois e não de 20 em 20 como o representado. O aluno GATO concordando altera a seqüência para:

p = 3 + 2.(t – 1)
p/ t = 20
p = 3 + 20. (20 – 1)
p = 3 + 20. 19
p = 3 + 38
p = 41 palitos

Conclui que para construir 20 triângulos são necessários 41 palitos.

O questionamento subseqüente é proposto da seguinte forma: “Quantos triângulos podem ser construídos utilizando-se 10 palitos?”. O aluno GATO escreve na lousa a seguinte seqüência:

$$p = 3 + 2.(t - 1)$$

$$p/\ p = 10$$

$$3 + 2.\ (t - 1) = 10$$

$$2.(t - 1) = 7$$

$$t - 1 = \frac{7}{2}$$

$$t = \frac{7}{2} + 1$$

$$t = \frac{9}{2} \Rightarrow \quad t = 4{,}5$$

Conclui que esse resultado não é possível. Pensa inclusive que seus cálculos estão incorretos, mas prossegue afirmando que não é possível construir triângulos dessa forma com 10 palitos. Acrescenta que, neste caso, é possível construir 4 triângulos completos e ainda sobrar 1 palito. Opta por não considerar correta a construção de 4 triângulos com 10 palitos.

Em relação aos protocolos escritos, o aluno GATO escreve exatamente o que desenvolveu na lousa. O aluno PEIXE escreve, para o 1º questionamento, a seguinte seqüência:

$$p = ?$$

$$t = 20$$

$$p = 3 + (t - 1).2$$

$$p = 3 + 19.2$$

$$p = 41$$

Para o 2º questionamento, este aluno escreve:

$$p = 10$$

$$t = ?$$

$$p = 3 + (t - 1).2$$

$$10 = 3 + 2t - 2$$

$$2t = 9 \Rightarrow \quad t = \frac{9}{2}$$

O aluno GATO, pelo fato de estar no quadro, preenche seu protocolo ao final de todas as discussões propostas. Os alunos podem compreender que o número de triângulos e o número de palitos devem ser representados por números naturais, já que palitos quebrados não são considerados no problema. A confirmação desse fato, porém, só é possível, após a definição da relação funcional e de seus respectivos conjuntos.

- **A caracterização do padrão algébrico como função**

O objetivo é compreender quais elementos os alunos destacam para caracterizar o padrão algébrico desenvolvido como função e como justificam essa escolha. A pergunta realizada pela pesquisadora ao iniciar esse processo é a seguinte: “Essa relação representa uma função?”. Os alunos, porém, preferem responder primeiramente à próxima pergunta proposta no protocolo que se refere a “Qual é o domínio, o contradomínio e a imagem dessa função?”. Esse fato pode indicar que, para os alunos, a definição dos conjuntos domínio e contradomínio é determinante para a caracterização de uma função.

O aluno GATO inicia esse processo afirmando que a relação algébrica do problema representa uma função de t em p. Sempre que for dado um valor para t é possível encontrar um valor para p. Além disso, este aluno considera que somente a representação algébrica do padrão determinado não caracteriza uma função. Falta, em sua opinião, a definição do domínio e do contradomínio.

O aluno GATO afirma que a relação f: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, na qual $\mathbb{N}$ representa o conjunto dos números naturais, é a melhor forma de defini-la como função, com p e t pertencentes ao conjunto $\mathbb{N}$. A função fica bem definida pela expressão f(t) = p = 3 + 2.(t – 1). Justifica-se ao dizer que f é função porque seu domínio, seu contradomínio e sua regra estão determinados. Não satisfeito com sua própria resposta, acrescenta que para cada valor da variável t deve existir um único valor para variável p.

Para comprovar sua idéia, escreve na lousa a seguinte seqüência:

$$\begin{aligned}
&f(t_1) = f(t_2)\\
&3 + 2.(t_1 - 1) = 3 + 2.(t_2 - 1)\\
&t_1 - 1 = t_2 - 1\\
&t_1 = t_2
\end{aligned}$$

O aluno explica que se conseguisse provar que $t_1 = t_2$ dado que $f(t_1) = f(t_2)$ então provaria que o valor para a variável p seria único. Acrescenta que sua prova matemática não contempla a condição de existência da função, mas, apenas a condição de unicidade. Afirma que não há restrições para a variável p, o que não acontece com a variável t. O número de triângulos não pode ser igual a zero. Assim, a função deve ser definida como f: $\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$, na qual $\mathbb{N}^*$ representa o conjunto dos números naturais com exceção do 0. Conclui que f: $\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$, p = 3 + 2.(t – 1), com p $\in \mathbb{N}^*$ e t $\in \mathbb{N}$, representa uma função pois seu domínio e seu contradomínio estão definidos e para cada valor de t existe um único valor para f(t), e, portanto, suas condições estão sendo satisfeitas.

Em relação aos protocolos, o aluno GATO escreve que essa relação entre o número de palitos e o número de triângulos representa uma função somente se "*for definido o domínio, o contradomínio e satisfazer as condições*". Define o conjunto domínio como $\mathbb{N}^*$, o conjunto contradomínio como $\mathbb{N}$ e o conjunto imagem como Im = $\{\forall t \in \mathbb{N}^* / f(t) = 3 + 2.(t - 1)\}$.

O aluno PEIXE escreve que "*escolhendo-se os conjuntos apropriados a relação pode representar uma função, já que* $\forall t, \exists! p$." Define os conjuntos domínio e contradomínio da mesma forma que o colega, como $\mathbb{N}^*$ e $\mathbb{N}$, respectivamente. O conjunto imagem define de uma forma diferente utilizando a letra p no lugar da expressão f(t). Assim, Im = $\{p \in \mathbb{N}^* / p = 3 + 2.(t - 1)\}$ representa o conjunto imagem.

Os alunos utilizam quatro conceitos para definir função: domínio, contradomínio, regra e condições. Utilizam, portanto, os elementos básicos apresentados por Lages Lima (1998) e ainda o fato das condições da existência e da unicidade serem satisfeitas. Os elementos destacados nos mapas conceituais, momento no qual organizavam os conceitos sobre função, são os mesmos destacados para aplicá-los na resolução dos problemas. Definem o conjunto imagem como subconjunto do contradomínio, não necessariamente apresentando os mesmos elementos.

- **A descaracterização da função**

O objetivo é compreender quais os elementos os alunos utilizam para descaracterizar a função e como justificam suas escolhas. A pesquisadora apresenta o seguinte questionamento: "O que você faria para que essa relação entre o número de triângulos e o número de palitos não representasse uma função?".

O aluno GATO explica que se colocasse o domínio igual a $\mathbb{N}$ não haveria um correspondente no contradomínio. Outra hipótese é inverter os papéis das variáveis p e

t. Enquanto p é uma variável independente, t se torna a variável dependente. Não satisfeito com sua própria resposta pensa em outra possibilidade. Diz que se trocar o domínio de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{Z}$, o conjunto dos números inteiros, o número -1, por exemplo, não apresenta um correspondente. Percebe, porém, que essa idéia não faz sentido porque não existem números negativos no caso do problema com triângulos.

Para que um elemento do domínio não apresente um correspondente no contradomínio acredita ser necessário eliminar um elemento desse contradomínio. Escreve então que $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N} - \{9\}$ não representa uma função porque existe um valor do domínio que não tem correspondente no contradomínio. A condição de existência não é satisfeita neste caso. Acrescenta que a outra condição, a da unicidade, não é satisfeita se para um único valor da variável t existissem dois valores para a variável p.

Escreve então que $f(t) = \begin{cases} 3 + 2.(t-1), & t > 1 \\ 5, & t = 1 \end{cases}$ descaracteriza a função f como função.

Em relação aos protocolos, o aluno GATO afirma que para descaracterizar a função f do problema como função, modifica "*o contradomínio ou a lei da função*". No primeiro caso torna o contradomínio igual a $\mathbb{N} - \{9\}$, e, no segundo caso transforma a lei da função. O aluno PEIXE prefere trocar o domínio de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{Z}$. Não utiliza para isto qualquer justificativa.

O objetivo dos alunos para descaracterizar uma função parece ter seguido o caminho da não satisfação das condições de existência e unicidade da função. Para efetivar suas idéias utilizam estratégias diferentes. Enquanto o aluno GATO prefere modificar o contradomínio e a lei de formação da função, o aluno PEIXE prefere alterar o domínio da função, mesmo que não represente, segundo o colega, a verdadeira situação do problema. Ao aplicar o conceito de função os alunos utilizam explicitamente os conceitos de domínio, contradomínio, regra ou lei de formação, condição de existência e condição de unicidade.

Para caracterizar uma função todos esses conceitos são fundamentais. Porém, para descaracterizá-la, a idéia essencial para os alunos é atingir os conceitos de condição de existência e unicidade, de tal forma que não sejam satisfeitas. Para isso, eles preferem ressignificar o contradomínio, a lei de formação ou o domínio da função.

6.5. Intervenção 22 – A auto-avaliação e a ressignificação do conceito de função

Esse encontro acontece em 09/10/07 com duração de 60 minutos. São apresentados aos alunos as informações sobre o conceito de função de Lages Lima (1998) e os mapas conceituais dos grupos GATO e PEIXE desenvolvidos na intervenção 17.

A auto-avaliação inicia com a entrega dos questionários teórico e aplicado, respondidos antes das intervenções. Depois da leitura do material, cada aluno tem a oportunidade de alterar os conceitos que desenvolveram inicialmente. No momento final é proposta uma reflexão do processo vivenciado pelo grupo, diante do reconhecimento dos aspectos positivos e negativos do processo de ressignificação do conceito de função. Os objetivos desta intervenção são verificar as reformulações conceituais dos alunos e a descrição dos comentários finais sobre a evolução pessoal na pesquisa.

Ao receberem o questionário teórico respondido individualmente por cada integrante do grupo, vários são os comentários. O aluno GATO e o aluno PEIXE afirmam que gostariam de alterar todas as definições teóricas que desenvolveram. Durante a leitura, eles mesmos tecem suas próprias críticas: "*Como eu pude escrever uma coisa dessas?*", "*Está tudo errado... posso modificar?*", "*Eu não sabia nada do que estava escrevendo*". Socializam as respostas com o grupo, mas cada aluno só visualiza suas propostas respostas considerando-as "absurdos" conceituais.

Como o tempo do encontro não permite que os alunos realizem todas as modificações desejadas, é solicitado que alterem os conceitos que, em sua opinião, apresentam mais falhas, ou que lhes são mais pertinentes.

- **O Conceito de Função**

Os alunos optam por alterar primeiramente o conceito de função. No questionário teórico o aluno GATO escreve que: "*função é uma relação que ocorre geralmente entre dois conjuntos que utiliza uma característica para relacionar os elementos desses conjuntos*". Com a alteração conceitual, seu conceito de função fica escrito da seguinte forma: "*função é uma relação que diz como associar um elemento* $x \in X$ *a um elemento* $y \in Y$." Considera-se que o conjunto X representa o domínio da função e o conjunto Y, seu contradomínio.

O aluno PEIXE, no questionário teórico, escreve que: "*função matemática é uma relação entre dois números, onde um dos números é obtido a partir do outro*". Com a alteração conceitual, o conceito de função do aluno PEIXE fica escrito da seguinte forma: "*função matemática é uma relação entre conjuntos. Essa relação se dá por meio de uma regra, e esta, deve obrigatoriamente obedecer a seguinte condição:* $\forall x \in D, \exists ! y \in CD$*"*. Considera-se que o conjunto D representa o domínio da função e o conjunto CD, o contradomínio.

Lages Lima (1998) refere-se a este conceito como uma regra que diz como associar um elemento do conjunto domínio a um elemento do conjunto contradomínio. Os alunos trazem elementos dessa definição, mas não a definição literalmente igual a apresentada pelo autor. Como afirma Ausubel, Novak e Hanesian (1980), após o contato do subsunçor com o novo conhecimento, ambos se modificam e carregam consigo seus elementos próprios e os elementos modificados.

Quando o aluno GATO afirma que função é uma relação que diz como associar elementos entre conjuntos, traz consigo o que pensava na fase inicial da pesquisa, que função é uma relação entre conjuntos e incorpora o conceito de Lages Lima (1998). No caso do aluno PEIXE, a transformação apresenta um acréscimo de mais elementos. Destaca que função é uma relação entre conjuntos que obedece a uma regra e às condições de existência e unicidade.

O conceito de Lages Lima (1998) parece ter-se incorporado ao subsunçor de tal forma que o conceito de função vinculado à relação entre números, existente previamente em sua estrutura cognitiva, transforma-se e amplia-se para a relação de vários números que compõem um conjunto. Diante do princípio da Assimilação preconizado por Ausubel, Novak e Hanesian (1980), é possível que, no caso do aluno GATO, o processo de assimilação obliteradora tenha se iniciado. O esquecimento de elementos do novo conhecimento, segundo este autor, é a garantia para que o novo conhecimento seja ancorado ao subsunçor, ampliando, dessa forma, o significado do conceito estudado.

É possível que, pelo fato deste aluno não ter evidenciado o conceito de regra, nem as condições de existência e unicidade da função, esses conceitos já tenham sido incorporados ao conceito de função de tal forma que não seja mais necessário explicitá-los, pois falar sobre função e sobre tais conceitos se torna redundante. Com o aluno PEIXE, esse processo talvez ainda não tenha se iniciado, pois precisa evidenciar os conceitos de regra e de condição de existência e unicidade ao definir o conceito de função. Ainda assim, é importante perceber que os alunos não memorizam o conceito, mas utilizam tanto seus conhecimentos prévios quanto os novos conhecimentos para ressignificá-lo.

- **Os conceitos de domínio e contradomínio**

Os conceitos de domínio e contradomínio são aqueles que os alunos optam por modificar logo em seguida. O aluno GATO modifica apenas o conceito de domínio. No questionário teórico este aluno escreveu que domínio "*é um dos conjuntos do qual a função faz parte no caso os conjuntos que contém os elementos que se relacionam com o outro*". Considera sua resposta difícil de compreender, pois não esclarece qual é o conjunto. Assim apresenta uma nova definição para o conceito de domínio "*é o conjunto que contém a variável independente, logo se considerarmos f: A → B, o conjunto A seria o domínio, pois é nele que está os elementos que se ligam ao conjunto B pela função*".

O aluno PEIXE, no questionário teórico escreveu que "*domínio de uma função representa os valores que o número x pode assumir*". Modifica o conceito escrevendo que "*domínio de uma função representa o conjunto formado pelos valores que a variável independente pode assumir*". Os alunos associam o conjunto domínio ao conceito de variável independente. O mesmo não pode se dizer em relação ao conceito de contradomínio, pois apenas o aluno PEIXE o vincula ao conceito de variável dependente.

O aluno GATO opta por não modificar o conceito de contradomínio. Continua a pensar este conceito como apresentou no questionário teórico, contradomínio "*é o conjunto que contém os elementos que podem ser relacionados com o domínio da função*". O aluno PEIXE pensa diferente. No questionário teórico escreveu que "*contradomínio de uma função representa os valores que o número f(x) pode assumir*". Modifica-o incluindo o conceito de variável dependente da seguinte forma: "*o contradomínio de uma função representa o conjunto formado pelos valores que a variável dependente pode assumir*". Para o aluno PEIXE, a relação entre domínio e variável independente, e, contradomínio e variável dependente está explícita. Para o aluno GATO esse fato não acontece.

Relacionar o domínio da função à variável independente é um processo natural. O problema se encontra na relação que se pode estabelecer entre os conceitos de contradomínio e variável dependente. A resistência em estabelecer essa relação vem persistindo desde a Fase 1 da pesquisa. Uma investigação mais profunda sobre o estabelecimento dessa relação pode ser realizada posteriormente.

Percebe-se que não há necessariamente, neste caso dos conceitos de domínio e variável independente, uma modificação conceitual, mas uma modificação na relação existente entre ambos os conceitos. As idéias principais continuam as mesmas. O domínio definido como um conjunto fundamental da função e a variável independente como uma variável à qual podem ser atribuídos quaisquer valores são as definições gerais apresentadas pelos alunos. A partir da nova relação, os valores assumidos pela variável independente não podem ser quaisquer de uma forma geral, mas quaisquer, dentro dos limites do conjunto domínio.

- **Representação na forma de conjuntos**

O aluno GATO opta por não fazer alterações na primeira parte do questionário aplicado que tratava da relação entre dois conjuntos. O aluno PEIXE, por sua vez, modifica apenas o que considerou como variável e suas derivações: variável dependente e independente. Considerou que a função da situação A (figura 8) seria a única opção a representar a função $f: X \to Y$, cuja lei de formação se apresentava como

$$f(k) = \begin{cases} 2, & se \ \ k = vogal \\ 4, & se \ \ k = consoante \end{cases}.$$

No questionário aplicado, o aluno PEIXE considerou que as variáveis representam "*os elementos do domínio porque são os elementos do domínio que variam para definir a sua imagem*". Modifica sua resposta considerando que "*a letra k é uma variável, k está variando no conjunto X*". O aluno prefere, portanto, explicitar quem é essa variável, porque, é somente neste momento que consegue visualizar a letra k como variável. Por outro lado, não faz qualquer menção sobre o papel de f(k), já que também poderia ter considerado f(k) como variável.

No questionário aplicado afirma que a variável independente é representada pela variável "k" e que não há uma variável dependente. Essa idéia se modifica ao longo das intervenções e escreve no protocolo que a variável independente continua sendo a letra "k". A variável dependente passa a existir e é considerada como "*a função f aplicada no valor k*", ou seja, f(k).

- **Representação na forma algébrica**

Diante das possíveis representações algébricas para a função $v:\Re \rightarrow \Re$, o aluno GATO considerou que x + y = 10 é a melhor representação da função porque relaciona x e y numa equação. Nesta intervenção, o aluno continua com essa compreensão sobre a situação proposta e desenvolve as modificações apenas na composição dos elementos da função.

No questionário aplicado, este aluno considerava que a função é composta por variáveis e incógnitas, pois, em sua opinião, esses dois conceitos apresentam o mesmo significado. No decorrer das discussões transforma essa idéia e passa a considerar incógnitas e variáveis como elementos que apresentam conceitos diferenciados. No caso da função, as letras x e y passam a ser caracterizadas como variáveis e não mais como incógnitas. Associa as variáveis às funções e às expressões algébricas. As incógnitas são associadas às equações.

O aluno PEIXE não altera as respostas do questionário aplicado para a representação algébrica da função $v:\Re \rightarrow \Re$. Continua a considerar que a expressão x + y representa uma função. Neste caso, não é possível compreender a resposta apresentada por este aluno. Ao atualizar o conceito de função, utiliza os conceitos de domínio, contradomínio, regra e condição. Sabe-se que considera algebricamente uma equação como representante de uma regra da função. Assim, a expressão x + y não sendo representante de uma equação, como poderia representar uma função?

É possível que o aluno não tenha percebido a contradição entre o conceito teórico e sua aplicação devido a diversos fatores, entre eles cansaço do final do semestre letivo. Ainda assim, essas explicações são meras conjecturas e o fato do aluno não ter alterado a resposta do questionário aplicado oficial fica sem explicação.

Ao final do processo de avaliação dos questionários o aluno GATO se pronuncia. Comenta que para ressignificar os conceitos utiliza os mapas conceituais e as definições formais. Acrescenta que, ainda tem dúvidas sobre a diferença entre variável e incógnita. Considera também que a leitura dos questionários respondidos há tanto tempo revelam sua evolução e não acredita que ele mesmo respondeu às questões da maneira como foi feito.

- **Reflexões finais**

Neste momento final da pesquisa, é proposto aos alunos que falem sobre os momentos bons e ruins vivenciados durante todo o processo interventivo. É comentado sobre a liberdade de expressão, sem críticas que possam inibir o pensamento. O aluno

GATO inicia o processo afirmando que gostaria de aprender a escrever melhor, saber como colocar as palavras no papel de forma mais adequada. Comenta que às vezes tinha todas as idéias organizadas na mente, mas colocá-las no papel é mais difícil. Afirma que saber o significado do conceito é uma coisa, mas convencer o colega sobre esse significado é bem diferente. O aluno PEIXE aproveita o momento e confessa que não gosta muito de escrever. Mas que escrever é necessário, as pessoas, inclusive ele, devem saber.

Outro aspecto apresentado pelo aluno GATO é o fato de ter desenvolvido o raciocínio dos problemas no quadro da sala de aula, atuando como se fosse um professor. Afirma que essa situação foi um pouco traumática. Todas as dúvidas que pairavam em sua cabeça o acompanharam durante a resolução dos problemas. Classifica a situação como "*horrível, horrível, horrível*". O aluno PEIXE afirma que também ficou um pouco "perdido" quando foi ao quadro, afirmou ser mais fácil pensar sentado na carteira do que pensar estando em evidência, na frente de todos.

O aluno GATO contribui com mais um elemento importante. Diz que, está acostumado, enquanto aluno, a sempre receber a resposta correta por parte do professor. Quando desenvolve um raciocínio errado, tem necessidade de ver a resposta correta. Nas intervenções, eles não têm acesso a esse comportamento por parte da pesquisadora. Isso gerou, em certos momentos, angústia. Queria ter uma resposta correta, mas a pesquisadora não fornecia, obrigando-os a chegar às conclusões sozinhos. Na realidade, essa situação o deixa frustrado. Nunca viveu um momento assim em relação à matemática. O aluno PEIXE considera esse aspecto diante de uma visão positiva. Afirma que aprendeu a conduzir o aluno a pensar, a colocar uma questão para o aluno resolver na lousa sem interferir diretamente em seu pensamento, deixando-o resolver de acordo com seus próprios conhecimentos.

O aluno GATO traz, a partir dessa discussão, outro elemento relevante. Afirma que na matemática, os professores não estão muito preocupados com os conceitos. Apresentam o conceito rapidamente e partem logo para os exercícios de forma mecânica. Os exemplos são feitos como modelo para que os exercícios sejam desenvolvidos pelo modelo acrescidos de poucos elementos.

Para finalizar, o aluno GATO afirma que o conceito de função está "menos bagunçado" em sua mente. Ainda não está completamente organizado. Afirma ter gostado de estudá-lo de forma mais aprofundada. O aluno PEIXE considera as provas matemáticas para a verificação das condições da função o aspecto mais importante do processo interventivo. Afirma que finalmente compreendeu o que é uma prova matemática por absurdo e como utilizá-la para provar que uma relação é uma função.

Na fase de aplicação do conceito de função, os alunos utilizam os conceitos de Lages Lima (1998) atribuindo-lhes significado. Assim, o conceito de regra e a determinação de suas variáveis iniciam os processos de construção de padrões para os problemas propostos. Os conceitos de domínio e contradomínio determinam os limites para as variáveis, de acordo com as necessidades numéricas de cada problema. A satisfação das condições de existência e de unicidade traz para a relação estabelecida anteriormente entre as variáveis a característica de ser função.

Para que os alunos possam descaracterizá-la, optam geralmente por modificar o conjunto contradomínio. Garantem que a condição de existência não seja satisfeita. A modificação da lei de formação é utilizada para que a condição de unicidade também não seja satisfeita.

O processo de aplicação do conceito de função, na resolução de problemas, acontece de forma bastante dinâmica. Enquanto, em determinado momento, os alunos acreditam ter respondido adequadamente aos questionamentos propostos, compreendem, em outro, erros e falhas no processo. Prosseguir a criação da função faz com que eles reflitam sobre cada conceito discutido, nas fases 1 e 2 da pesquisa. De acordo com Ausubel, Novak e Hanesian (1980), a aplicação de conceitos em situações práticas é uma das formas mais eficientes de se verificar se são bem compreendidos pelos alunos, se a eles são vinculados novos significados.

O processo de auto-avaliação contribui para que os alunos compreendam sua evolução, durante o processo interventivo. As alterações finais dos conceitos auxiliam na compreensão de que os conceitos, em suas estruturas cognitivas, não são simplesmente memorizados, mas significativamente mais duradouros, já que se utilizam de elementos subsunçores, conceituais, existentes na estrutura mental.

As reflexões dos alunos, sobre o período da pesquisa, contribuem para ratificar o apresentado sobre a formação do professor de matemática, na parte teórica deste trabalho. Na formação que não valoriza os conceitos e fornece respostas prontas aos alunos pode não possibilitar momentos de reflexão sobre os conhecimentos que os alunos trazem.

O desenvolvimento da autonomia intelectual do aluno não é simples, precisa ser iniciado o quanto antes. Os professores de matemática precisam ser formados adequadamente para a sala de aula, estar mais seguros não só de saberes, mas também das possíveis dificuldades dos alunos, no processo de aprendizagem, mais especificamente, no conceito de função.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante dos problemas existentes na Formação de Professores e na Formação de Professores de Matemática, apresentados por Tardif (2002) e Mizukami (2006), Ponte (1992) e Garnica (1997), respectivamente, destacam-se principalmente a não aritculação entre as disciplinas pedagógicas e específicas da matemática, a falta de entrosamento entre as disciplinas que envolvam conhecimentos algébricos e geométricos, a pouca consideração dos conhecimentos prévios dos alunos, a visão do licenciando como um ser passivo e individual diante do conhecimento e a valorização da aprendizagem dos procedimentos matemáticos em detrimento da aprendizagem conceitual.

Em relação ao estudo do conceito de função, as dificuldades em sua compreensão são estudadas há mais de duas décadas com resultados revelados em pesquisas nacionais e internacionais. Dentre elas, a vinculação do conceito de função ao conceito de equação, o estabelecimento de relações de dependência entre variáveis e a compreensão de representações algébricas e gráficas, bem como suas transformações, são as dificuldades consideradas mais relevantes para o estudo que se apresenta neste trabalho.

Para os pesquisadores da área, o sólido conhecimento matemático que o licenciando deve adquirir se baseia não no armazenamento de informações, mas na forma de domínio conceitual. O licenciando pode desenvolver atitudes positivas diante dos conhecimentos matemáticos para que seja capaz de aproveitar a riqueza das possibilidades de conhecimento propiciadas pela escola.

Como sugere Garnica (1997), os alunos em formação devem estudar problemas de Matemática elementar por meio de metodologias alternativas nos primeiros semestres do curso. Para Faria (2006), esses alunos devem aprender Matemática diante dos conhecimentos que já dispõem. As situações de ensino precisam promover o conhecimento científico da Matemática e a compreensão de sua importância na educação básica. Ponte (1992) acrescenta que os processos de formação não podem ser concebidos como uma imposição de um conjunto de verdades, mas diante de uma atitude de respeito pelos participantes. A grande preocupação é permitir ao licenciando o questionamento de suas concepções diante do hábito de duvidar.

Formar o professor de profundo conhecimento em Matemática pode não garantir que ele esteja preparado para ensiná-la, especialmente para alunos da educação básica, que têm os primeiros contatos com a linguagem formal da Matemática. Torná-la abstrata, nos primeiros anos, pode causar danos à aprendizagem dos alunos. A formação de professores precisa ser repensada, reavaliada e reformulada, mesmo gradativamente, para que se possa garantir minimamente a formação do profissional capaz de ensinar porque, em sua formação, o processo de ensino-aprendizagem é valorizado.

A proposta elaborada para o desenvolvimento da pesquisa é composta por todos esses elementos citados. Ao promover um processo de reflexão e de posterior ressignificação do conceito de função, utilizando-se uma metodologia baseada na Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel, procura-se articular conhecimentos matemáticos e pedagógicos, por meio da valorização de seus conhecimentos prévios dos alunos, do estudo de conceitos matemáticos voltados para a educação básica, e do estímulo de uma participação ativa, reflexiva e questionadora, não só do conteúdo como também do processo que vivencia.

A primeira etapa da pesquisa, a etapa do Levantamento, ao analisar os conhecimentos prévios dos alunos sobre os conceitos de função e seus conceitos subjacentes, traz contribuições importantes a respeito do que os alunos compreendem sobre função. Na Entrevista (quadro 4) é possível perceber que os alunos trazem consigo, no mínimo, 4 anos de experiência na utilização das funções. Ainda assim os alunos se sentem inseguros ao defini-la.

Quadro 4 – Resumo das definições apresentadas pelos alunos GATO e PEIXE nas Entrevistas e nos Questionários

LEVANTAMENTO	ALUNO GATO	ALUNO PEIXE
ENTREVISTA	Relação entre conjuntos	Expressão algébrica
QUESTIONÁRIO TEÓRICO	Relação entre conjuntos	Relação entre dois números
QUESTIONÁRIO APLICADO CONJUNTOS	Relação que obedece à lei da função	Relação que obedece às leis da função
QUESTIONÁRIO APLICADO ÁLGEBRA	Relação entre variáveis numa equação	Variáveis numa expressão algébrica

Fonte: elaboração própria

É também possível compreender que os conhecimentos prévios dos dois alunos analisados neste trabalho não são idênticos, apresentam diferenças e similaridades entre si. Esses conhecimentos, caracterizadores dos subsunçores, estão vinculados aos conceitos de relação entre números e de relação entre conjuntos.

Os resultados obtidos nos Questionários (quadro 4) complementam os resultados obtidos nas Entrevistas e revelam as dificuldades e contradições apresentadas pelos alunos ao definirem os conceitos solicitados. Esses resultados denotam os subsunçores relativos ao conceito de função e evidenciam a necessidade latente de se desenvolver sua ressignificação.

A segunda etapa da pesquisa, a etapa da Intervenção, ao propor a descrição de como os alunos ressignificam o conceito de função e seus conceitos subjacentes, ao utilizar os Princípios Programáticos de Ausubel como instrumento metodológico e o princípio da Assimilação como instrumento de análise, apresenta não só o pensamento dos alunos para cada reflexão proposta, mas também uma forma inovadora de se trabalhar com o conceito de função em sala de aula.

Diante dos resultados obtidos, conclui-se que a aprendizagem dos alunos acontece de forma significativa diante do modelo proposto por Ausubel. A primeira comprovação advém do fato dos alunos apresentarem em suas estruturas cognitivas conhecimentos prévios sobre função. Esse fato pode ser comprovado pelos resultados obtidos na entrevista na qual revelam ter aprendido o conceito a partir da 8ª série (atual 9º ano). Os questionários também revelam que existem subsunçores do conceito de função em suas estruturas cognitivas, relacionados ao conhecimento numérico e sobre conjuntos.

A segunda comprovação é o fato do conceito de função, por ser um conhecimento fundamental da matemática conforme Rêgo (2000), Moura e Moretti (2003) e Campos (2004), pelo fato de relacionar diversos tópicos matemáticos, de auxiliar no desenvolvimento de técnicas de modelagem para as mais variadas ciências e por se tratar de um conhecimento central para o Ensino Superior, pode ser considerado um conhecimento significativo.

A terceira comprovação se revela diante da participação ativa dos alunos. Em todas as atividades propostas o objetivo dos participantes é de questionar e refletir profundamente sobre seus próprios conhecimentos e os do colega. Muitas vezes, as discussões extrapolam o ambiente de sala de aula e perduram mesmo sem a participação da pesquisadora. Em sala de aula, os alunos trazem novas fundamentações para o conceito de função com idéias de diferentes autores.

Pelo fato desse processo se caracterizar como uma aprendizagem significativa ausubeliana, é possível afirmar que as interpretações e análises realizadas revelam que os alunos vivenciam as fases do princípio da Assimilação. É perceptível também que cada aluno o faz de uma maneira particular, baseada nos conhecimentos prévios que apresenta sobre o conceito de função (quadro 5).

Quadro 5 – Resumo das definições apresentadas pelos alunos GATO e PEIXE nas Intervenções

INTERVENÇÃO	ALUNO GATO	ALUNO PEIXE
DIRICHLET	Relação entre variáveis	Relação de dependência entre variáveis
LAGES LIMA E ÁVILA	Relação de correspondência entre conjuntos	Regra de associação de elementos de conjuntos
MAPAS CONCEITUAIS	Regra que diz como associar cada elemento do domínio a um único do contradomínio	Regra que associa elemento do domínio ao elemento do contradomínio
PROBLEMAS	Variável, Regra, Domínio, Contradomínio e Condições	
AUTO-AVALIAÇÃO	Relação que diz como associar um elemento do conjunto domínio a outro do contradomínio	Relação entre conjuntos com regra que obedece às condições

Fonte: elaboração própria

Durante o processo, subsunçores e novos conhecimentos sofrem alterações, ao mesmo tempo em que conservam elementos originais. Os alunos, em nenhum momento, escrevem o conceito de função idêntico aos de Dirichlet ou de Lages Lima, as respostas sempre são originais. O desenvolvimento de questionamentos e de reflexões permite, portanto, que o aluno desenvolva seu próprio conceito sobre função, sem a necessidade de memorizá-lo e com a possibilidade de utilização adequada na resolução e modelagem de problemas.

A utilização dos Princípios Programáticos de Ausubel auxilia no desenvolvimento de cada momento de intervenção, diante da fundamentação da ação pedagógica para o processo reflexivo da aprendizagem conceitual.

Diferenciar os conceitos abrangentes e específicos, bem como os específicos dos abrangentes, relacionados ao conceito de função não é uma tarefa simples de ser realizada, já que a proposta é o desenvolvimento da ressignificação de apenas um conceito. Ao selecionar e diferenciar os conceitos abrangentes e específicos e hierarquizá-los, a compreensão dos elementos conceituais se torna mais clara e as metas estabelecidas para o desenvolvimento de cada intervenção são estabelecidas com maior segurança.

Por meio desse processo é possível compreender como os alunos estabelecem a relação entre os conceitos de função e variável, as diferenciações entre os conceitos de função e expressão algébrica, e, função e equação. Nesse momento da intervenção, os alunos percebem que, apesar de uma equação ser composta por variáveis que se relacionam entre si, ela não se caracteriza como função porque essa relação não se submete às condições de existência e unicidade, necessárias para ser função. Percebem ainda que, apesar de existirem variáveis numa expressão algébrica, elas não se relacionam entre si.

A fase que utiliza os princípios da Diferenciação Progressiva e da Reconciliação Integradora é, pois, uma fase de comparações conceituais. Ao conhecerem as definições de todos os conceitos abordados, os alunos se tornam capazes de refletir e questionar seu próprio conhecimento sobre o tema, comparativamente com as definições apresentadas e as idéias dos outros colegas do grupo, assimilando novos conhecimentos sobre função.

O desenvolvimento dos mapas conceituais contribui com mais detalhes sobre como os alunos relacionam os conceitos específicos ao conceito mais abrangente de função, bem como, aos conceitos subjacentes. Essa fase da pesquisa é uma fase da organização conceitual por meio da visualização e da compreensão das relações conceituais.

Ela revela a ênfase atribuída às condições de existência e unicidade da função. Esse fato é comprovado porque em todos os mapas conceituais desenvolvidos pelos alunos GATO e PEIXE, as condições não se incorporam ao conceito principal, elas são destacadas e enfatizadas como um conhecimento relevante, que não deve ser esquecido.

Outro aspecto também importante revelado no momento do desenvolvimento dos mapas conceituais diz respeito à composição de uma função. Em alguns momentos, os alunos afirmam que função é uma relação entre domínio e contradomínio, em outros, afirmam que função é uma relação entre domínio e imagem. Essa constatação da contradição se apresenta também nos protocolos escritos dessa fase. O conceito de imagem está vinculado ao conceito de conjunto o que fortalece a compreensão de que imagem é um subconjunto do contradomínio. É interessante, portanto, trabalhar com os alunos a compreensão de que imagem pode ser um conjunto, mas também pode ser um elemento existente no contradomínio, resultante da aplicação de cada elemento do domínio na função.

A fase da aplicação do conceito de função em problemas contextualizados é fundamental para a organização mental dos alunos ao trabalharem os conceitos estudados em situações hipotéticas, elucidando possíveis dúvidas, corrigindo erros que cometeram durante o processo. Esse é de fato um momento de consolidar o conhecimento, um momento que finaliza o processo de ressignificação do conceito de função.

Esse momento causa bastante "angústia" entre os alunos ao mesmo tempo em que se torna um desafio. Eles precisam, por si só, refletir sobre o problema apresentado, encontrar as variáveis, relacioná-las por meio de uma regra, determinar o domínio e o contradomínio dessa relação que caracterize o problema proposto e submeter essa relação ao teste das condições de existência e unicidade. Esse momento final da prova das condições é um momento que muitas vezes revela para o aluno se suas escolhas anteriores estão realmente corretas e adequadas ao problema. Esse processo vivenciado pelos alunos na fase da Consolidação se caracteriza como um processo dialético de reflexão e de aplicação dos conhecimentos adquiridos.

As dificuldades que os alunos apresentam ao ressignificar o conceito de função ratifica o que os pesquisadores estudam sobre o tema, sobretudo em relação à função constante, como denota as pesquisas de Akkoç e Tall (2002).

Os conceitos de variável, de incógnita e de equação são complexos e de difícil compreensão para os alunos. Por serem específicos e básicos para a compreensão não só do conceito de função, mas de outros conceitos matemáticos, sugere-se essa temática para novas pesquisas de formação de professores dessa área do conhecimento.

A elaboração e a aplicação de toda a pesquisa trouxeram contribuições para a compreensão dos alunos também para os aspectos pedagógicos. Em algumas intervenções, sobretudo na última delas, os alunos explicitam o quanto a forma de trabalho, ao estimular a reflexão com a utilização de constantes perguntas e nenhuma resposta pronta, auxilia no desenvolvimento mental do aluno. É importante notar que não só o conceito de função é ressignificado, mas também a compreensão que apresentam sobre o ensino desse conceito.

Para a pesquisadora, a vivência de todo o processo também contribui de forma positiva. A separação dos papéis de professora e pesquisadora é inicialmente difícil de ser praticado, eles se misturam e se confundem. Compreender as diferenças entre os objetivos da pesquisa e do ensino esclarece não só o que precisa ser desenvolvido na pesquisa, mas também os objetivos do ensino enquanto professora. A formação como pesquisadora que se inicia com esse trabalho proporciona uma visão mais focada do que é ensinar, uma valorização dos conhecimentos que os alunos já trazem sobre matemática e uma compreensão da importância do desenvolvimento matemático conceitual.

A metodologia utilizada nas intervenções pode ser plenamente aplicada em sala de aula com vários alunos, apesar dos resultados focarem apenas a aplicação com dois alunos. Nesse caso, o professor pode dividir a sala de aula em grupos e desenvolver o trabalho do conceito de função, não necessariamente em 22 aulas como o apresentado neste trabalho, mas em um número menor de aulas utilizando os Princípios Programáticos de Ausubel em sessões mais curtas mas que contemplem os objetivos propostos.

Não se espera também que o professor utilize essa metodologia no desenvolvimento de todos os conceitos matemáticos, por uma questão de tempo e da obrigatoriedade de finalizar os conteúdos propostos para o ano letivo. É possível, porém, que o professor faça escolhas e opte pela utilização da metodologia proposta com conceitos que julgue fundamentais para a compreensão do aluno.

Outros questionamentos surgem durante a pesquisa. Se o licenciando do 1º semestre de formação conseguiu repensar o conceito de função e alterar sua compreensão, o que aconteceria com os alunos que terminam a Licenciatura em Matemática? De que forma a reflexão significativa do conceito de função pode influenciar a maneira como o professor ensina em sala de aula?

Pode-se também pensar na possibilidade de aplicação dessa mesma proposta juntamente com alunos de outras instituições, ou em turmas com um número maior de alunos e verificar como seria o comportamento dos alunos e seus processos mentais. Essas questões geram novas problemáticas em trabalhos posteriores, como forma de aprofundamento da proposta deste trabalho.

Pretende-se aplicar os conhecimentos adquiridos como uma nova proposta do desenvolvimento do ensino de função. O incremento dessa metodologia em cursos de extensão e de especialização na área de Educação Matemática pode contribuir para expandir a visão atual dos professores possibilitando-lhes, além da aprendizagem de novas ferramentas, como por exemplo, os mapas conceituais, o desenvolvimento de situações que lhe permitam valorizar os conhecimentos prévios dos alunos e os conceitos matemáticos, dentre eles, o conceito de função.

REFERÊNCIAS

AKKOÇ, H; TALL, D. The simplicity, complexity and complication of the function concept. In: (Ed.) **Proceedings of the 26th Annual Conference – PME 26.** v2. 2002. United Kingdom, p. 25-32.

ALMEIDA, F. C. de P.; SCALON, J. D. **Fatores determinantes no aprendizado de funções Matemáticas.** Belo Horizonte: Unincor, 2002.

ALMOULOUD, S. A.; MANRIQUE, A. L.; SILVA, M. J. F. da; CAMPOS, T. M. M. A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. **Revista Brasileira de Educação,** São Paulo, n. 27, p. 94 – 108, set./out./nov./dez. 2004.

ARTIGUE, M. Cognitive Difficulties and Teaching Practices. In: DUBINSKY, E. e HAREL, G. **The Concept of Function.** EUA: Concordia University, 1992, p. 109-132.

AUSUBEL, D. P; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. **Psicologia Educacional.** Rio de Janeiro: Interamericana, 1980 (2ª edição).

ÁVILA, G. Introdução à Análise Matemática. São Paulo: Edgard Blücher, 1993.

BARBOSA, E. P.; DARSIE, M. M. P. **Significados produzidos sobre o conceito de função Matemática: análise de uma trajetória da formação de professores de Matemática ao ensino fundamental.** II Simpósio de Pesquisa em Educação Matemática, 2003.

BIANCHINI, B.L.; PUGA, L. Z. **Função: Diagnosticando registros de representação semiótica.** 2004. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Departamento de Matemática, PUC, São Paulo.

BLANCO, M. M. G. **A formação inicial de professores de Matemática: fundamentos para a definição de um curriculum.** In: FIORENTINI, D. (Org.) Formação de professores de Matemática: explorando novos caminhos, com outros olhares. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2003.

BRAGA, Ciro. **Função – a alma do ensino da Matemática.** São Paulo: Annablume; FAPESP, 2006.

BRITO, A. de J.; ALVES, F. T. O. **Profissionalização e saberes docentes: análise de uma experiência em formação inicial de professores de Matemática.** In: NACARATO, A. M.; PAIVA, M. A. V. (Orgs.). A Formação do professor que ensina Matemática – perspectivas e pesquisas. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

CAMPOS, T. M. M. Cursos de Licenciatura e desafios da formação de professores de Matemática. **VII EPEM – Encontro Paulista de Educação Matemática.** São Paulo, Junho, 2004.

CARNEIRO V. C.; FANTINEL P. C.; SILVA R. H. **Funções: significados circulantes na formação de professores.** Boletim de Educação Matemática. Rio Claro, ano 16, no. 19, p. 37-57, 2003.

CEARÁ. Lei no. 8.423, de 3 de fevereiro de 1966. Encampa a Faculdade Católica de Filosofia do Ceará, sob a denominação de Faculdade de Filosofia do Ceará, e dá outras providências. **Lex:** Arquivo Público do Estado do Ceará, Ceará, D.O. no. 9.309, p. no. 1037, 9 de fevereiro de 1966. Legislação Estadual.

CHARLOT, B. **Relação com o saber – formação dos professores e globalização.** São Paulo: Artmed, 2005.

COSTA, A. C.; THOMAZ NETO, M. O. **Uma análise dos conhecimentos de função de estudantes iniciantes do curso de Matemática.** VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, Recife, Universidade Federal de Pernambuco, 2004.

COTRET, S. R. **Une Etude Sur Lês Representations Graphiques Du Mouvement Comme Moyen D´Acceder Au Concept de Fonction ou de Variable Dependante**. Journal pour lês enseignants de mathematiques et de sciences physiques du premier cycle de l´enseignement secondaire. Petit X, n. 17, n. 5-27, 1988.

CYRINO, M. C. da C. T. **Preparação e emancipação profissional na formação inicial do professor de Matemática.** In: NACARATO, A. M.; PAIVA, M. A. V. (Orgs.). A Formação do professor que ensina Matemática – perspectivas e pesquisas. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

DANTE, L. R. **Matemática: contexto & aplicações**. Vol. 1. São Paulo: Ática, 2003.

DARLING-HAMMOND, L; BARATZ-SNOWDEN, J (Eds.). **A good teacher in every classroom.** The National Academy of Education Committee on Teacher Education. San Francisco, Ca: Jossey Bass, 2005.

DUBINSKY, E.; HAREL, G. The Nature of the Process Conception of Function. In: DUBINSKY, E. e HAREL, G. **The Concept of Function.** EUA: Concordia University, 1992, p. 85-106.

FARIA, P. C. de. **Atitudes em relação à Matemática de professores e futuros professores.** 2006. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba.

FERREIRA, A. B. H. **Míni Aurélio: o minidicionário da língua portuguesa**.Curitiba: Posigraf. 2004.

FERREIRA, A. C. **Um olhar retrospectiva sobre a pesquisa brasileira em formação de professores de Matemática.** In: FIORENTINI, D. (Org.) Formação de professores de Matemática: explorando novos caminhos com outros olhares. Campinas, SP: Mercado das Letras, 2003.

GARNICA, A. V. M. Professor e professor de Matemática: das informações que se tem acerca da formação que se espera. **Revista da Faculdade de Educação.** São Paulo, v. 23, n.1-2, jan./dez., 1997.

GAUTHIER, C. **Por uma teoria da pedagogia: Pesquisas contemporâneas sobre o saber docente.** Ijuí, RS: Ed. da Unijuí, 1998.

GIOVANNI, J.R.; BONJORNO, J. R. **Matemática: uma nova abordagem: versão trigonometria**. Vol. 1. São Paulo: FTD, 2000.

GOWIN, D.B. **Educating**. Ithaca, N.Y.: Cornell University Press, 1981.

GUIMARÃES, V. S. **Formação de professores: saberes, identidade e profissão.** Campinas, SP: Papirus, 2005.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática Elementar 1: conjuntos e funções**. São Paulo: Atual, 2001.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. **Microdicionário de Matemática**. São Paulo: Scipione, 1998.

KIERAN, C. **Teaching and learning of school algebra**. Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. Cap. 7, 1992.

LAGES LIMA, E., CARVALHO, P.C.P., WAGNER, E.; MORGADO, A.C. **A Matemática do Ensino Médio**. Vol. 1. Rio de Janeiro: SBM, 1998.

LAROUSSE, C. **Dicionário da Língua Portuguesa**. São Paulo: Universo, 1992.

LASTÓRIA, A. C,; MIZUKAMI, M. G. N. **Construção de material instrucional como ferramenta para aprendizagens docentes.** In: MIZUKAMI, M. G. N; REALI, A. M. R. (Orgs.) Aprendizagem Profissional da Docência: Saberes, Contextos e Práticas. São Carlos: EdUFSCar, 2002.

LOPES, W. S. **A importância da utilização de múltiplas representações no desenvolvimento do conceito de função: uma proposta de ensino.** 2003. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), PUC, São Paulo.

MIZUKAMI, M. das G. N. **Aprendizagem da docência: conhecimento específico, contextos e práticas pedagógicas.** In: NACARATO, A. M.; PAIVA, M. A. V. (Orgs.). A Formação do professor que ensina Matemática: perspectivas e pesquisas. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

MEIRA, L. Aprendizagem e ensino de Funções. In: SCHLIEMANN, Analúcia (Org.). **Estudos em Psicologia da Educação Matemática.** 2 ed. Ampliada. Recife: Editora Universitária da UFPE, 1997.

MENDES, M. H. M. **O conceito de função: aspectos históricos e dificuldades apresentadas por alunos do segundo para o terceiro grau**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC, Rio de Janeiro, 1994.

MOREIRA, M. A. **Aprendizagem Significativa.** Brasília: UNB, 1999.

MOURA, M. O. de; MORETTI, V. D. Investigando a aprendizagem do Conceito de Função a partir dos conhecimentos prévios e das interações sociais. **Ciência & Educação**, São Paulo, v. 9, n.1, p 67-82, 2003.

NACARATO, A. M.; PAIVA, M. A. V. **A formação do professor que ensina Matemática: estudos e perspectivas a partir das investigações realizadas pelos pesquisadores do GT 7 da SBEM.** In: NACARATO, A. M.; PAIVA, M. A. V. (Orgs.). A Formação do professor que ensina Matemática – perspectivas e pesquisas. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

NAGLE, Jorge. **Educação e Sociedade na Primeira República.** Rio de Janeiro: DP&A, 2001.

NOVAK, J.D. Understanding the learning process and effectiveness of teaching methods in the classroom, laboratory and field**. Science Education**, p. 493-512,1976.

NUNES, A. I. L. **a Pesquisa no campo da formação continuada de professores: interrelacionando conhecimentos e cruzando caminhos.** In: CAVALCANTE, M. M. D.; NUNES, J. B. C.; FARIAS, I. M. S. de. Pesquisa em educação na UEVE: um caminho em construção. Fortaleza: Edições Demócrito Rocha, 2002.

OLIVEIRA, N. **Conceito de função: uma abordagem do processo ensino-aprendizagem.** 1997. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Departamento de Matemática, PUC, São Paulo.

ONTORIA, A.;BALLESTEROS, A.; CUEVAS, C.; GIRALDO, L.; MARTÍN, I.; MOLNA A.; RODRIGUEZ, A., VÉLEZ, U. **Mapas Conceituais: uma técnica para aprender.** São Paulo: Edições Loyola, 2005.

PAIVA, M. A. V. Saberes do professor de Matemática: uma reflexão sobre a licenciatura. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, ano 9, n. 11, p. 95-104, edição especial: formação de professores, 2002.

PAIVA, M. A. V. ; FREITAS, R. Os mapas conceituais como instrumento de apoio à aprendizagem da Matemática. **Revista Sapientia**, Cesat- Serra, v. 1, n. 4, 2005.

PCNEM. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio).** Ministério da Educação: Secretaria de Educação Básica, 2000.

PELHO, E. B. B. **Introdução ao conceito de função: a importância da compreensão das variáveis.** 2003. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), PUC, São Paulo.

PIRES, C. M. C.; SILVA, M. A. da; SANTOS, R. C. dos. **Reflexões sobre a formação inicial de professores de Matemática, a partir de depoimentos de coordenadores do curso de licenciatura.** In: NACARATO, A. M.; PAIVA, M. A. V. (Orgs.). A Formação do professor que ensina Matemática – perspectivas e pesquisas. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

PONTE, J. P. da. **Concepções dos professores de Matemática e processos de formação.** In: Educação Matemática – temas de investigação. Lisboa: SEM-SPCE, 1992.

PRAIA, J. F. **Aprendizagem significativa em D. Ausubel: Contributos para uma adequada visão da sua teoria e incidências no ensino.** III Encontro Internacional sobre Aprendizagem Significativa, Peniche, Portugal, 2000.

PROJETO REDIN (Recursos Digitais Interativos) EAD, Rio Grande do Sul: UFRGS, 2005, 9 p.

RÊGO, R. G. do **Um estudo sobre a construção do Conceito de Função.** 2000. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal.

RIBEIRO, R.P.; NUÑEZ, I.B. In: Fundamentos do Ensino-aprendizagem das ciências naturais e da Matemática: o novo ensino médio. **Pensando a aprendizagem significativa: dos mapas conceituais às redes conceituais.** Porto Alegre: Sulina, 2004, p. 201-225.

ROSSINI, R. **Saberes docentes sobre o tema função: uma investigação das praxeologias.** Tese (Doutorado em Educação Matemática), PUC, São Paulo, 2006.

SCHWARTZMAN, Simon; BOMENY, Helena Maria Bousquet; COSTA, Vanda Maria Ribeiro. **Tempos de Capanema.** São Paulo: Editora FGV, 2000.

SHULMAN, L. Those who understand: the knowledge growths in teaching. **Educational Researcher**. EUA, n. 15, p. 4-14, fev., 1986.

SIERPINSKA, A. In: The Concept of Function. **On understanding the notion of function.** EUA: Concordia University, 1992, p. 25-58.

SOARES, J. de B. **Dicionário de Matemática**. São Paulo: Hemus, 2005.

SODRÉ, U. Matemática Essencial – Ensino: Fundamental, Médio e Superior. Disponível em http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/fundam/expralg/expralg.htm acessado em 22/07/2007.

STAKE, R. E. **Investigación com estúdio de casos.** Madrid: Morata, 1998.

SZTAJN, P. O que precisa saber um professor de Matemática? Uma revisão da literatura americana dos anos 90. **Educação Matemática em Revista**. São Paulo, ano 9, n. 11, p. 17-28, abril, 2002.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional.** Petrópolis, RJ: Vozes, 2002.

TRINDADE, J. A. de O.; MORETTI M. T. **Uma relação entre a teoria histórico-cultural e a epistemologia histórico-crítica no ensino de funções: a mediação.** Zetetiké, Campinas, v.8, no. 13/14, p. 29-50, 2000.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ. Histórico. Apresenta a história da Universidade. Disponível em: < http://www.uece.br/php/view.php?setor=1&id=123> Acesso em: 27 de abril de 2007.

VALENTE, Wagner Rodrigues. A elaboração de uma nova vulgata para a modernização do ensino de Matemática: aprendendo com a história da Educação Matemática no Brasil. **Bolema,** São Paulo, n. 17, p. 40-58, 2002.

____________________________. Do engenheiro ao licenciado: subsídios para a história da profissionalização do professor de Matemática no Brasil. **Revista Diálogo Educacional,** Curitiba, v. 5, n. 16, p. 75-94, set./dez. 2005.

VIDAL, Diana Gonçalves; FARIA FILHO, Luciano Mendes. Reescrevendo a história do ensino primário: o centenário da lei de 1827 e as reformas Francisco Campos e Fernando de Azevedo. **Educação e Pesquisa,** São Paulo**,** v. 28, n. 1, jan./jun. 2002.

YIN, R. K. **Estudo de Caso – planejamento e métodos.** Porto Alegre: Bookman, 2005.

ZEICHNER, K. Tendências da pesquisa sobre formação de professores nos Estados Unidos. **Revista Brasileira de Educação**, n.9, p. 76-87, 1998.

ZUFFI, E. M.; PACCA, J. L. A. Sobre funções e a linguagem Matemática de professores do Ensino Médio. **Zetetiké**, Campinas, v. 8, no. 13/14, p. 7-28, 2000.

______________________________. O conceito de função e sua linguagem para os professores de Matemática e de ciências. **Ciência e Educação**. São Paulo, v.8, n.1, p. 1-12, 2002.

APÊNDICES

Caderno de Apêndices e Anexos

ANEXOS

Caderno de Apêndices e Anexos

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ

Luciana de Lima

A APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DO CONCEITO DE FUNÇÃO NA FORMAÇÃO INICIAL DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

CADERNO DE APÊNDICES E ANEXOS

Fortaleza – Ceará

2008

SUMÁRIO

APÊNDICES

APÊNDICE I – Roteiro de Entrevista com professor

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ – UECE
CURSO DE MESTRADO ACADÊMICO EM EDUCAÇÃO – CMAE

Pesquisa "A RELAÇÃO ENTRE A APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA E O ENSINO DO CONCEITO DE FUNÇÃO NA FORMAÇÃO INICIAL DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA DA UECE"

1. DADOS GERAIS

1. Qual é seu nome completo?
2. Qual é sua data de nascimento?
3. Qual é sua graduação? (bacharelado ou licenciatura?)
a) Qual o ano de conclusão da graduação?
b) Qual a instituição em que você concluiu sua graduação?
4. Qual é sua maior titulação?
5. Quanto tempo você tem de magistério?
a) no geral
b) no Ensino Superior
6. Quais as disciplinas você leciona atualmente na Universidade?

2. A DISCIPLINA DE CÁLCULO

1. O que você ensina especificamente na disciplina de Cálculo I? (conteúdos)
2. Por que essa disciplina apresenta 10 créditos, diferenciando-se, portanto, de outros cursos que disponibiliza menos créditos para o desenvolvimento dos conteúdos?
3. Os alunos apresentam dificuldades em aprender os conteúdos ministrados na disciplina de Cálculo I? Se sim, quais especificamente?
4. O que você gostaria que seus alunos soubessem ao terminar a disciplina?

3. OS SABERES DOS LICENCIANDOS – CONCEITO DE FUNÇÃO

1. Como os alunos geralmente definem uma função matemática?

2. Quais são os erros conceituais que os alunos geralmente cometem em relação às funções? (variável x incógnita, relação x função x equação)
3. Geralmente os alunos preferem utilizar que tipo de representação para caracterizar uma função? (geométrica, numérica, algébrica, conjuntos)
4. Quais são as maiores dificuldades que os alunos apresentam em relação a esse conceito? (variável, dependência entre variáveis, unicidade na relação, transformações de representações)

APÊNDICE II – Roteiro de Entrevista com alunos

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ – UECE
CURSO DE MESTRADO ACADÊMICO EM EDUCAÇÃO – CMAE

Pesquisa "A RELAÇÃO ENTRE A APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA E O ENSINO DO CONCEITO DE FUNÇÃO NA FORMAÇÃO INICIAL DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA DA UECE"

1. **DADOS GERAIS**
   a) Qual é seu nome completo?
   b) Qual é sua data de nascimento?
   c) Qual é a cidade e o estado onde nasceu?
   d) Qual é sua escolaridade?
   e) Qual o ano de conclusão do ensino médio?
   f) Qual a instituição em que você concluiu o ensino médio?
   g) É a primeira vez que faz um curso superior?
   h) Você já trabalha no magistério? Se sim, há quanto tempo?
   i) Por que você escolheu o curso de Matemática da UECE?
   j) Você pretende ser professor de matemática? Quais são seus objetivos com o curso?
   k) Quais os motivos que te levou a querer participar da pesquisa?
   l) O que você pretende alcançar participando da pesquisa?

2. **HISTÓRIA DE VIDA ESCOLAR**
   a) Você começou a freqüentar a escola com quantos anos?

b) Qual foi a escola? Onde se situava? Pública ou Particular?
c) Você estudou sempre na mesma escola? Se não, quais foram as outras e quais os motivos que levaram às mudanças?
d) Quais as maiores dificuldades que você enfrentava na escola em relação aos conteúdos ministrados na disciplina de matemática? (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio)
e) Como seus professores de matemática ensinavam os conteúdos?
f) De quais disciplinas você mais gostava? E de quais não gostava? Por quê?

3. HISTÓRICO SOBRE O CONCEITO DE FUNÇÃO

a) Em que série você aprendeu pela primeira vez o conceito de função? E em quais outras você utilizou esse conceito?
b) Como o professor ensinou esse conceito?
c) Quais foram as maiores dificuldades que você teve para compreender esse conceito?
d) Na sua opinião, quais são os elementos básicos que caracterizam uma função?
e) Na sua opinião, quais os conceitos que se relacionam ao conceito de função: variável, incógnita, relação, equação?
f) Como você prefere representar uma função: utilizando uma tabela, um gráfico, uma expressão algébrica ou um conjunto? Por quê?
g) O que você considera que ainda não compreendeu sobre o conceito de função?
h) Na sua opinião e utilizando suas próprias palavras, o que é uma função matemática?

APÊNDICE III – Transcrições das Entrevistas

ENTREVISTA COM O PROFESSOR DE FUNDAMENTOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I – UECE

Data: 20/06/07
Hora: 15h 15min
Duração: 23min17

P – Pesquisador
E – Entrevistado

P - Primeiro professor muito obrigada por ter aceitado fazer a entrevista. Muitíssimo obrigada porque ajuda muito no trabalho que estamos desenvolvendo no Mestrado em Educação.
E – Você faz o Mestrado lá na Federal é?
P – Não, é aqui na UECE... e o núcleo que a gente está trabalhando é o de Matemática e Ciências. Depois, eu vou precisar conversar um pouquinho com os alunos do primeiro semestre, mas depois a gente conversa mais sobre isso. Então... as perguntas que eu vou fazer estão relacionadas mais com os alunos do que propriamente com o trabalho do professor, certo? O que o senhor puder ajudar, eu agradeço.
P – Qual é seu nome completo?
E – J.M.N.
P – E a data de nascimento?
E – 26/07/1949.
P – E qual sua graduação?
E – Eu sou Licenciado em Matemática com especialização em Análise Matemática.
P – Você terminou na UFC?
E – Não, também na UECE e fiz a especialização também na UECE.
P – E foi quando?
E – Eu me graduei em 82, não peraí, em 81 e concluí a especialização em 83.
P – Então a maior graduação que o senhor tem é de especialista, né?
E – É de especialista.
P – E quanto tempo de magistério?
E – No magistério superior...
P – No magistério no geral.
E – Olha, a minha história no magistério é engraçada, ruim até de contar, porque tem alguns hiatos na minha relação com o magistério. Eu comecei a ensinar muito jovem ainda, sem grau ainda né, leigo ainda como uns quebra-galho...
P – Matemática?
E – Não. Comecei a ensinar como polivalente em 1969, 70, 71, 72, aí teve um salto e vim retomar em 78 a questão do ensino. Daí pra cá eu continuei ensinando e quando terminei o curso em 81, em 82 eu comecei o ensino superior na Unifor, em 83 eu prestei concurso pra aqui na UECE e vim ingressar como professor da UECE desse concurso em 86. Comecei na unidade de Quixadá, da UECE em Quixadá e lá eu fiquei até 2001. Em 2002, 2003 eu vim para o campus do Itaperi.
P – Quais as disciplinas que o senhor ensina aqui hoje na Universidade?
E – Eu ensino Fundamentos de Cálculo Diferencial e Integral I, que é essa disciplina de 10 créditos e Geometria Analítica I, uma disciplina de 6 créditos.

P – O que você ensina especificamente na disciplina de Cálculo I?
E – Essa disciplina de Fundamentos de Cálculo Diferencial e Integral I, nós temos 60 horas dedicadas a uma espécie de pré-cálculo, que nós fazemos a partir dos conjuntos numéricos até as funções, incluindo alguma coisa de Geometria Analítica até porque no Cálculo vai precisar e depois nós ensinamos o Cálculo Diferencial e Integral propriamente dita, ou seja, começamos com a parte de limite e derivada, com parte de integral indefinida e derivamos com a integral definida e algumas aplicações.
P – Por que essa disciplina aqui na UECE tem 10 créditos se diferenciando de outras disciplinas ofertadas em outras Universidades?
E – Quando eu cheguei pra dar esse curso aqui ela já era de 10 créditos. Mas a informação que eu tenho tido é porque o aluno egresso do vestibular tava com muita deficiência nessa parte relativa ao segundo grau. Então o pessoal do departamento na época, eu não estava aqui, achou por bem... não teve como fazer o pré-cálculo, colocar uma disciplina pra suprir essa necessidade, as razões eles lá sabem quais foram, aí incluíram na disciplina, acrescentaram na disciplina de 6 créditos de cálculo mais 4 créditos pra ver se auxiliava a superar essa deficiência do aluno que era detectada lá no segundo grau.
P – Os alunos apresentam dificuldades em aprender os conteúdos ministrados na disciplina de Cálculo?
E – É não tenha dúvida, eles apresentam um certo grau de dificuldade. Não todos naturalmente, tem suas exceções, mas a grande maioria tem uma certa dificuldade.
P – De todo o conteúdo qual eles apresentam mais dificuldade na disciplina?
E – Olhe, eu acho que eles têm dificuldade na parte de cálculo diferencial e integral mesmo, eu acho que eles têm uma dificuldade em toda a disciplina, em todo o conteúdo. Porque eles... A questão é a seguinte, eles não estão habituados, digamos assim, lá na escola de 1º. E 2º. Grau, eu não ensino lá, mas eu quero crer que seja por isso, eles não têm muito o hábito de escrever, de argumentar. Eles estão habituados naquela prática de resolver questões sem se interessar pela questão do desenvolvimento, de se dizer por que está acontecendo isso por isso, por isso e por isso. Então eles têm dificuldade. E aqui a gente começa a exigir que ele comece a discorrer sobre o assunto e eu acho que a grande dificuldade deles é justamente dizer o que está fazendo, apresentando uma justificativa.
P – No final da disciplina de Cálculo I o que o senhor gostaria que seu aluno soubesse?
E – Geralmente eu digo pra eles o seguinte. Quando eles terminassem a disciplina eu queria que eles tivessem uma noção assim, direcionada para os conceitos básicos e naturalmente o cálculo I como todo cálculo, derivada e integral, mas que ele visse pelo menos aquela parte básica, um embasamento para tomar aquilo ali e desenvolver. É isso que eu gostaria que eles saíssem daqui e soubessem essa base, saíssem com um embasamento pra que ele continuasse seu estudo posterior.
P – Como são esses alunos que chegam à UECE que acabaram de fazer vestibular?
E – É aquela tal história, em termos de conhecimento, e na nossa conversa já vem sendo ventilada, eles têm bastante deficiência de conhecimento. Às vezes a gente fala umas coisas e eles tomam assim uma surpresa. Aí eu digo assim... não tenha medo não que isso existe, né. Eu não estou falando coisa de outro mundo. Eles têm muita deficiência. Embora a gente sinta, eu todo semestre pego o aluno egresso do vestibular, todo semestre. Desde 2001 quando eu voltei do Quixadá pra UECE eu pego essa turma. Eu sinto em alguns aquela sensação de decepção porque não sabe; noutros eu sinto aquela sensação de que ele não ta sabendo mas ta querendo saber, né; mas no geral, uma boa parte é fraca e a gente, os alunos que vêm pra aqui... eu costumo dizer que o aluno que vem pra cá é muito bom da gente trabalhar. Eu gosto muito de trabalhar com esses

alunos daqui da UECE, eu gosto de trabalhar com eles, me entendo muito bem com eles, são pessoas ótimas no que tange ao relacionamento. Mas eles têm dificuldade, um despreparo, que eu não sei a culpa de quem é, embora a gente quando ta em casa e começa a pensar e descobrir essa coisa que veio diferente no tempo.
P – E, geralmente, porque os alunos procuram o curso de Matemática da UECE, o curso de Licenciatura?
E – Olha nós temos o seguinte. Nós temos vários alunos. Há alunos que já são professores de matemática da rede particular de ensino, outros já são professores da rede pública ainda sem o grau, alguns fazem o curso de matemática na pretensão de transferir para computação, uma possível engenharia dessas daí, ficam tentando. Tenho tido aluno aqui que faz o vestibular, está aqui no primeiro mês aí consegue aprovação noutra universidade, pronto pra outra área de tecnologia e aí transfere pro CEFET, então.. é muito variado. Tem gente que já é professor, tem aluno que quer ser mesmo professor, ela está aqui pra ser professor de matemática.
P – E, em relação ao conceito de função, como é que os alunos geralmente definem esse conceito? Eles trabalham mais com conjunto, com a parte algébrica ou eles não têm noção de função quando chegam aqui?
E – É, eu acho engraçado, às vezes eu digo pra eles que eles já vêm trabalhando com função desde a escola primária. Desde as primeiras séries, ele já trabalha com função, mas quando chega no 2º grau e aqui no 3º , quando a gente formaliza função ele apresenta um certo grau de dificuldade de compreender. E eu às vezes me preocupa porque eu vejo naturalmente uma certa simplicidade e noto o inverso, que eles vêem com muita dificuldade, ver uma função como uma relação de elementos de um certo conjunto que vão se relacionar com elementos de um outro conjunto. Então eles têm essa dificuldade. Se você leva pro lado prático, pra vida cotidiana, isso é função. Quando você vai pro supermercado, quando você está fazendo suas compras lá, você ta comprando banana, laranja, você ta calculando o valor de função, é uma relação assim, assim... mas eu não sei porque eles têm dificuldade de abstrair aquela coisa assim sabe... a gente pega um exemplo prático desse aí quando chega num mais complexo, daí eles... quando chega na hora de formalizar, eles têm ainda dificuldade no cálculo do valor pontual de função. Quer dizer, de ver aquela regra como o caminho... vamos dizer assim, rapaz ela ta dando essa ordem aqui, a ordem é essa, quem vier pro lugar dessa variável aqui tem que obedecer essa ordem. É como você tivesse que fazer um percurso tendo que obedecer aquele caminho. Eu vejo muito isso e quando eu acabo de dizer e o cidadão tem dificuldade de relacionar as coisas. Tanto ele tem dificuldade de relacionar a função assim mais teoricamente como no concreto.
P – Geralmente professor eles cometem alguns erros conceituais, por exemplo assim: conceito de variável com conceito de incógnita, dá pra perceber isso na aula?
E – É percebe-se, percebe-se, até porque a gente não aprofunda muito isso aí já porque a gente teme dificultar mais ainda, ta entendendo? Então a gente evita, quer dizer, é uma diferença sutil né, variável e incógnita, naturalmente, mas que a diferença existe e eles não percebem a diferença assim muito claramente. Aí eles têm essa dificuldade de perceber.
P – É comum os alunos confundirem o conceito de função com o conceito de equação?
E – É comum. Ele pega uma função quando ele, vamos citar assim por exemplo, esse negócio de função polinomial, aí lá na derivada, a gente trabalha função polinomial, quando nós queremos determinar seus extremos, os números críticos e tudo mais e ele pega a função polinomial e ela tem os coeficientes aí digamos assim,um fator comum no coeficiente e vai e escreve a função, simplificando aqueles coeficientes. Quando é

uma equação você pode fazer isso, né, agora a função você não pode porque altera. Eles fazem muito isso, é um erro comum.

P – Que tipo de representação eles preferem utilizar pra trabalhar com função: a representação geométrica, representação numérica, tabelas, representação de conjuntos?

E – Não, a gente trabalha mais, na realidade a gente trabalha mais com a lei de definição da função e gráfico, gráfico da função quando a gente ta trabalhando na parte de derivada e a construção de gráfico de função mesmo, a gente trabalha mais com isso aí.

P – Essa transformação da expressão algébrica para o gráfico da função, eles sentem dificuldade em fazer?

E – Eles sentem, sentem, sentem dificuldade de você, de você por exemplo trabalhar o gráfico da função, quando você usa o conjunto, quando você faz as assíntotas, essa coisa toda, quando o gráfico é assintótico numa reta tal, com concavidade pra cima, pra baixo, tem muita dificuldade. E... a coordenação motora mesmo, traçar o gráfico...

P – Eles têm dificuldade no conceito de variável, por exemplo?

E – Não, não, quando a gente trabalha com a variável na função, geralmente a função do cálculo 1 é uma função de uma só variável, então a gente, ele absorve relativamente bem. Quando você trabalha com a função de duas variáveis, três variáveis, mais adiante, aí não, aí a dificuldade é maior. No meu caso, que trabalho com função de uma só variável... já ta tão badalada a questão da variável, né? Agora veja bem, tem um detalhe engraçado. Quando você muda a variável, ele já estão tão acostumados com a variável x, você muda pra y, você muda pra t, aí ele esbarra.

P – A relação de dependência entre variáveis, pra ele é difícil?

E – Não aí ta porque quando a gente define a função a gente faz questão de dizer né que tem a variável independente e tem a variável dependente, o y depende de x.

P – Pronto professor é só isso. Tem alguma coisa a mais que o senhor gostaria de colocar em relação aos alunos?

E – Às vezes pode parecer uma coisa pequena, mas eles têm uma dificuldade, não sei por que. Nosso aluno hoje como eu tava falando lá na questão de escrever e discorrer sobre as coisas, eles têm uma dificuldade muito grande em fazer, em conhecer a simbologia. Chegam aqui sem saber fazer a diferença , a distinção de como, digamos, do quantificador universal, do quantificador existencial. Eles têm uma dificuldade de, até na igualdade, eles querem substituir a igualdade pela setinha né, usar uma seta no lugar da igualdade, nem é sinal de implicação, nem é sinal de outra coisa né, não é o habitual, botam uma seta, uma série de coisas né. Eles não têm, eu tenho visto alguns alunos de 1º grau, do Fundamental, e eu noto que na escola deles, que o professor na escola deles, parece que o professor da escola não tem o cuidado de mandar o menino organizar as coisas. Eu vejo isso, os meninos fazendo as coisas muito soltas e eles têm essa dificuldade de organizar as coisas e inclusive para matemática é um pecado pra eles, eles não distinguirem o que é um quantificador universal, um quantificador existencial, tem que fazer a distinção entre igualdade e um sinal de implica né. Eu acho, isso me preocupa muito e eu falo sempre muito com eles, essa questão, insisto, insisto e às vezes eu chego até a cobrar um pouquinho nos pontos da questão por conta disso, pra ver se na próxima ele melhora. Porque eu digo pra eles é o seguinte, você vai fazer isso aqui, você é aluno, você vai ser professor mais tarde, você não pode ensinar isso pro seu aluno, você tem... Uma coisa que a gente insiste também é na questão da linguagem correta, ne. Você não deixe de dizer, você tem que dizer as coisas de modo completo. Você não pode dizer simplesmente a regra pela metade. Tem que dizer a regra com todo, com todo o seu teor, senão você ta ensinando errado. Eu me preocupo muito com isso.

P – Muito obrigada.

E – Obrigada também. Se alguma coisa não tiver ficado a contento a gente repete aí .
P – Então ta bom, muito obrigada.
E – De nada.

ENTREVISTA COM ALUNO GATO

Data: 02/07/07
Hora: 15h30min (em torno de)
Duração: 34 minutos

P – Pesquisador
E – Entrevistado

P – Qual seu nome completo?
E – R. C. T.
P – Qual é sua data de nascimento?
E – 8/11/1986
P – E a Cidade e o Estado onde você nasceu?
E – Eu nasci em Fortaleza, Ceará.
P – E a sua escolaridade? Quer dizer, você já fez até o 3º ano...
E – Isso. Fiz o Ensino Médio no CEFET.
P – Fez algum curso técnico lá?
E – Não, na época que eu fiz era o Ensino Médio puro e simples, agora que voltou o integrado, né. Mas no período que eu fiz era o puro e simples. Eu fiz só o Ensino Médio lá, aí de lá eu passei pra UFC, Bacharelado em Matemática. Só que eu não me identifiquei muito com o curso, né. Eu achei que Licenciatura pra mim seria melhor. Eu tentei vestibular aqui e fiz e passei pra cá agora.
P – Por que você não quis ficar na Licenciatura de lá?
E – Porque eu moro em Aquiraz, aí fica um pouco distante né. Eu não tenho carro e lá a Licenciatura é só a noite. Aí não dava certo pra mim. Tinha que ser no período diurno.No caso o que se encaixou melhor aí foi a UECE.
P – E aí teve que fazer vestibular de novo né?
E – Vestibular de novo. Porque eu poderia ter transferido. Só que na época que eu decidi já tinha passado o período de transferência então eu achei mais viável fazer outro vestibular.
P – Qual foi o ano que você concluiu o Ensino Médio?
E – Na realidade eu terminei no comecinho de 2006 porque lá no CEFET tava no período de greve né. Mas seria 2005, final de 2005 se tivesse correto.
P – Quanto tempo você ficou lá na matemática fazendo bacharelado?
E – Três semestres. Porque eu ainda fiz esse semestre agora por conta de também a UECE estar em greve ne, aí só começou as aulas agora, aí eu não quis ficar um semestre parada aí eu continuei lá.
P – Você já trabalha como professora?
E – Não. Assim, em sala de aula não. Agora, eu já dou aula particular há um certo tempo.
P – Quanto tempo mais ou menos?
E – Sete anos. Mas é aquela coisa assim bem particular mesmo... no máximo dois alunos, aquela assim bem...
P – E você ensina na sua casa mesmo?
E – Na minha casa.

P – É só matemática?
E – Só matemática. Até um certo tempo atrás, até antes de eu escolher a matemática né eu ensinava também Física, Química, mas aí depois que eu comecei realmente a fazer matemática eu passei a ensinar só matemática.
P – Por que você escolheu o curso de Licenciatura em Matemática da UECE? Porque o CEFET tem também...
E – Tem também. Assim, a questão de optar pela UECE e não pelo CEFET eu acho que não teve muito assim. Acho que pelo fato de eu ter passado três anos lá, eu quis uma universidade diferente. Aí eu escolhi a UECE e não o CEFET por causa disso. Mas... porque a matemática. Eu sempre gostei, desde pequenininha eu sempre gostei de matemática, sempre me dei bem com matemática né. Quando eu passei, no caso lá pra UFC, e passei a ter mais contato com a matemática, gostei ainda mais. Só que eu não continuei no bacharelado porque eu achei que era uma coisa muito acima do que eu podia. Eu achava o curso muito mais pesado, pra mim né. Então eu acho que a Licenciatura me dá mais base. Talvez algum dia, não sei, eu continue no bacharelado, pode até ser. Não penso nisso agora, não é isso. É... escolhi Licenciatura por conta disso.
P – A Matemática vem mais pela própria matemática do que pelo ensino da matemática?
E – Não. Eu gosto de ensinar matemática. Me sinto até bem das poucas vezes que eu tive oportunidade, né. Eu gosto de, realmente, ensinar matemática. Mas... se a matemática vem antes do ensino... eu acho que é uma coisa que anda junto. Eu não consigo ver a matemática... talvez por isso mesmo eu tenha deixado o bacharelado, porque o pessoal fala: ah, é uma coisa mais de pesquisador..., uma coisa mais fechada. Não é isso que me chama atenção na matemática. Acho que a Licenciatura me chama mais atenção por causa dessa questão de você poder repassar pra alguém. A questão de pesquisador não me anima.
P – Você pretende, então ser professora de matemática?
E – Pretendo.
P – Quais são seus objetivos com o curso da UECE?
E – Assim... eu pretendo terminar né a Licenciatura. Se eu conseguir, como eu te disse, eu já andei pesquisando algumas coisas sobre o mestrado, se eu conseguir eu queria logo de início continuar o mestrado e, senão, o curso de especialização daqui também seria uma boa. Eu também já andei me informando sobre alguns assuntos, né. Eu pretendo assim continuar... quando eu passar mais pra essa parte de... pós-graduação, eu queria nesse período já estar trabalhando... em sala de aula.
P – Você tem um público de preferência?
E – Eu queria começar a ensinar lá na minha cidade. Seu eu pudesse escolher, seria assim, eu queria começar a ensinar lá minha cidade e no colégio público aonde eu comecei a estudar.
P – Quais foram os motivos que te levou a querer participar dessa pesquisa?
E – O fato de eu querer me informar mais sobre a questão do mestrado né. E assim como eu já tinha procurado informações sobre eu achei que se encaixou como uma luva. Eu tava procurando informações sobre isso e você veio atrás de uma pessoa que quisesse participar da pesquisa sobre o assunto, então... eu achei que encaixava perfeito. Foi por isso que eu quis participar.
P – O que você pretende alcançar participando dessa pesquisa?
E – Eu acho que... me informar mais sobre o mestrado como eu já te disse, conhecer como funciona, e acho também... saber um pouquinho sobre o que eu não sei sobre funções. Porque realmente quando você falou, quando você vai pegar, eu já tive essa

experiência, de tentar repassar para uma pessoa que tem dificuldade, algo sobre função, e pra você mesmo tentar explicar algumas coisas, é complicado. Porque tem coisas assim... que você fazendo é muito fácil, mas pra você explicar o que é que é, como é que é principalmente pra uma pessoa que ta em dúvida, não sabe aquilo ali, não entra, realmente não entra, fica difícil, é complicado. Eu também queria por essa questão.
P – Você começou a freqüentar a escola com quantos anos?
E – Eu tinha três anos.
P – Você fez a partir do maternal?
E – Maternal, Jardim I...
P – Você lembra qual foi a escola?
E – Foi Centro Educacional Antonieta de Alencar Castelo Branco.
P – E ficava onde?
E – Em Aquiraz mesmo, centro de Aquiraz.
P – É pública ou particular?
E – Ela era particular. No caso eu estudei do meu maternal até a alfabetização no colégio particular. De 1ª a 5ª série num colégio público. Aí de 5ª a 8ª eu retornei pro particular, só que fazia isso com bolsa, né, que eu consegui. Aí quando eu saí que eu fui pro CEFET.
P – De 1ª a 4ª. série foi em que escola?
E – Escola de 1º e 2º grau de Aquiraz. Porque ela já teve vários nomes. Hoje em dia ela tem esse nome.
P – E de 5ª. a 8ª ?
E – O mesmo, Centro Educacional Antonieta de Alencar Castelo Branco.A mesma do maternal e da alfabetização.
P – Eles têm até o Ensino Médio lá?
E – Não. Hoje em dia ela fechou. Também foi no mesmo período que eu terminei a 8ª série.
P – Quais foram as maiores dificuldades que você enfrentou na escola em relação aos conteúdos de matemática?
E – Na Educação Infantil não lembro. Eu lembro que eu sempre tive muita facilidade. Já de 1ª a 4ª série, eu lembro assim algumas coisas, mas lembro muito vagamente. A primeira dificuldade que eu lembro mesmo de ter sentido na matemática acho que foi na 5ª série e, meio que não sei, boto meio culpa no professor. Porque assim, ele não era professor de matemática. Hoje em dia eu cheguei a descobrir, sou até amiga dele tal, mas ele não era professor de matemática. Ele era, ele é formado em Agronomia, depois ele só deu esse ano de matemática, depois ele passou a dar Biologia, que era o que ele mais se identificava. Então, meio que, hoje em dia eu imagino assim, ele não sabia repassar, porque ele era formado em Agronomia, gostava de Biologia e tava dando aula de Matemática? Então não era bem o que ele fazia.
P – E o que especificamente você teve dúvida na 5ª série, você lembra?
E – Toda aquela parte de função... não, de equação e fração, principalmente, o comecinho de fração e toda aquela questão de somar, subtrair, multiplicar, dividir, eu confundia muito. Eu lembro que eu confundia demais. Tem mais essa questão.
P – As equações eram mais com o que, pra saber o que era o x?
E – As equações acho que já foi mais pro final. É ele pega mais ou menos o final. A equação não era nem tanto. A maior dificuldade era quando aparecia fração. Se aparecesse fração... Aí depois que eu fui tentando e consegui. Acho que foi no final da 6ª série eu consegui transpor isso mas, por mim a 5ª série foi o fim. Fração, não podia ver uma fração que...
P – E os outros conteúdos do Ensino Fundamental, você conseguia entender bem?

E – Não. Eu nunca tive muita afinidade foi com História. Eu nunca tive muito. Era uma das matérias que eu tinha que me esforçar bastante pra entender bem. Também nunca cheguei a tirar notas baixíssimas, mas não era aquele conteúdo que de início eu pegava tinha que dar umas duas lidas, fazer um resumo, fazer um monte de atividade pra poder pegar bem o conteúdo né. Logo também quando eu passei a ter mais contato com Inglês também a sentir uma certa dificuldade. Depois eu comecei a fazer curso aí melhorou bastante. Mas, já no Ensino Médio eu tive bastante dificuldade com Física. Foi lá no CEFET né. Além de ser um ensino muito mais puxado, que eles entram realmente no conteúdo. Então eu senti muita dificuldade por conta disso. Acho que até mesmo pela minha 8ª série porque o primeiro contato que eu tive com Física foi na 8ª série né. Meu colégio tava fechando, foi aquele negócio, aquela bagunça. O contato maior que eu tive foi no cursinho preparatório, eu fiz seis meses antes da prova do CEFET. Então meu conhecimento de Física não é muito bom. Nem o de Química, mas o de Química eu superei bem mais fácil do que Física.
P – E o de Matemática?
E – Não, o de matemática não tive tantos problemas assim. As matérias que vinham assim de início, tinha que esforçar assim um pouquinho, alguns tipo Trigonometria, aquela parte de função seno, cosseno, eu tive que estudar bastante, realmente mas nada demais.
P – Como é que seus professores de matemática ensinavam os conteúdos?
E – Geralmente os professores usavam lousa, passavam as definições, as matérias, os conteúdos, exercício...
P – Eles deixavam vocês resolverem na sala ou não, era tudo pra casa e eles faziam as questões na sala?
E – Isso variava bastante, agora, normalmente eles faziam alguns exemplos né. Assim, de uma forma bem geral, eles faziam alguns exemplos, passavam exercício de casa, davam um certo tempo... alguns passavam como trabalho pra gente trazer resolvido e alguma dúvida que surgisse eles tiravam na lousa, outros deixavam bem a vontade, façam os exercícios... quem queria fazia, quem não queria fazia e ficava bem assim...
P – E no ensino fundamental, nível médio foi sempre assim?
E – Sempre, eu acho que nunca teve...
P – um professor que fizesse uma pesquisa de campo...
E – Não, só no 2º ano quando a professora ela foi dar Geometria que ela trouxe algumas figuras geométricas feito uns... as figurinhas geométricas mesmo feito pirâmides, todos os pentágonos pra gente ter contato visual né, pegar e tal ter contato. Mas tirando essa parte, não.
P – Quais as disciplinas que você mais gostava, porque você já falou que as que você não gostava eram História e Física?
E – Matemática, Biologia. Eu também gostava bastante de Biologia. Química, sempre tive uma certa afinidade com Química. Tirando a Química do 2º ano que eu não gosto muito, mas a do 1º e do 3º eu amo. Química, Biologia, Matemática...Filosofia também gosto bastante... as outras meio que se igualam, não tem tanto assum.
P – Porque você gosta de matemática?
E – Porque que eu gosto de matemática... Sinceramente nunca parei pra pensar assim porque matemática... ah eu não sei. Acho que essa resposta não consigo assim responder porque eu gosto da matemática.
P – Porque por exemplo você não gosta de Física mas Física tem também muito calculo. Porque então você gosta de matemática e detesta física por exemplo?
E – Eu não sei. É complicado assim dizer porque matemática ou física...

P – Pronto assim... matematica ou historia... o que e que a matemática te atrai que a história não te atrai por exemplo?
E - Eu acho que a história, eu não sei, depois que eu passei a ter contato com os professores com a história um pouco mais dinâmica eu passei até de deixar de ter antipatia. Porque logo quando eu vi era aquela coisa muito decoreba, ler datas e nomes e eu não gostava disso. Quando eu passei a ter contato com professores mais dinâmicos, que infelizmente eu tive mais em cursinho, né, mesmo no colégio eu não tive contato com professores assim, eu passei a gostar mais. Mas da matemática... eu não sei o fato de eu sempre ter absorvido bem os conteúdos, de eu conseguir resolver, de eu conseguir manipular as operações, não sei assim o fato, o porque que eu gosto ne.
P – Em que serie você aprendeu pela primeira vez o conceito de função?
E – Função... exatamente eu não lembro assim. Eu acho que foi na 7ª. Na 8ª serie eu lembro que eu já tinha esse conhecimento. A gente viu mais a parte do estudo de função, função do 1º grau e do 2º grau deve ter sido na 7ª série.
P – E quais outras séries você utilizou esse conceito?
E – Em todas. Na faculdade também.
P – E como esse professor ensinou esse conceito pela primeira vez?
E – Na verdade eu não lembro, eu não lembro assim. A lembrança que eu tenho mais assim de, da questão de função não tenha sido quando o professor ensinou mas seria mais a revisão, ne, na 8ª serie. Que eu lembro melhor, assim. Que ia tal fazia aqueles conjuntinhos, conjunto A, conjunto B. A relação da função é quando eu tenho um elemento de A que se liga a um elemento de B, toda aquela coisinha bem...
P – Quais foram as maiores dificuldades que você teve para compreender esse conceito?
E – Pra mim, as vezes eu ate que me confundo, tem que parar um pouquinho pra pensar, é aquela relação de tipo eu posso ter apenas uma imagem de um elemento do conjunto A, mas eu posso ter um elemento do conjunto B que pode ter dois correspondentes no conjunto A. Isso me embaralhou muito a cabeça. Tanto que hoje pra mim falar eu sinto meio dificuldade. Então tem essa questão de só poder ter uma única imagem. Então isso me embaralhava muito. Aquela parte de saber o domínio, o contradomínio... diferenciar o contradomínio da imagem... pra mim também essa questão foi assim um negócio.
P – Na sua opinião, quais são os elementos básicos que caracterizam uma função?
E – Falando assim bem tecnicamente?
P – Do jeito que você quiser.
E – um lei de correspondência ne, no caso levando em consideração dois conjuntos... a lei de correspondência de um conjunto com outro. No caso a característica de um conjunto A e um conjunto B, seria a existência do domínio e do contradomínio e de uma lei de formação que ligasse um ao outro. Principalmente...
P – Na sua opinião quais os conceitos que se relacionam ao conceito de função, e aí eu vou listar quatro conceitos: o conceito de variável, o conceito de incógnita, o conceito de relação e o conceito de equação?
E – Incógnitas, variáveis, equações e relação? Eu creio que todos os quatro. Agora o fato de eu ter colocado incógnita e variável, assim, eu não vejo diferença, se existe nunca me foi apresentado. São os quatro, mas o fato de ter colocado incógnitas e variáveis eu meio que estranhei.
P – E como você prefere representar uma função: usando uma tabela, usando um gráfico, uma expressão algébrica ou um conjunto?
E – Um gráfico.
P – Por que?
E – Porque eu acho que fica melhor de visualizar. Porque você tem... dá pra você identificar o domínio, o contradomínio. Você vê mais ou menos como a função se

comporta. Eu prefiro por meio de gráficos. Levando em consideração os conjuntos numéricos, os gráficos ne.
P – E o que você considera que ainda não compreendeu sobre o conceito de função?
E – Saber definir de uma maneira mais fácil. De modo que uma pessoa que não entenda sobre consiga fixar essa idéia. Eu sinto muita dificuldade. Eu tenho certeza que eu nunca aprendi. As vezes até eu mesma me confundo, então, não dá pra passar pra outra pessoa sem eu ter certeza. Então essa questão é que é principalmente, a parte mesmo da definição.
P – Na sua opinião, e usando suas próprias palavras, o que é uma função matemática?
E – Como é que eu poderia começar... Considerando dois conjuntos A e B, chama-se função a relação que existe entre o conjunto A com o conjunto B, mas assim, uma certa lei de formação, a lei da função, aí entra o negocinho lá que um elemento no conjunto A pode ter uma única imagem no conjunto B, certo? E, ta faltando mais alguma coisa... não sei, pronto, acho que deixa assim mesmo.
P – Você gostaria de acrescentar mais alguma coisa?
E – Não, assim, as vezes, mas eu acho que até uma conseqüência que eu percebo também que a análise de gráfico pra algumas pessoas é uma coisa muito complicada. Como já tem um certo tempo que eu ensino particular, e mais na área de matemática, que a analisar gráfico pra eles é quase uma tortura.
P – E pra você?
E – Não, eu não sinto dificuldade.
P – Muito obrigada por participar como voluntária da pesquisa.
E – Ta certo então.

ENTREVISTA COM ALUNO PEIXE

Data: 03/07/07
Hora: 17 h
Duração: 20 minutos

P – Pesquisador
E – Entrevistado

P – Qual seu nome completo?
E – J.D.S.G.
P – E a sua data de nascimento?
E – 26/08/1988
P – E a cidade e o Estado onde você nasceu?
E – Fortaleza, Ceará.
P – Você já terminou o Ensino Médio né? Qual foi o ano de conclusão.
E – 2005
P – Qual a instituição que você concluiu o Ensino Médio?
E – Colégio Dom Quintino
P – É a primeira vez que você faz um curso superior?
E – é.
P – Você já fez outro curso ou faz outro curso junto desse?
E – Não.
P – Esse é o seu primeiro semestre?

E – É e não é. Eu entrei no ano passado. Mas antes da greve eu comecei a faltar um pouco. Aí eu emendei com a greve, aí minha situação ficou em abandono. Quando foi esse ano eu retornei.
P – Você já trabalha no magistério como professor?
E – Não.
P – Nunca, nem como professor particular?
E – Meus amigos pediam ajuda pra mim, pra eu dar uma forcinha pra eles.
P – Então você já tem uma experiência de ajudar alguém em matemática especificamente ou tem outra disciplina?
E – Física.
P – E porque você escolheu o curso de Matemática da UECE?
E – Porque eu gosto da exatidão das ciências exatas. Não gosto de ficar lendo, aí tira uma interpretação, tira outra, aí fica aquela coisa muito vaga, não sou muito dessa área não, eu sempre gosto das exatas, Matemática e Física.
P – E porque você não escolheu o curso de Física?
E – Foi na hora da inscrição, matemática? matemática, porque eu achava Física mais complicado.
P – Aí matemática fosse mais fácil pra você, é isso?
E – Sim.
P – E porque o da UECE, porque na UFC também tem curso, no CEFETCE também tem, porque teve que ser o da UECE?
E – Na UFC, tentei Engenharia Mecânica, não passei fiquei aqui na UECE.
P – Você também tentou pro CEFETCE?
E – Tentei Mecatrônica e não passei.
P – Você pretende ser professor de Matemática?
E – Até agora sim. A gente muda a cabeça né, mas sim.
P – Então.. quais são seus objetivos no curso de Matemática? É só esse ser professor de matemática ou tem algo mais?
E – É só ser professor mesmo.
P – E quais foram os motivos que te levou a querer participar dessa pesquisa?
E – Pra saber como é que funciona assim esse negócio de mestr..., não, de pesquisa de mestrado, e, uma atividade que eu nunca tinha visto, nunca tinha participado, uma coisa pra eu ver como é que funciona.
P – O fato de ser o conceito de função também te chamou atenção?
E – Chamou atenção, mas você falou de função depois, então não foi só por causa da função, mas me interessa função.
P – E qual o seu objetivo na pesquisa, o que você pretende alcançar?
E – Conhecimento sobre função e sobre o que eu posso aprender.
P – Você começou a freqüentar a escola com quantos anos?
E – Nem sei.
P – Você lembra se você começou no maternal, jardim ou na alfabetização?
E – Eu me lembro que foi na alfabetização, mas eu não me lembro o que eu fiz antes. Eu não lembro.
P – E sua alfabetização você fez onde?
E – Num colégio chamado Sol Risonho.
P – Era aqui em Fortaleza?
E – Era.
P – Era pública ou particular?
E – Particular.
P – Você sempre estudou...

E – Em escola particular.
P – Você sempre estudou nela?
E – Não, foi só na alfabetização.
P – De 1ª a 4ª série você estudou onde?
E – De 1ª. a 4ª série no João Quintino. Todo o Ensino Médio foi no João Quintino.
P – Por que você ficou tanto tempo no mesmo colégio?
E – Inicialmente meus pais me colocaram lá porque era perto de casa. Mas eu me acostumei, o ensino lá é até legal. Gostava do ensino lá, sempre preferi renovar a matrícula lá.
P – Quais as maiores dificuldades que você enfrentava na escola em relação à matemática? De 1ª a 4ª série você lembra o que você tinha mais dificuldade em matemática?
E – Me lembro que na tabuada de multiplicação.
P – Divisão foi difícil?
E – Não, só multiplicação.
P – E de 5ª a 8ª?
E – 5ª a 8ª? Não tinha muita dificuldade não.
P – E no Ensino Médio?
E – No ensino médio até hoje eu me pego com probabilidade. É... só probabilidade. Geometria Espacial e Geometria Plana eu não gosto de estudar, mas se eu estudar dá pra esclarecer, quando eu estudo.
P – E Trigonometria?
E – Trigonometria, a base normal, mas quando eles complicam as questões eu tenho dificuldade.
P – E como seus professores de matemática ensinavam os conteúdos, você lembra?
E – No Ensino Médio, assim, no 3º ano tinha três professores de matemática. Um deles dava o conteúdo de matemática muito superficialmente, não explicava assim ... já os outros dois, aprofundavam mais assim a questão do conceito, da demonstração.
P – E no ensino do Fundamental como os professores davam aula, de uma forma diferente ou da forma convencional?
E – Os professores ensinavam de uma forma superficial.
P – De quais disciplinas, de todo esse tempo que você passou na escola, você mais gostou de estudar?
E – Matemática e Física.
P – E as que você menos gostou?
E – Eu não gostava de estudar História. Línguas Inglesa, Portuguesa. Não gostava de jeito nenhum, até hoje eu não gosto.
P – Por que você gosta de Matemática?
E – É aquela coisa que eu falei, é uma coisa exata, eu olho uma questão e eu sei fazer ou sei como começar. Nessas línguas, a gente olha uma questão e tem que tentar interpretar, saber o que você pensa.
P – Mas Matemática a gente também tem que interpretar...
E – Tem que interpretar e tem que pensar só que é um estilo de pensamento diferente que eu gosto.
P – Você disse que aprendeu função pela primeira vez na 8ª série né? Ou foi na 7ª.
E – Não me lembro. Sim, na 8ª a gente viu função do 2º grau. É no mesmo ano 1º e 2º grau, não?
P – Geralmente os professores dão o conceito de função, função constante, função do 1º grau, função do 2º grau na 8ª série.
E – Então foi na 8ª série.

P – E, em quais outras você utilizou esse conceito?
E – 1º, 2º e 3º ano.
P – E como é que o professor ensinou esse conceito você lembra?
E – Não.
P – O que ele utilizou?
E – Só exemplos.
P – E que tipo de exemplos, você lembra?
E – questões
P – Que tipo de questões com conjunto, com expressão algébrica...
E – Não, tipo assim, dada a função ache a raiz da função. Estude o sinal da função, você sabe?
P – E quais as maiores dificuldades que você teve para compreender esse conceito?
E – A interpretação gráfica. Olhando pro gráfico dá pra entender muita coisa da função né? Isso eu aprendi praticamente só, estudando pelos erros. No colégio eles não davam assim. Tipo, vértice, ponto máximo, ponto mínimo. Isso eu não aprendi na escola.
P – Seu professor nunca falou assim da relação de dois conjuntos que...
E – Sim, sim, aquela velha... que tem a flechinha...
P – Isso, isso, então ele trabalhou o conceito de função assim. E o que ele falou você lembra?
E – Por exemplo, o conjunto A e o conjunto B sai do A e vem pro B, domínio, contradomínio, imagem, as flechinhas.
P – E o que mais tinha de importante no conceito de função?
E – Não me lembro.
P – Na sua opinião, quais os elementos básicos que caracterizam uma função?
E – Como assim?
P – O que é que precisa ter para ser função? O que é necessário?
E – Eu acho que a função da função é calcular alguma coisa a partir de outra. Tem que ter algo pra calcular e como calcular aquilo.
P – Na sua opinião, quais os conceitos se relacionam ao conceito de função? Eu vou te dizer quatro conceitos e você me diz quais deles têm a ver com função: variável, incógnita, relação e equação.
E – Variável, variável é x tem a ver com função. Incógnita... incógnita é x, é variável, tava lendo isso hoje. Não me recordo se incógnita é a variável ou é a constante, se é o a ou se é o x que varia. Se for incógnita, também tem. Relação... tem, relação de a com b. E equação? Equação do 1º grau é uma função, equação do 2º grau é uma função.
P – E como você prefere representar uma função utilizando uma tabela, um gráfico, uma expressão algébrica ou um conjunto?
E – Uma expressão algébrica.
P – Por quê?
E – É mais prático, eu acho mais prático. Numa expressão algébrica eu vejo o grau, o número de raízes, o tipo de gráfico.
P – O que você considera que você ainda não compreendeu sobre o conceito de função?
E – Eu não sei nem te dizer assim.
P – Você acha que essa definição de conjuntos ficou bem compreendida pra você?
E – A de conjuntos ficou... acho que sim
P – E dessas coisas que você disse que eram mais complexas?
E – Uma questão que envolva gráfico.
P – Na sua opinião e utilizando suas próprias palavras o que é uma função matemática?
E – Uma função matemática é uma expressão algébrica que me permite calcular alguma coisa a partir de outra.

P – Só isso é suficiente?
E – É.
P – Não tem nada mais que precise ter nessa expressão algébrica pra ser uma função?
E – Pra mim é.
P – Tem alguma coisa que você gostaria de falar mais sobre essa questão do conceito de função?
E – A parte de função que eu gostaria de aprender mais é a parte mais gráfica. Existem questões que só podem ser resolvidas por gráficos, interpretações que a gente vê em revistas, essas coisas... gráfico está presente em muitas coisas né. Acho que a parte de gráficos, saber mais sobre gráficos era bom.
P – Ok, muito obrigada.
E – de nada.

APÊNDICE IV – Questionários Teórico e Aplicado

Questionário – UECE

Nome: ____ Data:___/____/____

Hora início: ________ Hora término: __________

PARTE I – PERGUNTAS TEÓRICAS

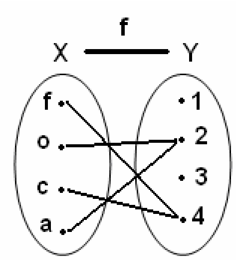
1. O que você entende por função matemática?
2. Dê um exemplo de função.
3. O que é o domínio de uma função?
4. O que é o contradomínio de uma função?
5. O que é a imagem de uma função?
6. O que é uma lei de correspondência numa relação entre dois conjuntos?
7. Dê um exemplo dessa lei de correspondência.
8. O que é uma expressão algébrica?
9. Dê um exemplo de expressão algébrica.
10. Você pode utilizar uma expressão algébrica para representar uma função? Justifique.
11. O que é uma equação?
12. Dê um exemplo de equação.
13. Você pode utilizar uma equação para representar uma função? Justifique.
14. O que é uma incógnita?
15. Você pode utilizar uma incógnita numa equação? Justifique.

16. Você pode utilizar uma incógnita para representar uma função? Justifique.
17. O que é uma variável?
18. Você pode utilizar uma variável numa equação? Justifique.
19. Você pode utilizar uma variável para representar uma função? Justifique.
20. O que são variáveis dependentes? E o que são variáveis independentes?
21. Dê um exemplo que mostre uma relação de dependência entre variáveis, especificando qual é a variável dependente e qual é a variável independente.

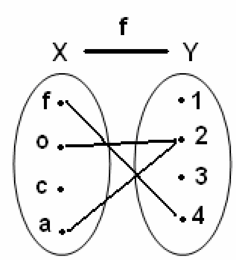
PARTE II – PERGUNTAS APLICADAS

Dada a função f definida como $f : X \to Y$ onde cada vogal de X corresponde ao número par primo de Y e cada consoante de X corresponde ao número par não primo de Y, pode-se escrever que $f(k)=\begin{cases} 2, & se \ \ k = vogal \\ 4, & se \ \ k = consoante \end{cases}$ **, para qualquer k pertencente a X.**

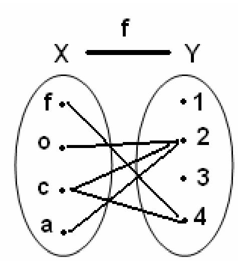
Observando os diagramas abaixo responda as questões 22 a 28:



Situação A



Situação B



Situação C

22. Qual das situações, A, B ou C, representa a função f?
23. O que especificamente levou você a escolher essa opção?
24. Por que você descartou as outras opções? Explique especificamente cada caso.
25. Quais são o domínio, o contradomínio e a imagem de f?
26. Qual é a lei de correspondência dessa função?
27. Da opção escolhida, o que você caracterizaria como variável? Por quê?
28. Daquilo que você caracterizou como variável, o que representa uma variável dependente e o que representa uma variável independente?

Dada a função $v:\Re\rightarrow\Re$ **em que v(x) = y e está definida de acordo com uma das expressões abaixo, responda as questões 29 a 38:**

a. x + y

b. x + 1 = 10

c. x + y = 10

29. Qual das situações a, b, ou c representa a função v?
30. O que especificamente levou você a escolher essa opção?
31. Por que você descartou as outras opções? Explique especificamente cada caso.
32. Essa função é formada:
    a) somente por variáveis – variável: _______________
    b) somente por incógnitas – incógnita: _______________
    c) por variáveis e por incógnitas – variável: ______________ incógnita: _____________
    d) nem por variáveis nem por incógnitas
33. Daquilo que você caracterizou como variável, o que representa uma variável dependente e o que representa uma variável independente?
34. Qual ou quais das situações representa(m) uma equação? Explique.
35. Essa equação ou essas equações são formadas:
    e) somente por variáveis – variável: _______________
    f) somente por incógnitas – incógnita: _______________
    g) por variáveis e por incógnitas – variável: ______________ incógnita: _____________
    h) nem por variáveis nem por incógnitas
36. Qual ou quais das situações representa(m) uma expressão algébrica? Explique.
37. Essa expressão ou essas expressões são formadas:
    i) somente por variáveis – variável: _______________
    j) somente por incógnitas – incógnita: _______________
    k) por variáveis e por incógnitas – variável: ______________ incógnita: _____________
    l) nem por variáveis nem por incógnitas
38. Quais são o domínio, o contradomínio e a imagem de v?

APÊNDICE V – Respostas dos Questionários

QUESTIONÁRIO TEÓRICO – ALUNO GATO

Questionário - Parte I - respostas.

1. É uma relação que ocorre geralmente entre dois conjuntos que utiliza uma característica para relacionar os elementos desses conjuntos.

2. A quantidade de dinheiro que gasto em relação a quantidade de livros que compro.

3. É um dos conjuntos do qual a função faz parte no caso os conjuntos que contém os elementos que se relacionam com o outro

4. É o conjunto que contém os elementos que podem ser relacionados com o domínio da função.

5. São os elementos do contradomínio que tem um correspondente no domínio.

6. É uma característica utilizada para corresponder um elemento do domínio com o contradomínio normalmente é uma equação.

7. $y = 2x + 5$.

8. É uma expressão que pode relacionar números e variáveis

9. $2a + 3b + c$.

10. Não, pois não há como corresponder dois elementos de conjuntos distintos (no caso domínio e contradomínio)

11. É uma expressão algébrica que contém uma igualdade.

12. $3x + 1 = 5$.

13. Sim, pois há como utilizar uma correspondecia entre os elementos do domínio e do contradomínio.

14 É uma letra que representa uma valor desconhecido.

15. Sim, podemos representar uma equação com valores conhecidos ou não, quando não os conhecemos utilizamos uma variável.

16. Sim, pois normalmente uma função é representada através de uma equação.

17. No meu modo de ver é o mesmo que incógnita

18. Sim, do mesmo que utilizamos a incógnita.

19. Sim, pois as variáveis fazem parte de equações que normalmente são utilizadas para representar funções.

20. variáveis dependentes são aquelas que dependem do valor de outra variável e variável independentes não dependem de uma outra variável.

21. $y = 2x$

x → variável independente

y → variável dependente.

QUESTIONÁRIO APLICADO – ALUNO GATO

Parte II - Respostas.

Questão 22.
Apenas A é função
Questão 23
O fato dessa situação obedecer a lei da função.
Questão 24.
A situação B foi descartada pois um dos elementos de x que é consoante não está ligado a um elemento em y.
A situação C foi descartada pois o elemento c possui duas imagens.
Questão 25.
$D(f) = \{f, 0, c, a\}$.
$CD(f) = \{1, 2, 3, 4\}$.
$Im(f) = \{2, 4\}$.
Questão 26.
$f(x) = \begin{cases} 2, \text{se } x \text{ é vogal} \\ 4, \text{se } x \text{ é consoante} \end{cases}$
Questão 27.
os elementos do domínio e do contradomio
Questão 28.
variável dependente o do contradomio e variável independente o do domínio.
Questão 29
situação c.
Questão 30.
o fato dessa opção relacionar x e y numa equação.

Questão 31.
o caso a porque não é uma equação
e o caso b porque não há como relacionar
x com y.

32. Essa função é formada:

a) somente por variáveis – variável: ______________
b) somente por incógnitas – incógnita: ______________
~~c)~~ por variáveis e por incógnitas – variável: x e y incógnita: x e y
d) nem por variáveis nem por incógnitas

Questão 33.
variável dependente x e variável independente y.
Questão 34
situação b.

35. Essa equação ou essas equações são formadas:

e) somente por variáveis – variável: ______________
f) somente por incógnitas – incógnita: ______________
~~g)~~ por variáveis e por incógnitas – variável: x incógnita: x
h) nem por variáveis nem por incógnitas

Questão 36.
situação a

37. Essa expressão ou essas expressões são formadas:

i) somente por variáveis – variável: ______________
j) somente por incógnitas – incógnita: ______________
~~k)~~ por variáveis e por incógnitas – variável: x e y incógnita: x e y
l) nem por variáveis nem por incógnitas

Questão 38.
$D(v) = \mathbb{R}$
$CD(v) = \mathbb{R}$
$Im = \mathbb{R}$.

QUESTIONÁRIO TEÓRICO – ALUNO PEIXE

1. Função matemática é uma relação entre dois números, onde um dos números é obtido apartir do outro.

2. $f(x) = 2x + 1$

3. O domínio de uma função representa os valores que o número pode assumir.

4. O contradomínio de uma função representa os valores que o número f(x) pode assumir.

5. A imagem de uma função está dentro do seu contradomínio e representa o valor que f(x) assume para um determinado valor x.

6. Uma relação entre o seu domínio e seu contradomínio.

7. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$

8. É uma expressão que representa um único número.

9. $4x + 3$

10. Não. Porque uma função representa uma relação entre dois números e uma expressão algébrica representa apenas um número.

11. Uma igualdade de dois números.

12. $4x + 8 = 0$

13. Sim, pois a função representa uma igualdade.

14. Incógnita é um número que é representado por uma letra e que representa a solução de uma equação.

15. Sim. Porque a incógnita é justamente o que dá sentido a uma equação.

16. Sim. A incógnita pode ser representada pela letra x de uma função e pode também representar sua solução.

17. Um número que pode variar de acordo com o resultado que se queira chegar.

18. Não. Porque na equação, o valor da incógnita representa a solução e esta não varia.

19. Sim. Embora existam funções sem variáveis (funções constantes), a variável é que compõem a função.

20. Não sei.

21. Como eu não sei a pergunta anterior, não posso responder essa.

QUESTIONÁRIO APLICADO – ALUNO PEIXE

22. Situação A.

23. Verifiquei que "A" é a única situação que obedece a todas as leis da função.

24. Situação B: o elemento "c" deveria estar ligado a um número por não primo, mas não está.

Situação C: o elemento "c" não deveria estar ligado ao elemento 2.

25. $D = \{f, o, c, a\}$

$CD = \{1, 2, 3, 4\}$

$Im = \{2, 4\}$

26. $f(k) = \begin{cases} 2, \text{ se } k = \text{vogal} \\ 4, \text{ se } k \text{ consoante} \end{cases}$

27. Os elementos do domínio. Porque são os elementos do domínio que variam para definir a sua imagem.

28. Variável independente: K

Não há variável dependente.

29. A situação "a".

30. Para mim, a situação "a" é a única que não representa uma equação.

31. Situação b: descartei porque considero que seja uma equação.

Situação c: idem

32. Essa função é formada:

~~a)~~ somente por variáveis – variável: X e Y

b) somente por incógnitas – incógnita: _______________

c) por variáveis e por incógnitas – variável: ______________ incógnita: _________

d) nem por variáveis nem por incógnitas

33. Variável independente: X e Y / Não há variáveis dependentes.

34. A situações b e C. Porque não representam função e nem simples expressões algébricas.

35. Essa equação ou essas equações são formadas:

e) somente por variáveis – variável: _______________

~~f)~~ somente por incógnitas – incógnita: X e Y

g) por variáveis e por incógnitas – variável: ______________ incógnita: _____________

h) nem por variáveis nem por incógnitas

36. A situação "a". Porque não apresenta sinal de igualdade.

37. Essa expressão ou essas expressões são formadas:

i) somente por variáveis – variável: _______________

j) somente por incógnitas – incógnita: _______________

k) por variáveis e por incógnitas – variável: ______________ incógnita: _____________

~~l)~~ nem por variáveis nem por incógnitas

38. Domínio: $\mathbb{R}$.

Contradomínio: $\mathbb{R}$

APÊNDICE VI – Transcrições das Intervenções

P – Pesquisadora
GATO – 1º aluno analisado
PEIXE – 2º aluno analisado
M – 3º aluno do grupo
V – 4º aluno do grupo

INTERVENÇÃO 9 – O conceito de função e as condições de existência e unicidade

PARTE 1
Leitura da definição de Dirichlet
Leitura dos elementos que os alunos destacaram e seus respectivos significados
Proposta de acrescentar, alteral ou modificaGATO - nenhuma
PARTE 2
Leitura do problema
Representação
Variáveis
Relação das variáveis
P - Sempre que for dado um valor numérico a n sempre existirá um valor de P?
GATO - Sim
P - Se eu revelar 1 foto eu tenho um valor para P? Duas fotos? 10 fotos? 1000 fotos?
GATO - Vai
P - Esse valor de P é único para cada n?
GATO - É
P - Vão existir, por exemplo, dois valores para P? Se eu colocar 15 reais e 20 reais vai equivaler ao mesmo número de fotos?
GATO - Não.
P - Vão ser preços que vão dar um número de fotos diferentes, é isso?
Responder a tabela (deveria ter feito isso depois de ter feito a pergunta, mas isso foi resolvido o decorrer do processo)
P - Você pode dizer que P está em função de n?
Todos - Sim
P - Porque M você acha que é função?
M - Por causa da relação de dependência entre as variáveis. E tem que ter a condição.
P - E você GATO?
GATO - Eu também. Nesse caso também tem uma regra aqui.
P - Qual é a regra?
GATO - No caso é a equação.
P - E pra você V, por que você acha que é função?
V - É função porque vai depender do n. Tem a relação.
GATO - Pra cada n, P assume um valor único.
P - Por que é função PEIXE?
PEIXE - Para cada valor de n terá um valor de P. Tem a relação de dependência, tem o fato de n ser natural.
P - Mas quando você diz que para cada valor atribuído a n existe um único P, você já não está dizendo que existe uma relação?
GATO - Está. É mesmo, é redundante. Nunca tinha pensando assim. Será que é?
MUDANÇA DA RELAÇÃO DE DEPENDÊNCIA
P - E se o n for dependente e o P for independente? Ou seja, sempre que for dado um valor numérico a P sempre existirá um valor numérico de n?
M - Vai.
P - Vou colocar 10 reais. Quantas fotos eu vou revelar?

GATO - Não dá para revelar fotos.
P - E por 20 reais?
GATO - Dá.
P - Será?
GATO - Pode até ser que sobre alguns centavos. Tem uma condição a mais.
P - (resolve a equação para P = 20 encontra n = 12,30). O que significa n no problema?
PEIXE - O número de fotos.
P - Eu posso ter 12,30 fotos?
GATO - São 12 fotos e sobra dinheiro.
PEIXE - Não, mas o n é o número de fotos. Não pode ser 12,30 fotos.
GATO e V - Não, mas dá 12 fotos e ainda sobra dinheiro.
M - 20 reais? Na realidade dá 19,80, 12 fotos.
P - Eu tenho 20 reais, mas eu tenho um correspondente pra 20?
M - Inteiro não.
PEIXE - Não.
P - E ele tem que ser inteiro?
PEIXE - Natural não nulo.
P - Eu tenho 20 reais e quero gastar com as fotos exatamente 20 reais, é possível?
GATO - Aí você compra uma bala.
V - É, mas não é uma foto.
P - Então, sempre que for dado um valor numérico a P, sempre existirá um valor numérico de n?
M - Existir vai, mas não vai ser inteiro.
P - Mas satisfaz o problema?
PEIXE - Não satisfaz.
GATO e V - Não.
P - Existir, existe, mas não satisfaz o problema, é isso?
PEIXE - Se eu considerar que n é um número natural não nulo nem satisfaz o problema.
M - Mas aqui não tá dizendo que é natural não nulo.
GATO - Mas n é o número de fotos.
PEIXE - Eu posso colocar lá zero fotos?
M - Mas aí ele já tá colocando uma condição.
GATO - Sim, mas o número de fotos não tem que ser inteiras?
PEIXE - Naturais.
GATO - É pronto... O n tem que ser natural.
M - Então n tem que ser os naturais com asterisco, é?
P - Aí vocês já estão colocando os conjuntos, né?
M - Isso já é uma condição que necessitaria da função. E a regra já tem 12 + 0,65.n
P - e o que é a condição?
M - É justamente isso o n pertencer aos naturais sem ser o zero.
GATO - Porque não pode ser zero?
PEIXE - Eu posso tirar zero fotos?
P - Se você tirar zero fotos, você vai pagar 12 reais.
GATO - Ía ser meio complicado.
GATO - Pois então, quando n for zero não satisfaz.
P - Por isso que a M falou N*.
GATO - Então não é pra todo valor.
P - Pois então, você atribuindo qualquer valor para P, mesmo o n pertencendo aos N*, eu vou ter um P?
GATO - Vai, se n pertencer...
P - Se eu colocar 20 reais para P eu vou encontrar um n?
PEIXE - Dá não.
M - Vai encontrar mas...
GATO - não satisfaz.
PEIXE - Ele não tá perguntando se satisfaz, ele tá perguntando se existe.
M - Pois é.

GATO - Existe, mas não satisfaz então é a mesma coisa que não existir.
M - Existe e não satisfaz.
GATO - Existe um valor de n, existe, tá tudo bem, só que ele não me serve.
M - Sim, mas não existe? É isso.
GATO - Mas n não é o número de fotos? E o número de fotos não tem que ser naturais não nulos?
M - Mas ele só tá perguntando se existe. É como o PEIXE disse, ele tá perguntando só se existe.
P - Os matemáticos passaram por isso também. Foi por isso que modernizaram o conceito de função, para evitar confusões. Quem
tem razão? A GATO tem razão? Depende do referencial.
PEIXE - É igual Física.
P - Mas vamos considerar que a gente tem que solucionar o problema.
M - Tem? Então realmente não vai existir.
GATO - Mas aí... Todo mundo botou sim na primeira ou botou não?
M - Mas aí é um P que eu vou botar um valor pra n vai existir um P.
GATO - Sim, mas aí se o n for zero?
M - Vai existir...
GATO - Não, não, tá certo, tá certo... Mas eu não quero
M - Aí querer e não querer são outras coisas.
P - Então a resposta seria não? Sempre que você atribuir um valor a P, o valor de n vai ser único?
PEIXE - Sim.
GATO e V - Vai.
GATO - Quando existir.
P - Ele satisfaz a segunda situação e não satisfaz a primeira, é isso?
PEIXE - Isso.
P - Então eu posso dizer que n está em função de P?
GATO - Isso é um problema.
PEIXE - Não.
P - Por quê?
PEIXE - Porque não satisfaz a primeira condição.
GATO - Porque eu tenho uma restrição e o fato de eu restringir não permite que um esteja em função do outro? Só que eu restringi que o n tem que ser natural não nulo, ele não tá em função do outro?
M - Não, esquece o que a gente disse.
GATO - Não, eu tô perguntando, eu não estou afirmando.
M - Isso aí já é outra coisa diferente do que eu tava perguntando.
GATO - Ela disse que levasse em consideração o problema.
M - Mas aqui o problema não tá dizendo n pertencente aos naturais.
PEIXE - Isso é lógico.
GATO - Não, não tá, mas o número de fotos tem que ser natural.
P - A gente pode dizer que está implícito no problema?
GATO - Está.
PEIXE - Sim.
GATO - Pra mim tá.
M - Tá bom.
P - E aí M, qual é sua dúvida?
M - Pra mim tá implícito, mas na hora que eu for ensinar isso eu vou ter que colocar, vai ser uma coisa diferente. Se eu botar só isso aqui o aluno vai dizer que sim, sim, sim.
P - Ou então pode ter aluno que vai dizer não, não, não. E aí você fica numa roubada né?
V - Mas você pode teGATO -1 foto? Me dê aí -2 fotos por favor.
M - Porque se você já vai com esse pensamento assim, é porque...
GATO - Mas você não entregaria esse tipo de exercício pro seu aluno, a não ser que você quisesse abrir uma discussão.
M - Não é esse tipo de exercício. Quando a gente vai explicar pros alunos a gente diz isso aqui,

o P vai poder ser isso...
GATO - Então, por mais que você diga, ele pode dizer mas professora porque o P não pode ser 20? Você vai ter que abrir e falar do mesmo jeito.
M - Então é o que eu estou dizendo.
P - Então, n está em função de P?
GATO - Pra mim está.
P - E pra você M?
M - Sei não.
P - E pra você PEIXE?
PEIXE - Está. Se eu disser não você vai perguntar porque né.
P - E pra você V n está em função de P?
V - Eu acho que está né.
P - Eu perguntei assim: sempre que for dado um valor numérico a P sempre vai existir um valor de n?
GATO - Não! Tá certo, não é função não.
V - Não, não é função não. Depois que eu falei foi que eu pensei.
GATO - Tá certo, não é.
P - Então pode responder aí na tabela, e responder porque não é função, segundo o que vocês disseram.
P - Sempre que eu atribuir um valor para n vai existir um valor para P?
M - Sempre vai existir.
P - Mas como é que eu posso ter 12,3 fotos?
M - Só vai existir se n for natural.
P - Sim, mas o que são 12,3 fotos?
PEIXE - É isso o que ela está dizendo, tem que levar em consideração o problema, tem que resolver o problema.
P - O que são 12,3 fotos?
M - Então eu levo em consideração que n é pertencente aos naturais asterico.
GATO - São 12 fotos e aquele pedaço que você tirou porque brigou com seu namorado e depois botou pra que ele apareça. Pronto, é 12,3 fotos.

SITUAÇÃO 2

Leitura do problema
Representação
Variáveis
Relação de dependência
P - Vamos considerar o peso como variável independente. Então se eu disser que minha carta pesa 50 g, quanto eu vou pagar para enviá-la?
GATO - 50 centavos.
P - Se eu disser, minha carta tem 77 gramas?
GATO - 80 centavos.
P - Sempre que eu atribuir um valor numérico ao peso, sempre vai existir um valor para o custo?
GATO - Vai.
P - E todas as vezes que eu encontrar esse custo, ele vai ser único?
GATO - Não.
M - Não existe peso negativo.
P - Então, mas aí também tem a ver com o problema. Se eu for mandar uma carta, mesmo que seja só o envelope sem nada dentro, ela vai pesar alguma coisa e é positiva. Se eu enviar uma correspondência que pese 1 grama, quanto eu vou pagar?
GATO - 30 centavos.
P - Eu vou pagar outro valor sem ser o 30 centavos?
GATO - Não, não, é porque eu confundi assim, se tanto faz ou 1 ou 2 ou 3 ou 4 até 20 vai ser 30 centavos mas o resto...
P - Eu tenho uma carta de 2 gramas, quanto eu vou pagar para enviá-la?
V - 30 centavos.
P - Eu vou pagar outra coisa por 2 gramas sem ser 30 centavos?

GATO - Não. Eu confundi porque todos eles são 30 né.
P - Eu tenho 21 gramas, quanto é que eu vou pagar por essa carta?
GATO - 50 centavos.
P - Eu vou pagar outro valor sem ser 50 centavos? Eu posso dizer que esse custo está em função desse peso?
PEIXE e GATO - Está
P - Por quê?
PEIXE - Fala aí (para a GATO)
GATO - Uh?
P - V e PEIXE, porque o custo está em função do peso?
GATO - Porque para cada valor do peso eu acho um único valor do custo.
PEIXE - um único valor do custo. Isso quer dizer que eles têm uma relação de dependência.
P - Mas só isso caracteriza uma função?
GATO - Que você sempre acha que ele é único. Você sempre acha que ele é um valor. Você tem um peso. Para um único peso existirá um único valor de custo.
PEIXE - Isso dá uma relação de dependência entre peso e custo.
P - Cadê a regra?
PEIXE - A regra? Tá aqui na tabela.
P - Ai é?
GATO - (Risos)
P - Vocês me disseram que a regra era uma equação...
PEIXE - Não, pode ser uma equação.
GATO - Pode ser, não necessariamente.
P - Eu posso escrever uma equação daí?
GATO - Pode.
P - Qual vai ser a equação?
GATO - Para $x > 0$ e $x < 20$, $y = 0,30$
PEIXE - Menor ou igual, a função P é igual a.
GATO - y não?
PEIXE - Não, P de peso.
GATO - f(x) pronto.
PEIXE - P é melhor.
V - Coloca P.
P - Você vai falar que o custo é p?
PEIXE - Não, coloca C.
P - C é o que?
GATO e PEIXE - 30 centavos.
P - E agora?
GATO - Se $x < 20$ e $x >=50$ $C = 0,50$
P - Assim né?
GATO - Se $x > 50$ e $x <= 100$, menor que 100, não, menor ou igual né?
V - Menor ou igual que 100
GATO - $C = 0,80$
Pausa
GATO - Se $x > 100$, $C = x/100$
P - Isso tudo aqui é uma equação?
GATO - Não é uma equação, são... (risos) conjunto de condições que a função obedece dependendo do valor de x.
V - Sim, é uma equação mesmo que você queria dizer.
P - Não tem nenhuma equação aí na lousa?
Todos - Tem sim.
GATO - $C = x/10$.
P - $C = x/10$ é uma equação?
GATO - É
P - E $C = 0,80$ não é uma equação?

GATO e V - É
V - Tem igualdade, tem incógnita.
GATO - São equações... São equações constantes... Existe equação constante? Existe função constante.
P - Se eu colocar assim x + 1 = 10, x = 10 - 1, x = 9, eu posso dizer que x = 9 é uma equação? Ou só x + 1 = 10 é uma equação?
PEIXE - É uma equação. A equação de uma reta.
Risos
P - Como é essa reta?
PEIXE - Uma reta paralela ao eixo y
GATO - x é igual a 9.
P - É ou não é uma equação? É uma equação da reta.
GATO - É, é, então é. Taí, gostei PEIXE.
P - Então C = 0,80 é uma equação porque representa uma reta que passa no y = 0,80?
GATO - É
P - Então você pode dizer que o custo está em função do peso?
GATO - Está.
P - Pode preencher o quadro.
V - GATO repete aí, por favor pra eu poder copiar...
Risos
MUDANÇA DA RELAÇÃO DE DEPENDÊNCIA
P - E agora? Se eu trocar... Colocar o custo como sendo independente e o peso dependente. Então eu vou atribuir valores para o custo e vou verificar se existem os pesos. Se eu pegar 0,30 que é o menor custo possível, eu vou ter quantos pesos relacionados?
PEIXE - Pode ser 1 grama, 2, 3, 4, 5.
GATO - Tem mais que um né. Mas se eu pegar 10 centavos?
P - Mas eu posso pegar 10 centavos aí no problema?
GATO - Não, mas sempre que for dado um valor numérico ao custo.
PEIXE - Eu preciso tirar vários valores para o peso.
GATO - Quando eu digo assim: sempre que for dado um valor numérico ao custo, esse valor numérico se restringe aos da tabela?
PEIXE - Sim.
P - Se a gente está colocando esses valores pertencentes ao problema, eu poderia pegar 10 centavos?
GATO - Não.
P - Mas fica aí a questão da M. Se eu ampliar os conjuntos e não considerar o problema, a gente poderia discutir. Se eu pegar 30 centavos, eu vou obter quantos valores aí para o peso.
PEIXE - Vai ter 20 valores.
GATO - 20? Bemmais não é?
V - De 1 a 20.
GATO - Maior que zero.
P - Se eu pegar de 0 a 20, quantos valores têm? Só 20?
GATO - Muitos.
PEIXE - Ah! Tá certo.
P - Considerando que a balança do correio leia até a 3a. Casa decimal. Vai haver infinitos números?
Todos - Não.
P - Mas vai haver um número maior do que 20?
Todos - Vai.
P - E se eu pegar 50 centavos?
GATO - Também.
P - Se eu disser que eu vou pagar 50 centavos, você pode me dizer quanto pesa minha carta?
GATO - exato não.
PEIXE - único não, mas vai encontrar.
GATO - vai encontrar.

P - Eu vou encontrar valores, mas eles serão únicos?
Todos - Não.
P - Sempre que eu eu atribuir um valor numérico ao custo sempre existirá um valor para o peso?
GATO - Sim
P - Esse valor para o peso será único?
GATO - Não.
P - Então eu posso dizer que o peso está em função do custo?
PEIXE - Me perdi já.
P - Sempre que eu eu atribuir um valor numérico ao custo sempre existirá um valor para o peso? Esse valor para o peso será único? Vocês disseram que não. Então eu posso dizer que o peso está em função do custo?
PEIXE - Não.
P - Por que não?
M - Porque a prioridade é satisfazer a condição.
P - Então podem escrever.
GATO - Fazia mais de 5 minutos que a M não abria a boca.

PARTE 3 - REFLEXÕES

P - No encontro passado vocês me disseram que para ser função bastava uma condição: para cada x existe um único y. Em cada uma das situações apresentadas eu sempre fiz duas perguntas pra vocês: se a VD existia quando fosse atribuído um valor para a VI e se isso acontecesse o valor para VD seria único. Vocês acham que modifica alguma coisa do que vocês me disseram?
GATO - Modifica. Porque não é para cada x e para todo x.
PEIXE - E qual é a diferença entre cada e todo?
GATO - Porque eu não posso ter um x faltando. Tem que existir sempre e tem que ser único. Se você prestar atenção nas perguntas, sempre nas segundas situações né, são as problema. Na primeira folhinha, não era sempre que tinha o valor e por conta disso não era função. Mas quando ele existia ele era único. Na outra, existia o valor, mas ele não era único sempre, então também não era função. Então nas duas que era função ele sempre existe e ele é único.
P - A V colocou no encontro passado o seguinte... Eu tinha perguntado se era uma única condição e ela falou que não, eram duas condições... Eu não me lembro quais são, mas são duas condições. O que vocês acham agora, continua sendo uma condição ou passa a ser duas condições?
M - Eu não vejo duas não.
PEIXE - Ah!
GATO - Nem depois do que eu disse?
P - Vai ter que argumentar agora. Quer defender sua tese? Então tem que colocar argumentos.
GATO - Porque ele tem que existir sempre... Se eu atribuir um valor para a VI eu sempre tenho que achar um valor pra VD pra ser função. Pra cada x, existe um valor de y, só que esse y tem que satisfazer. Porque no caso da questão das fotos, eu poderia usar qualquer x, poderia usar qualquer preço, mas não era todo preço que ía me dar a quantidade de fotos. Então não era todo. Então para cada x ele era único então não era todos os pontos que existia.
P - Quando você diz isso aqui (para cada x existe um único y) você diz uma coisa ou diz duas coisas?
M - Pra mim é só uma.
V - Pra cada x, existe um único y.
GATO - Quando a gente vê a questão de limite e continuidade né. Pra uma função ser função ela não precisa ter continuidade.... Então ela pode ter pontos que não existe um valor de y quando eu boto um determinado x.
PEIXE - Uma função indefinida né?
GATO - Que ela não tá definida. Então... A questão das fotos poderia sim ser uma função. Só que não seria uma função contínua.
P - Será?
GATO - Não sei.
P - O que é que é ser contínua? Uma coisa é você ter uma função e ter uma função contínua, outra coisa é ela nem ser função, imagine contínua.

GATO - Peraí.
P - Então você precisa primeiro saber se ela é uma função pra depois saber como ela vai se comportar. Na relação entre P e n, você pode olhar para o n como sendo P - 12 dividido por 0,65, considerando que n é natural não nulo. Será que todas as vezes que eu colocar um valor para P eu vou ter um valor correspondente para n?
GATO - Não.
V - Mas quando eu tenho um gráfico...
GATO - Só de pontos é uma função? Será?
V - Um monte de pontinhos.
GATO - Para n = 2 eu teria P = 12,65, e assim sucessivamente... Isso é uma função?
P - (Desenha a situação na lousa) Assim é?
GATO - Pois é, essa é a dúvida. Aí botando nas flechinhas.
V - Peraínda eu li alguma coisa quando eu tava estudando função que dizia... Ai meu Deus. Uma coisa que você tinha um gráfico e não podia ter um espaço sem pontos no gráfico. Mais ou menos isso. Tem que ter o x e tem que ter um y.
GATO - Tem que ter todos né?
V - Exatamente.
P - (Desenha uma função escada)
GATO - Mas aí eu não tenho uma função que é uma divisão de polinômios? Aí o denominador não tem que ser diferente de zero e não fica um buraco?
P - Fica mais aí o que é que eu tenho que fazer?
GATO - Pra ser função eu preciso dar um valor?
P - O que eu preciso fazer pra que se torne uma função?
GATO - Botar outra condição, mexer no...
P - O que é que a gente sempre faz?
GATO - No domínio.
P - Mexe aonde?
PEIXE - No domínio.
P - E aí a gente tem que colocar que é função desde que ela exista aqui. E o Dirichlet apresentou isso na sua definição?
GATO e PEIXE - Não.
P - Por isso é que o conceito apresentado por ele é incompleto do ponto de vista matemático. Ele traz consigo a...
GATO - essência...
P - de ser função. Foi necessário mais tempo para que o conceito evoluísse para retirar possíveis ambiguidades. Mas a questão é para cada x existe um único y, eu estou dizendo uma coisa só? OU eu estou dizendo duas coisas num lugar só? Eu fiz duas perguntas em cada situação. Isso modifica alguma coisa em relação às condições de ser função?
V - Aí é só um porque se fosse para cada x existente... É só uma coisa.
GATO - E se eu mudasse de cada para todo... Pra todo x...
P - Para todo x existe um único y? Uma coisa é você dizer qualquer que seja x existe y. Outra coisa é você dizer qualquer que seja x existe um único y.
GATO - Não é uma coisa só. Dá pra separar em duas.
P - Quando eu defino função, ela tem uma condição ou ela tem duas condições?
GATO - Tem que existir sempre que eu der um valor para x, tem que existir um y e ele tem que ser único.
V - o x e o y são duas coisas.
PEIXE - Tá escrito uma só.
P - Isso, mas foi isso que eu perguntei. Eu escrevi uma coisa só, mas aqui dentro tem um significado ou tem dois significados?
M - Se botar pra cada x existe um único y, é uma coisa só. Pra todo x vai cair naquela primeira funçãozinha que a gente viu, vai botar o qualquer de novo.
PEIXE - Pra cada x que pertence ao domínio da função.
M - Pra cada x é diferente, pra todo...
GATO - Pra todo fura porque o t pode ser 10, porque eu não tenho correspondente do outro

lado.
M - Se for pra cada x então o 10 não valeria ali. É assim que eu estou vendo. Então a condição é pra cada x existe um único y.
GATO - Sei lá eu acho que fica tão semelhante para cada e para todo.
PEIXE - Foi tu que inventou.
Risos.
GATO - Então, pra cada um existe um único y. Se isso existir é função, não é assim? Eu digo pra todo x, existe um único y, se existir é função. Não é o mesmo significado? Pra cada um... Pra todos eles.
PEIXE - Acho que é.
GATO - Acho que pra todos eles fica melhor porque não deixa margem para fugir nenhum.
P - O que a M tava dizendo é que se for assim você não vai poder fazer restrições.
GATO - Não, mas ai, pra todo x tem que existir pra ser função. Mas quando P = 10, x não existe então não é função.
P - independente de eu ter restringido n ou não, é isso?
GATO - Como assim?
P - Porque o n a gente tá considerando como sendo natural não nulo, mas se a gente pegasse isso para uma situação geral, trabalhassem todos os reais então existira um n.
GATO - Não, mas aí entra a outra condição não? Que eu tenho que colocar.
P - qual é a outra condição?
GATO - Que meu n tem que pertencer, tem que ser um número natural não nulo, maior que zero, maior ou igual que 1.
P - Certo... Deixa eu perguntar uma coisa que pode polemizar. Devido ao tempo a gente pode deixar para a próxima terça-feira.O que representa a regra dessa função?
GATO - Como assim?
P - Na definição que a gente viu que o autor coloca que existe uma regra para ser função.
PEIXE - No caso, a VI vai ser o n.
GATO - é a independente vai ser o n.
P - E a dependente vai ser o P. O que é a regra?
GATO - É uma equação.
P - Essa equação (P = 12 + 0,65n) é a regra?
PEIXE - Não só.
P - Todo mundo acha que a regra é a equação?
V e GATO - Eu acho que é.
P - Deixa então eu fazer a outra pergunta... O que representa nesse problema a condição para ser função?
PEIXE - O n tem que ser natural não nulo.
GATO - Que o n tem que ser natural, é?
P - A condição que vocês disseram no início era que: para cada x existiria um único y. Então o que é a condição de função? Vocês estão me dizendo que a regra da função é a sua equação, então qual é a condição?
GATO - Que pra cada n que eu atribuir vai existir um P.
P - Vai existir um P ou vai existir um único P?
GATO - Um único P.
P - Qual a diferença de regra pra condição?
GATO - Que a regra é a lei da função.
P - E a condição? Isso é o que a Ritermar tá falando né... Não sei não, vocês concordam?
M - Lei vai ser a condição porque a regra eu posso mudar.
PEIXE - A regra não muda a condição muda, depende da situação.
M - A lei pra mim é n ser natural não nulo.
P - O que é lei de formação?
GATO - é a equação.
P - É a regra ou é a condição?
V - A regra.
P - Qual é a lei de formação estabelecida na relação entre velocidade e tempo no MRU?

GATO - s = so + v.t
PEIXE - o "sorvete"
Risos
P - E aí... Essa é a lei de formação? Então a lei de formação é a regra...
M - A lei é a condição.
V e GATO - Pra mim não é não.
PEIXE - E a lei seria o que? N natural não nulo?
M - Pra mim é, a lei seria isso. E a regra é basicamente a equação. Eu posso mudar aquela equação ali para diversos valores.
GATO - n ser maior ou igual que 1 é regra ou condição?
M - pra mim isso é a lei, no caso é a condição.
GATO - E o fato do P ter que ser único é o que?
P - A condição que vocês me falaram que era tá escrito aqui: para cada x existe um único y.
GATO - Mas tu disse que era o fato de n ser natural.
PEIXE - Alguma coisa tem que mudar aí.
P - Olha só, a gente está falando de três coisas e eu estou pedindo duas classificações. Uma delas é P = 12 + 0,65n, a outra é n pertencer a N*, e a terceira é para cada n existir um único P. O que disso aqui é regra e o que disso aqui é condição?
GATO - Eu só posso classificar de duas maneiras? Ou é regra ou é condição?
P - O que diz o Dirichlet? Ele utiliza a palavra regra e a questão da condição vocês me trouxeram. Então, todos estão me dizendo que isso aqui é regra (P = 12 + 0,65n), é isso?
Todos - É
P - E o que é a condição?
GATO - A do meio é a condição para que a função seja...
V - verdadeira.
GATO - A última é condição para que ela seja função.
M - existe um único P, ali é condição. Ali no n pertencente aos naturais vai ser a existência para a condição.
V - O que? Minha nossa....
M - Para existir e para que satisfaça a função, n tem que pertencer a N*.
GATO - Gente esse é o domínio.
M - Pra mim é uma existência da função.
P - Então o primeiro é regra, o segundo é domínio e o terceiro é condição, é isso?
Todos - É
P - A relação de dependência obedece a uma regra ou a uma condição?
GATO e V - A regra.
GATO - Na realidade os dois porque para cada x tem que existir um único P.
P - Numa relação de duas variáveis?
GATO - Uma regra.
P - E numa função?
PEIXE - A condição e a regra.
GATO - A regra e a condição. Tem que ter a condição para ser função. Não basta ter apenas uma regra porque senão quando eu boto o n em função do P seria válido qualquer valor para n = 10 e não é porque não obedece a condição de que...
V - para cada n existe um único P.
GATO - Na realidade a condição não é nem de ser único né, é existir o valor.
P - Então o que é uma regra?
PEIXE - É algo que deve ser obedecido.
GATO - É a lei de formação, é a relação que há entre as VD e VI.
M - É, pronto.
PEIXE - É
P - E essa regra está relacionada com o que daquilo que estávamos estudando?
GATO - equação.

INTERVENÇÃO 11 – Os conceitos modernos de função – Elon Lages Lima e Geraldo Ávila

PARTE 1
Explicação da utilização das definições apresentadas
Leitura das definições
P - O que vocês acharam das definições?
GATO - Eu achei que a do Elon foi mais direta... Ele pontuou os pontos principais. Mas eu achei interessante quando o Geraldo falou que é preciso especificar o domínio. Deixou assim bem claro que é necessário especificar o domínio.
V – Eu achei o que ele falou mais claro (Geraldo)
GATO - Eu preferi a primeira.
P - Mas, por quê?
V – Por causa do final mesmo. A questão do domínio, da imagem.
P - Todos os dois falam sobre conjuntos, coisa que o Dirichlet não fazia porque na época dele não existia ainda a Teoria dos Conjuntos formalizada. Eu diria que a Teoria dos Conjuntos tem de vida aproximadamente 1 século só. Comparado com outros conhecimentos da Matemática, como a Geometria, por exemplo, é muito pouco. Então a Teoria dos Conjuntos é muito recente.
Pausa
P - Eu vou colocar aqui na lousa o que vocês já definiram como função e eu gostaria de saber o que vocês modificariam, retirando ou acrescentando.
PEIXE - Regra e lei é a mesma coisa né, já que tem aqui no quadro.
GATO - É
P - Vocês falaram de variável, de relação de dependência, de equação no sentido de...
GATO - Regra
P - E vocês falaram de condição, eu perguntei se tinha uma, se tinha duas: para cada x existe um único y. E aí, diante dessas definições que vocês receberam agora, vocês modificariam alguma coisa?
PEIXE - Tem que ter conjuntos, né, dois.
P - Tem que ter conjuntos? Todo mundo concorda com isso? Pra gente definir função a gente vai precisar de dois conjuntos?
Todos - Sim.
P - Tem mais de dois conjuntos?
PEIXE - Eu nunca vi uma função com mais de dois conjuntos. Mas é capaz de existir.
P - Mas nessa nossa definição vocês colocariam quantos conjuntos?
GATO e PEIXE - Dois.
P - O que mais que tem que ter?
GATO - Regra, né.
PEIXE - Mas deixa só regra e tira equação
P - O Geraldo Ávila fala de lei, vocês consideram lei e regra a mesma coisa?
GATO - Eu, sim.
V – É.
M – Pra mim, naquele dia eu tinha dito que não. Eu continuo achando que não.
P - Um autor diz que função é uma regra, outro autor diz que função é uma lei. E agora?
PEIXE - E aí que a mesma coisa.
GATO - Eu também acho.
M – Pra mim a lei é a condição
GATO - Não, mas eu acho que não é não. O Geraldo diz que para todo x deve haver um y. Então não é a lei. Porque senão ele não colocaria aqui embaixo, ele não repetiria.
M – O outro diz a mesma coisa?
GATO - Diz.
M – Aonde?
GATO - Que parte que você quer que eu repita?
M – O outro (autor) diz a mesma coisa que esse?
GATO - Aqui em cima ele diz que é uma lei para ser elementos do conjunto. O outro diz que é

uma regra que existe para associar cada elemento, então...
V – A mesma coisa.
GATO - Pra mim é a mesma coisa.
M – Pra mim é diferente.
GATO - Você não mudou porque não quer.
P - Então para os três lei é igual a regra e para M lei é igual a condição, é isso?
Todos - É
P - O que mais vocês gostariam de acrescentar ou retirar na definição de função?
V – Domínio, imagem.
PEIXE - que todo x pertencente ao domínio tem que ter uma imagem.
P - Então eu posso dizer que para cada x pertencente ao domínio existe um y pertencente...
V – Ou então para todo x.
P - Para todo x...
GATO - pertencente ao domínio... existe um único y... pertencente a...
PEIXE - ao contradomínio.
P - É à imagem ou é ao contradomínio?
PEIXE - Ao contradomínio, porque a imagem é um subconjunto do contradomínio.
GATO - Não mas a imagem são todos os que têm um correspondente no domínio.
PEIXE - Mas se você considerar o contradomínio,você já ta considerando a imagem.
GATO - Ta certo, mas a gente não pode especificar melhor dizendo que é a imagem?
PEIXE - Não sei.
P - Vamos ouvir o que os autores dizem...
GATO - a cada x pertencente ao X a regra deve fazer corresponder a um único f(x) pertencente ao Y, e o Y ele chamou de imagem.
P - Tem certeza? Olha lá no Geraldo. D é um conjunto chamado de domínio e Y é chamado de contradomínio e a função associa os elementos de D aos elementos de Y.
GATO - Mas só que embaixo: para cada elemento pertencente ao X, o elemento f(x) pertencente ao Y, chama-se imagem.
P - Lá no Elon, ele chama o conjunto X de domínio e o conjunto Y de contradomínio. E o Geraldo diz que D é domínio e Y é contradomínio. O que é ser imagem?
GATO - É ter um correspondente no X.
P - Ele diz isso? O que ele diz que é imagem?
GATO - Para cada x pertencente ao X existe um f(x) pertencente ao Y que chama-se imagem da função f.
P - Certo, então ele ta falando de x e de f(x), que é y. Mas o que é Y?
PEIXE - É o contradomínio.
P - É o conjunto imagem ou é o conjunto contradomínio?
PEIXE - É o contradomínio
GATO - É o contradomínio.
P - Então para todo x pertencente ao domínio existe um único y pertencente a quem?
PEIXE - ao contradomínio.
GATO - ao contradomínio.
P - Então a gente pode escrever assim: qualquer que seja x pertencente ao D existe um único y pertencente ao CD?
Todos - Pode.
P - Isso aqui é o quê? Condição?
GATO e PEIXE - É
P - O Elon coloca duas condições e a gente está escrevendo uma coisa só. Cadê as condições do Elon?
PEIXE - O item a é isso aí.
GATO - Não, mas as duas coisas estão escritas aí.
P - Onde é que está a primeira?
GATO - Para todo x pertencente a D existe um y. E, depois ele tem que ser único.
Pausa
GATO - Mas, eu preciso colocar separado?

P - Não, eu só quero compreender como vocês visualizam. Se nessa escrita tem uma condição ou tem duas. O que vocês visualizam? Duas coisas ou uma coisa só?
PEIXE - Duas.
P - Porque o Elon coloca duas e a gente ta escrevendo uma coisa só.
GATO - Fica melhor de visualizar se botar separado.
V – Pra cada x o y é único.
GATO - Eu vejo aquelas duas condições naquela única ali. Só que eu acho que para repassar isso para uma outra pessoa fica melhor abrindo porque deixa bem claro, sem margem de dúvida, que são duas e quais são realmente. Fica mais claro de ver.
V – Com certeza.
P - A condição do Dirichlet também ta aqui? Essa condição que vocês falaram antes é a mesma dessa?
V – Faltou o conjunto.
GATO - Faltam só os conjuntos.
P - O que mais que precisa colocar? Quando a gente fala sobre conjuntos, nas definições ele fala de domínio, contradomínio e imagem. São três conjuntos ou são dois conjuntos?
GATO - Porque a imagem é subconjunto do contradomínio.
P - Então nos conjuntos eu teria que colocar obrigatoriamente quais conjuntos?
GATO - Domínio e Contradomínio.
P - E a imagem como é que fica?
GATO - Dentro do contradomínio.
P - E a relação de dependência?
GATO - O Elon não deixa bem claro isso, mas o Geraldo Ávila fala claramente quando ele fala que a variável x pertencente ao conjunto D é a variável independente e o y, a imagem né, de variável dependente. Ele deixa bem claro assim.
P - Então vocês acham que tem que continuar tendo a relação de dependência e as variáveis, é isso?
GATO - Eu acho que deixa assim.
M – Eu estou com dúvida naquele exemplo do último encontro.
V – Deixa, porque pra mim C = 40 era função, então deixa.
GATO - Pra mim também era função. Eu só disse que era estranho ver o C constante ser uma variável dependente.
P - No próximo encontro a gente esclarece aquela dúvida. Mas, PEIXE, quando a gente fala de função a gente pensa numa relação de dependência entre uma VD e uma VI?
PEIXE - Eu não sei mais, porque naquele exemplo do último encontro furou, então não sei. Não consegui enxergar isso lá. Mas deve ter.
GATO - Mas parece que com todos esses elementos ficou tão extenso.
P - Mas a gente pegou o que já tinha e acrescentou mais algumas coisas e quase não tirou.
GATO - Mas ta bom.
V – Ta menor do que o que você trouxe pra gente ler.
Responder às perguntas da PARTE 1

PARTE 2

SITUAÇÃO 1

Leitura do problema
P - Como é que a gente pode representar essa relação?
V – Botando assim nas bolinhas
P - No diagrama de Venn?
PEIXE - Nos ovinhos.
P - O que eu coloco nesse primeiro diagrama?
GATO - Os elementos de A: 0, 5 e 15.
P - E no B?
GATO - 0, 10, 15, 20, 25
P - A relação é de A em B e se eu tenho x pertencente a A e y pertencente a B, o que é que eu tenho que fazer?
GATO - Vai substituindo os valores de A na regra e achando o correspondente em B.

P - Qual é o primeiro valor que A pode assumir?
GATO - zero.
P - Então se x é zero o y é quanto?
GATO - cinco.
P - Qual outro valor que x pode assumir?
GATO - cinco.
P - Então quanto vai ser o y?
GATO - 10.
P - E o próximo valor?
GATO - 15.
P - E o correspondente?
GATO - vinte.
P - Todos os elementos de A apresentam um elemento correspondente em B?
GATO - Sim.
P - Então a primeira condição foi satisfeita?
Todos - Isso.
P - Cada elemento de A apresenta uma única correspondência em B?
GATO - Sim.
P - então essa segunda condição está sendo satisfeita?
Todos - Está.
P - Eu posso dizer então que essa relação R é uma função?
GATO - É.
P - Por quê?
V – Porque satisfaz as condições.
PEIXE - Porque tem variável...
V – Tem regra.
P - Tem todos os quesitos pra ser função. Mas, o que é mais importante para ser função?
GATO - A condição.
P - Mas, se você não tivesse a equação y = x + 5, como é que você faria a correspondência? Será que a condição é a coisa mais importante?
PEIXE - É a regra.
GATO - É a condição e a regra.
P - Porque se eu tivesse só a regra?
GATO - Mas, tudo é importante. Porque eu tenho todos os correspondentes de x do domínio ter um correspondente no outro, no contradomínio? Então eu preciso saber os elementos do domínio, então eu tenho que saber o domínio, certo? Aí eu tenho que saber o contradomínio pra saber se o correspondente está lá. Aí eu tenho que saber a regra pra saber como o elemento de um vai chegar no outro. E tenho que saber se satisfaz a equação, então tudo é importante.
P - Porque se não fosse importante e a gente não colocasse por exemplo que a relação não era de A em B, a gente poderia ter uma função ou poderia não ter uma função. Se eu tivesse colocado uma relação de B em A seria uma função?
GATO - Não.
P - Então o que a GATO falou vocês todos concordam? Tudo aqui é importante?
V – É.
P - Se a gente tirar o conjunto A o que acontece?
V – Não dá pra fazer nada.
P - Se a gente tirar o conjunto B o que acontece?
V – Não faz nada.
P - Se tirar as condições como a gente sabe se é função?
M – É essencial.
P - Então digam pra mim quem é o domínio, o contradomínio e a imagem dessa função?
PEIXE - O domínio é o A.
GATO - O domínio é o 0, 5, 15. O contradomínio é o B todinho. E a imagem é o 5, o 10 e o 20.
P - Porque a imagem não é B?
GATO - Porque nem todos tem um correspondente no domínio.

P - Porque o contradomínio é B?
PEIXE - Porque a relação é do A no B.
P - Se a relação fosse de B em A, quem seria o contradomínio?
GATO - o A.
P - E porque o A é domínio?
V – Porque...
PEIXE - Porque ele ta na esquerda.
Risos
P - Então tem que ter essa condição é? Tem que ser da esquerda para direita. E se eu fizesse assim B <- A?
GATO - Não, você está fora dos padrões.
P - Mas, ta errado isso?
GATO - Não, não está, mas...
P - Eu só mudei a direção, é da direita para esquerda.
GATO - É porque ela ta no começo da reta, na origem.
P - E a reta tem origem?
GATO - Na parte que não é a ponta.
P - Como é que você diria para um aluno seu que A -> B é a mesma coisa que B<- A?
GATO - Não diz, porque não precisa dizer.
P - E se ele perguntar?
Risos
M – Eles não estão relacionando dois conjuntos? Ele quer relacionar o primeiro conjunto ao segundo. Não importa ue seja A ou B. Eu vou primeiro pegar um conjunto e relacionar com o outro, no caso eu vou pegar o A e relacionar com o B.
P - E como é que você sabe que é o primeiro?
M – Porque eu escolhi o A pronto, entendeu?
P - E como é que você diz que você escolheu o A? Como é que você sabe que você escolheu o A?
M – Porque eu posso escolher olhando pra função.
GATO - Porque essa minha notação de A pra B diz que eu pego um elemento de A e estou levando um correspondente no B.
P - Quem é um elemento do A?
GATO - Um valor de x. Porque ele falou que x pertence a A.
P - E x é o que no A?
PEIXE - É domínio.
GATO - O conjunto X é o domínio, que aí é o A.
P - Se x pertence a A, como é que você sabe que A é o domínio?
V – Por causa da setinha.
P - E se eu tirar a setinha e dizer assim: de A em B.
GATO - Mas é porque da onde ta partindo.
P - E a gente parte da onde?
GATO - Do início.
P - E o início é o quê?
GATO - Tu quer escutar que é a variável independente?
P - Não sei, é pessoal? Vocês falaram pra mim que tudo é importante.
V – Se você disser que essa setinha é um vetor da Física. Pois é, ali é exatamente o começo e ali é o final do vetor.
P - Mas se você não utilizar nenhuma representação geométrica como é que você sabe que é domínio e contradomínio?
GATO - Porque o domínio vai ter as variáveis independentes é?
P - Você começa da onde geralmente? Da VD ou da VI? Você atribui valores a quem?
V – À independente.
GATO - á independente.
P - a x? E se x for uma V.D.?
PEIXE - Aí troca.

P - Como é que vocês sabem o que é o domínio e o que é o contradomínio?
V – São as variáveis dependentes tudinho junto.
GATO - As variáveis independentes formam o conjunto domínio e as candidatas a variáveis dependentes formam o contradomínio.
P - Você colocou assim: as variáveis independentes formam o domínio. Eu estou vendo duas variáveis aqui, certo? Então você está me dizendo que x e y formam o domínio?
GATO - Não, mas é a independente.
P - Mas quantas variáveis independentes tem aí?
V – Só tem uma?
P - É porque a GATO falou no plural: as variáveis independentes formam o domínio.
GATO - Não, mas é porque o x pode ser o 0, o 5, o 15. É todos os x. x1, x2, x3, x4. É porque é x indicezinho.
P - Você ta querendo me dizer que a variável x representa os elementos de A, é isso?
GATO - É.
P - Então é uma variável só que você utiliza para representar todos os seus elementos ou são várias variáveis que você utiliza?
GATO - Na norma geral você usa só uma.
P - Então quando você diz as variáveis independentes ta correto?
GATO - Não, ta errado.
PEIXE - A variável é só uma.
GATO - A variável.
P - Mas aí ela pode assumir valores, é isso?
PEIXE - Isso.
GATO - Pronto. A variável independente pertence ao domínio.
P - E a variável dependente representa os elementos de quem?
GATO - Do contradomínio né.
PEIXE - Da imagem.
V – É da imagem.
P - Mas o Geraldo Ávila diz que y é a imagem da função e representa a VD. E agora?
GATO - No dia que eu estudei função eu nunca imaginei que fosse tão complexo.
PEIXE - Da imagem.
P - Quer dizer que esse y não representa o zero, não representa outros valores que não têm associação?
GATO - Eu acho que não.
P - Então a VD representa os elementos da imagem, é isso?

SITUAÇÃO 2

Leitura do problema
P - A nossa variável independente a gente vai buscar em que conjunto agora?
GATO - No Y.
P - A gente vai buscar um correspondente desses valores aonde?
V – No X.
P - Geralmente você tem X em Y agora eu estou colocando Y em X. Isso muda o fato da gente buscar a variável independente no domínio?
GATO - Não.
P - A regra é a seguinte: cada vogal de Y corresponde a um número par de Y e cada consoante de Y corresponde a um número ímpar de X. Como é que a gente representa isso?
GATO - Diagrama.
PEIXE - Os ovinhos.
P - Eu desenho primeiro X e depois Y ou primeiro Y e depois X?
GATO - Não, Y em X.
P - E aí? Quem é o valor do Y?
GATO - a, b, c, d, e
P - O que eu coloco no X?
GATO - 0, 1, 2, 3, 4
P - E o a eu vou associar a quem?

GATO - Vai pro 0, pro 2 e pro 4.
PEIXE - 0 é par?
P - E o b?
GATO - 1, 3
P - E o c?
GATO - 1, 3
P - E o d?
GATO - 1, 3
P - E o e?
GATO - 0, 2, 4
P - Todos os elementos de Y apresentam um correspondente no conjunto X?
PEIXE - Não.
V – Não.
P - Não?
GATO - Não, apresenta mais que um.
P - O um, não é o um da matemática é o um como artigo indefinido. No sentido de algum.
GATO - Apresenta.
P - Cada elemento de Y apresenta uma único correspondência em X?
Todos - Não.
P - Não apresenta nem o a, nem o b, nem o c, nem o d, nem o e. Mas se eu tivesse, por exemplo, só o a apresentando mais de uma correspondência e todos os outros apresentando uma correspondência única, eu poderia satisfazer essa 2ª condição?
GATO - Não.
P - Isso significa que basta um não satisfazer que a condição toda não é satisfeita.
GATO - Isso.
P - Essa relação D é uma função?
GATO - Não.
P - Por que não é?
GATO - Porque não satisfez a condição.
P - Mas tem conjuntos, de partida, de chegada, tem regra.
M – Mas a condição não foi satisfeita.
P - Mas uma condição foi.
GATO - Mas tem que ser todas.
P - Tem que ser todas pra ser função?
GATO - Não pode furar a condição de jeito nenhum.
P - Tem que ser as duas, porque se não for não pode ser função, é isso?
V – É
P - Qual é o domínio dessa relação?
GATO - Se não é função como é que vai ter domínio?
P - Uma relação não tem domínio?
GATO - Não sei, a gente não ta falando de relação.
Risos
P - A gente poderia falar de domínio da relação?
PEIXE - Sim.
P - A gente poderia falar de contradomínio da relação? De imagem da relação?
V – Sei lá.
P - Eu não trouxe isso pra discussão né. Então fica pra vocês pesquisarem... tarefa de casa. Existe domínio, contradomínio e imagem de uma relação? Certo? Aí depois vocês me dizem.
SITUAÇÃO 3
GATO - A V ta botando que não aceita que o zero é par.
P - Não? Por quê?
V – Porque ele é neutro.
P - Quando é que um número é par?
GATO - Não é quando ele é divisível por 2?
P - o zero é divisível por 2?

V – É, mas não tem aquela história que o zero dividido por zero... sei lá.
P - Mas nesse caso você vai dividir o zero por 2 e não por zero.
GATO - Tem gente que tem dúvida que o zero não é alguma coisa. Ela disse que achava que o zero não era par, mas eu acho que não é isso não. Eu acho que o zero não pertence aos números naturais. É os naturais? Sei lá.
P - Não é o fato do zero não ser nem positivo nem negativo?
Leitura do problema.
P - Eu tenho uma relação de Z em R, quem é Z?
GATO - O Z é o conjunto dos inteiros?
P - É o conjunto dos inteiros. E o R?
GATO - Conjunto dos reais.
P - E essa relação é definida como p = raiz de s... p pertence a Z e s pertence a R.Todos os elementos de Z apresentam um elemento correspondente em R?
PEIXE - Nem todo.
P - Quem não representa?
GATO - -1?
P - Se eu colocaGATO -1 = raiz de s. Eu tenho um valor de s que resolve a equação?
GATO - Não peraí que eu troquei, fiz confusão.
P - Pra quem você está atribuindo valores? Porque eu entendi que você estava atribuindo valores a p. Mas é a s ou a p?
GATO - É a p, ta certo.
PEIXE - É a p.
P - Porque que é a p?
PEIXE - Porque p ta no domínio.
P - Mas olha a equação ta assim: p = raiz de s.
PEIXE - Não interessa.
P - Porque geralmente a VD ela fica assim do lado esquerdo da igualdade.
Risos
P - Como é que a VI fica do lado esquerdo?
PEIXE - Ela ta de metida aí.
P - Quem é a VI então.
PEIXE - Aquela que pertence ao domínio.
P - Então eu tenho que atribuir valores a p, é isso?
Todos - Isso.
P - Se eu colocar p = 1, então 1 = raiz de s. Qual o valor de s?
GATO - 1
P - E se eu colocar p = 0?
V - -1 vai valer, -1 vai valer.
P - E se eu colocar p = -1? O valor de quem dá -1?
GATO - Mas eu tava pensando assim: se você elevar ambos os membros ao quadrado, esse que tem a raiz fica módulo.
P - Então fica 1 = ! s !. Isso implica que ou s = 1, ou s = -1. É verdade isso?
Todos - Não.
P - Então o que aconteceu? Eu atribuí um valor a p e descobri um valor para s?
V – Não.
P - O que aconteceu com essa primeira condição aqui? Todos os elementos de Z apresentam um elemento correspondente em R?
GATO e V – Não.
P - Se furou essa condição eu preciso olhar para outra condição?
GATO e V – Não.
GATO - Agora eu poderia redefinir essa função.
P - Como?
GATO - É porque os valores negativos não vão valer. Então, e se eu mudar o domínio?
P - O que é que vai acontecer?
GATO - Eu mudo o domínio para que dê certo.

P - E qual é o domínio que você tem que colocar pra dar certo?
PEIXE - Real.
V e GATO - Não.
GATO - Muda de Z e bota Natural.
P - Aí natural passou a ficar qualquer valor positivo. E se eu quisesse colocar R+?
GATO - Não, mas isso aí não ta no contradomínio?
P - Se eu colocasse no domínio R+, também seria uma função ou não?
V – Seria.
GATO - Peraí, vou tentar achar algo que não dê.
V – O Z+ também.
P - E o Z+ é igual ao N?
PEIXE - Não.
P - Qual é o domínio, o contradomínio e a imagem dessa função?
PEIXE - Não tem.
P - Porque não tem?
GATO - Porque não é função.
P - Mas uma relação tem domínio, contradomínio e imagem?
Todos - A gente vai pesquisar.
PREENCHIMENTO DAS PERGUNTAS
PARTE 4 – DEFINIÇÕES
M – Você nem falou direito sobre lei de formação.
P - É verdade, nós não discutimos, mas foi proposital.
P - O que vocês acharam depois que a gente colocou essas novas definições? Vocês se sentiram mais confortáveis?
GATO - É mais familiar.
M – Eu não.
P - O que foi que piorou?
M – É que eu fiquei pensando naquele exemplo último.
P - Não se preocupe que a gente vai voltar a ele.
GATO - Eu me senti um pouco mais segura.
V – Eu não sei o que colocar nessa lei de correspondência não.
P - A gente não discutiu né. Eu fiz de propósito ta certo?
GATO - Eu fui assim tão no automático.
P - Você consegue visualizar essa situação e ver uma lei de correspondência?
V – Consigo.
P - Pronto. Agora é só você dizer o que é.

INTERVENÇÃO 14 – Os mapas conceituais sobre o conceito de função

Não houve transcrição dessa intervenção pelo fato de se tratar do desenvolvimento dos mapas conceituais em duplas, com discussões diferentes acontecendo paralelamente.

INTERVENÇÃO 18 – Problema 1 – Função e Progressão Aritmética

PARTE 1 – CONCEITO
GATO
VI é Variável Independente
VD é Variável Dependente
A gente não trocou porque estava sem tempo
PARTE 2 – PROBLEMAS
SITUAÇÃO 1
Leitura do problema
M – Desenha, fica melhor pra visualizar
GATO - E agora?

P - O que é que está mudando aí?
GATO - Escreve na lousa
a) Desenho do problema
1 t -> 3p
2 t -> 3 + 2
3 t -> 3 + 2 + 2 = 3 + 2.2
4 t ->
M – Não entendi.
GATO - Explica: com 2 triângulos eu posso escrever 3 + 2, com 3 triângulos eu posso escrever 3 + 2 + 2 que é o esmo que 3 + 2.2
GATO - A gente podia botar assim também né?
REFAZENDO
1 t -> 3p + 0.2
2 t -> 3 + 1.2
3 t -> 3 + 2.2
4 t -> 3 + 3.2
...
n t -> 3 + (n - 1). 2
M – Sabe o que é isso daí? Isso é Progressão Aritmética.
GATO - Deixa assim?
M – Não coloca n e um triângulo pra dizer que é o número de triângulos. Bota T.
P - O que é que está mudando aí nesse problema? Quais são os personagens do problema?
GATO - Palito e triângulo
M – Bota T no lugar de nt
P - O que é 3 + (n – 1).2?
GATO - É a quantidade de triângulos, e n é a quantidade de palitos. Não.
P - n é a quantidade de palitos?
Risos
GATO - Não, isso aqui (3 + (n – 1). 2) é a quantidade de palitos.
M – Não, é a quantidade de triângulos.
GATO - n é a quantidade de triângulos e a quantidade de palitos é isso aqui 3 + (n – 1). 2 É sim. 1 triângulo (faz os cálculos de cabeça) são três palitos, 2 triângulos (faz o cálculo de cabeça) são cinco palitos.
M – Então ali é t mesmo, t – 1.
GATO - Então isso aqui é t (3 – (n – 1). 2)?
M – Não, o n é t, ali dentro do parênteses. Seria o número de triângulos menos 1, que vai dar justamente o número de palitos.
V – O número de palitos fora.
GATO - No n bota um t e no T bota um p.
M – pronto.
GATO - Mas eu não tava trabalhando com triângulo?
M – Mas você não disse que isso tudo era número de palito?
P - É isso que eu queria saber... quem está modificando é o número de palitos e o número de triângulos, é isso? O que é que está em constante mudança?
GATO - A quantidade de palitos.
P - E a quantidade de triângulos também?
GATO - também.
P - Como é que o número de palitos muda?
GATO - Inicialmente é três depois aumenta de dois em dois.
P - E como é que o número de triângulos muda?
GATO - 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
P - Qual é a relação entre o número de palitos e de triângulos?
M – Por exemplo se eu quiser saber 5 triângulos, quantos palitos eu vou ter? o t não é o triângulo? Então eu substituiria o t por 5
GATO - Então eu vou substituir no p.

M – Não, eu quero saber o número de palitos. Por exemplo, 7 triângulos tem quantos palitos? Substitui no t, 7, entendeu?
GATO - Certo, certo, certo.
M – Vai te dar o total de palitos em 7 triângulos, entendeu?
P - Qual é a relação que se pode estabelecer entre o número de palitos e o número de triângulos?
GATO - É essa a relação.
P - Quantos palitos são necessários para construir 20 triângulos?
M – Pronto, é só substituir.
GATO - Escreve
p = 3 + 2. (t - 1)
p/ t = 20
p = 3 + 20.(20 - 1)
p = 3 + 20. 19
p = 3 + 380
p = 383
P - O que é esse 383?
V – O número de palitos para 20 triângulos.
V – GATO, 20. 19?
M – 20? Não é 2. 19?
GATO - Ajeita
p = 3 + 2. (t - 1)
p/ t = 20
p = 3 + 2.(20 - 1)
p = 3 + 2. 19
p = 3 + 38
p = 41 palitos
Rep. Para construir 20 triângulos são necessários 41 palitos
P - Depois eu pergunto assim, quantos triângulos podem ser construídos utilizando 10 palitos?
GATO - Escreve
p = 3 + 2. (t - 1)
p/ p = 10
3 + 2.(t - 1) = 10
2. (t - 1) = 7
t - 1 = 7/2
t = 7/2 + 1
t = 9/2 => t = 4,5
?4 triângulos?
Não vai dar certo
Ta errado?
M – Sim, mas não fica -2 de um lado e passa pro outro? Ah, sim. Não fica 2t - 2?
GATO - Não, é porque eu fiz direto, olha. O 2 tá multiplicando, eu passei pro outro lado dividindo.
V – Vai dar um número quebrado.
M – Então nos reais... nos naturais vão dar quantos? É igual ao problema das fotos.
GATO - Essa relação representa uma função? (lendo do papel)
P - Sim, quantos triângulos a gente consegue construir com 10 palitos?
GATO - Não dá pra construir.
M – Mas aproximadamente dá quanto? Aproximadamente 4 triângulos inteiros.
V – 4 inteiros e uns quebrados.
GATO - 4 inteiros e sobra 1.
M – Mas dá 4 triângulos e sobra 1 palito.
GATO - Não, mas não tem que ser inteiro?
M – Mas é isso que eu to perguntando, quantos inteiros?
GATO - 4 triângulos podem ser construídos com 10 palitos? Eu acho que não pode considerar não.

M – Dá sim, são 4 inteiros, só que sobra 1.
GATO - Esta relação representa uma função? De p em t. Não de t em p. Sempre que eu der uma valor pra t eu vou encontrar um valor em p.
P - Mas você tem que atribuir um valor pra p ou um valor pra t?
V – Pra t pra eu achar o p.
GATO - É uma função se eu considerar de t em p.
P - Por que é uma função?
GATO - Só com o que ele deu aqui? Então não é. Porque ele não dá nem o domínio, nem o contradomínio.
P - Mas, você pode dizer quem é o domínio e quem é o contradomínio?
GATO - Pode.
M – É igual aquela história que a gente analisava antes.
GATO - É uma função de t -> p
P - Quem é t?
M – t é um conjunto?
Risos
GATO - uma função de T...
P - E T é que conjunto?
M – Dos triângulos
GATO - Dos naturais
M – Que naturais? Você tirou isso aí de onde?
GATO - Ué, o t não tem que ser natural?
M – Ele tem que ser, só que não é o conjunto dos números naturais, é o conjunto T.
GATO - Mas o número de palitos não é natural?
M – Você depois vai dizer a condição de T.
GATO - Mas a condição de T não é o domínio e o domínio não é esse bicho aqui? (1º conjunto)
M – Só que se você disser que os naturais, é o conjunto dos números naturais, não tem nada a ver com isso daí não. Esse daqui é o conjunto dos triângulos.
V – Mas t é o número de triângulos que são os números naturais.
M – Aí vai confundir mais a cabeça da pessoa.
V – É os naturais, pode botar aí.
GATO - Então eu vou colocar a relação de T...
M – Sim, muito melhor.
V – Mas agora quem é T?
M – Sim, mas t pertence aos naturais, ela botou lá embaixo.
P - Mas quem é o T?
GATO - t pertence a T.
P - Mesmo assim, quem é o T?
GATO - Ta vendo, é N.
V – Bota, bota os naturais.
M – Bota o t indo pra não sei o que.
GATO - Mas não tem que ser um conjunto, t é um elemento.
M – Então deixa vai. Deixa os naturais (parece que percebeu que estava errada).
GATO - Escreve
f: t-> p
f: Todos -> P
f: N ->
f: T
P - Você vai fazer a relação de quem, de p com t que você tinha colocado? T (minúsculo) você está dizendo que pertence aos naturais e p pertence a que conjunto? P (minúsculo) é o número de que?
GATO - Palitos
P - p pertence a que conjunto?
GATO - Pra mim...
V – naturais também.

GATO - Escreve
f: N -> N
t pertence a N
t, p pertence a N
V – E se aceitar um palito quebrado?
P - Mas ele falou no problema que ele aceita um palito quebrado?
V – Não.
GATO - Mas aqui não fica claro quem é que pertence ao domínio e ao contradomínio.
P - Quando é que fica claro?
GATO - Não, porque aqui não ta. Ele diz que t pertence aos naturais e p pertence aos naturais (não dá pra perceber a diferença).
P - Em que momento vai ficar claro?
GATO - Na lei da função? Quando eu coloco na fórmula ele diz que o p ta em função do t.
Pausa para pensar.
GATO - Essa é uma das minhas dúvidas, quando eu escrevo assim... y = raiz de x e x = y ao quadrado, é diferente?
P - x = y ao quadrado é diferente de y = raiz de x.
GATO - É mais aqui quer dizer que y está em função de x (y = raiz de x)?
P - Não sei, como é que você definiu sua função?
GATO - X -> Y
P - Quem é X?
Risos
GATO - É melhor voltar mesmo.
P - E agora? Você definiu f: N -> N com t e p pertencentes aos naturais e cadê a função?
GATO - Escreve
p = 3 + 2.(t - 1)
V – Bota o f e escreve que p é f(t).
GATO - Escreve
f(t) = p = 3 + 2.(t – 1)
V – pra ficar com cara de função.
P - E agora, você sabe quem é VD e quem é VI?
Risos
P - Como é que você vai justificar que é uma função?
GATO - Tem domínio, tem contradomínio, tem regra...
P - Só isso é suficiente para ser função?
GATO - Para cada valor de t tem um único p.
P - Pra qualquer valor que você pegar de t existe um p?
GATO - Existe.
f(t1) = f(t2)
3 + 2.(t1 - 1) = 3 + 2.(t2 - 1)
t1 - 1 = t2 - 1
t1 = t2
M – O que é que tu ta querendo provar?
GATO - Lá nas primeiras aulas do Maildo, você pega f(t1) = f(t2), se t1 = t2, ele é único, o valor é único.
M – A tese né é que t1 = t2.
P - Você provou que existe t1?
GATO - É. Que existe não. Eu provei que é único.
Pausa
GATO - p não tem nenhuma restrição, pode pertencer aos naturais.
P - Como é que p não pode ter restrições se ele não pode ser 10?
GATO - O t.
P - O t não tem, pode ser qualquer valor natural?
Pausa
P - O t pode ser zero?

M – É isso que eu ia perguntar.
V – Põe asterisco, põe.
GATO - Escreve f: N* -> N
P - Então é função agora?
GATO - É
P - Porque é função mesmo?
GATO - Porque tem um domínio, tem um contradomínio, para cada t existe um único f(t).
P - só isso é suficiente.
GATO - Tem a condição, tem o domínio, tem o contradomínio...
M – A unicidade.
GATO - É as condições
P - Quem é o domínio então?
GATO - Naturais não-nulos
P - E o contradomínio?
M – Os naturais
P - E a imagem?
V – Os naturais.
GATO - Não. È, os naturais, mas não todos.
P - O 10, por exemplo?
GATO - Não é. São os números que têm correspondentes lá no contradomínio.
P - E como é que a gente formaliza essa imagem?
GATO - Escreve
D = N*
CD = N
Im = {para todo t pertencente a N*/ f(t) = 3 + 2.(t - 1)}
P - O contradomínio é igual a imagem?
GATO - É um subconjunto.
P - Mas um conjunto pode ser um subconjunto de si mesmo, não é não?
GATO - Pode.
P - Se o contradomínio fosse igual a imagem você também teria um subconjunto.
Risos
P - Quais são as variáveis dessa função?
GATO - p e t.
P - Quem é VI?
GATO - t
P - Quem é VD?
GATO - p
P - O que você faria para que essa relação entre o número de triângulos e o número de palitos não representasse uma função?
V – É só mudar o domínio.
M – o contradomínio.
GATO - Se eu colocar o domínio igual a N, não vai haver um correspondente.
P - Por quê? Se eu colocar no lugar do t o número zero, o que vai acontecer?
GATO - Vai dar 1.
M – Vai dar 1 palito pra nenhum triângulo.
P - E um não é um número natural?
V – É né.
GATO - E agora volta a fita e a função agora é assim olha f: N -> N (não)
P - Mas quando você tem t = 0 você tem algum triângulo?
GATO - Mas eu preciso ter um triângulo?
M – Precisa.
GATO - Mas quando eu tenho f(x) = x eu não posso fazer o x igual a zero e o y também vale zero?
P - Mas em que circunstâncias você vai fazer f(x) = x?
GATO - Não tem aquela situação das fotos?

P - Quando você não tiver fotos você vai pagar zero reais. Mas nesse problema a gente ta formando triângulos, é lógico eu dizer que eu tenho zero triângulos? Nesse caso eu posso ter um palito ou dois palitos.
V – É por causa da forma trigonométrica que ela ta dizendo.
GATO - Quando eu tiro o asterisco eu não tenho mais função?
P - Deixa de ser função? Quando você tira o asterisco você põe o zero. Primeiro, o zero faz sentido para o problema? Segundo, se ele fizer sentido ele não tem o correspondente que é o 1?
V – Tem.
P - Porque ele deixaria de ser função?
GATO - Faria sentido.
P - mas para deixar de ser função a gente tem que prestar atenção no que?
M – Se a gente olhar para o item c não é uma função, porque t deu um número quebrado.
P - Mas aí que função você está observando? A função que ela construiu ou a inversa dela?
GATO - Mas aí é a inversa não dá.
P - Pra que a gente não tenha uma função o que é necessário a gente saber?
GATO - Troca, bota p sendo VI e t sendo VD.
P - Então você tem que trocar o domínio e o contradomínio, ou seja, para que a função f deixe de ser função você tem que construir uma outra função.
M – Não, como é isso?
P - Quais são as condições para ser função?
GATO - troca aqui o domínio e coloca f: Z -> N, o -1 não vai ter correspondente.
P - Mas faz sentido você ter um número negativo de triângulos?
M – Não faz sentido.
P - Então a gente tem que ter uma solução coerente né? Quais são as condições pra ser função?
GATO - Tem que ter domínio, contradomínio...
M – A condição né.
P - Quais são as condições para ser função?
GATO - Ter o domínio, o contradomínio...
P - Essa é a condição?
M – A condição é que cada x pertencente ao domínio existe um único y pertencente ao contradomínio.
P - primeiro p tem que existir, né? Existe alguma maneira que você possa fazer para que esse p não exista? Pode ser que sim, pode ser que não, se você não conseguir ver parte para outra.
V – Não pode ser negativo.
M – Nem zero, nem negativo.
P - Você tem que atribuir valores para t para encontrar um correspondente p, não é? Faz um diagrama pra ver se você consegue visualizar melhor.
M – N*, mas o primeiro é N*
Correspondências
M – Aí tu já ta formando o conjunto imagem
P - Quando a gente diz que não existe p a gente pode pegar um elemento do primeiro conjunto que não vai encontrar um correspondente lá no 2º conjunto. Como é que você faz para não encontrar um correspondente ali?
GATO - Tira um elemento.
P - Como é que você vai tirar isso na sua função?
GATO - Escreve
f: N* -> N - {9}
P - Agora não é mais função. Por quê?
GATO - Porque tem um valor que não tem correspondente.
P - Isso é suficiente para quebrar a condição?
GATO - A condição de que todos os valores têm que ter um único correspondente no contradomínio.
P - Qual seria a outra condição que a gente poderia quebrar?
GATO - Tem que ser único.
P - Como é que a gente faria essa duplicidade acontecer?

GATO **-** A gente escreve assim
f(t) {3 + 2.(t - 1), t> 1
{5, t = 1
M – Ela pegou isso de limite
GATO **-** Da próxima vez eu nunca mais vou pra frente.
Responder as perguntas do protocolo
GATO **-** Eu não sei usar o espaço, minha letra é deste tamanho. Eu uso da metade da lousa pra baixo.
Comentários
GATO **-** Menina, esse negócio de função é muito mais complicado do que eu imaginava. A gente só substitui os valorzinhos lá e monta o gráfico que nem um robozinho.
P **-** E agora a gente entende porque os alunos sentem dificuldade, né?
GATO **-** Porque na verdade eles não abstraem.
P **-** E esse exercício de vai-e-vem a gente não proporciona em sala de aula.
GATO **-** Quanto tempo a gente ta trabalhando com função?
P **-** A gente ta no 18º encontro hoje. Dividindo por 2 são 9 semanas, 2 meses e 1 semana.
GATO **-** Se bem que se passa tanto tempo falando de função quando você passa pela primeira vez. Daria pra fazer.
P **-** Não precisaria aprofundar com tantos questionamentos que a gente fez aqui, com tantos detalhes, mas dá pra fazer. Depende também do número de aulas que você tem.
GATO **-** Da colaboração dos alunos e da quantidade também.
M – A colaboração dos alunos você não vai ter nunca.
P **-** E aí GATO você gostou (de ir pra frente)?
GATO **-** Gostei mas...
V – Digamos que eu me assustei
GATO **-** Não era nem você que estava lá na frente
V – Porque você vê o mais simples, o mais simples, o mais simples da função, quando a gente vê que a gente não sabe de nada, sempre tem alguma coisa que a gente tem que aprender. Prestar atenção também. A gente só segue ninguém sabe porque.
P **-** E agora você ta sabendo por que.
V – Mais ou menos.
GATO **-** Estamos descobrindo.
V – Quando a gente pegar uma mais complicada, aí pronto.
GATO **-** Vai demorar mais do que 50 minutos.

INTERVENÇÃO 22 – A auto-avaliação e a ressignificação do conceito de função

M – Acho que eu já estou tão acostumada com a pesquisa que no próximo semestre eu vou estranhar.
GATO **-** Pois é.
PEIXE **-** Só no Doutorado.
GATO **-** No Doutorado ligue pra gente.
V – Qualquer coisa se precisar.
M – Pode ligar pra gente e seja lá onde a gente estiver a gente vem pra participar.
P **-** Já pensou a gente dar continuidade a um trabalho depois de não sei quantos anos... É muito interessante.
PARTE 1
Entrega dos mapas conceituais e das definições
PARTE 2
Entrega do Questionário 1
GATO **-** Valeime minha nossa senhora.
M – O meu ta completamente contraditório.
V – Não quero ver isso não.
P **-** Dá uma olhadinha nas respostas que vocês deram. A única coisa que eu peço é que vocês não alterem essas respostas, eu vou entregar outro material pra vocês fazerem as alterações.

PEIXE - O Maildo definiu incógnita e variável.
P - E o que ele falou?
M – Que incógnita satisfaz uma equação.
GATO - Valores que satisfazem uma equação.
PEIXE - Variável ta na função.
M – Isso. Como se tivesse um universo bem grande.
P - Por que ele comentou na sala de aula?
GATO - Porque alguém perguntou... quem foi?
V – Eu quando fui responder esse questionário misturei tudo: incógnita com variável, expressão algébrica, equação e função.
GATO - Acho que o conceito de equação é o único que está correto.
GATO - O que é uma incógnita? é uma letra que representa um valor desconhecido.
GATO - Sim, mas eu ainda estou em dúvida, na função tem incógnita ou não tem?
GATO - Da 18 pra baixo aqui ta cruel, porque como eu disse, incógnita e variável pra mim era a mesma coisa.
V – Olha aí, VD segue um lei de formação, VI não segue, que coisa.
Protocolo – o que você mudaria
P - Escolham aquelas que vocês acham que realmente precisam ser modificadas.
V – Mas eu vou ter que fazer tudo de novo.
P - Você usou as definições?
GATO - Eu dei uma olhada.
GATO - A gente tem que estudar Português pra gente saber como escrever. Eu também sinto muito essa dificuldade.
P - Eu vou mostrar agora pra vocês o outro questionário.
M – Esse dia eu não estava bem, responder uma coisa dessa. Na 27 eu botei nenhuma pois existem apenas condições. O que isso explicou? Nada.
P - Vocês ficam chateados quando olham e percebem algum erro?
GATO - Mais ou menos.
M – Não é chateado.
GATO - De vez em quando eu tenho raiva.
M – como eu pude pensar uma coisa dessas?
M – Esses buracos de por que que a gente não tem acesso no Ensino Médio a gente tapa aqui na Faculdade. Em compensação outros surgem.
GATO - Eu troquei a VD com a VI
GATO - Minha questão 33 e 38 eu não concordo.
Entrega do outro protocolo – O que você mudaria – parte 3
P - PEIXE, você consultou as definições para responder a parte 2?
PEIXE - consultei. Eu olhei mais a definição de expressão algébrica.
P - Vocês consultaram mais as definições ou mais os mapas conceituais?
GATO - Eu consultei uma vez no mapa conceitual e o resto foram as definições.
M – Eu olhei uma vez as definições e o resto no mapa. Eu tinha que ler e o mapa é mais fácil de consultar.
GATO - A história da incógnita e da variável ainda está uma dúvida na minha cabeça, então.
GATO - É estranho porque tem questão que você olha assim e diz não, eu não escrevi isso. Não poderia nunca ter escrito isso, como é que pode?
Ùltima parte
Falar o que foi bom e o que foi ruim na pesquisa
PEIXE - Eu não gosto muito de escrever. Mas é necessário, é bom, tem que saber.
V – Eu também queria aprender.
P - Aprender o que?
V – A escrever.
GATO - Saber realmente colocar no papel. Porque as vezes você tem tudo ali organizadozinho, mas passar pro papel, e até explicar. Você sabe que é mas convencer o outro que é, é complicado.
GATO - Pra mim foi um pouco traumático ter ido lá pra frente.

P - O que foi mais sofrido pra você?
GATO - Todas as dúvidas que estavam na minha cabeça ficaram comigo lá na frente. É horrível, horrível, horrível.
P - Você se sentiu insegura, né?
GATO - Ahâ.
M – Quando o PEIXE foi, foi tão assim...
GATO - Quando tu foi você não sentiu nada de diferente?
PEIXE - Me senti meio perdido. É mais fácil pensar aqui sentadinho do que pensar ali.
M – Mas tu não demonstrou que tava nervoso.
PEIXE - Me senti um pouco perdido.
M – Tu pareceu tão natural. Diferente da GATO que a gente viu que ela tava nervosa.
P - Quanto mais vezes você for ao quadro, mais você vai tendo intimidade com esse papel do professor. O que eu achei legal foi o
PEIXE ter se oferecido para vir da 2ª. vez.
GATO - Uma coisa negativa, pra mim, é que a gente ta acostumado sempre de ter a resposta certa. Quando a gente faz uma coisa que acha que ta errada quer ver a resposta certa. E aqui a gente não teve. Então tinha momentos assim que eu ficava super angustiada. Eu queria a resposta certa e tu não dava e a gente tinha que chegar a uma conclusão.
P - Vocês ficaram chateados comigo?
GATO - Chateada não, frustrada. Você ta tão acostumada em ter as respostas.
V – Eu achei positivo. Achei muito legal porque eu acho horrível essa coisa de ficar sempre falando a resposta, jogando sem a gente entender.
GATO - A questão de incentivar eu acho legal, mas eu to dizendo assim, a questão de ficar a dúvida.
M – Pra mim as discussões esclareceram muita coisa.
V – De se apegar aos conceitos. Eu nunca tinha parado pra pensar nessas coisas. Isso aqui o que é? É isso mesmo e passava adiante. Eu nunca tinha pensado, nem visto as coisas por esse lado. Agora tudo o que eu vou procurar entender eu quero saber o conceito, o que é, direitinho, quem foi que fez.
M – Na Matemática, os nossos professores não ligam tanto pra conceitos. Eles dão o conceito bem rápido e depois exercícios.
GATO - De uma forma mecânica. Passa um exemplo e aí faz, o outro é igual, o outro é igual, o outro é parecido e o outro é idêntico e aí você vai.
M – Aí o conceito, que é muito importante, ninguém liga.
V – Muda a interpretação da pessoa, você vê uma coisa totalmente errada por causa de uma coisa que você não viu direito.
PEIXE - Eu tava pensando aqui, eu acho que eu aprendi a conduzir o aluno a pensar. Pegar, botar uma questão pro aluno resolver na lousa. Deixar ele fazer, ele resolver.
P - Que contribuição teve pra vocês em relação ao conceito de função?
M – Me ajudou muito em Cálculo.
P - Ajudou? Sério?
M – Eu não sabia o que era função direito não. Eu sempre fui passando, me arrastando né.
GATO - Pra mim o conceito de função ta menos bagunçado. O negócio ainda não ta organizado. Mas eu gostei da gente ter estudado de uma forma bem aprofundada. A parte de função a gente vê cada um dos conceitos como é.
P - É muito interessante vocês poderem observar o próprio processo de aprendizagem de vocês e perceber que esse é um processo demorado. Você não aprende da noite pro dia. Isso significa que o seu aluno também vai passar por um processo assim, longo e demorado.
Agradecimentos.

APÊNDICE VII – Respostas dos protocolos

PROTOCOLOS ALUNO GATO

INTERVENÇÃO 9

PARTE 2 – PROBLEMAS

SITUAÇÃO 1

Na revelação de um filme, uma óptica calcula o preço a ser cobrado usando a fórmula $P = 12{,}00 + 0{,}65n$, onde P é o preço, em reais, a ser cobrado e n o número de fotos reveladas do filme.

REPRESENTAÇÃO	$P = 12{,}00 + 0{,}65n$
VARIÁVEIS	P , n
RELAÇÃO ENTRE VARIÁVEIS	P – dependente n – independente

PERGUNTA	RESPOSTA	EXEMPLO
Sempre que for dado um valor numérico a n sempre existirá um valor de P?	Sim	para $n = 10$ $P = 12 + 0{,}65 \times 10 \Rightarrow \boxed{P = 18{,}5}$
Sempre que for dado um valor numérico a n, o valor de P sempre será único?	Sim	se $P = 12 \rightarrow n = 0$ $P = 12{,}65 \rightarrow n = 1$. logo para cada P só há um valor

a) Você pode dizer que P está em função de n? Justifique.

Sim, pois há uma relação de dependência entre as variáveis e para cada valor de n o valor de P será único.

REPRESENTAÇÃO	$P = 12{,}00 + 0{,}65n$
VARIÁVEIS	P n
RELAÇÃO ENTRE VARIÁVEIS	n – dependente P – independente

PERGUNTA	RESPOSTA	EXEMPLO
Sempre que for dado um valor numérico a P sempre existirá um valor de n?	não	$P = 10$. $10 = 12 + 0{,}65n$ $-2 = 0{,}65n \Rightarrow n = \frac{-2}{0{,}65}$.
Sempre que for dado um valor numérico a P, o valor de n sempre será único?	se existe ele é único.	

b) Você pode dizer que n está em função de P? Justifique.

não, pois nem pra todo P existe um valor de n

SITUAÇÃO 2

Algumas tarifas praticadas pelo correio do país Alfa para o envio de carta não comercial e cartão postal se baseiam na relação expressa pela tabela abaixo:

"Peso" (gramas)	Custo básico (moeda local)
Até 20	0,30
Mais de 20 até 50	0,50
Mais de 50 até 100	0,80
Acima de 100	peso/100

REPRESENTAÇÃO	Tabela
VARIÁVEIS	Peso Custo
RELAÇÃO ENTRE VARIÁVEIS	Peso – independente Custo – dependente

PERGUNTA	RESPOSTA	EXEMPLO
Sempre que for dado um valor numérico ao **peso sempre** existirá **um** valor para o **custo**?	sim	$P = 2 \Rightarrow C = 0{,}30$ se $P = 3 \Rightarrow C = 0{,}30$ $P = 200 \Rightarrow C = 2$.
Sempre que for dado um valor numérico ao **peso**, o valor do **custo sempre será único**?	sim	se $P = 2 \Rightarrow C = 0{,}30$ $P = 3 \Rightarrow C = 0{,}30$.

a) Você pode dizer que o **custo está em função do peso**?

sim, pois sempre que atribui um valor ao peso existirá um único valor para o custo que obdece a uma "regra".

REPRESENTAÇÃO	Tabela
VARIÁVEIS	Peso Custo
RELAÇÃO ENTRE VARIÁVEIS	Custo – independente Peso – dependente

PERGUNTA	RESPOSTA	EXEMPLO
Sempre que for dado um valor numérico ao **custo sempre** existirá **um** valor para o **peso**?	sim	Sim pois sempre há uma condição para encontrar possíveis valores de peso.
Sempre que for dado um valor numérico ao **custo**, o valor do **peso sempre será único**?	não	para $C = 0{,}30$ podemos ter $P = 2$ gramas ou $P = 5$ gramas entre outros valores

b) Você pode dizer que o **peso está em função do custo**?

Não, pois não satisfaz a condição de que o peso deve ser único quando se atribui um custo.

INTERVENÇÃO 11

Nome: _ Data: 30/08/07

Hora início: 16:58 Hora término: 18:10

PARTE 1 – DEFINIÇÃO – FUNÇÃO

Elon Lages Lima

Dados os conjuntos X, Y, uma função f: X -> Y é uma regra que diz como associar a cada elemento $x \in X$ um elemento $y = f(x) \in Y$.

O conjunto X chama-se o domínio e Y o contradomínio da função f.

Para cada $x \in X$, o elemento $f(x) \in Y$ chama-se a imagem de x pela função f, ou o valor assumido pela função f no ponto $x \in X$.

A natureza da regra que ensina como obter f(x) quando é dado x é inteiramente arbitrária, sendo sujeita apenas a duas condições:

a) Não deve haver exceções: a fim de que a função f tenha o conjunto X como domínio, a regra deve fornecer f(x), seja qual for $x \in X$ dado.

b) Não pode haver ambigüidades: a cada $x \in X$, a regra deve fazer corresponder um único f(x) em Y.

Geraldo Ávila

Uma função "f: D -> Y" é uma lei que associa elementos de um conjunto D, chamado o domínio da função, a elementos de um outro conjunto Y, chamado o contradomínio da função.

Em geral, o contradomínio é um conjunto fixo, o mesmo para toda uma classe de funções sob consideração, não acontecendo necessariamente que todo elemento de Y corresponda a algum elemento do domínio pela ação da função que esteja sendo considerada. Já com o domínio a situação é diferente, pois cada função tem seu domínio próprio, e todos os elementos do domínio são objeto de ação da função.

Quando a notação y = f(x) é usada para indicar a função, deve-se entender que x denota qualquer valor no domínio D, por isso mesmo chama-se variável de domínio D, a chamada variável independente.

y é a imagem de x pela função f, a chamada variável dependente.

Para caracterizar uma função não basta prescrever a lei de correspondência f, é necessário também especificar seu domínio D.

a) Quais são os elementos que formam uma função?

variáveis, relação de dependência, regra, conjunto condição ($\forall x \in D$, $\exists! y \in CD$).

b) Quais são as condições necessárias para que uma relação entre dois conjuntos seja uma função?

$\forall x \in D$, $\exists! y \in CD$.

PARTE 2 – PROBLEMAS

SITUAÇÃO 1

Dados os conjuntos A = {0, 5, 15} e B = {0, 5, 10, 15, 20, 25} seja a relação R de A em B expressa pela fórmula y = x + 5, com x ∈ A e y ∈ B.

Lei de correspondência de R: y = x + 5

a) Todos os elementos de A apresentam um elemento correspondente em B? sim

b) Cada elemento de A apresenta uma única correspondência em B? sim.

c) Essa relação R é uma função? Explique.

Sim, pois satisfaz a todas as condições de ser função

d) Qual é o domínio, o contradomínio e a imagem dessa função?

D = A ; CD = B e Im = {5, 10, 20}.

SITUAÇÃO 2

Dados os conjuntos Y = {a, b, c, d, e}, X = {0, 1, 2, 3, 4} e uma relação D:Y -> X cuja lei de correspondência é expressa pela seguinte condição: cada vogal de Y corresponde a um número par de X e cada consoante de Y corresponde a um número ímpar de X.

Lei de correspondência de D:

x = par   se y = vogal

x = ímpar   se y = consoante

a) Todos os elementos de Y apresentam um elemento correspondente em X? sim

b) Cada elemento de Y apresenta uma única correspondência em X? não

c) Essa relação D é uma função? Explique.

não, pois não satisfaz a condição que o y deve ser único.

d) Qual é o domínio, o contradomínio e a imagem dessa função?

não é função.

SITUAÇÃO 3

A relação T: Z -> R é definida como $p = \sqrt{s}$ onde p ∈ Z e s ∈ R.

Lei de correspondência de T: $p = \sqrt{s}$

a) Todos os elementos de Z apresentam um elemento correspondente em R? não

b) Cada elemento de Z apresenta uma única correspondência em R? sim

c) Essa relação T é uma função? Explique.

não pois nem pra todo p ∈ Z existe um correspondente em R.

d) Qual é o domínio, o contradomínio e a imagem dessa função?

não é função.

PARTE 3 – DEFINIÇÕES

a) O que é uma função matemática?

É uma relação de correspondência entre dois conjuntos que obdece a uma regra e a uma condição ($\forall x \in D$; $\exists ! y \in CD$) onde D e CD são os conj que fazem parte dessa relação.

b) O que é a lei de correspondência de uma função?

É a regra que diz como deve ser associado os elementos do domínio com os do contradomínio.

c) O que é o domínio de uma função?

É o conjunto ao qual pertence a variável independente.

d) O que é o contradomínio de uma função?

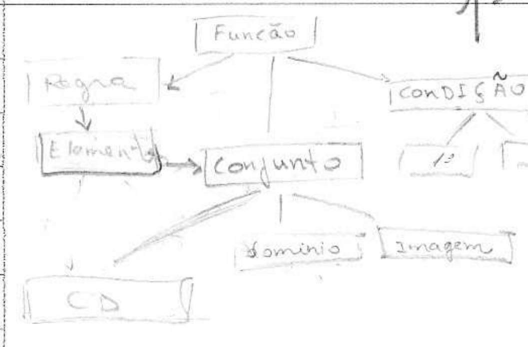
É o conjunto ao qual os elementos do domínio podem se relacionar.

e) O que é a imagem de uma função?

São os elementos do contradomio que possuem um elemento correspondente no domínio.

INTERVENÇÃO 14

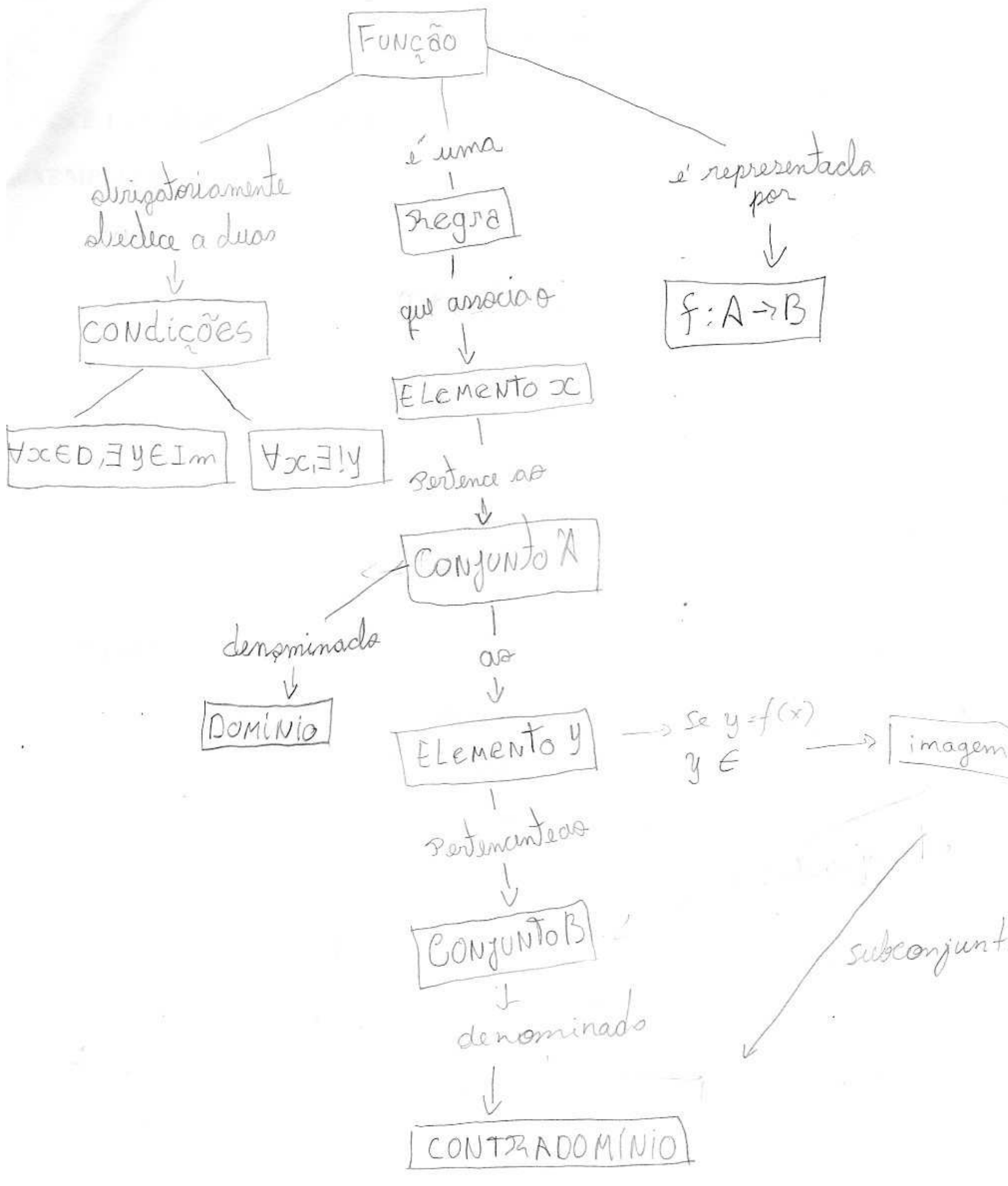
PARTE 3 – PASSOS DA CONSTRUÇÃO

Principais Conceitos	Distribuição hierárquica	Relação entre os conceitos 1º
Função conjuntos contradominio dominio imagem regra elemento condições $\forall x \in D\ \exists! y \in Im.$	Função. conjunto contradominio dominio/imagem elemento regra condição $\forall x \in D.\ \exists! y \in Im$	

Palavras de ligação	Atribuir significados
	

Construir Proposições	Estabelecer relações
• função é representada por $f: A \to B$ • função obrigatoriamente obedece a duas condições - $\forall x \in D.\ \exists y \in CD$ - $\forall x,\ \exists! y.$ • Função é uma regra que associa o elemento x pertencente ao conjunto A (denominado Dominio) ao elemento y pertencente ao conjunto B (denominado contradominio)	

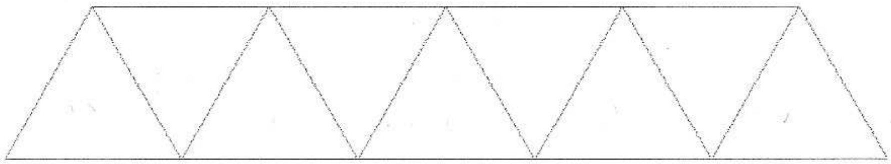
Mapa Conceitual



INTERVENÇÃO 18

PARTE 2 – PROBLEMAS

SITUAÇÃO 1



a) Para formar triângulos com palitinhos dispostos conforme a figura, qual é a relação matemática que se pode estabelecer entre o número de palitos utilizados e o número de triângulos formados?

$1t \to 3p + 0.2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow p = 3 + (t-1)2.$

b) *Quantos palitos são necessários para construir 20 triângulos? Mostre a seqüência de cálculos.*

$p = 3 + 2(t-1)$

$p/t = 20$

$p = 3 + 2(20-1)$

$\to p = 3 + 2 \cdot 19$

$p = 3 + 38$

$p = 41$

c) Quantos triângulos podem ser construídos utilizando 10 palitos? Mostre a seqüência de cálculos.

$p = 3 + 2(t-1)$

$\vdots$

$t = 4{,}5$

4 triângulos inteiros e sobra 1 palito.

d) Essa relação representa uma função? Justifique.

Só se for definido o domínio o contradomínio e satisfazer as condições.

e) Qual é o domínio, o contradomínio e a imagem dessa função?

$D = \mathbb{N}^*$, $CD = \mathbb{N}$, $Im = \{\forall t \in \mathbb{N}^* / f(t) = 3 + 2(t-1)\}$.

f) Quais são as variáveis dessa função? Classifique-as em Variável Dependente e Variável Independente.

$t \to$ variável independente

$p \to$ variável dependente

g) O que você faria para que essa relação entre o número de triângulos e o número de palitos não representasse uma função?

mudar o contradomínio ou lei de função.

Ex: $CD = \mathbb{N} - \{9\}$.

$$f(t) \begin{cases} 3 + 2(t-1), & t > 1 \\ 5, & t = 1. \end{cases}$$

INTERVENÇÃO 22

PARTE 2 – O QUE VOCÊ MUDARIA?

1. Mudaria pois a definição esta incompleta, então Função é uma relação que ~~[illegible]~~ diz como associar um elemento $x \in X$ a um elemento $y \in Y$.

2. Mudaria pois não deixa claro qual o conjunto. Domínio é o conjunto que contém a variável independente. Logo se considerarmos $f: A \to B$, o conjunto A seria o domínio, pois é nele que está os elementos que se ligam ao conj. B pela função.

15. ~~Não pois~~ Sim, pois numa equação há valores desconhecidos representados por letras, logo são incógnitas.

16. Não concordo mais com o que foi escrito. Não, pois numa função os valores embora desconhecidos apresentam uma dependência e também podem variar logo numa função há V.D. e V.I.

17. Não concordo mais com o que foi escrito. Variável é um valor não conhecido que pode assumir vários valores e aparece em expressões algebricas.

18. Não concordo mais com o que foi escrito Não, pois uma equação só admite como respostas certos valores.

19.

PARTE 3 – O QUE VOCÊ MUDARIA?

Questão 33.
Troquei VD. por V.F.
variavel dependente y e variável independente x

Questão 38.
mudaria a Imagem.
$Im = \{\forall y \in \mathbb{R} \,/\, y = -x + 10\}$

Questão 32. trocaria o item.
item a - variavel x e y.

Questão 35. trocaria o item
item f - incognita x

Questão 37. trocaria o item
por item i - variável x+y.

PROTOCOLOS ALUNO GATO

INTERVENÇÃO 9

PARTE 2 – PROBLEMAS

SITUAÇÃO 1

Na revelação de um filme, uma óptica calcula o preço a ser cobrado usando a fórmula $P = 12,00 + 0,65n$, onde P é o preço, em reais, a ser cobrado e n o número de fotos reveladas do filme.

REPRESENTAÇÃO	**P = 12,00 + 0,65n**
VARIÁVEIS	**P n**
RELAÇÃO ENTRE VARIÁVEIS	**P – dependente** **n – independente**

PERGUNTA	RESPOSTA	EXEMPLO
Sempre que for dado um valor numérico a **n sempre existirá um** valor de **P**?	Sim	Se n = 100, então P = 77
Sempre que for dado um valor numérico a **n**, o valor de **P sempre será único?**	Sim	Se n = 10, então P será unicamente igual a 18,5.

a) Você pode dizer que **P está em função de n**? Justifique.

Sim. Porque para cada valor atribuído a n existirá um único valor de P.

REPRESENTAÇÃO	**P = 12,00 + 0,65n**
VARIÁVEIS	**P n**
RELAÇÃO ENTRE VARIÁVEIS	**n – dependente** **P – independente**

PERGUNTA	RESPOSTA	EXEMPLO
Sempre que for dado um valor numérico a **P sempre** existirá **um** valor de **n**?	Não	Para P = 20 → n = 12,30 (não satisfaz)
Sempre que for dado um valor numérico a **P**, o valor de **n sempre será único?**	Sim	Para P = 13 → 13 = 12 + 0,65n 0,65n = 1 n = 1/0,65

b) Você pode dizer que **n está em função de P**? Justifique.

Não. Porque nem para todo valor atribuído a P existirá um valor de N.

SITUAÇÃO 2

Algumas tarifas praticadas pelo correio do país Alfa para o envio de carta não comercial e cartão postal se baseiam na relação expressa pela tabela abaixo:

"Peso" (gramas)	Custo básico (moeda local)
Até 20	0,30
Mais de 20 até 50	0,50
Mais de 50 até 100	0,80
Acima de 100	peso/100

REPRESENTAÇÃO	Tabela
VARIÁVEIS	Peso Custo
RELAÇÃO ENTRE VARIÁVEIS	Peso independente Custo – ~~in~~dependente

PERGUNTA	RESPOSTA	EXEMPLO
Sempre que for dado um valor numérico ao **peso sempre** existirá **um** valor para o **custo**?	Sim	Para P = 25g , C = 0,50
Sempre que for dado um valor numérico ao **peso**, o valor do **custo sempre será único**?	Sim	Para P = 27g , C = 0,50.

a) Você pode dizer que o **custo está em função do peso**?

Sim. Porque para cada valor do "peso" da correspondência existirá um único valor de custo, o que caracteriza uma relação de dependência

REPRESENTAÇÃO	Tabela
VARIÁVEIS	Peso Custo
RELAÇÃO ENTRE VARIÁVEIS	Custo independente Peso – ~~in~~dependente

PERGUNTA	RESPOSTA	EXEMPLO
Sempre que for dado um valor numérico ao **custo sempre** existirá **um** valor para o **peso**?	Sim	Para C = 0,50 , P = 25g
Sempre que for dado um valor numérico ao **custo**, o valor do **peso sempre será único**?	Não	Para C = 0,30 , P = 1g ou P = 10 ou P = 15g

b) Você pode dizer que o **peso está em função do custo**?

Não. Porque para cada valor atribuído ao meu custo será encontrado mais de um valor para o "peso" da correspondência

INTERVENÇÃO 11

Nome: ______________________ **Data:** 30/08/2007

Hora início: 16:58 **Hora término:** 18:10

PARTE 1 – DEFINIÇÃO – FUNÇÃO

Elon Lages Lima

Dados os conjuntos X, Y, uma função f: X -> Y é uma regra que diz como associar a cada elemento $x \in X$ um elemento $y = f(x) \in Y$.

O conjunto X chama-se o domínio e Y o contradomínio da função f.

Para cada $x \in X$, o elemento $f(x) \in Y$ chama-se a imagem de x pela função f, ou o valor assumido pela função f no ponto $x \in X$.

A natureza da regra que ensina como obter f(x) quando é dado x é inteiramente arbitrária, sendo sujeita apenas a duas condições:

a) Não deve haver exceções: a fim de que a função f tenha o conjunto X como domínio, a regra deve fornecer f(x), seja qual for $x \in X$ dado.

b) Não pode haver ambigüidades: a cada $x \in X$, a regra deve fazer corresponder um único f(x) em Y.

Geraldo Ávila

Uma função "f: D -> Y" é uma lei que associa elementos de um conjunto D, chamado o domínio da função, a elementos de um outro conjunto Y, chamado o contradomínio da função.

Em geral, o contradomínio é um conjunto fixo, o mesmo para toda uma classe de funções sob consideração, não acontecendo necessariamente que todo elemento de Y corresponda a algum elemento do domínio pela ação da função que esteja sendo considerada. Já com o domínio a situação é diferente, pois cada função tem seu domínio próprio, e todos os elementos do domínio são objeto de ação da função.

Quando a notação y = f(x) é usada para indicar a função, deve-se entender que x denota qualquer valor no domínio D, por isso mesmo chama-se variável de domínio D, a chamada variável independente.

y é a imagem de x pela função f, a chamada variável dependente.

Para caracterizar uma função não basta prescrever a lei de correspondência f; é necessário também especificar seu domínio D.

a) Quais são os elementos que formam uma função?

• Conjuntos (2) • Condição: $\forall x \in D, \exists! y \in CD$

• variáveis (dependente e independente) • relação de dependência entre v

• Regra

b) Quais são as condições necessárias para que uma relação entre dois conjuntos seja uma função?

1= $\forall x \in D, \exists y \in CD$

PARTE 2 – PROBLEMAS

SITUAÇÃO 1

Dados os conjuntos A = {0, 5, 15} e B = {0, 5, 10, 15, 20, 25} seja a relação R de A em B expressa pela fórmula y = x + 5, com x ∈ A e y ∈ B.

Lei de correspondência de R: y = x + 5

a) Todos os elementos de A apresentam um elemento correspondente em B? Sim

b) Cada elemento de A apresenta uma única correspondência em B? Sim

c) Essa relação R é uma função? Explique.

Sim, pois todas as "condições" foram satisfeitas.

d) Qual é o domínio, o contradomínio e a imagem dessa função?

D = {0, 5, 15}

CD = {0, 5, 10, 15, 20, 25} Im = {5, 10, 20}

SITUAÇÃO 2

Dados os conjuntos Y = {a, b, c, d, e}, X = {0, 1, 2, 3, 4} e uma relação D:Y -> X cuja lei de correspondência é expressa pela seguinte condição: cada vogal de Y corresponde a um número par de X e cada consoante de Y corresponde a um número ímpar de X.

Lei de correspondência de D:

x = par se y = vogal

x = ímpar se y = consoante

a) Todos os elementos de Y apresentam um elemento correspondente em X? Sim

b) Cada elemento de Y apresenta uma única correspondência em X? Não

c) Essa relação D é uma função? Explique.

Não, pois a seguinte condição não é satisfeita: $\forall x \in D, \exists! y \in CD$

d) Qual é o domínio, o contradomínio e a imagem dessa função?

Não existe domínio ou contradomínio, pois não existe função.

SITUAÇÃO 3

A relação T: Z -> R é definida como $p = \sqrt{s}$ onde p ∈ Z e s ∈ R.

Lei de correspondência de T: $p = \sqrt{s}$

a) Todos os elementos de Z apresentam um elemento correspondente em R? Não

b) Cada elemento de Z apresenta uma única correspondência em R? Sim

c) Essa relação T é uma função? Explique.

Não, pois uma das condições não é satisfeita.

d) Qual é o domínio, o contradomínio e a imagem dessa função?

Não existe domínio ou contradomínio, pois não existe função.

PARTE 3 – DEFINIÇÕES

a) O que é uma função matemática?

É uma regra que associa um elemento de um conjunto a outro conjunto.

b) O que é a lei de correspondência de uma função?

É a regra que leva um elemento do domínio ao contradomínio.

c) O que é o domínio de uma função?

É o conjunto que contém as variáveis independentes.

d) O que é o contradomínio de uma função?

É o conjunto que contém as variáveis dependentes.

e) O que é a imagem de uma função?

É um subconjunto do contradomínio que contém somente os elementos que estão associados através da função ao domínio.

INTERVENÇÃO 14

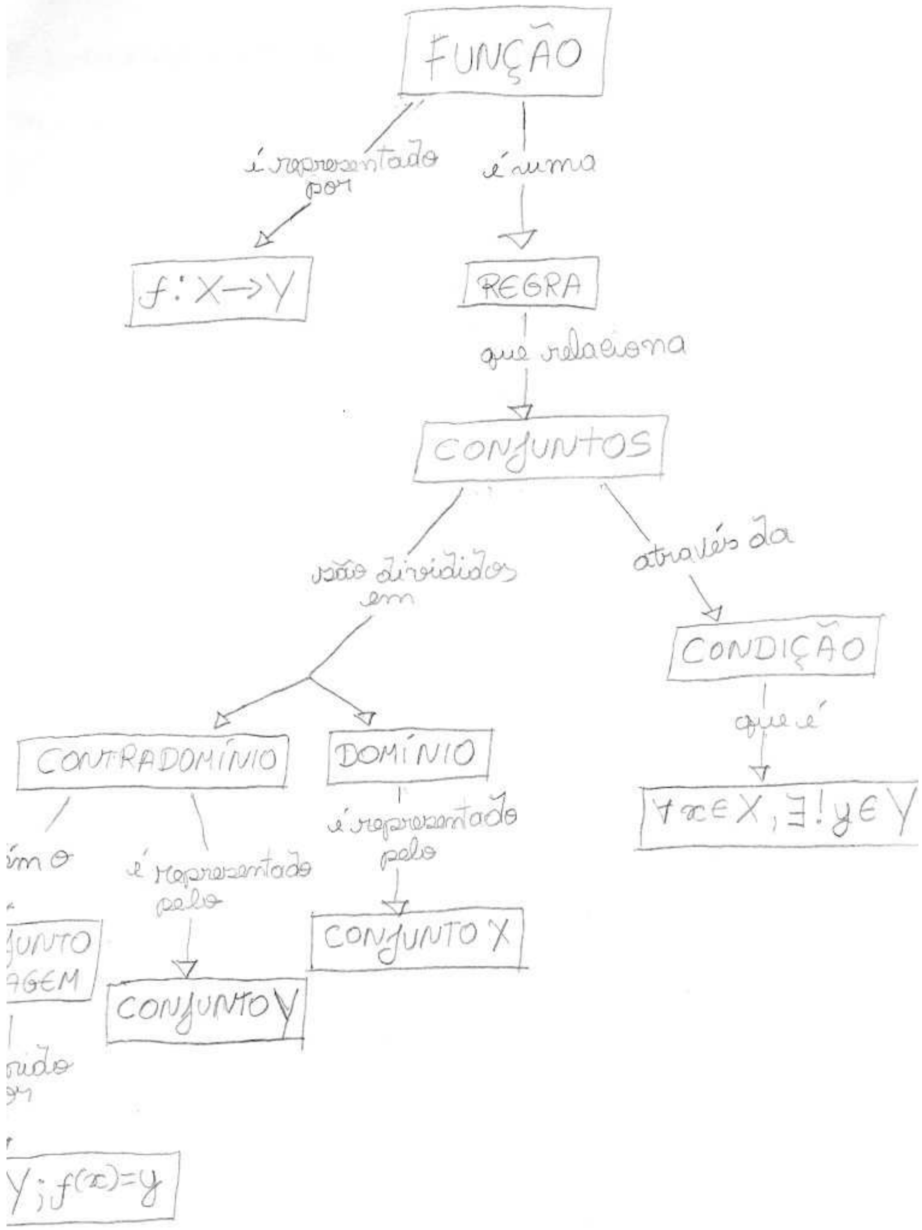
PARTE 3 – PASSOS DA CONSTRUÇÃO

Principais Conceitos	Distribuição hierárquica	Relação entre os conceitos
(I) Função		

Palavras de ligação	Atribuir significados

Construir Proposições	Estabelecer relações
I) - Função é uma regra que relaciona conjuntos, através da condição que é $\forall x \in X, \exists! y \in Y$. - Função é representada por $f: X \to Y$. - Os conjuntos são divididos em contradomínio e Domínio. - Domínio é representado pelo conjunto X. - Contradomínio é representado pelo conjunto Y - Contradomínio contém o conjunto imagem; definido por $y \in Y; f(x) = y$.	

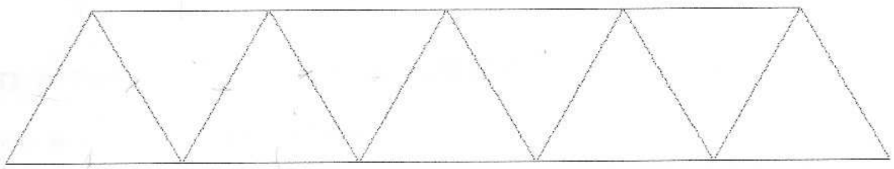
Mapa Conceitual



INTERVENÇÃO 18

PARTE 2 – PROBLEMAS

SITUAÇÃO 1



a) Para formar triângulos com palitinhos dispostos conforme a figura, qual é a relação matemática que se pode estabelecer entre o número de palitos utilizados e o número de triângulos formados?

$P = 3 + (t-1)2$ /

b) Quantos palitos são necessários para construir 20 triângulos? Mostre a seqüência de cálculos.

$P = ?$ $\quad P = 3 + (t-1).2$

$t = 20$ $\quad P = 3 + 19.2$

$P = 41$

c) Quantos triângulos podem ser construídos utilizando 10 palitos? Mostre a seqüência de cálculos.

$P = 10$ $\quad P = 3 + (t-1).2$

$t = ?$ $\quad 10 = 3 + 2t - 2$

$2t = 9 \Rightarrow t = \frac{9}{2}$

d) Essa relação representa uma função? Justifique.

Escolhendo-se os conjuntos apropriados a relação pode representar uma função, só que $\forall\, t, \exists!\, p$.

e) Qual é o domínio, o contradomínio e a imagem dessa função?

$D = \mathbb{N}^*$

$CD = \mathbb{N}$

$Im = \{P \in \mathbb{N}^* ;\ P = 3 + (t-1).2\}$

f) Quais são as variáveis dessa função? Classifique-as em Variável Dependente e Variável Independente

$P \rightarrow$ V.D

$t \rightarrow$ V.I

g) O que você faria para que essa relação entre o número de triângulos e o número de palitos nã representasse uma função?

Mudaria o domínio: $D = \mathbb{Z}$

INTERVENÇÃO 22

PARTE 2 – O QUE VOCÊ MUDARIA?

Função matemática é uma relação entre conjuntos. Essa relação se dá por meio de uma regra, e esta, deve obrigatoriamente obedecer a seguinte condição: $\forall x \in D, \exists! y \in CD$.

O domínio de uma função representa o conjunto formado pelos valores que a variável independente pode assumir.

O contradomínio de uma função representa o conjunto formado pelos valores que a variável dependente pode assumir.

É uma sequência de operações indicadas mas não efetuadas entre números e variáveis.

Variáveis dependentes são símbolos que representam valores que são obtidos apartir de outros valores.

PARTE 3 – O QUE VOCÊ MUDARIA?

27. A letra K é uma variável. K está variando no conjunto X

28. Variável independente: K

Variável dependente: a função f aplicada no valor K.

35. e) Somente por variáveis – variável: x e y

37. j) Somente por incógnitas. x e y

APÊNDICE VIII – Descrição e Análise das demais Intervenções

Intervenção 1 – Os conceitos de expressão algébrica e variável

Este encontro aconteceu em 19/07/07 durante 55 minutos e são discutidos os conceitos de expressão algébrica e variável a partir de duas fontes de dados: o dicionário Larousse (1992) e o dicionário de matemática de Soares (2005). Os objetivos são buscar o conceito formalizado de variável e de expressão algébrica nos dicionários, discutir sobre seus significados atribuindo-lhes palavras-chave, refletir sobre esses conceitos em situações matemáticas aplicadas com a finalidade de compará-los observando suas similaridades e diferenças por meio de uma linguagem algébrica e estimular a formalização dos conceitos desenvolvidos pelos próprios alunos.

- **O conceito de expressão algébrica**

Para Larousse (1992, p. 187) uma expressão algébrica é "um conjunto de termos que se reúnem por sinais de operação". Para Soares (2005, p. 85), apesar de não definir especificamente o conceito de expressão algébrica, define que expressão é "um conjunto de números ou símbolos algébricos unidos entre si pelos sinais (+) ou (-)".

O aluno GATO e o aluno PEIXE têm seus subsunçores revelados com os resultados dos Questionários Teóricos. Assim, enquanto uma expressão algébrica pode ser considerada uma expressão que relaciona números e variáveis para o primeiro aluno, ela é considerada uma expressão que representa um único número para o segundo aluno.

Ao discutirem sobre esses conceitos apresentados, os alunos juntamente entre si, destacam que numa expressão algébrica é necessário que se tenham sinais de operação, números e símbolos. E, a princípio, o aluno GATO define que expressão algébrica é "*um conjunto de números ou símbolos que fazem parte juntamente com sinais de operações de expressões matemáticas*".

Já, o aluno PEIXE, apesar de apresentar idéias semelhantes, define expressão algébrica como "*uma estrutura formada por números e símbolos que pode ou não conter incógnitas*".

- **O conceito de variável**

Para Larousse (1992, p. 444) variável é tudo aquilo "que pode apresentar diversos valores, ou aspectos de acordo com as circunstâncias", e para Soares (2005, p.

228) o conceito de variável se relaciona com uma “magnitude que no transcurso do cálculo matemático pode tomar valores distintos”. No que diz respeito ao conceito de variável, o aluno GATO, em resposta ao Questionário Teórico, afirma que apresenta o mesmo conceito de incógnita, e, portanto, seria um valor desconhecido. Para o aluno PEIXE, variável se relaciona com um número capaz de variar de acordo com o resultado que se deseja obter.

Ao discutirem os conceitos apresentados sobre variável os alunos destacam que uma variável representa valores. O aluno GATO define variável, a princípio, de uma maneira diferente da anterior como sendo “*uma maneira de representar valores em operações matemáticas*”. O aluno PEIXE, por sua vez, define variável como “*um símbolo que representa valores*”.

- **Os problemas matemáticos e as reflexões: expressão algébrica → variável**

As atividades propostas procuram estimular o aluno a refletir sobre as relações específicas entre expressão algébrica e variável (quadro 6).

Quadro 6 – Problemas da Intervenção 1

PROBLEMA	ENUNCIADO	REPRESENTAÇÃO
1	Maria tinha 10 reais. Foi a uma padaria e comprou 3 pães e 2 refrigerantes. Cada pão custou 50 centavos e cada refrigerante, 2 reais. Quantos reais sobraram?	**10 – (3.0,50 + 2.2)**
2	Maria tinha 10 reais. Foi a uma padaria e comprou 3 pães e 2 refrigerantes. Cada pão custou y reais e cada refrigerante 2 reais. Quantos reais sobraram?	**10 – (3y + 2.2)**
3	Maria tinha x reais. Foi a uma padaria e comprou 3 pães e 2 refrigerantes. Cada pão custou y reais e cada refrigerante z reais. Quantos reais sobraram?	**x – (3y + 2z)**

Fonte: Elaboração própria

Uma expressão do tipo 10 – (3.0,50 + 2.2) não representa para o aluno GATO uma expressão algébrica porque não tem variável. Para o aluno PEIXE, esse fato não é relevante, então considera, diferentemente do colega, que a expressão representa uma expressão algébrica.

Expressões do tipo 10 – (3y + 2.2) e x – (3y + 2z) representam, para ambos, expressões algébricas e identificam y e x, y, z como variáveis respectivamente da 1ª e da 2ª expressões apresentadas. Os dois alunos consideram que uma expressão algébrica é formada por números e variáveis. É importante ressaltar que para o aluno GATO, existem expressões algébricas que são representadas somente por letras. Assim, numa expressão do tipo x + y não considera que existam números. O aluno PEIXE considera que uma expressão numérica também é algébrica e a exemplifica como “*+ 5 – 2*”.

- **A Reconciliação Integradora e as reflexões sobre: variável → expressão algébrica**

As atividades propostas estimulam o aluno a refletir as relações entre os conceitos de forma inversa, com o intuito de buscar inconsistências conceituais na relação existente entre os conceitos de variável e expressão algébrica (quadro 7).

Quadro 7 – Problemas da Intervenção 1 – Reconciliação Integradora

PROBLEMA	ENUNCIADO	REPRESENTAÇÃO
4	Uma caneta custa x reais e uma lapiseira custa y reais. O custo de 2 canetas e 5 lapiseiras é dado pela expressão algébrica:	**2x + 5y**

Fonte: Elaboração própria

Os alunos reconhecem que x e y são as variáveis que compõem a expressão 2x + 5. O aluno GATO justifica sua escolha pelo fato das variáveis representarem valores. O aluno PEIXE explica que as variáveis x e y “*possuem valores distintos de acordo com as circunstâncias adotadas*”. O que prevalece nas discussões foi o fato da variável representar valores e o fato de uma expressão algébrica ser formada por essas variáveis, por números e operações matemáticas.

Vale ressaltar que a palavra incógnita surge durante as discussões e, apesar de ainda compreenderem o conceito de variável idêntico ao conceito de incógnita, acreditam que existam diferenças e demonstram a intenção de descobri-las. Surge também a discussão sobre o conceito de expressão numérica e a necessidade de diferenciá-la da expressão algébrica.

Intervenção 2 – Os conceitos de expressão algébrica, variável e expressão numérica

Este encontro aconteceu em 24/07/07 durante 55 minutos e, além dos conceitos de variável e de expressão algébrica, é também discutido o conceito de expressão numérica. Esse momento é necessário devido ao fato de os alunos, no geral, terem manifestado a curiosidade em discutir e comparar os conceitos de expressão algébrica e numérica. Além disso, foi acrescentada uma nova fonte de informações sobre os conceitos trabalhados, em Sodré (2007).

Assim, os objetivos do encontro foram buscar o conceito formalizado de expressão numérica em todos os dicionários e os conceitos de variável e expressão algébrica na nova fonte de informação. Além disso, discutir sobre seus significados atribuindo-lhes palavras-chave, refletir sobre esses conceitos em situações matemáticas aplicadas comparando-os por meio de uma linguagem algébrica, continuam a ser metas para a reformulação dos conceitos preliminares.

- **O conceito de expressão algébrica**

Após as discussões sobre expressão algébrica é apresentado novo conceito de expressões algébricas: "expressões matemáticas que apresentam letras e podem conter números" (SODRÉ, 2007), os alunos continuam com a idéia de que uma expressão algébrica deve conter operações e números. Trocam o conceito de símbolos e acrescentam o conceito de variável. Dessa forma, é possível que esteja se iniciando uma vinculação do conceito de variável ao conceito de expressão algébrica.

Como exemplo de expressão algébrica, o aluno GATO apresenta "$2x + 1$". O aluno PEIXE, por sua vez exemplifica com "$3x + 2y$". Ambos consideram que para se escrever uma expressão algébrica é necessário a utilização de uma ou mais variáveis.

- **O conceito de variável**

Sodré (2007) define variável como "letras nas expressões o que significa que o valor de cada letra pode ser substituído por um valor numérico". Diferentemente dos conceitos destacados no encontro anterior, os alunos complementam o conceito de variável afirmando ser "*letra que substitui valores*". Nota-se a influência dessa nova definição na construção do conceito de variável.

O aluno GATO, ao exemplificar uma variável, afirma ser “*a letra x da expressão 2x + 1*”. O aluno PEIXE traz como exemplo apenas a letra “*a*”, provavelmente com a finalidade de informar que uma letra qualquer pode exemplificar uma variável.

- **O conceito de expressão numérica**

Os alunos não são questionados no período anterior ao da Intervenção sobre expressão numérica devido ao fato de não se perceber a necessidade da discussão do conceito específico. Assim, caracteriza-se o conceito de expressão numérica como um tema émico, surgido no decorrer das discussões sobre os conceitos apresentados. Dessa forma, não são apresentados os subsunçores dos alunos em relação ao conceito de expressão numérica.

Nem Larousse (1992), nem Soares (2005) apresentam em sua obra o conceito de expressão numérica. Porém, Sodré (2007) explica esse conceito afirmando ser “expressões matemáticas que envolvem operações com números”. Os alunos, por sua vez, destacam do conceito apresentado as palavras “*operações*” e“ *números*”.

O aluno GATO exemplifica o conceito apresentado como sendo “*5 x 2 + 3 – (5 x 3)*”. O aluno PEIXE traz uma outra construção para expressão numérica: “*5 + 8*”.

- **A relação conceitual entre variável, expressões algébrica e numérica**

Ambos afirmam não haver a necessidade de se utilizar variável para representar uma expressão numérica. Ao serem interrogados sobre as diferenças entre expressão algébrica e expressão numérica, o aluno GATO afirma que “*a expressão algébrica contém além de números e operações, as variáveis*”. O aluno PEIXE afirma que a existência da variável é o fator preponderante de diferenciação.

A princípio leva-se a crer que os alunos estão ancorando o conceito de variável ao conceito de expressão algébrica e desvinculando-o do conceito de expressão numérica. Os números e as operações existem nas definições, mas o privilégio da variável é somente da expressão algébrica.

- **Os problemas matemáticos e as reflexões: expressão numérica $\rightarrow$ variável e expressão algébrica $\rightarrow$ variável**

As atividades propostas procuram estimular o aluno a refletir sobre as relações específicas entre expressão numérica e variável, e, expressão algébrica e variável (quadro 8).

Quadro 8 – Problemas da Intervenção 2

PROBLEMA	ENUNCIADO	REPRESENTAÇÃO
1	Joana tinha 30 reais. Foi a uma livraria e comprou 3 livros. Cada livro custou 7 reais. Quantos reais sobraram?	**30 – 3.7**
2	Joana tinha 30 reais. Foi a uma livraria e comprou 3 livros. Cada livro custou y reais. Quantos reais sobraram?	**30 – 3.y**
3	Joana tinha x reais. Foi a uma livraria e comprou 3 livros. Cada livro custou y reais. Quantos reais sobraram?	**x – 3.y**

Fonte: Elaboração própria

Para os alunos, a expressão do tipo 30 – 3.7 representa, para ambos, uma expressão numérica e não uma expressão algébrica pelo fato de não apresentar variáveis. Expressões do tipo 30 – 3.y e x – 3.y representam expressões algébricas e não expressões numéricas porque apresentam as variáveis y e x, y, respectivamente.

Eles explicam que a expressão numérica passa a ser expressão algébrica quando a ela são acrescentadas letras que podem assumir diferentes valores numéricos. Por outro lado, os alunos cogitam também a possibilidade de que para ser variável é necessário que ela modifique o valor final da expressão algébrica na qual está inserida.

- **A Reconciliação Integradora e as reflexões sobre: variável $\rightarrow$ expressão numérica e variável $\rightarrow$ expressão algébrica**

As atividades propostas procuram estimular o aluno a refletir as relações entre os conceitos de forma inversa, com o intuito de buscar inconsistências conceituais na relação existente entre variável e expressão numérica, e, variável e expressão algébrica (quadro 9).

Quadro 9 – Problemas da Intervenção 2 – Reconciliação Integradora

PROBLEMA	ENUNCIADO	REPRESENTAÇÃO
4	Um livro custa a reais e um caderno custa b reais. O custo de 3 livros e 1 caderno é dado pela expressão algébrica:	**3a + b**
5	Um livro custa 30 reais e um caderno custa 20 reais. O custo de 3 livros e 1 caderno é dado pela expressão numérica:.	**3.30 + 1.20**

Fonte: Elaboração própria

Os alunos reconhecem que a e b são as variáveis da expressão algébrica 3a + b. O aluno GATO justifica sua existência pelo fato de poderem “*assumir valores numéricos*”. O aluno PEIXE utiliza uma justificativa semelhante e afirma que a e b “*não apresentam valores fixos, podem representar diversos valores*”.

Ao ser apresentada a expressão numérica 3.30 + 1.20, os alunos, reconhecem não haver variáveis. Concluem verbalmente que uma expressão algébrica é composta por números, operações e variáveis, enquanto que uma expressão numérica é composta apenas por números e operações.

Intervenção 3 – Os conceitos de expressão algébrica, variável, expressão numérica e equação

Este encontro acontece em 31/07/07 durante 55 minutos e, além dos conceitos de variável, de expressão algébrica e de expressão numérica, é também discutido o conceito de equação. As definições conceituais são retiradas do dicionário Larousse (1992), do dicionário de matemática de Soares (2005), das informações de Sodré (2007) e do dicionário de Ferreira (2004).

Assim, os objetivos são buscar o conceito formalizado de equação, de expressão algébrica e numérica, discutir sobre seus significados atribuindo-lhes palavras-chave, refletir sobre esses conceitos em situações matemáticas aplicadas, discutir sobre suas similaridades e diferenças por meio de uma linguagem algébrica e estimular a formalização de todos os conceitos com as próprias idéias dos alunos.

- **Os conceitos iniciais**

Os alunos continuam a relacionar expressão algébrica com os conceitos de variável, operações e números, e, o conceito de expressão numérica com os conceitos de operações e números apenas. Em relação ao conceito de variável é apresentada uma nova definição baseada em Ferreira (2004, p. 808) que a define como “termo que numa função ou numa relação pode ser alternadamente substituído por outros”. As discussões subseqüentes não modificam o conceito que formularam sobre o variável. Continuam relacionando-o à uma letra que substitui valores.

Para Larousse (1992, p. 166) equação é uma “expressão algébrica de uma igualdade entre duas ou mais funções ou números”. Soares (2005, p. 76) define equação como sendo “uma igualdade entre duas expressões algébricas ou aritméticas”. Para Ferreira (2004, p. 358) equação é uma “igualdade que só é válida para certos valores das variáveis que nela figuram”.

Para os alunos as palavras-chave que trazem significado para o conceito de equação são “*igualdade, expressões e variáveis*”. No que diz respeito ao conceito de equação, o aluno GATO, de acordo com o Questionário Teórico, relaciona-o com expressão algébrica que contém uma igualdade. O aluno PEIXE não utiliza a palavra expressão algébrica, mas relaciona o conceito de equação a uma igualdade de dois números.

Ao serem solicitados a escrever sobre os conceitos de expressão algébrica e equação, o aluno GATO afirma que expressão algébrica é um “*conjunto de variáveis e números que podem se relacionar através de operações*”. O aluno PEIXE afirma que expressão algébrica é um “*conjunto de termos que se reúnem por sinais de operação*”.

No que diz respeito ao conceito de equação, o aluno GATO afirma que equações são “*expressões que se relacionam através de uma igualdade*”. Para o aluno PEIXE equação é uma “*sentença matemática em que (aparece) uma igualdade de expressões*”.

O conceito de expressão algébrica, na compreensão dos alunos, relaciona-se ao conceito de operações matemáticas e pode estar também relacionada ao conceito de variável. O conceito de equação pode estar se ancorando no conceito de igualdade de expressões.

- **Os problemas matemáticos e as reflexões: equação $\rightarrow$ variável e expressão algébrica $\rightarrow$ variável**

As atividades propostas procuram estimular o aluno a refletir sobre as relações específicas entre equação e variável, e, expressão algébrica e variável (quadro 10). A expressão do tipo 3.10 + 5 representa, para ambos, uma expressão numérica e não uma expressão algébrica ou uma equação pelo fato de apresentar somente números e operações. A expressão do tipo 3x + y representa apenas uma expressão algébrica por ser composta apenas de variáveis, operações e números, não contendo igualdade. Os alunos concluem então que uma expressão numérica é também algébrica, mas uma expressão algébrica não pode ser numérica.

Quadro 10 – Problemas da Intervenção 3

PROBLEMA	ENUNCIADO	REPRESENTAÇÃO
1	Maria tinha 10 reais. Joana tinha o triplo de Maria mais 5 reais. Observe a representação da quantia de Joana.	**3.10 + 5**
2	Maria tinha x reais. Joana tinha o triplo de Maria mais y reais. Observe a representação da quantia de Joana.	**3x + y**
3	Maria tinha x reais. Joana tinha o triplo de Maria mais y reais. As duas juntas tinham 20 reais. Observe a representação da situação.	**x + 3x + y = 20**
4	Maria tinha 10 reais. Joana tinha o triplo de Maria mais 5 reais. Observe a representação da quantia de Joana e Maria tinham juntas.	**10 + 3.10 + 5 = 45**

Fonte: Elaboração própria

Uma expressão do tipo x + 3x + y = 20 é classificada, por ambos, como uma equação por apresentar variáveis, números, operações e igualdade. No caso da expressão 10 + 3.10 + 5 = 45, os alunos não fazem qualquer classificação, apesar dessa expressão ser composta por números, operações e igualdade.

Nesse momento do encontro uma dúvida paira no ar. Uma equação é formada por variáveis ou por incógnitas? Em exemplos apresentados verbalmente nas discussões, tais como 3y = 6, 4x + y = 20 e $x^2 - x + 1 = 0$, os alunos concluem que apesar de todas essas representações caracterizarem equações, nem todas elas apresentam variáveis, como no 1º e 3º exemplos, mas todas apresentam incógnitas. É importante ressaltar que o conceito de incógnita ainda não foi formalizado diferentemente do que ocorre com os conceitos de equação e de variável.

Uma equação, de acordo com os alunos, é composta de expressões, e estas, são compostas necessariamente por variáveis. Então todas as equações devem ser compostas por variáveis, mas segundo a conclusão anterior esse fato nem sempre é verdadeiro. Decidem então dizer que uma equação é composta por letras, já que não sabem como defini-la, incógnita ou variável?

- **A Reconciliação Integradora e as reflexões sobre: variável $\rightarrow$ equação e variável $\rightarrow$ expressão algébrica**

As atividades propostas procuram estimular o aluno a refletir as relações entre os conceitos de forma inversa, com o intuito de buscar inconsistências conceituais na relação existente entre os conceitos de variável e equação, e, variável e expressão algébrica (quadro 11).

Quadro 11 – Problemas da Intervenção 3 – Reconciliação Integradora

PROBLEMA	ENUNCIADO	REPRESENTAÇÃO
4	Uma empresa que conserta televisores cobra uma taxa fixa de R$ 30,00 de visita mais R$ 15,00 por hora de mão-de-obra. O preço que se deve pagar pelo conserto de um televisor é dado em função do número de horas de trabalho (mão-de-obra), representado pela equação x = 30 + 15y, onde x representa o preço a ser pago pelo conserto do televisor e y o número de horas de trabalho. a) Destaque as expressões algébricas que formam essa equação. b) Quais são as variáveis dessas expressões? c) Explique porque elas podem ser consideradas expressões algébricas.	**x = 30 + 15y**

Fonte: adaptado de Giovanni e Bonjorno (2000)

Ao ser apresentada a equação x = 30 + 15y, os alunos reconhecem as expressões algébricas que a compõe destacando-as como “*x e 30 +15y*” e suas variáveis como sendo “*x e y*”. Os alunos justificam as escolhas por serem formadas por números, operações e variáveis. Por outro lado, não identificam a presença de expressões numéricas. O aluno GATO justifica que essas expressões são apenas algébricas e não numéricas. Já o aluno PEIXE afirma que "*expressões numéricas não possuem variáveis*".

Intervenção 4 – Os conceitos de expressão algébrica, equação, variável e incógnita

Este encontro acontece em 02/08/07 durante 66 minutos e, são abordados os conceitos de expressão algébrica, equação, variável com a inclusão de um novo conceito: incógnita. Além disso, é acrescentada uma nova fonte de informações sobre os conceitos trabalhados, o dicionário de Imenes e Lellis (1998). Os objetivos são buscar o conceito formalizado de incógnita em todos os dicionários apresentados até o momento, e, buscar novas informações a respeito dos conceitos já estudados anteriormente: expressão algébrica, variável e equação.

Discutir sobre seus significados atribuindo-lhes palavras-chave, refletir sobre esses conceitos em situações matemáticas aplicadas, discutir sobre suas similaridades e diferenças por meio de uma linguagem algébrica e estimular a formalização de todos os conceitos com as próprias idéias dos alunos, continua a ser uma meta para este encontro.

- **Os conceitos de expressão algébrica, variável e equação**

Apesar do acréscimo de uma nova definição sobre expressão algébrica que a define como "seqüência de operações indicadas mas não efetuadas, envolvendo variáveis e números" (IMENES e LELLIS, 1998, p. 124), os alunos continuam a relacionar expressão algébrica com os conceitos de variável, operações e números, sem qualquer modificação.

Em relação ao conceito de variável, definem-a como "letras que representam números quaisquer" (IMENES e LELLIS, 1998, p. 321) e acrescenta ainda que essas letras podem variar.

As discussões subseqüentes trazem novos elementos para essa definição. A inclusão da palavra qualquer se efetiva diante da nova definição. Continuam relacionando o conceito de variável à "letra que substitui valores", porém, com o acréscimo da palavra "qualquer". Também em relação ao conceito de equação é apresentada uma nova definição "sentença matemática na qual aparecem um sinal de igual e uma ou mais letras que representam números desconhecidos chamados de incógnitas" (IMENES e LELLIS, 1998, p. 108).

Essa nova definição, bem como as discussões que se sucedem posteriormente, levam os alunos a modificarem os termos que se relacionam ao conceito de equação. Para que se tenha uma equação é necessário que se utilize uma igualdade, expressões e incógnitas, não mais variáveis como determinaram.

- **O conceito de incógnita**

Para Larousse (1992, p. 239) incógnita é um "nome dado à variável ou às variáveis de equações e inequações matemáticas; o que é desconhecido e se procura saber". Soares (2005, p. 106) traz uma nova compreensão sobre este conceito afirmando que "são termos da equação que é preciso calcular e cujos valores satisfazem a essa equação". Ferreira (2004, p. 470) também contribui com uma definição um pouco diferenciada sobre o assunto e afirma que incógnita é tudo aquilo que "é desconhecido e falta saber para solucionar um problema ou para afirmar algo com certeza ou exatidão". Imenes e Lellis (1998, p. 165) contribuem com uma definição mais próxima daquilo que os alunos pensam sobre incógnita e afirma ser "o número desconhecido de uma equação".

Os alunos trazem consigo conceitos pré-formados sobre o conceito de incógnita, de acordo com os dados obtidos no Questionário Teórico. O aluno GATO afirma que incógnita é "*uma letra que representa um valor desconhecido*". O aluno PEIXE afirma que incógnita é "*um número que é representado por uma letra e que representa a solução de uma equação*".

Nesta Intervenção, o aluno GATO define incógnita como um "*valor desconhecido que satisfaz uma equação ou inequação*". Para o aluno PEIXE, diferentemente dos conceitos anteriores, onde se expressava da mesma maneira que seu colega, os termos "*valor desconhecido*" e "*variável na equação*" estão relacionados mais diretamente a este conceito.

- **A relação entre os conceitos**

Ao serem solicitadas as definições espontâneas sobre os conceitos de variável, incógnita, expressão algébrica e equação, o aluno GATO apresenta que variável é uma "*letra que substitui quaisquer valores*", incógnita é um "*valor desconhecido que satisfaz a uma equação ou inequação*", expressão algébrica é um "*conjunto de operações, números e variáveis*" e equação é formada por "*expressões algébricas relacionadas através de uma igualdade*". O aluno PEIXE, apesar de ter recebido as mesmas definições apresentadas pelos autores mencionados e de ter participado das mesmas discussões formaliza seus conceitos de uma forma diferenciada.

Define o conceito de variável como "*termo que pode apresentar certos valores de acordo com as circunstâncias*", o conceito de incógnita como "*valor desconhecido que satisfaz uma equação*", o conceito de expressão algébrica como "*expressões numéricas que apresentam variáveis*" e equação como "*igualdade de expressões algébricas com outro tipo de expressão*".

- **Os problemas matemáticos e as reflexões: equação $\rightarrow$ incógnita e expressão algébrica $\rightarrow$ incógnita**

As atividades propostas procuram estimular o aluno a refletir sobre as relações específicas entre equação e incógnita, e, expressão algébrica e incógnita (quadro 12). As representações do tipo $x + 1 = 10$ e $x^2 - 5x + 6 = 0$ representam, para ambos, uma equação com a letra x como incógnita. Para os alunos a letra x, antes considerada como variável, transforma-se em incógnita pelo fato de estar sendo utilizada numa equação.

No caso de $x + y = 10$, os alunos também reconhecem essa representação como equação cujas incógnitas são x e y. Na representação dada por $x + 1$, caracterizam-na como expressão algébrica e afirmam, que especificamente neste caso, não existem incógnitas, pois expressões algébricas são compostas por variáveis.

Quadro 12 – Problemas da Intervenção 4

PROBLEMA	ENUNCIADO	REPRESENTAÇÃO
1	Maria tinha 1 real e queria comprar um caderno que custava 10 reais. Quantos reais precisaria juntar para comprar somente um caderno?	$\mathbf{x + 1 = 10}$
2	Maria tinha y reais e queria comprar um caderno que custava 10 reais. Quantos reais precisaria juntar para comprar somente um caderno?	$\mathbf{x + y = 10}$
3	O quadrado da quantia de Maria subtraído do quíntuplo desse valor totalizava seis reais. Quantos reais Maria tinha?	$x^2 - 5x + 6 = 0$
4	Maria tinha x reais. Recebeu 1 real de seu pai. Com quantos reais ficou Maria?	$\mathbf{x + 1}$

Fonte: Elaboração própria

- **A Reconciliação Integradora e as reflexões sobre: incógnita $\rightarrow$ equação**

As atividades propostas neste procuram estimular o aluno a refletir as relações entre os conceitos de forma inversa, com o intuito de buscar inconsistências conceituais na relação existente entre os conceitos de incógnita e equação (quadro 13).

Quadro 13 – Problemas da Intervenção 4 – Reconciliação Integradora

PROBLEMA	ENUNCIADO	REPRESENTAÇÃO
4	Considerando que x e y são incógnitas, responda: a) 3x = 6 é uma equação? Justifique. b) x + y = 50 é uma equação? Justifique.	**3x = 6** **x + y = 50**

Fonte: Elaboração própria

Ao considerar que x e y são incógnitas, o aluno GATO afirma que a representação algébrica 3x = 6 é a representação de uma equação pois "*admite uma solução e relaciona expressões por meio de uma igualdade*". Para o aluno PEIXE essa representação também caracteriza uma equação e justifica, semelhantemente ao colega, que essa representação "*apresenta uma igualdade entre duas expressões*".

Diante da representação algébrica x + y = 50, o aluno GATO a considera como equação porque "*relaciona expressões por meio de uma igualdade*". O aluno PEIXE também responde afirmativamente utilizando praticamente a mesma justificativa "*apresenta uma igualdade entre duas expressões*". Parece que o conceito de incógnita se vincula ao conceito de equação e se desvincula do conceito de variável.

È possível que o conceito de variável esteja se vinculando mais fortemente ao conceito de expressão algébrica do que ao conceito de equação. Ainda assim a dúvida sobre a composição de uma equação está presente. Para explicar que existem equações que não possuem variáveis e somente incógnitas criam um artifício: como uma equação é composta por expressões algébricas, na transformação da expressão algébrica em equação, a variável também se transforma em incógnita. Porém, o problema está em explicar qual é essa transformação.

Intervenção 5 – Os conceitos de expressão algébrica, equação, variável e incógnita – novos esclarecimentos

Este encontro acontece em 07/08/07 durante 57 minutos e, são abordados novamente os conceitos de expressão algébrica, equação, variável e incógnita. As fontes de dados continuam as mesmas, sem quaisquer acréscimos ou decréscimos de informação. Assim, os objetivos desse encontro são identificar a relação entre os conceitos de equação e incógnita, equação e variável, e, expressão algébrica e variável diante dos resultados obtidos nos encontros anteriores.

A discussão é breve devido ao fato de não haver novos elementos teóricos para questionamentos. Mesmo assim, o aluno PEIXE decide desvincular o conceito de variável do conceito de incógnita, pois a quantidade de valores atribuídos à variável se distingue daquelas que podem ser atribuídas à incógnita. O aluno GATO não faz qualquer modificação.

- **Os problemas matemáticos e as reflexões sobre: equação $\rightarrow$ incógnita e variável e expressão algébrica $\rightarrow$ incógnita e variável**

As atividades propostas procuram estimular o aluno a refletir sobre as relações específicas entre equação e incógnita, equação e variável, expressão algébrica e incógnita, e, expressão algébrica e variável (quadro 14).

Quadro 14 – Problemas da Intervenção 5

PROBLEMA	ENUNCIADO	REPRESENTAÇÃO
1	Maria tinha 1 real e queria comprar um caderno que custava 10 reais. Quantos reais precisaria juntar para comprar somente um caderno?	**x + 1 = 10**
2	Maria tinha y reais e queria comprar um caderno que custava 10 reais. Quantos reais precisaria juntar para comprar somente um caderno?	**x + y = 10**
3	O quadrado da quantia de Maria subtraído do quíntuplo desse valor totalizava seis reais. Quantos reais Maria tinha?	$x^2 - 5x + 6 = 0$
4	Maria tinha x reais. Recebeu 1 real de seu pai. Com quantos reais ficou Maria?	**x + 1**

Fonte: Elaboração própria

As representações do tipo $x + 1 = 10$ e $x^2 - 5x + 6 = 0$ definidas previamente como equações apresentam para os alunos a incógnita x. Essa incógnita não pode ser classificada como variável porque assume uma quantidade de valores pequena em relação ao que uma variável poderia assumir.

No caso de $x + y = 10$, a situação, na visão dos alunos, modifica-se porque x e y são caracterizados como incógnitas e também como variáveis. O fato de existirem incógnitas se justifica porque o conceito de equação pressupõe o conceito de incógnita. No caso da variável, como x e y podem assumir valores quaisquer então podem se caracterizar de acordo com esse conceito.

Os alunos explicam que ao haver uma transformação de uma expressão algébrica em equação por causa da presença da igualdade, ocorre uma restrição conceitual. Assim, a variável, que apresenta um conceito mais amplo, também sofre uma restrição, transforma-se em incógnita, que apresenta um conceito mais restrito. Concluem que uma equação que apresenta uma única letra é composta por incógnita e uma equação que apresenta mais de uma letra também pode ter variável. Ainda assim questionam o porquê de tantas nomenclaturas utilizadas para um único conceito de equação.

Na situação $x + 1$, pelo fato de se classificar como expressão algébrica, os alunos consideram que a letra x só pode ser apresentada como uma variável, pois não existem incógnitas ou valores desconhecidos encontrados numa expressão sem igualdade.

- **A Reconciliação Integradora e as reflexões sobre: incógnita → equação, variável → equação e variável → expressão algébrica**

As atividades propostas procuram estimular o aluno a refletir as relações entre os conceitos de forma inversa, com o intuito de buscar inconsistências conceituais no processo de estruturação mental dos conceitos abordados. São relacionados, nessa ordem, os conceitos de incógnita e equação, variável e equação, e, variável e expressão algébrica (quadro 15).

Ao considerar que x e y são incógnitas, o aluno GATO afirma que as representações algébricas $3x = 6$, $x + y = 50$ e $x^2 - 5x + 6 = 0$ são equações porque existem “*expressões relacionadas através de uma igualdade*”. Para o aluno PEIXE essas representações também caracterizam equações e justifica-se afirmando que essas representações apresentam “*sinal de igualdade, operações, números e incógnitas*”.

Quadro 15 – Problemas da Intervenção 5 – Reconciliação Integradora

PROBLEMA	ENUNCIADO	REPRESENTAÇÃO
5	Considerando que x e y são incógnitas a) 3x = 6 é uma equação? Justifique. b) x + y = 50 é uma equação? Justifique. c) $x^2 - 5x + 6 = 0$ é uma equação? Justifique.	**3x = 6** **x + y = 50** $x^2 - 5x + 6 = 0$
6	Considerando que x e y são variáveis a) x + y = 50 é uma equação? Justifique. b) x + y é uma expressão algébrica? Justifique.	**x + y = 50** **x + y**

Fonte: Elaboração própria

Ao considerar que x e y são variáveis, o aluno GATO afirma que a representação algébrica x + y = 50 é uma equação pelo mesmo motivo que justificou anteriormente "*as expressões se relacionam através de uma igualdade*". O aluno PEIXE concorda com o colega e justifica sua escolha dizendo que é equação porque "*possui sinal de igualdade, operações, números e incógnitas que, nesse caso, comportam-se como variáveis*".

O aluno GATO e o aluno PEIXE consideram que x + y representa uma expressão algébrica quando x e y são variáveis. A justificativa utilizada pelo primeiro aluno é que "*as variáveis se relacionam através de operações*". Em contrapartida, a justificativa utilizada pelo segundo aluno é semelhante à do colega com alguns acréscimos "*possui variáveis, equações e números*".

- **Definições Conceituais**

Os alunos são solicitados a definirem os conceitos de variável, incógnita, expressão algébrica e equação utilizando suas próprias palavras. O aluno GATO escreve que variável é uma "*letra que substitui valores quaisquer*", incógnita é um "*valor desconhecido que pode assumir valores que satisfaz a equação*", expressão algébrica é "*formada por variáveis e números que se relacionam através de operações*" e equação "*são expressões que se relacionam através de uma igualdade*".

O aluno PEIXE contribui com definições semelhantes para os mesmos conceitos afirmando que variável é uma "*letra que substitui valores quaisquer*", incógnita é "*um valor desconhecido em uma equação*", expressão algébrica é um "*conjunto formado por números e variáveis unidos por operações*" e equação é uma "*igualdade entre uma expressão algébrica e outra expressão*".

É possível que o conceito de incógnita estabeleça relações com o conceito de equação e o conceito de variável com o conceito de substituição de valores quaisquer. O conceito de equação está se vinculando ao conceito de igualdade entre expressões. Vale lembrar que ainda existem dúvidas no fato de uma equação ser composta ou não por variáveis.

Intervenção 6 – Os conceitos de variável dependente, variável independente, equação, variável e incógnita

Este encontro acontece em 09/08/07 durante 63 minutos e, são abordados os conceitos de equação, variável e incógnita, como nos encontros anteriores acrescidos de dois novos conceitos, variável dependente e variável independente. As fontes de dados continuam as mesmas, sem quaisquer acréscimos ou decréscimos de informação.

Os objetivos são formalizar os conceitos de variável dependente e variável independente sob o aspecto teórico e aplicado da matemática, comparar os novos conceitos aos conceitos discutidos nos encontros anteriores com a finalidade de identificar suas relações, similaridades e diferenças.

- **Os conceitos de variável dependente e de variável independente**

As definições apresentadas para os conceitos de variável dependente e independente partem de duas fontes de informação, pelo fato de serem apenas as duas obras que enunciam os conceitos citados. Para Soares (2005, p. 228) variável dependente é uma “variável cujo valor depende de que tome outra variável da mesma equação”. Para Ferreira (2004, p. 808) variável dependente é uma “variável que, no mapeamento de dois conjuntos, tem papel dependente da variável do outro conjunto”. Nas discussões que se sucedem, os dois alunos atribuem as palavras “*letra, substitui valores, depende e equação*” para caracterizar uma variável dependente.

No caso da variável independente, Soares (2005, p. 228) afirma ser uma “variável que se pode atribuir qualquer valor de que dependerá o da variável dependente da mesma equação”. Ferreira (2004, p. 808) apresenta sua definição de variável independente afirmando ser uma “variável à qual se atribui papel preponderante no mapeamento de dois conjuntos; argumento”. Nas discussões, os dois alunos atribuem os termos “letras, substituem valores quaisquer e equação” para caracterizar uma variável independente.

O aluno GATO, traz como conhecimento prévio do conceito de variável dependente na apresentação do Questionário Teórico o conceito de que "*variáveis dependentes são aquelas que dependem do valor de outra variável*", e para a variável independente define como variáveis que "*não dependem de uma outra variável*". O aluno PEIXE, porém, não apresenta uma definição formalizada sobre esses conceitos.

- **Os problemas matemáticos e as reflexões sobre: expressão algébrica $\rightarrow$ variável dependente e variável independente , equação $\rightarrow$ variável dependente e variável independente**

As atividades propostas procuram estimular o aluno a refletir sobre as relações específicas entre expressão algébrica e variável dependente, expressão algébrica e variável independente, equação e variável dependente e equação e variável independente (quadro 16).

Quadro 16 – Problemas da Intervenção 6

PROBLEMA	ENUNCIADO	REPRESENTAÇÃO
1	Maria tinha x reais. Recebeu y reais de seu pai. Com quantos reais ficou Maria?	**x + y**
2	Maria tinha y reais e queria comprar um caderno que custava 10 reais. Quantos reais precisaria juntar para comprar somente um caderno?	**x + y = 10**

Fonte: Elaboração própria

Na expressão algébrica representada por x + y, o aluno GATO e o aluno PEIXE, concordam que x e y se caracterizam como variáveis, mas que não existe uma relação entre elas. A princípio o aluno PEIXE considera que as duas variáveis se comportam como variáveis independentes, mas essa idéia é desarticulada pelos outros colegas, já que para se ter uma variável independente é necessário a existência de uma variável dependente, que neste caso não existe. Eles concluem que numa expressão algébrica, pelo fato de não existir uma relação entre as variáveis, elas não podem se classificar como variável dependente ou independente, apenas como variáveis.

No caso em que é apresentada uma equação do tipo x + y = 10, as discussões seguem repletas de controvérsias e contradições. No protocolo escrito, o aluno GATO e o aluno PEIXE afirmam que x e y são incógnitas. Por outro lado, classificam x como variável independente condicionada ao fato de y ser uma variável dependente. Caso contrário, se x for caracterizada como variável dependente, y deve se comportar como variável independente. Nesse momento, os conceitos tornam-se confusos para os alunos. Uma variável dependente, por ser variável, pode assumir valores quaisquer, mas como ela depende da variável independente, ela se torna restrita a alguns valores e, então, para os alunos cria-se a idéia de que uma variável dependente apresenta o mesmo significado que incógnita.

Essa idéia, porém, é contraditória, pois, sabendo-se que os alunos consideram os conceitos de variável e incógnita distintos, como uma variável dependente é variável e incógnita ao mesmo tempo?

- **A Reconciliação Integradora e as reflexões sobre: variável dependente e variável independente $\rightarrow$ variável**

As atividades propostas procuram estimular o aluno a refletir as relações entre os conceitos de forma inversa, com o intuito de buscar inconsistências conceituais no processo de estruturação mental dos conceitos de variável dependente, variável independente e variável (quadro 17).

Quadro 17 – Problemas da Intervenção 6 – Reconciliação Integradora

PROBLEMA	ENUNCIADO	REPRESENTAÇÃO
3	Uma empresa que conserta televisores cobra uma taxa fixa de R$ 30,00 de visita mais R$ 15,00 por hora de mão-de-obra. O preço que se deve pagar pelo conserto de um televisor é dado em função do número de horas de trabalho (mão-de-obra), representado pela expressão x = 30 + 15y, onde x representa o preço a ser pago pelo conserto do televisor e y o número de horas de trabalho. Sabendo-se que y é uma variável independente e que x é uma variável dependente, explique porque x e y são variáveis.	**x = 30 + 15y**

Fonte: adaptado de Giovanni e Bonjorno (2000)

Ao considerar que x é uma variável dependente e y, uma variável independente na expressão x = 30 + 15y, o aluno GATO afirma que x e y são variáveis "*por que elas podem assumir vários valores*". Já o aluno PEIXE afirma que "*y é variável porque substitui valores quaisquer; x é variável porque substitui valores, os quais dependem dos valores de y*".

O conceito de variável parece estar se alterando. O que antes era considerado como “valores quaisquer”, agora é considerado como “vários valores”. Essa modificação, pode sofrer influência da formalização dos conceitos de variável dependente e independente.

- **Definições Conceituais**

Os alunos são solicitados a definirem os conceitos de variável, variável dependente e variável independente. O aluno GATO escreve que variável é uma “*letra que pode assumir valores quaisquer valores*” da mesma forma que enunciou no encontro anterior. Variável dependente é uma “*letra que substitui valores e depende de uma outra variável numa equação*” e que variável independente é uma “*letra que substitui quaisquer valores e mantém uma relação com uma outra variável em uma equação*”.

O aluno PEIXE contribui com definições semelhantes afirmando que variável é uma “*letra que substitui valores quaisquer*” da mesma forma que enunciou no encontro anterior. Variável dependente é “*uma letra em uma equação que assume valores que dependem de outros valores*” e que variável independente é “*uma letra em uma equação que pode assumir valores quaisquer que independem de outros valores*”.

O conceito de variável, apesar de ter mostrado indícios de modificações ainda continua vinculado à idéia de “valores quaisquer” no sentido amplo da palavra qualquer, com a liberdade de assumir muitos valores numéricos. Os conceitos de variável dependente e de variável independente podem estar se ancorando ao conceito de equação. Este, porém, ainda suscita dúvidas nos alunos e, por esta razão, um novo encontro que trata novamente sobre esses conceitos em novos contextos precisa ser elaborado.

Intervenção 7 – Os conceitos de variável dependente, variável independente, equação, variável e incógnita – novos esclarecimentos

Este encontro acontece em 16/08/07 durante 69 minutos e, são abordados os mesmos conceitos estudados na intervenção 6. As fontes de dados continuam as mesmas, sem quaisquer acréscimos ou decréscimos de informação.

Os objetivos são esclarecer as dúvidas surgidas no encontro anterior em relação à reformulação dos conceitos de variável dependente, variável independente, variável, incógnita e equação, bem como relacioná-los entre si. Os alunos recebem todas as definições formais dos dicionários acrescidos das palavras-chave dos conceitos abordados. Após a leitura de cada item, decidem não fazer modificações, preferindo passar adiante para a próxima parte.

- **Os problemas matemáticos e as reflexões sobre: equação $\rightarrow$ incógnita**

As atividades propostas procuram estimular o aluno a refletir sobre as relações específicas entre equação e incógnita utilizando-se situações matemáticas diferenciadas (quadro 18).

Quadro 18 – Problemas da Intervenção 7

PROBLEMA	ENUNCIADO	REPRESENTAÇÃO
1	Na produção de peças, uma indústria tem um custo fixo de R$ 8,00 mais um custo variável de R$ 0,50 por unidade produzida. Quantas peças deve produzir essa indústria para que tenha um custo de R$ 508,00?	**8 + 0,50.p = 508**
2	Um grilo, ao saltar do solo, retorna ao mesmo solo de acordo com a seguinte expressão: $3t - t^2 = 0$, em que t é o tempo gasto no salto. Em que instante o grilo retorna ao solo?	$3t - t^2 = 0$
3	A academia Fique em Forma cobra uma taxa de inscrição de R$ 80,00 e uma mensalidade de R$ 50,00. Qual é o custo de uma pessoa que pretenda "malhar" nessa academia durante t meses?	**C = 80 + 50.t**

Fonte: adaptado de Giovanni e Bonjorno (2000)

As representações algébricas 8 + 0,50.p = 508, $3t - t^2 = 0$ e C = 80 + 50.t são consideradas pelos os alunos como equações. Em todas elas, apresentando uma letra ou duas letras, os alunos consideram as letras como incógnitas. Concluem que toda equação é composta por incógnitas. Uma equação, portanto, deve ter igualdade, expressões e um valor desconhecido. Afirmam que uma incógnita é um valor desconhecido de uma equação.

- **Os problemas matemáticos e as reflexões sobre: equação $\rightarrow$ variável e equação $\rightarrow$ variável dependente e independente**

As atividades propostas procuram estimular o aluno a refletir sobre as relações específicas entre equação e variável, e, equação e variável dependente e independente utilizando as mesmas situações matemáticas da intervenção 6 (quadro 16). As representações algébricas são apresentadas como representações de equações.

Os alunos consideram que nem sempre essas equações são compostas por variáveis. Nas equações $8 + 0{,}50.p = 508$ e $3t - t^2 = 0$, as letras p e t não são variáveis porque não assumem valores quaisquer. São apenas incógnitas. No caso da equação $C = 80 + 50.t$, tanto C quanto t são variáveis porque assumem valores quaisquer. Concluem que uma equação nem sempre é composta por variáveis. Ainda no caso da equação $C = 80 + 50.t$, os alunos afirmam que C é uma variável dependente e t uma variável independente.

Apresentam a idéia de que uma variável independente é uma letra que substitui valores quaisquer e depende da existência de uma variável dependente numa equação composta por duas letras, ou seja, pensar em uma variável independente pressupõe pensar em uma variável dependente. Por outro lado, uma variável dependente é uma variável que não pode assumir valores quaisquer e, ao mesmo tempo, não é incógnita, mas uma letra que substitui valores que depende dos valores de uma variável independente numa equação com duas letras.

Essas constatações modificam o conceito que os alunos apresentaram anteriormente sobre variável. A partir desse momento, variável é definida como uma letra que substitui valores, não necessariamente quaisquer.

- **A Reconciliação Integradora e as reflexões sobre: variável $\rightarrow$ equação**

As atividades propostas procuram estimular o aluno a refletir as relações entre os conceitos de forma inversa, com o intuito de buscar inconsistências conceituais no processo de estruturação mental dos conceitos de variável e equação (quadro 19).

Ao considerar que x é uma variável dependente e y é uma variável independente na expressão $x = 30 + 15y$, o aluno GATO afirma que x e y são variáveis "*por que a 'qualidade' de variável independente e variável dependente são subdivisões de variáveis que figuram numa equação*". O aluno PEIXE afirma que x e y são variáveis "*porque nada os restringem, eles são letras que substituem valores que podem variar*".

Quadro 19 – Problemas da Intervenção 7 – Reconciliação Integradora

PROBLEMA	ENUNCIADO	REPRESENTAÇÃO
3	Uma empresa que conserta televisores cobra uma taxa fixa de R$ 30,00 de visita mais R$ 15,00 por hora de mão-de-obra. O preço que se deve pagar pelo conserto de um televisor é dado em função do número de horas de trabalho (mão-de-obra), representado pela expressão x = 30 + 15y, onde x representa o preço a ser pago pelo conserto do televisor e y o número de horas de trabalho. Sabendo-se que y é uma variável independente e que x é uma variável dependente, explique porque x e y são variáveis.	**x = 30 + 15y**

Fonte: adaptado de Giovanni e Bonjorno (2000)

As respostas apresentadas às mesmas perguntas da intervenção 6 apresentam respostas diferentes, o que pode denotar a modificação que ocorreu em relação ao conceito que apresentavam sobre variável.

- **Definições Conceituais**

Os alunos são solicitados a definirem os conceitos de variável, variável dependente, variável independente e incógnita. O aluno GATO escreve que variável é uma "*letra que substitui valores*", não utiliza portanto, a palavra quaisquer, como no encontro anterior. Variável dependente é uma "*letra que substitui valores dependendo da variável independente dentro de uma equação*" e que variável independente é uma "*variável que atribuímos valores para encontrar a variável dependente na equação*". Dessa vez, a vinculação entre os conceitos de variável dependente e independente entre si pode estar mais evidente. O conceito de incógnita é definido como "*valor desconhecido numa equação*".

O aluno PEIXE afirma que variável é uma "*letra que substitui valores*", retirando também o conceito de quaisquer. Variável dependente é "*uma variável que depende da variável independente dentro da equação*" e variável independente é "*uma variável que se atribui valores para determinarmos os valores de uma variável dependente*", exatamente igual ao que definiu no encontro 6. O conceito de incógnita é definido como uma "*letra que substitui valores em uma equação*".

Os alunos concluem que uma equação é composta por incógnitas. No caso das equações com duas letras ou mais, elas podem ser compostas por variáveis, e estas, podem ser classificadas como variável dependente e variável independente. Os alunos percebem que ser incógnita é diferente de ser variável dependente e decidem não mais utilizar essa idéia. O tema variável dependente e variável independente e suas possíveis relações trazem, para todo grupo, a idéia de função. E, a partir desse momento, eles mesmos pedem para compreender melhor esse conceito.

Intervenção 8 – A relação entre função, expressão algébrica e equação

Este encontro acontece em 21/08/07 durante 67 minutos e, são abordados o conceito de função, de equação e de expressão algébrica. A formalização do conceito de função não acontece com a utilização dos dicionários, mas com a compreensão de sua evolução histórica até o século XIX. A definição apresentada por Dirichlet foi a escolhida para o desenvolvimento do trabalho porque traz elementos básicos relacionados ao conceito de função diante de uma visão mais simples que remete o pensamento da função a uma relação única entre variáveis.

Essa idéia, segundo Sierpinska (1992) torna a compreensão do conceito de função mais simples e fácil de ser assimilada. Como os alunos serão futuros professores é relevante que eles compreendam essa evolução histórica, as semelhanças e diferenças entre vários autores matemáticos. Assim, os objetivos desse encontro são conhecer a definição de função de Dirichlet diante de um contexto de evolução histórica, refletir sobre o conceito retirando suas palavras principais e atribuindo-lhe significados, definir com palavras próprias o conceito de função, diferenciar o conceito de função do conceito de equação e de expressão algébrica e identificar variáveis dependentes e independentes de funções matemáticas apresentadas em problemas.

- **O conceito de função de Dirichlet**

Na 1ª parte, os alunos recebem um resumo da evolução histórica do conceito de função desde a Idade Antiga até o século XIX conforme o conteúdo apresentado no Capítulo 3 deste trabalho. Além de conhecerem a ênfase numérica dada aos primórdios do conceito, percebem a relação entre quantidades variáveis, entre segmentos de reta e curvas, a evolução do conceito algébrico até a relação de unicidade entre variáveis.

O conceito formal sobre função data de 1837 e está enunciado da seguinte forma: “Se uma variável y está relacionada com uma variável x de tal modo que, sempre que é dado um valor numérico a x existe uma regra segundo a qual um valor único de y fica determinado, então diz-se que y é função da variável x” (BRAGA, 2006, p. 50).

Durante a leitura do material, o aluno GATO percebe que o uso da palavra função é muito recente e que a definição de Dirichlet não se parece com a definição apresentada pelos professores, embora eles mencionem esse conceito de forma implícita. O aluno PEIXE, nunca tinha visto essa evolução histórica sobre função, sendo portanto, este seu primeiro contato.

Nas situações de discussão verbal, os elementos que o aluno GATO destaca para caracterizar uma função dizem respeito à variável y se relacionar com a variável x destacando-se como variável independente. O conceito de regra se vincula ao conceito de lei de formação da função, algo a ser obedecido, deve ser, portanto, uma condição, podendo ser também uma equação, mas com um sentido mais amplo. É necessário que exista um valor único para y. Fica em dúvida, porém, se esse fato se caracteriza como uma condição de ser função.

Uma variável é dependente somente se a outra variável for independente, ou seja, a relação entre variáveis se caracteriza como uma relação de dependência. Conclui que para ser função na variável x é necessário que existam números, variáveis, uma dependente e outra independente, uma relação de dependência e uma equação.

Os elementos que o aluno PEIXE destaca para caracterizar uma função se assemelham parcialmente aos elementos que o aluno GATO apresenta. Para este aluno a variável y é a variável dependente e a relação entre variáveis apresenta o mesmo significado que função. O conceito de regra se vincula ao conceito de lei da função que precisa ser obedecida, enquanto que, a equação, é representada pela relação de dependência entre as variáveis. O valor único de y depende do x, e, a função deve ser formada por variáveis, números e equação.

Em relação à apresentação dos protocolos, os alunos GATO e PEIXE se colocam na mesma posição destacando os seguintes elementos e atribuindo-lhes os respectivos significados:

- a variável y representa a variável dependente;
- a variável x representa a variável independente;
- a relação entre variáveis se caracteriza como uma relação de dependência;
- o valor numérico é representado por um número;
- a regra é representada pela equação;

- o valor único de y corresponde à condição de ser função.

Para que se tenha uma função na variável x é necessário que se tenha: no mínimo duas variáveis, uma relação de dependência, uma equação que se caracteriza como regra e uma condição (para cada valor atribuído a x, existe um único valor de y). O aluno GATO, na Entrevista e nos Questionários apresentou o conceito de função vinculado à idéia de uma relação entre dois conjuntos. Diante da nova definição, atribui ao conceito de função a idéia da relação de dependência entre duas variáveis numa equação, não mencionando sequer a existência dos conjuntos. Não necessariamente há uma ruptura nessa relação conceitual, mas apenas uma possível modificação nos subsunçores como preconiza Ausubel (1980) ao tratar do princípio da Assimilação.

O aluno PEIXE também contribui com novos elementos para o conceito em questão. Na Entrevista e nos Questionários caracterizou função a princípio como uma expressão algébrica que possibilita o cálculo de alguma coisa a partir de outra. Posteriormente, função se torna uma relação entre dois números.

Ao refletir sobre o conceito de Dirichlet, a relação entre números se torna mais ampla e se transforma numa relação entre variáveis. A aprendizagem é um fenômeno processual. Sendo assim, nesse primeiro momento, os alunos ao entrarem em contato com um novo conceito de função alteram seus conhecimentos prévios sobre o conceito em questão.

Esse fato caracteriza a primeira fase do princípio da Assimilação. Ausubel (1980) afirma que a alteração do subsunçor é uma modificação esperada quando ele entra em contato com um novo conhecimento. Como este é apenas o primeiro contato, é necessário prosseguir com o processo de investigação e verificar como os alunos utilizam seus subsunçores alterados em situações matemáticas aplicadas.

- **Os problemas matemáticos**

As atividades propostas buscam a reflexão sobre as relações específicas entre função e expressão algébrica, função e equação, função e variável, e, função e incógnita, utilizando-se situações matemáticas diferenciadas (quadro 20).

Na representação x + y, ambos afirmam se tratar de uma expressão algébrica. Dizem ainda que sempre que for dado um valor a x não vai existir uma regra segundo a qual o valor de y fica determinado. Para o aluno GATO o que está faltando nessa representação é uma relação de dependência, para o aluno PEIXE o que falta é uma igualdade e conseqüentemente uma relação de dependência.

Quadro 20 – Problemas da Intervenção 8

PROBLEMA	ENUNCIADO	REPRESENTAÇÃO
1	Maria tem x reais e Joana tem y reais. Quantos reais as duas têm juntas?	**x + y**
2	Maria tem x reais ganhou mais um real de seu pai ficando com um total de 10 reais. Quantos reais Maria tem?	**x + 1 = 10**
3	Maria tem x reais ganhou mais y reais de seu pai ficando com um total de 10 reais. Quantos reais Maria tem?	**x + y = 10**

Fonte: Elaboração própria

- **As reflexões sobre função → expressão algébrica**

Ambos afirmam que apesar de x e y serem variáveis, nesta situação, uma não depende da outra. Assim, uma expressão algébrica não representa uma função. Só o fato dela ser composta por variáveis não significa que possa ser uma função.

Para o aluno GATO é necessário que ela preencha todos os requisitos, ou seja, tenha uma relação de dependência, tenha uma regra e sua condição de unicidade seja satisfeita. Para o aluno PEIXE é necessário ter uma equação. Como a expressão algébrica não é equação então não pode ser função.

O aluno GATO, por exemplo, nos Questionários não estabelecia uma relação entre expressão algébrica. O mesmo não ocorre com o aluno PEIXE. Nos Questionários, acreditava que uma expressão algébrica poderia ser utilizada para representar uma função. Essa afirmativa se confirmou ao escolher, no Questionário Aplicado, a representação x + y para uma função v: R -> R.

Para o aluno GATO o novo conceito sobre função não influencia o que ele pensa sobre a relação entre expressão algébrica e função, o que reforça a idéia de que função esteja vinculada ao conceito de relação. Para o aluno PEIXE, o novo conceito e as discussões anteriores sobre o conceito de expressão algébrica podem colaborar para uma nova interpretação sobre a relação entre os conceitos de expressão algébrica e função.

- **As reflexões sobre função $\rightarrow$ equação**

Na representação x + 1 = 10 apresentada aos alunos, ambos afirmam se tratar de uma equação. Afirmam ainda que sempre que for dado um valor a x não vai existir uma regra segundo a qual o valor de y fica determinado.

Para o aluno GATO é necessário que existam no mínimo duas variáveis. Para o aluno PEIXE também, já que responde à pergunta com outra pergunta: "Que y?". Fica claro que o aluno tem a compreensão de que é necessária a existência de duas variáveis para que se tenha uma função.

Os alunos concluem que, apesar dessa situação ser representada por uma equação, ela não representa uma função. O aluno GATO afirma que para uma equação ser uma função é importante que ela tenha no mínimo duas variáveis, pois dessa forma pode ser estabelecida uma relação de dependência e conseqüentemente ser assegurada a condição da função. Para o aluno PEIXE a preocupação maior está pautada na existência da condição, sem esse requisito uma equação não se caracteriza como função.

Na representação x + y = 10 apresentada aos alunos, ambos afirmam se tratar de uma equação. Dizem ainda que, sempre que for dado um valor a x vai existir uma regra segundo a qual o valor de y fica determinado. O aluno GATO considera que pelo fato dessa representação ter variáveis, ter relação de dependência, ter equação, ter uma regra representada por y = 10 – x, essa equação pode ser caracterizada como função. O aluno PEIXE, por sua vez não faz nenhuma consideração pessoal, concorda com todos os aspectos apresentados pelo colega e pelo grupo.

O aluno GATO, no Questionário Teórico, afirmou que uma equação poderia representar uma função já que seus elementos estabeleciam uma correspondência entre si. Considerava que nem todas as equações representariam uma função devido à escolha realizada no Questionário Aplicado, onde optou por x + y = 10 e não por x + 1 = 10 para representar a função v: R -> R.

Apesar do aluno PEIXE ter considerado no Questionário Teórico que uma equação poderia representar uma função devido a presença da igualdade, não confirmou suas idéias no Questionário Aplicado. Descartou ambas as equações na representação da função v: R -> R. Torna-se difícil compreender, neste encontro, o que o aluno PEIXE realmente pensa sobre a relação entre equação e função. O silêncio durante as discussões pode denotar que o aluno vivencie um momento de reelaboração mental no que diz respeito aos conceitos abordados. Para o aluno GATO, essas discussões parecem vir corroborar para a efetivação de suas idéias iniciais.

- **As reflexões sobre função $\rightarrow$ variável e função $\rightarrow$ incógnita**

Ao serem interrogados sobre o fato de x e y se caracterizarem como incógnitas ou variáveis os alunos divergem de opinião. Para o aluno GATO, x e y se apresentam como incógnitas na equação e como variáveis na função. Neste caso, como se trata de uma função, elas devem ser consideradas como variáveis dependente e independente, e, portanto, como variáveis. Em sua opinião, o que determina que uma função não se componha por incógnitas é a sua condição de unicidade.

O aluno PEIXE acredita, a princípio que, x e y podem ser incógnitas e variáveis ao mesmo tempo. São incógnitas porque pertencem a uma equação e são variáveis porque pertencem a uma função. Assim, se uma equação também for uma função ela tem os dois conceitos, incógnita e variável. Sua visão, porém, se modifica com a afirmação do colega GATO ao dizer que uma equação ao ser caracterizada como uma função se altera, deixando de ter incógnita, compondo-se apenas por variáveis. Afirma depois que uma equação é formada somente por variáveis, assim como a função.

Toda função para o aluno GATO é composta por variáveis. Quando escreve $y = 10 – x$, a variável y é a dependente e a variável x é a independente. Ao escrever de forma contrária, $x = 10 – y$, a variável x é a dependente e a variável y é a independente. O aluno PEIXE não se pronuncia neste momento sobre o assunto. Acredita-se que tenha concordado com o colega.

É interessante perceber a necessidade do aluno GATO em isolar uma das variáveis para perceber a relação de dependência entre elas e, principalmente, a situação de cada variável. Ao escrever $y = 10 – x$, a variável dependente não poderia ser a variável x? Esse aspecto não é questionado com os alunos neste encontro especificamente devido ao fato desse objetivo não ter sido traçado para as atividades. Porém, em outros momentos esse é um questionamento realizado.

- **Definição do conceito de função**

Ao definirem o conceito de função com suas próprias palavras o aluno GATO escreve que função “*é uma relação de dependência existente entre variáveis que para cada valor de x relaciona um único valor de y que obedece uma regra*”. O aluno PEIXE escreve que função “*é uma relação de dependência entre variáveis e essa relação obedece uma regra*”.

Os conceitos dos alunos são muito semelhantes entre si com destaque para a relação de dependência entre variáveis que obedece a uma regra. A condição de unicidade está sendo explicitada apenas pelo aluno GATO. Para este aluno, o que antes era uma relação entre dois conjuntos, agora, depois do contato com o novo conceito, passa a ser uma relação de dependência entre variáveis. Para o aluno PEIXE, o que antes era uma relação entre dois números, agora, passa a ser também uma relação de dependência entre variáveis.

Assim como preconiza Ausubel (1980), o subsunçor se modifica ao entrar em contato com o novo conceito. Por outro lado, o novo conceito também se modifica. É possível comprovar esse fato já que os alunos não enunciam o conceito de função de forma literalmente igual ao enunciado por Dirichlet, e, também não utilizam todos os elementos apresentados pelo autor. Percebe-se, então, que se inicia o processo de assimilação do novo conhecimento ao existente em suas estruturas cognitivas.

- **As reflexões sobre função $\rightarrow$ variável dependente e independente**

As atividades propostas neste momento procuram estimular o aluno a refletir as relações entre os conceitos de função e de variável dependente e independente (quadro 21).

Quadro 21 – Problemas da Intervenção 8 – Reconciliação Integradora

PROBLEMA	ENUNCIADO	REPRESENTAÇÃO
4	A temperatura é medida no Brasil em graus Celsius. Mas em alguns países a temperatura é medida em outra unidade chamada graus Fahrenheit. Para converter medidas de uma escala para outra, pode-se utilizar a fórmula $C=\frac{5(F-32)}{9}$. Sabendo-se que C está em função de F, ou seja, para qualquer valor numérico atribuído a F, existe uma regra segundo a qual o valor de C fica determinado, qual dessas variáveis representa a variável dependente e qual representa a variável independente? Justifique.	$C=\frac{5(F-32)}{9}$
5	Se considerarmos agora que F está em função de C, ou seja, para qualquer valor numérico atribuído a C, existe uma regra segundo a qual o valor de F fica determinado, qual dessas variáveis representa a variável dependente e qual representa a variável independente? Justifique.	$C=\frac{5(F-32)}{9}$

Fonte: adaptado de Giovanni e Bonjorno (2000)

Nos protocolos, em resposta ao problema 4, ambos respondem que C se caracteriza como variável dependente pois seu valor depende do valor de F, e, F se caracteriza como variável independente pois pode assumir qualquer valor numérico.

Em resposta ao problema 5, com a inversão de papéis das variáveis, suas respostas também ficam invertidas. Consideram que C se caracteriza como variável independente pelo fato de poder assumir qualquer valor e F como variável dependente por depender do valor numérico de F. Percebe-se que a relação entre os conceitos de variável dependente, variável independente e função flui com facilidade tanto no sentido direto, quanto no sentido inverso sem a necessidade de se transformar sua representação algébrica.

Nota-se que, na compreensão dos alunos:

- uma expressão algébrica não pode representar uma função porque não existem relações entre variáveis;
- uma equação nem sempre pode representar uma função, isso só acontece se houver mais de uma variável;
- uma função é composta por variáveis e não por incógnitas; e
- as variáveis se caracterizam como variável dependente e variável independente.

Intervenção 10 – As especificidades da função constante

Este encontro acontece em 28/08/07 durante 65 minutos e, são abordados os mesmos conceitos discutidos na Intervenção 9 enfatizando novamente as condições de existência e de unicidade do conceito de função. É apresentada aos alunos a definição formalizada de Dirichlet seguida de um quadro-resumo com as informações desenvolvidas pelos próprios alunos, bem como, as respostas apresentadas nos protocolos para os problemas 1 e 2 do encontro anterior.

Os objetivos continuam os mesmos, refletir sobre a definição de função de Dirichlet e suas condições inerentes, a unicidade e a existência. A novidade para este encontro refere-se ao estudo da função constante. Uma discussão que até então não tinha surgido e se tornou, a partir desse momento relevante.

Como os alunos estão convergindo para uma definição voltada para o conceito de relação de dependência entre variáveis, verificar a compreensão que o aluno apresenta sobre esse conceito diante da reflexão sobre a função constante pode ser esclarecedor do pensamento que vem elaborando sobre função. Na 1ª parte deste encontro, os alunos optam novamente por fazer a leitura das informações sem alterar nenhum dos dados fornecidos. Preferem passar para a discussão posterior relativa à parte aplicada da matemática.

- **Os problemas matemáticos**

As atividades propostas neste momento da intervenção 10 procuram estimular o aluno a refletir sobre as relações específicas entre função e as condições de existência e unicidade, utilizando-se problemas sobre função constante (quadro 22).

Quadro 22 – Problemas da Intervenção 10

PROBLEMA	ENUNCIADO	REPRESENTAÇÃO
3	Uma empresa de telefonia celular está fazendo a seguinte promoção: ao comprar uma linha de telefone celular, no 1º mês o cliente paga uma taxa única de R$ 40,00 e pode utilizar o aparelho pelo tempo que quiser. Considerando C o valor da conta, em reais, a ser paga e t o tempo de uso do aparelho, a equação C = 40 é uma representação matemática da situação apresentada.	**C = 40**

Fonte: Adaptado de Giovanni e Bonjorno (2000)

- **As primeiras reflexões sobre o problema**

Ao serem questionados sobre o número de variáveis do problema, utilizam um tempo maior do que nos encontros anteriores para iniciarem suas respostas. O aluno GATO, após seu silêncio prolongado, afirma verbalmente que a variável C representa o custo, mas não varia porque sendo igual a 40, é uma constante e não variável. O tempo, para esse aluno, em nada influencia, nem mesmo no custo. Não consegue visualizar nenhuma variável para este problema. Para o aluno PEIXE a situação se configura de uma forma um pouco diferente. A variável C representa o custo, mas não varia. A variável t representa o tempo e por assumir diversos valores se caracteriza como variável. As variáveis do problema são então o custo e o tempo.

Não satisfeitos e nem convencidos de suas respostas, o aluno GATO continua a reconhecer C = 40 como uma função constante, mas não acredita que o custo seja uma variável, porque assumindo sempre o valor 40 representa um valor constante. Como acredita na sua compreensão de que C = 40 representa uma função constante, muda de idéia e considera que o custo pode ser uma variável, caracterizada apenas como variável independente. O aluno PEIXE discorda. Para ele, o custo não é variável porque seu valor é constante. O valor para o custo por ser único e igual a 40 traz a idéia de que mensalmente deveria se pagar 40 reais, o que não é uma afirmação verdadeira.

Diante das dificuldades dos alunos é feita a seguinte pergunta: “Sempre que for dado um valor numérico ao tempo, existirá um valor numérico para o custo? E esse valor sempre será único?”.

O aluno GATO afirma que para ser uma função, uma variável dependente tem que ser única em relação a uma variável independente. Sendo o custo uma variável independente, ele não depende de ninguém, ou seja, independente do tempo, a variável custo vai sempre assumir o valor 40. Assim, tanto o custo quanto o tempo são variáveis independentes.

A pesquisadora questiona “E como é possível neste caso atribuir valores ao tempo e encontrar valores para o custo?”, o aluno GATO responde que isso é possível porque a variável C é constante. Ao ser questionado sobre a possibilidade de uma variável independente ter o mesmo significado de uma constante, todos os integrantes do grupo riem e o aluno GATO afirma incisivamente que a variável C está em função da variável t, essa relação se caracteriza como função, uma função constante.

A pesquisadora pergunta “Então é uma função que apresenta duas variáveis independentes? Como é isso?”. O aluno GATO responde que existe uma exceção para o caso da função constante.

- **As reflexões sobre a variável tempo**

Com a certeza de que os alunos estão ainda mais confusos em relação aos conceitos abordados, a pesquisadora decide estimular uma reflexão mais profunda sobre a variável tempo. Dessa forma, questiona “E se o tempo fosse retirado do problema, o que aconteceria?”. O aluno GATO responde que é possível pagar apenas os 40 reais, é como comprar uma borracha de 50 centavos, paga-se uma única vez por ela. Assim, tirando-se a variável tempo, paga-se uma única vez 40 reais e é possível utilizar o telefone celular eternamente sem custos adicionais.

Percebe que esse modelo não está condizente com o modelo do problema. Conclui que retirar a variável tempo não é possível, ou seja, a variável tempo existe e é necessária. Conclui que o custo é uma variável, o tempo também é variável apesar de não estar presente na representação algébrica. Para este aluno, a variável custo não se caracteriza mais como uma variável independente, é uma constante. Também não se caracteriza como variável dependente.

Diante dessa proposição, a pesquisadora questiona “Qual é a diferença entre ser constante e ser uma variável dependente?”. O aluno GATO responde que não sabe, mas que deve haver alguma diferença, porque quando se fala em variável independente automaticamente se pensa em uma variável dependente. Como o custo não está dependendo do tempo, ele não varia em relação a esse tempo então ele é sempre o mesmo. Refletir sobre o tempo isoladamente não é uma estratégia que auxiliou na visualização da relação entre as duas variáveis, custo e tempo. Nenhum dos alunos consegue visualizar que o custo se caracteriza como uma variável.

- **As reflexões sobre a relação entre as variáveis custo e tempo**

Uma outra estratégia é trabalhar com a relação entre as duas variáveis extrapolando os dados do problema. A idéia principal é refletir sobre a possibilidade da variável tempo assumir valores maiores do que 1 mês, como por exemplo, 1 mês e 1 dia.

O aluno GATO, diante da situação, prontifica-se a calcular o tempo máximo permitido, em horas, para pagar os 40 reais. Conclui que são previstas 720 horas ou 43.200 minutos de utilização do celular com um valor de 40 reais, referentes a 1 mês completo. Percebe que a variável custo depende da variável tempo porque se passar de 43.200 minutos, já passou de 1 mês e seria então outra conta e possivelmente um outro valor. A variável dependente representa o custo e a variável independente representa o tempo.

É neste momento que o aluno PEIXE intervém. Ele concorda com o colega sobre as situações das variáveis custo e tempo. A variável dependente como representante do custo traz a idéia de que pode assumir outros valores. Porém, o valor atribuído ao custo é único e igual a 40. Como pode essa variável ser constante e variável ao mesmo tempo? É um paradoxo. Acrescenta que ao escrever $C(t) = 40$ se $t \leq 43.200$, C não é variável e questiona o fato de uma função constante apresentar variáveis. Conclui que uma função constante contém variáveis utilizando-se de situações numéricas, tais como, se $f(x) = 40$, $f(2) = 40$, $f(5) = 40$, então x varia; no caso $C(t) = 40$, $C(2) = 40$, $C(3) = 40$, então t varia e pode ser considerada como variável independente.

- **Justificativa do custo e do tempo como variáveis**

Acreditar nesse momento que os alunos se convenceram de que a variável dependente representa o custo, e a variável independente representa o tempo não é possível. A cada pensamento de um integrante do grupo, todas as certezas que apresentam parecem deixar de existir. A pesquisadora decide insistir na justificativa da definição do custo como variável.

O aluno GATO afirma que o custo é uma variável porque apresenta um valor constante. O mesmo questionamento foi feito em relação à variável tempo. O aluno GATO responde que o tempo é variável por se caracterizar como uma variável independente. Acrescenta ainda que C = 40 representa uma função constante, mas não sabe justificar. Conclui que o custo representa uma variável dependente constante. O aluno PEIXE não participa dessa discussão. Apenas houve as idéias do colega GATO.

- **Os resultados dos protocolos: custo em função do tempo**

Os resultados obtidos nos protocolos revelam as incertezas que toda a discussão apresentada anteriormente suscitou. Em relação ao questionamento "sempre que for dado um valor numérico ao tempo sempre existirá um valor para a conta?" ambos os alunos afirmam que sim. Em relação ao questionamento "sempre que for dado um valor numérico ao tempo, o valor da conta sempre será único?" ambos também respondem positivamente.

No que diz respeito ao questionamento "o valor da conta está em função do tempo?", o aluno GATO responde que "*o valor da conta será constante, portanto ficaria estranho dizer que C está em função do tempo*". Já o aluno PEIXE afirma "*não sei, se C é variável, porque não varia?*".

É possível que a discussão sobre a função constante tenha surgido pelo fato das variáveis não estarem explícitas na representação algébrica. É possível também que a dificuldade na compreensão do conceito de variável diante de uma função constante tenha acontecido pelo fato da relação entre essas variáveis não ter sido desenvolvida com a utilização de seus conjuntos de origem.

O fato de não serem explicitados os conjuntos numéricos referentes à variável custo e à variável tempo, pode ter influenciado a compreensão que os alunos apresentam sobre os conceitos de variável e constante numa representação algébrica. Mais uma vez, faz-se necessária a apresentação da definição do conceito de função a partir de uma visão pautada na Teoria dos Conjuntos.

- **A inversão dos significados das variáveis**

No segundo momento deste encontro, a situação das variáveis é invertida, ou seja, é solicitado aos alunos que reflitam sobre a variável custo como uma variável independente e a variável tempo como uma variável dependente diante do mesmo problema proposto.

O aluno GATO afirma que ao se pensar sobre os 40 reais do custo, o tempo varia entre zero e 43.200 segundos, isto é, sempre que se atribuir um valor para a conta existem vários valores para o tempo. Conclui que pelo fato dos valores atribuídos à variável tempo não serem únicos, a relação não pode ser caracterizada como função.

Essa inversão da situação das variáveis não contribui com novos significados ao problema. Todos os alunos afirmam que não conseguem visualizar o custo como uma variável independente, o que dificulta a visualização da relação C = 40 como função.

O aluno PEIXE acrescenta que em nenhum momento o custo pode ser uma variável independente porque outros valores são atribuídos ao custo somente após o 1º mês. Nesse período de 30 dias, o custo não varia, então, não pode ser uma variável independente.

- **Os resultados dos protocolos: tempo em função do custo**

Os resultados obtidos nos protocolos revelam o quanto essa discussão sobre a função constante e a relação entre suas variáveis diante da definição de Dirichlet é controversa. Os alunos modificam suas respostas diversas vezes e percebem essas modificações inclusive verbalizando suas percepções.

Em relação à pergunta "sempre que for dado um valor numérico à conta sempre existirá um valor para o tempo?" ambos os alunos respondem afirmativamente. Em relação à pergunta "sempre que for dado um valor numérico à conta, o valor do tempo sempre será único?", ambos respondem negativamente exemplificando que para o valor do custo de 40 reais, existe mais de um valor para o tempo.

Em relação à pergunta final "o tempo está em função da conta?" o aluno GATO afirma que não, pois independente do tempo, a conta é sempre 40 reais. O aluno PEIXE afirma que não sabe responder e pergunta "*se C é variável, por que não varia*?".

- **As reflexões finais**

Na 3ª parte, os alunos são estimulados a refletir sobre os problemas e as dúvidas que surgiram no decorrer das intervenções 9 e 10. Ao serem questionados sobre a presença de variáveis em uma função, o aluno GATO responde verbalmente que uma função tem duas variáveis e que não necessariamente elas precisam estar explícitas. O aluno PEIXE concorda que uma função deve ter variáveis, mas questiona no caso da função constante a consideração do custo como variável e a ele ser atribuído um único valor, os 40 reais. Para este aluno, função tem variável, mas não considera que o custo e o tempo do último problema possam ser variáveis.

Ao serem questionados sobre o que representa a regra e a condição de uma função, o aluno GATO responde que uma regra não é formada somente pela parte algébrica porque também pode ser uma constante. A condição vincula-se à existência e à unicidade da variável custo para cada valor atribuído à variável tempo. Percebe-se que, novamente, este aluno está relacionando o conceito de regra ao conceito de equação e o conceito de condição à unicidade e existência de uma função.

O aluno PEIXE não se pronuncia neste momento. O aluno GATO continua a afirmar que uma função tem que obedecer principalmente a uma condição, e, posteriormente acrescenta que a regra também é importante. O que diferencia regra de condição é para o aluno GATO o fato de a condição explicitar a existência e a unicidade de uma relação entre variáveis, ou seja, para cada valor atribuído ao tempo existe um único valor para o custo. A regra revela como acontece essa relação. O aluno PEIXE afirma que na relação entre uma mãe e seus dois filhos, essa relação materna, representada por uma regra não pode ser caracterizada como função.

No que diz respeito à existência de incógnitas e variáveis na função, o aluno GATO afirma que o custo, por exemplo, é uma incógnita porque compõe uma equação e a função tem incógnita somente quando for representada por uma equação. Na função existem apenas variáveis e não incógnitas porque nem sempre toda função pode ser representada por uma equação. O aluno PEIXE novamente não se pronuncia verbalmente.

- **Definição escrita de função**

Na 4ª parte, os alunos recebem os protocolos para responderem ao seguinte questionamento "como você define função?". O aluno GATO responde que função "*é uma relação que ocorre entre variáveis onde cada variável independente a uma outra variável (dependente) que deve assumir valor único*". O aluno PEIXE responde que "*função é uma relação entre dois elementos, essa relação é válida se obedecer a determinadas condições*".

O aluno GATO relata que gostaria de ter acesso a todo o material desenvolvido para compará-los. Diz que percebe suas contradições e que seria muito engraçado verificar quantas vezes elas aconteceram e como estava se desenvolvendo sua trajetória na pesquisa. É importante ressaltar a necessidade de se compreender o que os alunos pensam sobre o conceito de variável. Para que exista uma variável é imprescindível que ela tenha que assumir vários valores numéricos.

Como no caso da representação C = 40, a variável custo assume apenas um valor, ela se descaracteriza e deixa de ser variável para ser uma constante. Esse fato é tão relevante que abala o conceito dos alunos sobre função, apesar de compreenderem que se trata de uma função constante. Mesmo que as condições de unicidade e de existência sejam atendidas, se na relação os alunos não visualizarem a variável, essa relação não se caracteriza como função.

Se o conceito de variável é um conceito que se ancora ao conceito de função, ele precisa ser contemplado não só nessa discussão, mas em situações anteriores para que os alunos possam compreender inclusive como foi o processo histórico de construção pela sociedade matemática. Percebe-se que, na compreensão dos alunos:

- para que uma relação seja uma função é necessário que ela se componha por variáveis;
- para que uma relação seja uma função é necessário também que as condições de existência e de unicidade sejam obedecidas e que a regra esteja estabelecida;

Intervenção 12 – Os conceitos modernos de função – função do 1º grau e função constante

Este encontro acontece em 04/09/07 durante 75 minutos e, são abordados os mesmos conceitos de Elon Lages Lima (1998) e Geraldo Ávila (1993) explorados na Intervenção 11. É apresentada aos alunos uma tabela com resumo de todos os conceitos discutidos até a data do encontro, entre eles, os conceitos de variável, incógnita, equação, expressão algébrica, variável independente, variável dependente e função. Esse resumo é composto por termos construídos pelos alunos durante os encontros e pode ser modificado a qualquer momento da Intervenção.

Os objetivos deste encontro são refletir e discutir sobre as relações entre os conceitos de equação, expressão algébrica, variáveis, incógnitas e função e seus elementos formadores por meio de uma reflexão sobre os conceitos modernos diante de discussões teóricas e aplicadas da matemática.

- **Alterações conceituais**

Na 1ª parte deste encontro, os alunos recebem a tabela com o resumo de todos os conceitos abordados. Ao serem questionados sobre possíveis alterações conceituais, o aluno GATO afirma que nos conceitos de variável dependente e de variável independente se incluam no conceito de função. O aluno PEIXE não concorda, pois, o correto é considerar o conceito de função nos conceitos de variável dependente e independente. Mesmo que seu colega discorde de suas idéias, o aluno GATO acrescenta a palavra função aos conceitos acima citados.

As atividades propostas procuram estimular o aluno a refletir sobre as relações específicas entre função e os demais conceitos abordados na pesquisa, utilizando-se problemas matemáticos contextualizados (quadro 23).

Quadro 23 – Problemas da Intervenção 12

PROBLEMA	ENUNCIADO
1	Uma empresa de telefonia celular está fazendo a seguinte promoção: ao comprar uma linha de telefone celular, no 1º mês o cliente paga uma taxa única de R$ 40,00 e pode utilizar o aparelho pelo tempo que quiser. Considerando o conjunto T = $\{t \in \Re / 0 \leq t \leq 43.200\}$, o conjunto C = {40} e a relação R: T -> C cuja representação é dada por c = 40, onde c representa o valor da conta em reais e pertence ao conjunto C e t representa o tempo de uso do aparelho, em minutos, e pertence ao conjunto T, responda o que se pede.
2	Na revelação de um filme, uma óptica calcula o preço a ser cobrado usando a fórmula p = 12,00 + 0,65n, onde p é o preço, em reais, a ser cobrado e n o número de fotos reveladas do filme. Considerando a relação K: N* -> R, onde n pertence a N* e p pertence a R, responda o que se pede.
3	Algumas tarifas praticadas pelo correio do país Alfa para o envio de carta não comercial e cartão postal se baseiam na relação expressa pela tabela abaixo: **"Peso" (gramas)** / **Custo básico (moeda local)** Até 20 / 0,30 Mais de 20 até 50 / 0,50 Mais de 50 até 100 / 0,80 Acima de 100 / peso/100

	Considerando a relação J: $\Re_+^* \rightarrow \Re$, onde o peso pertence a $\Re_+^*$ e o custo básico pertence a $\Re$, responda o que se pede.

Fonte: adaptado de Giovanni e Bonjorno (2000)

- **Problema 1 – função constante**

O 1º problema traz novamente a discussão sobre função constante. Algumas modificações são feitas no enunciado do problema para que contemple a idéia da Teoria dos Conjuntos por meio da definição do domínio e do contradomínio da relação.

É importante ressaltar que a pesquisadora não apresenta a representação da função como c(t) = 40 justamente para verificar se os alunos fazem essa leitura espontaneamente e reconhecem o tempo como uma variável do problema.

- **A lei de formação da relação**

O aluno GATO caracteriza a equação c = 40 como a lei de formação da relação. Acrescenta que escrever c(t) = 40 tem o mesmo significado e informa a maneira de relacionar o tempo em função do custo. O aluno PEIXE afirma que c(t) = 40 é a lei de formação da relação e reconhece, desta vez, a letra t como variável do problema.

- **As variáveis da relação**

Em relação ao reconhecimento dessas variáveis, o aluno GATO considera um problema reconhecê-las. Ainda assim afirma que o tempo é variável enquanto que o custo não pode variar por ser constante.

A pesquisadora pergunta o que aconteceria se o conjunto C tivesse mais elementos. O aluno GATO responde que a letra c os representaria, mas como o conjunto C é unitário então c só pode ter um valor. Vislumbra a possibilidade do custo ser variável mas insiste no fato de considerar ´estranha´ essa situação. Ao pensar em variável, o aluno GATO atribui imediatamente o significado da letra que representa essa variável poder assumir vários valores. Como este fato não está acontecendo, dificulta a compreensão do custo como variável.

A pesquisadora, utilizando a idéia dos próprios alunos sobre a discussão de variável questiona “vocês disseram que ser variável é poder substituir valores. O custo faz isso?”. O aluno GATO diz que sim e considera que se o conjunto C se expandisse e pudesse ter infinitos valores ficaria nítido que o custo seria uma variável. Compreende que, mesmo utilizando um conjunto unitário, não significa que o custo deixa de ser variável. Conclui que o custo é variável porque ele tem a possibilidade de substituir vários valores se o conjunto permitir. O conjunto C não permite porque ele tem uma só opção. Isso significa que o fator limitante não é o custo, mas o número de elementos do conjunto que esta variável representa. Assim, compreende que as variáveis do problema são o custo e o tempo.

O aluno PEIXE concorda que o custo representaria mais de um elemento se o conjunto C tivesse mais de um elemento. Porém, essa reflexão não modifica sua idéia sobre a situação do custo. Para ele, o custo é constante, justamente porque não está assumindo diferentes valores, independente da situação do conjunto C. Acrescenta que mesmo que o conjunto C tenha mais elementos como 40, 50, 60, o valor de c é apenas um porque a lei de formação diz que o valor do custo é 40.

Diante dessa situação a pesquisadora pergunta “a letra c deixaria de substituir os valores do conjunto C só porque ele só pode assumir um único valor?”. O aluno PEIXE responde que não, a variável custo substituiria esses valores. Conclui então que as variáveis do problema são o custo e o tempo.

- **As variáveis dependente e independente**

O aluno GATO considera que o tempo se caracteriza como variável independente. Para se justificar afirma que o custo não pode ser uma variável independente porque está em função do tempo. Não satisfeito com sua própria resposta diz que na representação c(t) = 40, o custo depende do tempo. Rapidamente retira o que disse e afirma que o custo está em função do tempo.

Insatisfeito com sua justificativa fala que o tempo é variável independente porque representa o domínio da função, ou seja, se o domínio é o conjunto que contém os elementos que são lançados na relação, o outro conjunto é o contradomínio. Conclui com este raciocínio que o custo se caracteriza como variável dependente, pois pertence ao contradomínio.

O aluno PEIXE concorda que a variável independente é o tempo. Para justificar que o custo é variável dependente afirma que a relação acontece do conjunto C para o conjunto T e questiona se o conjunto C não representa a função f. Conclui que R representa a função f e que c representa o f(x). O tempo se caracteriza como variável independente e o custo como variável dependente, da mesma forma que o aluno GATO, porém, seguindo um caminho diferente.

- **A relação como função**

Ao serem questionados sobre o fato da relação R representar ou não uma função, os alunos afirmam que sim. O aluno GATO justifica sua escolha dizendo que essa relação representa uma função porque para cada elemento do domínio existe um elemento do contradomínio, e, esse elemento é único. O aluno PEIXE justifica que para cada elemento do domínio existe um único elemento no contradomínio. Percebe-se que os alunos utilizam as condições de uma função para avaliar se a relação R representa uma função.

É importante ressaltar também que na Intervenção 10, momento no qual esse problema foi explorado sem a definição dos conjuntos domínio e contradomínio, os alunos têm momentos de intensa discussão sobre o fato da existência ou não de variáveis que pudessem formar uma função. Com esse fato esclarecido, parece muito simples para os alunos pensar sobre a relação entre essas variáveis.

- **O domínio, o contradomínio e a imagem da função**

O mesmo se pode afirmar em relação à caracterização do domínio, do contradomínio e da imagem da função R. O aluno GATO afirma que o domínio é o conjunto T, o contradomínio, o conjunto C e a imagem, também o conjunto C. O aluno PEIXE não se pronuncia verbalmente, mas faz menção corporal de ter concordado com o colega. O aluno GATO justifica que o conjunto T é o domínio porque a relação não está acontecendo de C para T, mas sim de C para T. A imagem é o conjunto C porque seu único valor apresenta um correspondente no domínio.

- **A possibilidade da relação R não ser função**

Ao serem questionados sobre o que fariam para transformar a relação R em uma relação que não pudesse ser uma função, o aluno GATO afirma que é necessário trocar a posição dos conjuntos. Se a relação fosse de C em T, o valor do custo teria mais de um correspondente em T. Além disso, pode-se também desenvolver uma tentativa na qual o tempo tenha duas imagens. Para o aluno PEIXE o fato de trocar o domínio pelo contradomínio é suficiente para a relação não representar uma função, pois uma das condições não é satisfeita.

O conceito de variável parece um conceito básico para a compreensão do conceito de função. Sendo este um conceito mais específico, pode ser melhor explorado com os alunos em formação com investigação mais profunda de seu surgimento e de suas transformações ao longo da história da matemática. Muitas dúvidas surgem não só em relação a este conceito, mas também em relação ao conceito de incógnita e suas possíveis diferenças.

Apesar de não ser o escopo deste trabalho contemplar o estudo do conceito de variável, assim como está sendo realizado com o conceito de função, é apresentado para os alunos em encontros subseqüentes uma tradução sobre a história dos conceitos de variável e incógnita.

- **Problema 2 – função do 1º grau com domínio discreto**

O 2º problema (quadro 23) é adaptado do primeiro problema apresentado na Intervenção 9. São inseridos o domínio e o contradomínio da relação para que os alunos possam refletir sobre o conceito mais moderno de função. A lei de formação é rapidamente reconhecida pelos alunos. O aluno GATO afirma que p = 12,00 + 0,65n é a lei de formação da relação porque representa a maneira que se utiliza para relacionar cada elemento dos dois conjuntos. Ressalta a idéia da relação entre conjuntos e não mais a idéia da relação entre variáveis como realizou nos encontros anteriores. O aluno PEIXE concorda com o colega e não tece comentários verbais.

- **As variáveis da relação**

Também em relação ao reconhecimento das variáveis não há grandes discussões. O aluno GATO apresenta p e n como variáveis e justifica sua escolha afirmando que o preço e o número de fotos podem substituir valores no conjunto ao qual pertencem. O aluno PEIXE concorda que as variáveis sejam p e n e se justifica dizendo que o preço e o número de fotos podem substituir valores dos conjuntos dados. O aluno GATO percebe a necessidade de se alterar o conceito que construíram sobre variável. Variável se caracteriza como uma letra que substitui valores de acordo com o conjunto ao qual pertence.

Trabalhar com conceitos é uma tarefa complexa, por mais que se queira isolar o conceito a ser discutido não se consegue fazê-lo completamente. Um conceito é formado por vários outros conceitos, que por sua vez, também apresentam intrinsecamente novos conceitos. Assim, o que acontece, é uma rede de interligações conceituais complexa, não linear. Observar apenas um desses conceitos requer um grande esforço intelectual sem a certeza de que se atingirá o objetivo.

Por outro lado, conceder a liberdade para o aluno estabelecer as conexões conceituais sem se deter aos objetivos específicos da intervenção também contribui com resultados importantes capazes de revelar elementos que não poderiam ser previstos.

Tratar sobre o conceito de função traz mais elementos do que o previsto a priori. Um desses elementos é o conceito de variável, como discutido anteriormente. O estabelecimento de interligações como o conceito de função e o conceito de relação entre conjuntos, também contribui para o estabelecimento de uma nova conexão entre o conceito de variável e o conceito de relação entre conjuntos, embora este fato não tenha sido contemplado, nem colocado como um objetivo a ser atingido.

- **As variáveis dependente e independente**

Em relação à classificação das variáveis, o número de fotos é considerado pelo aluno GATO como uma variável independente porque pertence ao domínio. A pesquisadora, ao perceber que o aluno utiliza uma definição que não tinha formalizado anteriormente, pergunta “mas o que vocês disseram foi que uma variável independente é representada por uma letra que atribui valores para a variável dependente e está numa equação”.

O aluno GATO pede que seja retirado o conceito de equação e acrescentado o conceito de domínio da função ao conceito de variável independente. O novo conceito define variável independente como uma letra que atribui valores para a variável dependente e que pertence ao domínio da função. Afirma que a variável dependente pertence ao contradomínio, e que, ao se retirar o conceito de equação das duas definições ficaria “*tudo perfeito*”. Não satisfeito com sua própria resposta, comenta se a variável dependente pertence ao contradomínio ou à imagem da função. O aluno PEIXE afirma que pertence ao contradomínio, mas não justifica sua posição.

Para o aluno GATO, o conceito de equação não deve se relacionar aos conceitos de variável dependente e independente, pois a equação deve ser formada por incógnitas, e, como uma variável dependente não é incógnita, então não pode compor uma equação. Conclui que prefere pensar as variáveis dependente e independente na função e não na equação. Acrescenta que pensar sobre o conceito de função relacionado aos conjuntos se torna mais compreensível e menos conflitante.

É interessante perceber que ao se modificar o conceito de variável, também se modificam os conceitos de variável dependente e independente. E, apesar de se acrescentar o conceito de relação entre conjuntos ao conceito de variável, o mesmo não acontece aos conceitos específicos de variável dependente e independente. Ao invés de acrescentar conceitos, há uma troca do conceito de equação com o conceito de função. Este fato pode acontecer porque o conceito de função está vinculado ao conceito de relação entre conjuntos, enquanto que ao conceito de equação não é realizado esse vínculo. A sugestão é que se desenvolva também um estudo mais profundo sobre o conceito de equação que contemple sua evolução histórica e sua relação com os conceitos de variável e incógnita.

- **Relação, domínio, contradomínio e imagem da função**

A relação K para o aluno GATO representa uma função porque para cada valor atribuído a n existe um valor correspondente no contradomínio e este valor é único. O aluno PEIXE não se pronuncia verbalmente. Reconhece, porém, que o domínio é o conjunto N* (naturais não nulos). O aluno GATO reconhece que o contradomínio é representado pelo conjunto R dos números reais e que a imagem dessa função é composta também por todos os números reais.

O aluno PEIXE questiona se o valor da variável preço realmente pode ser qualquer valor real. Afirma que o valor dessa variável deve ser maior ou igual a R$ 12,65. O aluno GATO constrói a imagem da função utilizando a letra y como pertencente aos reais. Percebe que a variável está representada pela letra p e então constrói formalmente a imagem da seguinte maneira:

$\{\, p \in \Re \,/\, p = 12{,}00 + 0{,}65n,\ n \in N^* \,\}$.

- **A possibilidade da relação R não ser função**

Para que a relação R não represente uma função, o aluno GATO e o aluno PEIXE, acreditam que os conjuntos devem ser trocados. Se a relação fosse de R em N*, para o aluno GATO, trabalhando-se com n em função de p, não haveria uma função porque a condição de existência não seria satisfeita. Existiria um valor do domínio que não teria um correspondente no contradomínio. O aluno PEIXE também utiliza os mesmos argumentos para justificar a inversão dos conjuntos.

- **Problema 3 – composição das funções constante e do 1º grau**

O 3º problema (quadro 23) é adaptado do segundo problema apresentado na Intervenção 9. São inseridos o domínio e o contradomínio da relação para que os alunos possam refletir sobre o conceito mais moderno de função. É explicado aos alunos que o conjunto $\Re$ representa o conjunto dos números reais. A lei de formação dessa relação é composta, segundo o aluno GATO, por todos os elementos da tabela. Seus elementos são representados pelas letras p e c, ou pelas letras x e y, de acordo com o aluno PEIXE.

As variáveis, para o aluno GATO são p e c porque p pertence ao domínio e c pertence ao contradomínio. A variável independente, para ambos é p porque é uma letra que representa os elementos do domínio da função. A variável dependente é c porque pertence à imagem da função. Vale ressaltar que o aluno PEIXE sempre se contrapõe ao colega nessa questão. Para ele a variável dependente representa os elementos do contradomínio e não os elementos da imagem. Neste momento, porém, posiciona-se de forma diferente.

O mesmo acontece com o aluno GATO. Após ter afirmado que a variável dependente pertence ao conjunto imagem, afirma que ao se utilizar os elementos do contradomínio, todos os elementos podem ser testados para saber se existe ou não uma correspondência entre eles. Não satisfeito com seu próprio argumento, verbaliza um outro raciocínio. Se o número zero estivesse no contradomínio e ele não tivesse uma imagem porque não teria nenhum correspondente no domínio, então não faria sentido utilizá-lo, o que significa que a variável dependente representa os valores da imagem e não do contradomínio. O aluno PEIXE concorda com esse pensamento. Afirma que não pode utilizar um elemento qualquer do contradomínio porque precisa utilizar um correspondente no domínio, assim a variável dependente se vinculada à imagem e não ao contradomínio.

A relação J representa, para ambos, uma função. O aluno GATO afirma que esse fato se justifica porque a relação J satisfaz as condições. Para cada p pertencente ao domínio da função existe um correspondente no contradomínio e ele é único. O domínio se caracteriza como $\aleph_{+}^{*}$, o contradomínio como $\Re$ e a imagem como {0,30; 0,50; 0,80 e p/100 com p> 100}. O aluno GATO necessita visualizar separadamente as condições de uma função e verbalizá-la também separadamente. Essa pode ter sido uma influência da forma como o conceito de função foi apresentado e trabalhando durante os cinco últimos encontros. O aluno PEIXE não faz essa distinção explicitamente. É possível que, para este aluno, a forma de trabalho não foi significativa. De fato, os alunos trazem consigo a idéia básica dessas condições, sobretudo a condição da unicidade.

Explicitar essas condições pode ser uma forma de lembrar que elas existem e estão intrinsecamente relacionadas ao conceito de função. Assim, de acordo com Ausubel, esses conceitos mais específicos podem se ancorar ao conceito mais geral, o conceito de função, utilizando-se o princípio da Assimilação.

- **Reflexões – Relações sobre os conceitos**

Na 3ª parte, os alunos são solicitados a discutir as relações entre os conceitos abordados até então, como uma forma de finalização da primeira parte da pesquisa. Ao serem questionados sobre função ser equação, o aluno GATO afirma que não obrigatoriamente função pode ser equação. O aluno PEIXE concorda afirmando que função pode ser equação, o que não necessariamente. Ao serem questionados sobre equação ser função, o aluno GATO diz que não é possível. Para que uma equação seja uma função precisa ter conjuntos, ter relação e principalmente as condições precisam ser satisfeitas.

Uma função possibilita inúmeras relações entre x e y, a equação trata apenas de um número limitado de respostas que satisfazem uma situação. O aluno PEIXE afirma que o que falta numa equação para se tornar uma função são os conjuntos. Cita que $p = 12,00 + 0,65n$ sozinha, sem as relações entre os conjuntos, não representa uma função.

É interessante ressaltar que na Intervenção 9, quando este mesmo problema citado como exemplo foi apresentado aos alunos, todos concordaram que a relação representava uma função mesmo sem a determinação prévia do domínio e do contradomínio.

Após a apresentação do conceito de relação entre conjuntos como base para o conceito de função, essa compreensão da necessidade da existência do conceito de conjuntos se transforma em condição para a existência de uma função. Ambos concordam que expressão algébrica não é função. O aluno GATO acrescenta que na expressão algébrica não existe relação entre as variáveis, o que justifica o fato de não ser função.

Os alunos acreditam que função é formada por variáveis. Para o aluno GATO, a função sendo composta de variáveis dependente e independente é suficiente para comprovar que é formada por variáveis. Assim, função tem duas variáveis e não uma variável e uma incógnita. Acrescenta que uma variável dependente não é uma incógnita. E, conclui que a diferença entre incógnita e variável é o fato do conceito de variável não estabelecer qualquer relação com o conceito de equação. Mesmo que uma equação tenha duas letras, elas não são variáveis, são incógnitas. Incógnita é elemento formador da equação, enquanto variável se relaciona à função e à expressão algébrica.

Para o aluno PEIXE, função precisa ter obrigatoriamente variáveis, senão deixaria de ser função. Essa colocação foi comprovada no estudo da função constante. Naquele momento, enquanto os alunos não visualizaram as variáveis não compreenderam a relação como função. O aluno PEIXE coloca que para ser função são necessárias no mínimo duas variáveis. O aluno GATO complementa que existe também uma relação entre conjuntos e que essa relação precisa satisfazer a duas condições.

Para finalizar a discussão, o aluno GATO afirma que uma expressão algébrica deve ser composta por variáveis, e esse fato é indiscutível. O aluno PEIXE concorda afirmando que expressão algébrica sempre tem variável. O aluno GATO conclui que se a variável também existisse na equação não existiriam motivos para se inventar o conceito de incógnita.

- **As definições conceituais**

Na 4ª parte, é solicitado aos alunos que preencham os protocolos utilizando suas próprias palavras para enunciar os conceitos de função, equação, expressão algébrica, variável, incógnita, variável dependente e variável independente, respectivamente. O aluno GATO afirma que função "*é uma relação que relaciona dois conjuntos (D, CD) relacionados através de uma regra, onde para cada elemento do domínio existe um único elemento no contradomínio*". O aluno PEIXE, por sua vez, escreve que função "*é uma relação que transporta um elemento de um conjunto (domínio) para outro (contradomínio)*".

Após todos esses encontros, é possível verificar uma trajetória particular na redefinição do conceito de função. O aluno GATO inicia com a idéia de que função se vincula ao conceito de relação entre conjuntos. Com a discussão sobre o conceito de Dirichlet, passa a compreendê-la como uma relação entre variáveis. Com a introdução de uma visão mais moderna de função, o aluno traz novamente a idéia de relação de correspondência entre conjuntos, e, neste momento, apesar de ainda considerar esse aspecto, cita apenas que existe uma relação entre dois conjuntos, um conceito mais amplo do que somente uma relação entre duas variáveis.

Apesar de considerar relevante a utilização das variáveis, não faz menção a esse conceito na definição de função. Vale destacar que este aluno explicita o conceito de regra e as condições necessárias para que relação seja considerada função. Verifica-se que os conceitos de relação entre conjuntos, domínio, contradomínio, regra e condição são conceitos utilizados para descrever função.

O aluno PEIXE inicia com a idéia de que função se vincula ao conceito de relação entre números. Passa em seguida a compreendê-la como relação entre variáveis. A relação entre elementos de conjuntos surge posteriormente, e, no momento atual, o aluno traz a idéia que ainda não havia surgido em sua fala durante as discussões, o conceito de transporte de elementos entre conjuntos. Não faz menção ao conceito de variável, apesar de considerá-la fundamental para a existência da função. Outro aspecto que não cita são as condições que uma relação deve atender para que seja função. Assim, os conceitos de relação entre elementos de conjuntos, domínio e contradomínio são os mais relevantes para a existência da função.

É possível que os subsunçores de ambos os alunos tenham se alterado com o tempo e a apresentação dos argumentos, tanto dos colegas participantes da pesquisa, quanto da própria pesquisadora. Os conceitos originais, tanto de Dirichlet, quanto de Lages Lima (1998) ou de Ávila (1993) também não são utilizados na íntegra pelos alunos. É possível que tenham sido alterados nesse processo de assimilação e redefinição do conceito de função.

Quando os alunos retornam ao conceito de função e trazem o conceito da relação entre conjuntos, é possível que estejam conservando nesse conceito elementos próprios de seus subsunçores. As transformações ocorridas nos subsunçores e nos novos conhecimentos sobre função ainda se encontram em processo de desenvolvimento. Ausubel (1980) afirma que no processo de assimilação existe um momento de afastamento entre o subsunçor modificado e o novo conhecimento também modificado, conservando cada qual alguns elementos constituintes de suas características básicas.

A utilização, por exemplo, da palavra “regra” em algumas das definições observadas durante todo esse processo, pode caracterizar a conservação da definição apresentada por Lages Lima (1998) sem alterá-la completamente em sua estrutura cognitiva. Esse fato pode justificar uma segunda etapa do processo de assimilação do novo conhecimento ao subsunçor.

O fato dos alunos não utilizarem a palavra variável na definição formalizada de função, mas considerarem-na um fator preponderante para a existência da função, de tal forma que se não houver variável não haverá função, pode estar relacionada ao processo de assimilação obliteradora preconizada por Ausubel (1980).

Após o distanciamento dos subsunçores e novos conhecimentos modificados, este autor afirma que o novo conhecimento modificado começa a se vincular ao subsunçor também modificado, perdendo algumas de suas características, de tal forma que possa se ancorar a este subsunçor. È possível que os alunos tenham modificado o conceito de variável, inserindo-o ao conceito de conjuntos, a ser ancorado ao conceito de função. Quando esse processo se concretiza, não há necessidade de se falar sobre variáveis. Ao se falar sobre função, já está sendo abordado, implicitamente, o conceito de variável.

Em relação aos demais conceitos, o aluno GATO afirma que equação "*são expressões relacionadas através de uma igualdade*". O aluno PEIXE escreve que equação "*é uma igualdade entre expressões matemáticas*". Os conceitos relacionados ao conceito de equação são os conceitos de igualdade e de expressão matemática. É provável que os alunos possam distinguir entre equação e função, auxiliando futuramente seus alunos na construção desses conceitos em sala de aula.

Em relação ao conceito de expressão algébrica, o aluno GATO afirma ser "*uma expressão que é composta de números, operações e variáveis*". O aluno PEIXE escreveu que expressão algébrica "*é uma representação de números que se relacionam por sinais de operação*". Os conceitos relacionados ao conceito de expressão algébrica versam sobre números e operações, e, também representações para esses números, denominados por variáveis. Assim, o conceito de expressão algébrica também pode estar desvinculado do conceito de função.

Para o aluno GATO, variáveis são "*letras que substituem valores de acordo com o conjunto ao qual pertencem*". Para o aluno PEIXE, são "*letras que substituem valores pertencentes ao conjunto de uma função*". Dessa forma, é possível verificar que vinculado ao conceito de variável estão os conceitos de conjunto e até mesmo de função, conforme as explicações acima citadas.

Para o conceito de incógnita, o aluno GATO afirma que são "*letras que substituem valores que satisfazem uma equação*". O aluno PEIXE escreve que incógnitas são "*letras que substituem valores numa equação*". Então, vinculado ao conceito de incógnita está o conceito de equação. É possível compreender que a equação é formada por incógnitas, enquanto que a função é formada por variáveis.

Para o aluno GATO, variáveis independentes "*são letras que atribuem valores para determinar a variável dependente e pertence ao domínio de uma função*". A variável dependente é uma "*letra da qual depende a variável independente e pertence a* *imagem da função*". Para o aluno PEIXE, variáveis independentes são "*variáveis pertencentes ao domínio de uma função*" enquanto que variáveis dependentes são "*variáveis pertencentes ao contradomínio de uma função*". O conceito de variável independente está vinculado ao conceito de domínio da função. O conceito de variável dependente ainda está em processo de elaboração.

Para o aluno GATO, o conceito de função parte inicialmente do conceito de relação entre conjuntos. Com a apresentação do conceito de Dirichlet, vincula-se ao conceito de relação de dependência entre variáveis; e com a apresentação do conceito de Lages Lima e Ávila, novamente ao conceito de relação de dependência entre conjuntos. Essa vinculação, porém, parece compor-se de novos elementos conceituais. Os conceitos de regra, de variável, de condição de existência e unicidade estão, de forma implícita ou explícita, relacionados ao conceito de função.

Para o aluno PEIXE, o conceito de função parte inicialmente do conceito de relação entre números e entre conjuntos. Pelo conceito de Dirichlet, vincula-se ao conceito de relação de dependência entre variáveis; e pelo conceito de Lages Lima e Ávila, ao conceito de relação entre conjuntos e posteriormente entre elementos de dois conjuntos.

Os conceitos de regra e de variável, bem como o conceito de condição de unicidade parece se relacionarem ao conceito de função, implícita ou explicitamente nesta fase da pesquisa. Apesar de se compreender o raciocínio dos alunos e de se concluir pequenos fatos, ainda não é possível afirmar que os alunos constróem, em suas estruturas cognitivas, compreensão formalizada em relação ao conceito de função.

Na realidade, o processo de reflexão conceitual apenas iniciou. As próximas fases podem auxiliar nessa compreensão, ao revelar os elementos que os alunos trazem para organização e aplicação de novos conceitos e de novas relações, em situações pedagógicas e matemáticas diferenciadas.

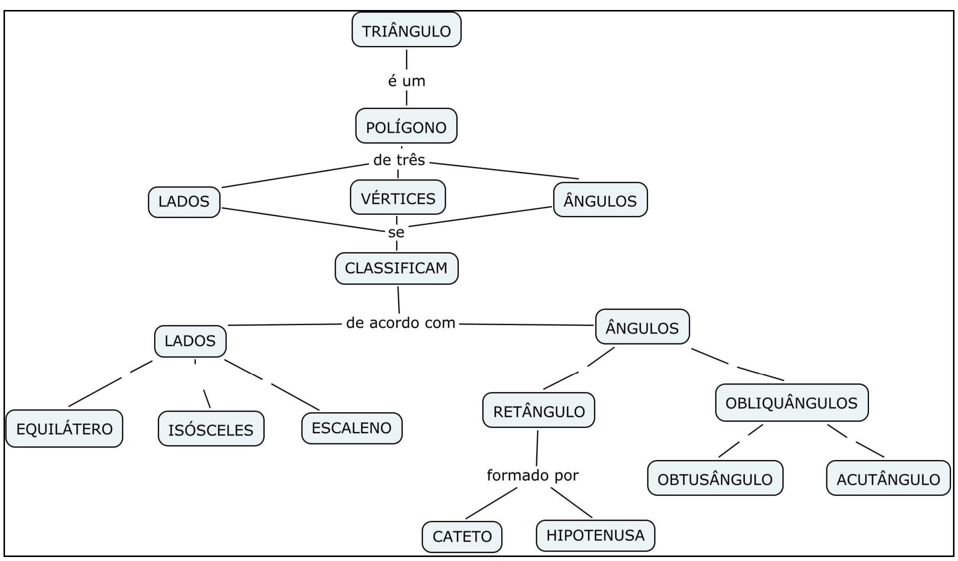
Intervenção 13 – O que são Mapas Conceituais

Apesar do trabalho desenvolvido nessa fase ser realizado em duplas, esta intervenção especificamente, é realizada junto com todos os integrantes do grupo, inclusive a construção do mapa conceitual final sobre "noção de conjunto". Antes de apresentar o primeiro exemplo sobre mapa conceitual, a pesquisadora pergunta ao grupo se os alunos já conheciam os mapas conceituais. Eles respondem que não, desconhecem o conceito.

Ao visualizarem os primeiros exemplos (figura 16), a reação de familiaridade é instantânea. O aluno GATO afirma que os mapas conceituais parecem anagramas, fluxogramas. Acrescenta viu situações parecidas não necessariamente com o formato apresentado. Afirma ter se simpatizado e gostaria de aprender mais sobre o assunto. A leitura dos mapas conceituais é realizada pelos alunos por solicitação da pesquisadora. Ao serem questionados sobre a composição de um mapa conceitual, o aluno PEIXE afirma que os conceitos são elementos básicos. O aluno GATO complementa dizendo que poderia haver exemplos.

Em relação ao formato, o aluno GATO e o aluno PEIXE afirmam que um mapa conceitual parece ser uma árvore composta pelo topo e por galhos. Nos momentos que antecedem a leitura do texto sobre o conceito de mapas conceituais, o aluno GATO afirma que o primeiro mapa conceitual de matemática com o qual teve contato é o mapa sobre o conceito de triângulos apresentado neste encontro.

Figura 16 – Exemplo de Mapa Conceitual de triângulos



Fonte: Adaptado de Ontoria et al. (2005, p. 155)

Durante a leitura do texto realizado pela própria pesquisadora, perguntas que relacionam a teoria e os exemplos aplicados de mapas conceituais são realizadas tanto pela pesquisadora quanto pelos alunos. A primeira pergunta enfatiza as palavras repetidas presentes no mapa sobre triângulos. Os alunos GATO e PEIXE identificam que as palavras “lados” e “ângulos” se repetem algumas vezes. A pesquisadora comenta que a repetição de palavras deve ser evitada na construção de mapas conceituais para que a leitura flua mais facilmente diante de uma estética mais agradável e limpa de informações desnecessárias.

Ainda assim, o aluno GATO insiste na repetição dessas palavras argumentando que o fato delas se repetirem em nada influencia a compreensão. Além disso, considera que se não houvesse repetição, o mapa ficaria muito pequeno, e talvez, dificultaria sua leitura e interpretação. Ao finalizar a leitura do texto a pesquisadora pergunta se os alunos desejam construir um mapa conceitual. O aluno GATO responde que seria interessante testar pelo menos uma vez antes de fazer um mapa conceitual para função.

Inicia-se a parte 3 do encontro onde são destacadas as fases de construção de um mapa conceitual:

1. escolher os principais conceitos;
2. distribuir os conceitos hierarquicamente;
3. relacionar os conceitos;
4. escolher e aplicar as palavras de ligação entre os conceitos;
5. atribuir significados;
6. construir proposições;
7. estabelecer relações.

É explicado também aos alunos que essas fases servem de base para o desenvolvimento dos mapas, mas não necessariamente precisam ser seguidas nesta ordem, nem serem todas respeitadas. Essas informações podem auxiliar apenas àqueles que queiram utilizá-las. Durante a leitura, o aluno PEIXE questiona a obrigatoriedade das palavras de ligação. A pesquisadora responde que essas palavras auxiliam a leitura do mapa e sua posterior compreensão para quem o desenvolve e principalmente para alguém que o está utilizando para a aprendizagem de novos conhecimentos.

Na parte 4 do encontro os alunos se reúnem para pensar sobre a construção do mapa conceitual voltado para conhecimentos matemáticos. Recebem da pesquisadora um pequeno texto adaptado de Iezzi e Murakami (2001) intitulado “A noção de conjunto”, conforme apresentado abaixo:

“Um conjunto é uma coleção qualquer de objetos. Por exemplo, o conjunto dos números primos: B = {2, 3, 5, 7, 11, 13,...}. Um conjunto é formado por elementos. Um objeto ´a´ qualquer pode ser elemento de um determinado conjunto A. Quando for, dizemos que ´a´ pertence a A e escrevemos que a $\in$ A. No exemplo acima, temos que 2 $\in$ B e 6 $\notin$ B. Um conjunto é vazio quando não possui elementos e pode ser representado também por { }. Um conjunto é unitário quando for formado por um único elemento. Por exemplo, {x/x é um número natural par e primo}. Considerando os conjuntos A e B, se todos os elementos de A forem também elementos de B, dizemos que A é um subconjunto de B ou que A está contido em B, indicando como A$\subset$ B. A relação A$\subset$ B é chamada de relação de inclusão".

A partir da leitura do texto, os alunos, utilizando a seqüência apresentada na parte 3, escolhem os conceitos principais do texto. Destacam as palavras conjunto, elemento, conjunto vazio, conjunto unitário e subconjunto como conceitos principais. Em seguida, ordenam-as da seguinte forma:

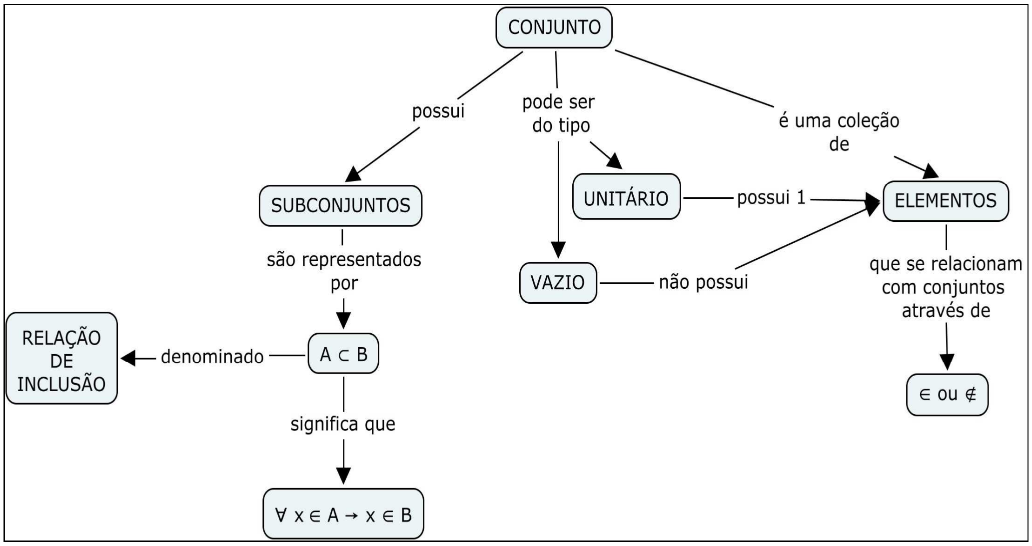
1. conjunto;
2. elemento;
3. conjunto vazio e conjunto unitário, julgando que apresentavam o mesmo nível hierárquico; e
4. subconjunto.

Todas as palavras descritas, bem como a seqüência hierárquica são escritas na lousa pela pesquisadora apenas para registrar os pensamentos dos alunos, durante o processo de construção dos mapas. Os alunos iniciam o processo com a construção de um esquema preliminar para relacionar os conceitos principais por meio de setas. Apesar de escreverem uma ordem específica para a construção do mapa conceitual, utilizam uma outra disposição gráfica para os conceitos, trocando a ordem dos tipos de conjuntos com o conceito de elemento.

De acordo com os passos sugeridos na parte 3, os alunos continuam as atividades com a atribuição de palavras de ligação entre os conceitos principais destacados. Ao realizarem uma leitura das relações estabelecidas, os alunos resolvem modificar a estrutura concebida. Decidem colocar o conceito de elemento e de tipos de conjunto no mesmo nível hierárquico, acrescentar os símbolos que estabelecem a relação de pertinência e de inclusão, além de caracterizar o conceito de subconjunto.

A versão final do mapa conceitual sobre conjuntos (figura 17) sofre poucas alterações. Além de decidirem a troca de posição das informações, acrescentam também algumas palavras de ligação entre os conceitos de subconjuntos ainda não apresentado.

Figura 17 – Construção do Mapa Conceitual de noções de conjunto – Versão final



Fonte: alunos voluntários

É necessário lembrar que os alunos não utilizam os passos 5, 6 e 7 sugeridos na 3ª etapa, relativos respectivamente a atribuição de significados, construção de proposições e estabelecimento de relações. Um dos motivos é a extrapolação do tempo destinado ao encontro. Outro motivo se relaciona ao fato dos alunos não sentirem necessidade de seguir todos os passos sugeridos.

Durante o processo de construção dos mapas conceituais seus objetivos estão voltados para o estabelecimento de relações coerentes entre os conceitos sem repeti-los. Com o término das atividades os alunos parecem não estar satisfeitos com o resultado obtido. Afirmam verbalmente que o resultado deveria parecer com os exemplos fornecidos inicialmente.

Afirmam também que o processo de construção de mapas conceituais não é um processo simples e fácil, como transparece ao fazer sua leitura. Consideram o processo mais complexo do que imaginaram a princípio, e que a prática pode melhorar o processo de construção. O aluno GATO acrescenta que o professor precisa preparar bem sua aula para utilizar esse tipo de técnica, além de conhecer com profundidade os conceitos que vai utilizar em sala de aula.

Intervenção 15 – Os mapas conceituais sobre o conceito de função e seus conceitos subjacentes

Este encontro acontece em 13/09/07 durante 66 minutos e, são abordados o conceito de função de Lages Lima (1998) e os demais conceitos discutidos na Fase 1. Os autores selecionados que abordam as definições teóricas a respeito dos conceitos de variável, incógnita, equação, expressão algébrica, variável dependente e variável independente são Imenes e Lellis (1998), Soares (2005) e Ávila (1993).

Esta escolha se baseia na comparação realizada entre as definições dos alunos e os conceitos teóricos de todos os autores citados. Aqueles autores que apresentam um conceito mais significativo para os alunos são os selecionados para compor a parte teórica conceitual.

Os objetivos deste encontro são descrever e observar as críticas que os próprios alunos apresentam sobre os mapas conceituais desenvolvidos no encontro anterior e descrever o processo de reconstrução dos mapas conceituais com o desafio de relacionar todos os conceitos discutidos ao conceito de função.

Na 1ª parte, cada grupo recebe seu próprio mapa conceitual para realizar uma leitura preliminar e verificar a possibilidade de modificações. Apesar dos alunos terem relatado que gostariam de modificar a estrutura dos mapas em alguns aspectos específicos, consideram que a idéia geral sobre o conceito de função está compreensível. Dessa forma, preferem não realizar modificações.

Na 2ª parte, os alunos recebem um quadro-resumo com os conceitos formalizados sobre equação, expressão algébrica, variável independente, variável dependente, variável e incógnita. No caso das variáveis dependente e independente são apresentados dois conceitos. Ávila (1993) ao relacioná-los com o conceito de função complementa as idéias de Soares (2005).

Na 3ª parte, é apresentado o desafio de incrementar seus mapas conceituais diante de relações que podem estabelecer com os conceitos discutidos na Fase 1 da pesquisa.

Neste momento, muitos comentários são feitos no sentido dos grupos não conseguirem realizar a tarefa a contento. Porém, com a insistência da pesquisadora, os alunos iniciam as atividades e realmente discutem sobre todas as possibilidades de efetivarem as relações conceituais.

- **As inserções conceituais**

Nos complementos iniciais realizados pelo grupo GATO, observa-se que o elemento x pertencente ao domínio da função fica caracterizado como variável independente. O elemento y pertencente ao contradomínio da função se relaciona ao conceito de variável dependente. O conceito de regra vincula-se ao conceito de equações. Estas, por sua vez, relacionam-se com os conceitos de expressões algébricas e incógnitas. Um outro aspecto que também pode ser observado é o fato do elemento y pertencer ao conjunto imagem se o elemento x estabelecer, com este elemento, uma associação.

Nos complementos iniciais realizados pelo grupo PEIXE, observa-se que os conceitos de variável independente e variável dependente vinculam-se aos conceitos de domínio e contradomínio, respectivamente. O conceito de regra se associa ao conceito de equação, que, por sua vez, vincula-se aos conceitos de expressão algébrica, incógnita e variáveis dependente e independente. Este grupo não utiliza a palavra variável, possivelmente porque esse conceito esteja implícito nos conceitos de dependência e independência entre variáveis.

Para a inserção dos conceitos subjacentes, os alunos não utilizam os passos sugeridos nos dois encontros anteriores. Assim que recebem o material impresso refletem e realizam automaticamente as relações consideradas pertinentes. Em seguida, inserem os conceitos considerados mais difíceis de serem relacionados. Afirmam ser mais fácil e simples confeccioná-los dessa maneira. A pesquisadora não intervém no processo criativo na a realização da tarefa.

Os grupos utilizam o passo de atribuição de significados para analisar as relações conceituais que realizam. O grupo GATO traz mais elementos significativos para este mapa do que para o mapa anterior. Novamente exclui as condições e a representação de uma função de sua definição formal.

Compreende-se que "*função é uma regra que associa o elemento x, pertencente ao Conjunto A denominado Domínio, ao elemento y, pertencente ao Conjunto B, denominado Contradomínio*". Conclui-se que o conceito de função não se altera com a inclusão dos outros conceitos abordados.

Para o conceito de regra afirma que "*regra pode ser representada por equações formadas por incógnitas e expressões algébricas, compostas por variáveis*". Para o conceito de imagem pode-se interpretar que seja "*um elemento y associado a um elemento x pertence à imagem que é subconjunto do contradomínio*". Dissocia as condições da função e as define como condição de unicidade e condição de existência. Não explicita os conceitos de variável dependente e independente na formação dos significados.

O grupo PEIXE, diferentemente do grupo anterior, inclui na definição os conceitos de representação e de condição da função. É possível compreender que "*função, representada por f: X -> Y, é uma regra que relaciona conjunto através da condição que é* $\forall x \in X, \exists! y \in Y$". A definição atual se altera com a inserção de novos conceitos.

O grupo também apresenta definições para os conceitos subjacentes. Para o conceito de regra afirma que "*regra pode ser uma equação (incógnita e expressões algébricas) que contém variável independente e variável dependente*". Define ainda os conjuntos que formam a função. Diz que "*são divididos em contradomínio, representado pelo Conjunto Y, que contém o conjunto imagem definido por* $y \in Y; f(x) = y$, *e, em domínio, representado pelo Conjunto X*".

- **As novas proposições**

Com a elaboração das proposições diante da leitura dos mapas conceituais, verifica-se como os alunos organizam mentalmente a seqüência dos conceitos e as relações conceituais. As proposições apresentadas pelo grupo GATO são:

- função é uma regra que associa o elemento x pertencente ao conjunto A denominado domínio ao elemento y pertencente ao conjunto B denominado contradomínio;
- função é representada por f: A -> B;
- função obrigatoriamente obedece a duas condições: qualquer que seja x pertencente a D, existe y pertencente a Im, e, qualquer que seja x, existe um único y.

O grupo prefere separar a representação e as condições do conceito de função propriamente dito. Lages Lima (1998), por exemplo, realiza conceitualmente apenas a divisão entre o conceito de função e suas respectivas condições. Nas proposições da intervenção 14 o grupo considerou que o elemento y pertencia ao conjunto contradomínio. Nestas proposições, o grupo considera que o elemento y pertence ao conjunto imagem. Este fato pode indicar que o grupo ainda não se decidiu conceitualmente sobre a relação da variável dependente e os conjuntos contradomínio e imagem como vem ocorrendo desde os últimos encontros da Fase 1.

Em relação aos conceitos subjacentes, o grupo GATO escreve as seguintes proposições:

- regra é representada por equações e formada por: expressões algébricas compostas por variáveis e incógnitas;
- o elemento y associado ao elemento x pertence à imagem, subconjunto do contradomínio;
- o elemento x é denominado variável independente;
- o elemento y é denominado variável dependente.

As relações entre domínio e variável independente, bem como, regra e equações estão presentes novamente, de acordo com as conclusões obtidas na Fase 1 da pesquisa.

O grupo PEIXE desenvolve as seguintes proposições para o conceito de função:

- função é uma regra que relaciona conjuntos através da condição: qualquer que seja x pertencente a X, existe um único y pertencente a Y;
- função é representada por f: X -> Y;
- função é uma regra que pode ser uma equação formada por expressões algébricas e incógnitas.

Este grupo inclui o conceito de condição na definição propriamente dita do conceito de função, mas, exclui sua representação. Diferentemente do anterior, considera o conjunto Y como o contradomínio da função e, portanto, a relação estabelecida acontece entre o elemento y e o contradomínio, e não entre o elemento y e o conjunto imagem. O grupo também inclui uma nova proposição que suscita novas discussões, a relação entre função e equação por meio das conexões entre o conceito de regra e conseqüentemente a relação entre o conceito de função e o conceito de incógnita.

Em relação aos conceitos subjacentes, o grupo PEIXE elabora as seguintes proposições:

- regra pode ser uma equação que contém variável dependente e variável independente;
- os conjuntos são divididos em Contradomínio e Domínio;
- o Contradomínio contém o conjunto imagem definido por y pertencente a Y, f(x) = y

- o Contradomínio é representado pelo conjunto Y; e
- o Domínio é representado pelo conjunto X.

Este grupo enfatiza os conceitos de conjuntos, sobretudo, o conceito de contradomínio que estabelece uma relação tanto com o conjunto domínio, quanto com o conjunto imagem. Apresenta também, da mesma forma que o grupo anterior, uma interligação entre os conceitos de regra e equação, bem como, variável independente e domínio.

- **A reconstrução dos mapas conceituais**

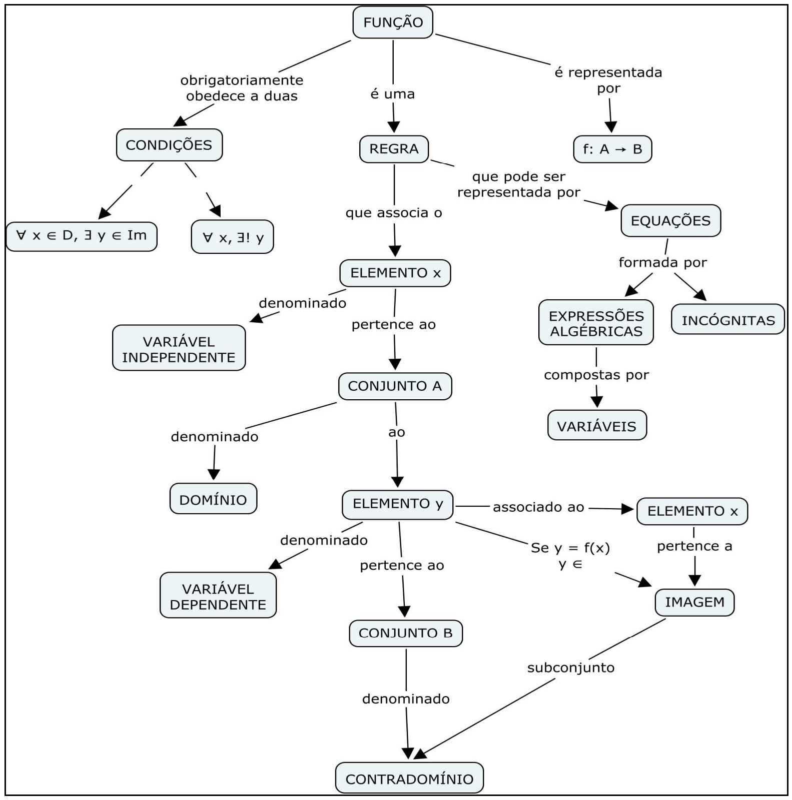
A finalização do encontro acontece com a construção definitiva do mapa conceitual sobre o conceito de função incorporando seus conceitos subjacentes. Observa-se que são poucas as mudanças realizadas após as construções das proposições, apenas alguns detalhes de representação (figuras 18 e 19).

Os alunos terminam este encontro com a certeza de que seus mapas conceituais apresentam erros na forma e nos conceitos. Ficam insatisfeitos, sobretudo, com sua forma final. Gostariam que apresentasse uma característica semelhante aos mapas exemplificados no encontro 13.

De fato, ao se trabalhar apenas com o conceito de função, o mapa conceitual produzido pode apresentar um formato diferenciado daqueles apresentados no exemplo. Como se tratava de mapas abrangentes de uma teoria matemática, era possível visualizar a hierarquia conceitual mais facilmente. Poucas são as modificações conceituais apresentadas pelos grupos. As relações que estabeleceram na Fase 1 continuam presentes nesta fase, inclusive com a explicitação das mesmas dúvidas anteriores.

O que aparentemente se modifica, para ambos os grupos, é o fato da função se vincular ao conceito de regra que relaciona ou associa elementos de conjuntos. Na Fase 1, o conceito de função esteve vinculado ao conceito de relação entre conjuntos. Percebe-se que a confecção dos mapas conceituais contribui para o fortalecimento das relações estabelecidas previamente no momento da Diferenciação Progressiva e Reconciliação Integradora.

Figura 18 – Mapa Conceitual de Função – Mapa Final – grupo GATO

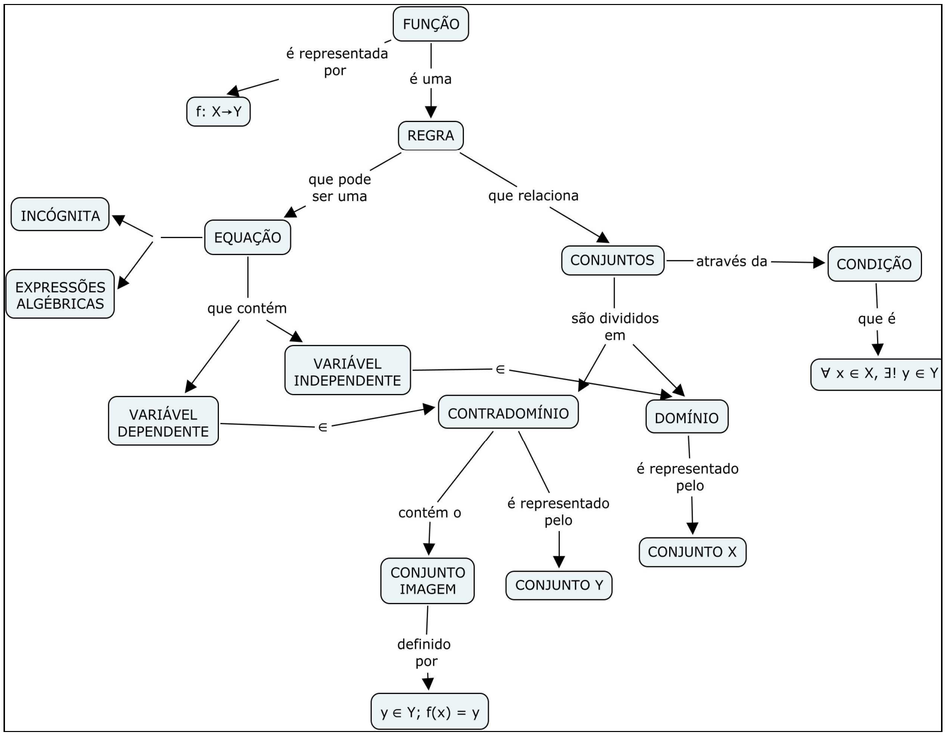


Fonte: Grupo GATO

Os alunos continuam ainda num processo de distanciamento entre os subsunçores modificados e o novo conhecimento também modificado, cada qual ainda conservando seus elementos básicos, conforme a teoria de Ausubel (1980).

A leitura do mapa conceitual dos outros colegas e a reflexão crítica das relações estabelecidas são aspectos abordados a partir da próxima intervenção com a finalidade de aprofundar o significado que os alunos atribuem ao conceito de função.

Figura 19 – Mapa Conceitual de Função – Mapa Final – grupo PEIXE



Fonte: Grupo PEIXE

Intervenção 16 – As críticas sobre os mapas conceituais construídos

O encontro acontece em 18/09/07 durante 68 minutos e, são abordados o conceito de função de Lages Lima (1998), e os conceitos subjacentes baseados nas definições de Imenes e Lellis (1998), Soares (2005) e Ávila (1993). O objetivo deste encontro é estimular a reflexão sobre os mapas conceituais construídos comparados aos mapas conceituais desenvolvidos pelo outro grupo por meio de críticas construtivas baseadas nos aspectos físicos, lógicos e conceituais de cada mapa conceitual.

Na 1ª parte, os grupos recebem, além das definições formais sobre todos os conceitos abordados, os dois mapas conceituais finalizados no encontro anterior, possibilitando visualizar comparativamente o trabalho desenvolvido pelos dois grupos concomitantemente. Cada grupo escolhe seu representante para realizar a leitura de seus mapas.

O grupo GATO faz a leitura de forma similar às proposições escritas na intervenção 15. Para este grupo "*função é uma regra que associa o elemento x pertencente ao Conjunto A ao elemento y pertencente ao Conjunto B denominado*

Contradomínio. O Elemento x é denominado Variável Independente, o Elemento y denominado Variável Dependente, associado ao Contradomínio e para todo x, existe um único y. Função é representada por f: A $\rightarrow$ *B. Função é uma regra que pode ser representada por equações formadas por expressões algébricas formadas por variáveis e equações formadas por incógnitas*".

O grupo PEIXE também realiza a leitura de seu mapa conceitual afirmando que "*função é uma regra que relaciona conjuntos através da condição que é qualquer que seja x pertencente ao conjunto X existe um único y pertencente ao conjunto Y. Função é uma regra que relaciona conjuntos que são divididos em Domínio e Contradomínio. Domínio representado pelo Conjunto Y, não, é o contradomínio que é representado pelo conjunto Y, e contradomínio contém o conjunto imagem definido por y pertencente ao conjunto Y tal que f(x) = y. E o Domínio é representado pelo Conjunto X. A regra pode ser uma equação que tem incógnita e expressões algébricas. Equação que contém Variável Independente que pertence ao Domínio e a equação também contém a Variável Dependente que pertence ao Contradomínio*".

- **As críticas do grupo GATO para o grupo PEIXE**

Na 2ª parte, as críticas aos trabalhos desenvolvidos são iniciadas. O grupo GATO afirma que as flechas que se cruzam no mapa do grupo PEIXE não auxiliam na compreensão das idéias do mapa conceitual. Os ciclos que se formam não o tornam compreensível. O grupo PEIXE concorda e afirma que também tinha visualizado essa falha. Considera a relação estabelecida entre equação e variáveis dependente e independente compreensível. Gosta tanto da idéia que relata a possibilidade de introduzi-la posteriormente na confecção do mapa de seu grupo.

Quando o grupo PEIXE, em seu mapa conceitual, afirma que "*função é uma regra que relaciona conjuntos e são divididos em...*", o grupo GATO compreende que é a função que se divide dessa forma e não os conjuntos. A forma de apresentar esse resultado demonstra, portanto, um duplo sentido.

O grupo GATO considera positiva a forma que o grupo PEIXE apresenta a relação entre função e regra escrevendo que "*função é uma regra que relaciona conjuntos através da condição que é...*", porque insere na definição de função justamente aquilo que eles não conseguiram introduzir, o conceito de condição. Afirma que fica faltando uma palavra de ligação entre incógnita e expressões algébricas. O grupo PEIXE responde que realmente não colocou nenhuma palavra porque não sabia o que escrever. Pergunta inclusive se poderia colocar a palavra “contém”.

- **As críticas do grupo PEIXE para o grupo GATO**

O grupo PEIXE obtém a palavra para tecer suas críticas ao grupo GATO. Inicia afirmando que da maneira como foi colocado no mapa é possível compreender que x sempre é uma variável independente e y é sempre uma variável dependente. Porém, nem sempre isso é verdade porque x e y podem trocar de papéis.

Em resposta, o grupo GATO afirma que f: A $\rightarrow$ B é uma função onde A é o domínio e B é o contradomínio. Em seguida, coloca que x pertence a A e por isso é denominado variável independente e que y pertence a B e por isso é denominado variável dependente. Percebe a necessidade de escrever o elemento x justamente para dizer que esse x pertence ao domínio. Considera não estar errado escrever dessa forma desde que todos os conceitos fiquem bem definidos.

O grupo PEIXE diz que na apresentação das condições da função faltam as palavras de ligação. O grupo GATO responde que eles tentaram colocar, mas não encontraram uma palavra que consideraram adequada. Pensaram em colocar condição 1 e condição 2, mas preferem não fazê-lo. Escrevem as condições separadamente para mostrar que são duas essas condições.

Outra crítica acontece em relação ao fato do elemento x pertencer à imagem. O grupo PEIXE afirma que a função aplicada no x é que deve pertencer à imagem. O grupo GATO responde que o elemento y associado ao elemento x pertence à imagem. Mesmo assim, concorda com os colegas do outro grupo afirmando que, da forma como foi colocado, parece que o elemento x é que pertence à imagem.

Considera que se uma pessoa fizer a leitura dessa parte do mapa, pensaria que x pertence à imagem, depois perceberia também que a imagem está dentro do contradomínio e poderia considerar que o domínio é igual ao contradomínio. Confessa que ao tentar relacionar imagem e contradomínio apresentou grande dificuldade. Afirma que a forma como o grupo PEIXE apresenta a relação entre contradomínio e imagem é ótima.

O grupo PEIXE considera que ficou confuso quando o grupo GATO disse que o “*elemento y, se y = f(x), y pertence à imagem*”. Em resposta, os componentes do grupo GATO afirmam que também têm dúvida, não sabiam como desenvolver o raciocínio para essa relação. Sugerem a junção dos elementos dos dois mapas porque acreditam que um mapa pode corrigir as falhas do outro reciprocamente.

- **As críticas da pesquisadora**

A 3ª parte se baseia nas críticas que a pesquisadora realiza sobre os mapas construídos. Os temas são abordados de tal forma que contemplem os dois grupos simultaneamente, com exceção das situações em que seja necessário o respeito da individualidade de cada grupo.

A principal pergunta em relação ao conceito de função é a seguinte: “Função é uma regra que associa o elemento x pertencente ao Conjunto A ao elemento y pertencente ao Conjunto B ou função é uma regra que diz como associar cada elemento x pertencente ao Conjunto A a um elemento y pertencente ao Conjunto B?” Após discutirem sobre o assunto, o grupo GATO afirma que a regra é aquela que diz como acontece a associação, pois, na realidade quem faz a associação é a função. O grupo PEIXE concorda sem tecer comentários.

No que diz respeito às condições, o autor Lages Lima (1998) utiliza as palavras “exceção” e “ambigüidade” para representá-las. A dúvida se pauta no fato dos alunos não terem utilizado esses termos para representar as condições de uma função. O grupo GATO responde dizendo que pensou em utilizá-las, mas a linguagem matemática, por ser mais familiar, torna a idéia e sua representação mais completas. O grupo PEIXE observa que consideram as duas condições em uma única sentença matemática. Preferem utilizar uma linguagem matemática porque não sabem como utilizar as palavras “exceção” e “ambigüidade” para relacionar as condições com o conceito de função.

Em relação ao conceito de conjunto imagem, a compreensão do que os alunos apresentam em seus mapas conceituais fica comprometida. A pesquisadora questiona qual a compreensão que eles apresentam sobre o conceito de conjunto imagem. O grupo GATO afirma que imagem é subconjunto do contradomínio, por isso, no mapa conceitual enfatiza a palavra subconjunto. O grupo PEIXE tenta explicar o conceito verbalmente, mas não obtém êxito. Afirma que conhece o conceito de imagem, mas no momento de escrevê-lo, a situação se complica. Finaliza não explicando o que considera sobre o conceito de imagem.

Em relação à definição do conceito de equação a pesquisadora questiona por que os alunos não utilizam o conceito de igualdade. O grupo GATO afirma que esse conceito não está apresentado no texto que receberam. Queria colocar que equação é formada por expressões algébricas, incógnitas e igualdade. Porém, como não estava construindo um mapa específico para o conceito de equação, não sentiu a necessidade de apresentar todas as definições de todos os conceitos. O grupo PEIXE não tece comentários.

A pesquisadora comenta que os alunos não apresentam o conceito de incógnita. O grupo PEIXE afirma que, como não sabiam a diferença entre os conceitos de incógnita e variável, não sabiam como escrevê-los no mapa conceitual. O grupo GATO não faz comentários. Todas as discussões são anotadas pelos integrantes do grupo em papel rascunho para utilizá-lo no próximo encontro, momento no qual terão a oportunidade de reconstruir os mapas conceituais produzidos.

Esta intervenção revela alguns aspectos importantes para o aprofundamento da compreensão sobre as relações conceituais discutidas. Como os alunos desenvolviam uma idéia sobre o conceito de função que se vinculava ao conceito de relação entre conjuntos, parece que aceitar a idéia de que uma função é uma regra e não uma relação, e ainda, uma regra que diz como relacionar elementos de dois conjuntos, é um aspecto a ser refletido.

A dificuldade em relacionar o conceito de imagem ao conceito de função parece estar vinculado à dificuldade de explicar, com palavras, como acontece essa relação. Pode ser que essa dificuldade esteja relacionada ao fato de ainda não compreenderem como essa relação de fato acontece. Compreendem a imagem como um conjunto, e mais, como um subconjunto do contradomínio que é um conjunto formador de uma função. Talvez a representação deste fato por meio da utilização de mapas conceituais é uma tarefa que necessite de mais tempo e mais experiência para ser efetivada.

Os alunos apresentam dificuldade em compreender os conceitos de incógnita e de variável, bem como, de estabelecer as semelhanças e as diferenças entre eles. É possível que, por esse motivo, os alunos apresentem dificuldade em expressá-los e relacioná-los ao conceito de função. Ao final do encontro, os alunos solicitam que a pesquisadora mostre seu mapa conceitual sobre função. Esta, por sua vez, afirma que antes de desenvolver as atividades propostas tinha construído seu mapa conceitual completo, mas que, neste momento não deve compartilhá-lo com o grupo porque pode influenciar suas idéias em elaboração e não obter resultados fidedignos para a pesquisa. Ela se dispõe a fazê-lo após o término dos trabalhos.

Intervenção 17 – A reconstrução dos mapas conceituais

O encontro acontece em 20/09/07 durante 72 minutos e, são apresentados aos alunos os mesmos conceitos apresentados na Intervenção 16. Os objetivos são verificar quais elementos os alunos modificam em seus mapas conceituais diante das críticas apresentadas no encontro anterior e investigar após a reconstrução dos mapas conceituais como os alunos pensam o conceito de função e a relação com os conceitos subjacentes.

- **A reconstrução dos mapas conceituais**

Na 1ª parte, os grupos recebem, além das definições formais sobre todos os conceitos abordados, os dois mapas conceituais, dos grupos GATO e PEIXE, finalizados. Todos os grupos realizam três alterações em seus respectivos mapas conceituais apresentadas e interpretadas de forma comparativa com os resultados obtidos em relação aos últimos mapas conceituais desenvolvidos.

O grupo GATO altera o conceito de função vinculando-o ao conceito de Lages Lima (1998) que o apresenta como uma regra que diz como associar elementos de dois conjuntos. Parece que a contribuição realizada pela pesquisadora é considerada relevante pelo grupo. A palavra “único” foi escrita pela primeira vez no mapa conceitual deste grupo. Mesmo assim, as condições continuam com seu lugar de destaque na representação gráfica, subdividindo-se, a princípio, em 1ª e 2ª condições. As palavras “domínio” e “contradomínio” são enfatizadas. A partir dessa nova localização, a definição e a relação com o conjunto imagem ficam simplificadas, com uma leitura linear. Como revelaram anteriormente, a palavra “subconjunto” continua existir nessa representação conceitual.

O grupo PEIXE prefere, neste primeiro momento, desenvolver apenas as idéias centrais relativas especificamente ao conceito de função. Diferentemente do grupo anterior, este mapa não faz uma referência direta às idéias de Lages Lima (1998) ao afirmar que função é uma regra que associa elementos de conjuntos e não que função é uma regra que diz como associar elementos de conjuntos. A nova estrutura possibilita uma leitura linear sobre a definição de função. È possível que os alunos tenham escolhido uma linha de pensamento que possa evidenciá-lo. É possível também que o acesso à leitura do mapa conceitual do grupo GATO tenha influenciado nessa decisão de modificação da estrutura gráfica.

As palavras “domínio” e “contradomínio” não estão ainda explícitas. A relação que estabelecem entre as variáveis dependente e independente e os conjuntos da função parece estar em processo de reelaboração. É possível que esse fato justifique a falta da palavra de ligação entre os conceitos citados.

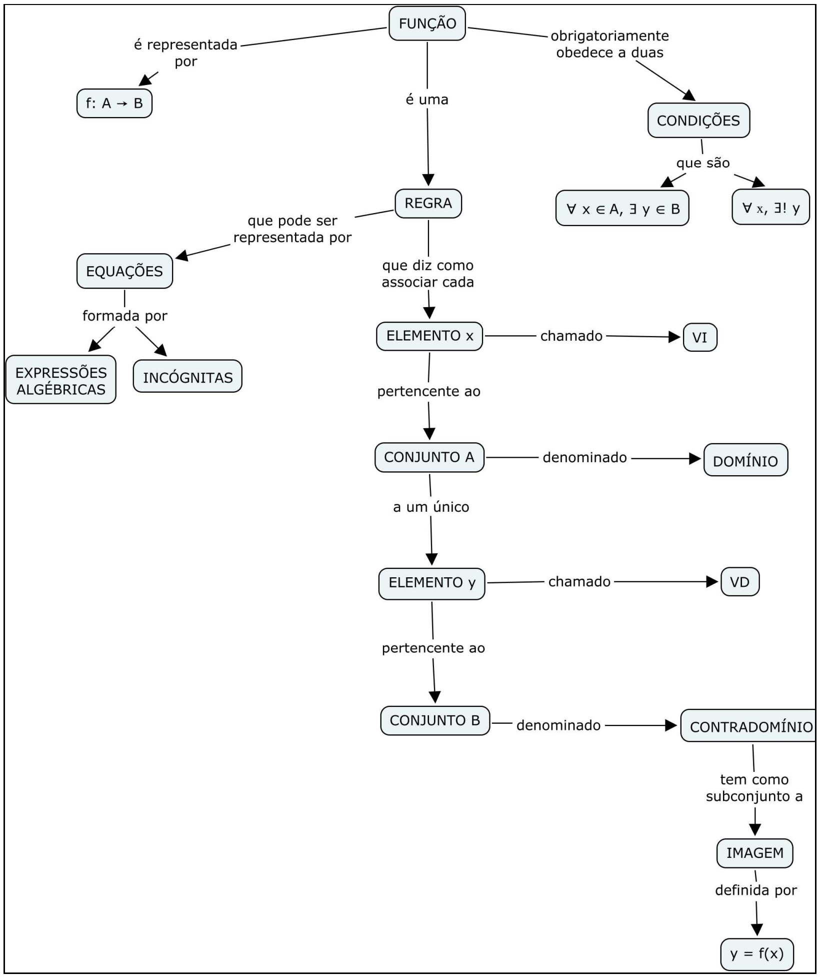
O grupo GATO relaciona os conceitos de variável, variável dependente e variável independente. É possível que este fato tenha contribuído pela supressão dos conceitos de domínio, contradomínio, imagem e as condições da função, do mapa conceitual. O grupo PEIXE insere, a partir do eixo principal as relações entre os conjuntos e os conceitos de domínio e contradomínio. O conceito de imagem é inserido posteriormente. A relação entre regra e equação também é apresentada.

Diferentemente das idéias desenvolvidas no mapa conceitual original da Intervenção 15, este grupo separa o conceito de condição do corpo principal do conceito de função propriamente dito. Destacam a representação do conceito de condição de forma mais geral contemplando em uma única representação, as condições de existência e unicidade da função.

O grupo GATO explicita as condições da função, da mesma forma que desenvolveu no mapa da Intervenção 15 (figura 20). Retira o conceito de variável, desloca os conceitos de variável dependente e independente, e, enfatiza suas relações com os elementos y e x, respectivamente.

Ao realizar a leitura do mapa conceitual é possível compreender que “*Função é uma regra que diz como associar cada elemento x, chamado variável independente, pertencente ao conjunto A denominado domínio, a um único elemento y, chamado variável dependente, pertencente ao conjunto B denominado contradomínio*”. Continua representando a função por f: A $\rightarrow$ B e as condições separadamente.

Figura 20 – Mapa Conceitual de Função – Revisão – Grupo GATO

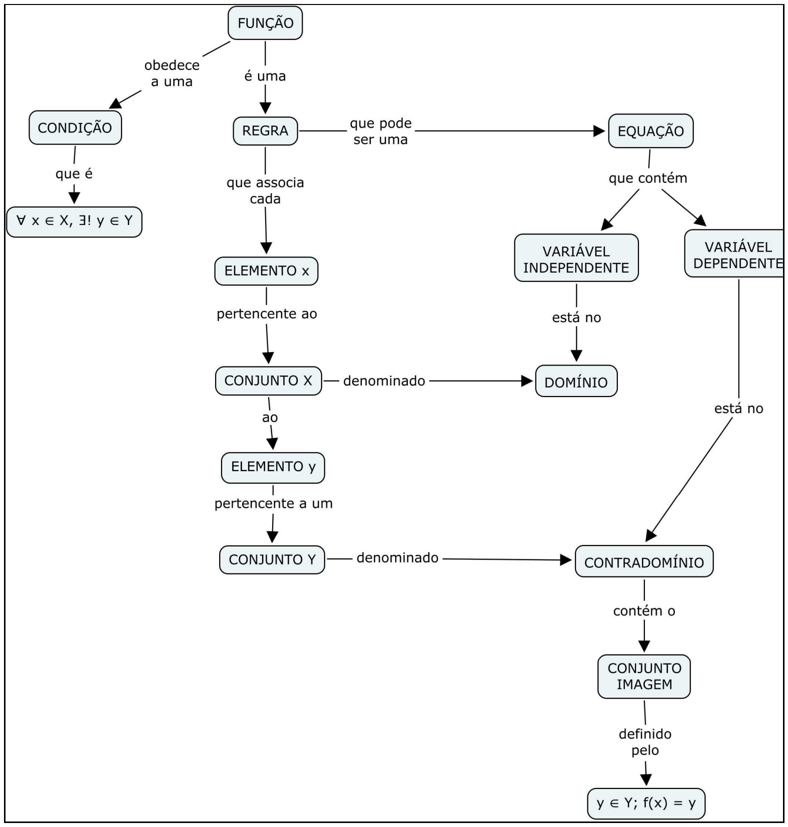


Fonte: grupo GATO

O grupo PEIXE acrescenta os elementos que se relacionam ao conceito de equação, respectivamente os conceitos de variável independente e variável dependente (figura 21).

A associação que realiza diretamente com o conjunto difere da relação realizada pelo grupo GATO. Prefere não utilizar os conceitos de incógnita, nem de expressão algébrica na relação com o conceito de equação. E, em relação ao conjunto imagem, utiliza a palavra “contém” para relacioná-lo ao contradomínio.

Figura 21 – Mapa Conceitual de Função – Revisão – Grupo PEIXE



Fonte: grupo PEIXE

Ao realizar a leitura do mapa conceitual é possível compreender que "*Função é uma regra que associa cada elemento x pertencente ao conjunto X denominado domínio, ao elemento y, pertencente ao conjunto Y denominado contradomínio*". Separa o conceito de condição do conceito de função e não representa a função no formato algébrico.

Os mapas conceituais desenvolvidos nessa última versão apresentam poucas alterações em relação aos mapas conceituais desenvolvidos na Intervenção 15. Alguns aspectos como o incremento de novas informações, a alteração gráfica dos mapas conceituais e o estabelecimento de novas relações, são sutis e revelam as idéias centrais sobre os conceitos abordados e suas relações.

- **As definições conceituais**

Na 2ª parte, os alunos desenvolvem um trabalho individual voltado para a reflexão e a elaboração conceitual. Em relação à elaboração escrita do conceito de função, o aluno GATO escreve que "*função é uma regra que diz como associar cada elemento pertencente a X, onde X é o domínio, a um único f(x) pertencente a Y, onde Y é a imagem*". O aluno PEIXE escreve que "*função é uma regra que diz como associar um elemento qualquer de um conjunto dado a outro elemento de outro conjunto dado*". A alteração do conceito de função pode ter influência da definição de função de Lages Lima (1998), bem como das críticas desenvolvidas na Intervenção 16.

Ao serem questionados sobre o fato dos conceitos de função e expressão algébrica apresentarem o mesmo conceito, o aluno GATO afirma que "*na expressão algébrica não há uma relação de dependência entre as variáveis o que na função é obrigatório*". Para o aluno PEIXE "*o conceito de expressão algébrica não envolve conjuntos ou regra*". Assim como na Fase 1, os alunos descartam a possibilidade do conceito de função ser igual ao conceito de expressão algébrica, justificando de maneiras diferentes. O primeiro aluno, enfatizando a obrigatoriedade da relação de dependência de uma função, e, o segundo, enfatizando a necessidade de conjuntos e regras para se apresentar uma função.

Em relação ao fato de as funções e equações apresentarem os mesmos conceitos, o aluno GATO escreve que "*apesar da maior parte das funções serem representadas por equações, há outras condições que devem ser obedecidas para ser uma função*". O aluno PEIXE afirma que "*o conceito de equação não envolve relação entre conjuntos*". Assim como na Fase 1, os alunos descartam a possibilidade do conceito de função ser igual ao conceito de equação. Para o primeiro aluno, a ênfase na característica da função ocorre em relação ao conceito de condição; para o segundo, a ênfase transparece a relação entre conjuntos.

Para o aluno GATO, uma função é formada por variáveis e incógnitas. Justifica-se afirmando que função "*contém variáveis dependentes e independentes, logo, como elas são variáveis, então na função existem variáveis. E quando a função é representada por equação e na equação existem incógnitas, logo, há incógnitas na função*". O aluno PEIXE, por sua vez, posiciona-se de forma diferente. Para ele uma função é formada somente por variáveis. Justifica-se afirmando que "*considerando que variável e incógnita têm conceitos diferentes, a função é formada apenas por variáveis: uma independente e a outra dependente*".

A palavra incógnita se faz presente apenas no mapa conceitual do grupo GATO, embora não esteja diretamente relacionada ao conceito de função. Ela não é utilizada pelo grupo PEIXE. As respostas teóricas apresentadas no parágrafo anterior estão, portanto, coerentes com as idéias apresentadas nos mapas conceituais. Para o aluno GATO, domínio de uma função é "*o conjunto que contém as variáveis independentes*", contradomínio é "*o conjunto que contém os números aos quais o* $x \in D$ *se ligam*" e imagem é o "*subconjunto do contradomínio onde* $y = f(x)$".

O aluno PEIXE considera que domínio é "*o conjunto de valores que a variável independente da função pode assumir*", o contradomínio é "*o conjunto de valores que a função aplicada na variável independente pode assumir*" e imagem é "*o conjunto formado pelos valores exatos que a função aplicada na variável independente assume*". O fato do conceito de domínio estar vinculado ao conceito de variável independente é desenvolvido desde a Fase 1 e continua ratificado na Fase 2, evidenciado pelos mapas conceituais. O contradomínio, porém, não se vincula ao conceito de variável dependente como transparece no mapa conceitual de ambos os grupos. É possível que a dúvida que perdurou durante os encontros da Fase 1 ainda persista.

Parece que os alunos não compreendem a relação entre variável dependente, contradomínio e imagem. Por outro lado, o conceito de imagem como um conjunto composto pelos elementos do contradomínio como resultado da aplicação da função nos elementos do domínio lhes é compreensível, tanto no aspecto escrito quanto no gráfico.

Ao serem questionados sobre a representação de uma variável independente, o aluno GATO afirma que essa variável representa os elementos do "*domínio, pois de acordo com o valor de x através da função se encontra o valor de y correspondente*". O aluno PEIXE escreve que essa variável também representa os elementos do domínio "*porque a variável independente varia independentemente da variável dependente*".

Os alunos se expressam espontaneamente ao relacionar a variável independente com os elementos do conjunto domínio da função. Esse fato pode comprovar o que foi discutido no parágrafo anterior. Ao serem questionados sobre a representação da variável dependente, o aluno GATO coloca que essa variável representa os elementos do conjunto "*imagem, pois a variável dependente são os elementos que dependem do valor de* $x \in D$". O aluno PEIXE escreve que essa variável representa os elementos do conjunto contradomínio. Para ele "*a variável dependente representa os valores que a função pode assumir dependendo da variável independente*".

Além do fato das respostas divergirem entre os alunos, elas nem sempre são constantes durante os encontros. O aluno GATO, por exemplo, no mapa conceitual final relaciona o conceito de variável dependente ao conceito de contradomínio. Neste momento, porém, também o relaciona ao conceito de imagem. Esse fato pode comprovar que essa relação ainda continua em processo de elaboração. Os resultados da construção dos mapas conceituais denotam que não há grandes alterações conceituais, nem grandes modificações nas relações da Fase 1. Os alunos GATO e PEIXE, no geral, sustentam os conceitos iniciais, consolidam relações e continuam com as dificuldades anteriores.

O conceito de função apresenta nova conceituação. O que anteriormente era visto como relação entre conjuntos passa a ser considerado regra que associa elementos de conjuntos. Sofre, em seguida, mais uma modificação diante das críticas. Passa a ser considerado regra que diz como associar elementos de conjuntos. A modificação conceitual pode não ser permanente. Como os alunos seguem o texto da mesma maneira como o autor descreve o conceito, isso pode ter influenciado a modificação conceitual, sem necessariamente ter se vinculado aos subsunçores existentes. Esse aspecto pode ser comprovado ou retificado posteriormente na Fase 3, em que os alunos aplicam conceitos discutidos na Fase 1 e organizados na Fase 2 da pesquisa.

Apesar de os alunos nunca terem trabalhado com a construção de mapas conceituais, conseguem desenvolver as atividades a contento, alcançando, em cada intervenção, os objetivos propostos.

Intervenção 21 – Problema 4 – Função e Biologia

Este encontro acontece em 04/10/07 durante 82 minutos e, é abordado o conceito de função de Lages Lima (1998), bem como os conceitos de equação e expressão algébrica de Imenes e Lellis (1998), variável dependente, variável independente, variável e incógnita de Soares (2005) e a relação entre função e variável dependente e independente apresentada por Ávila (1993). O objetivo é compreender e descrever como os alunos se organizam mentalmente para desenvolver padrão algébrico diante de um problema que envolve os conhecimentos sobre Biologia e como os alunos caracterizam esse padrão como função.

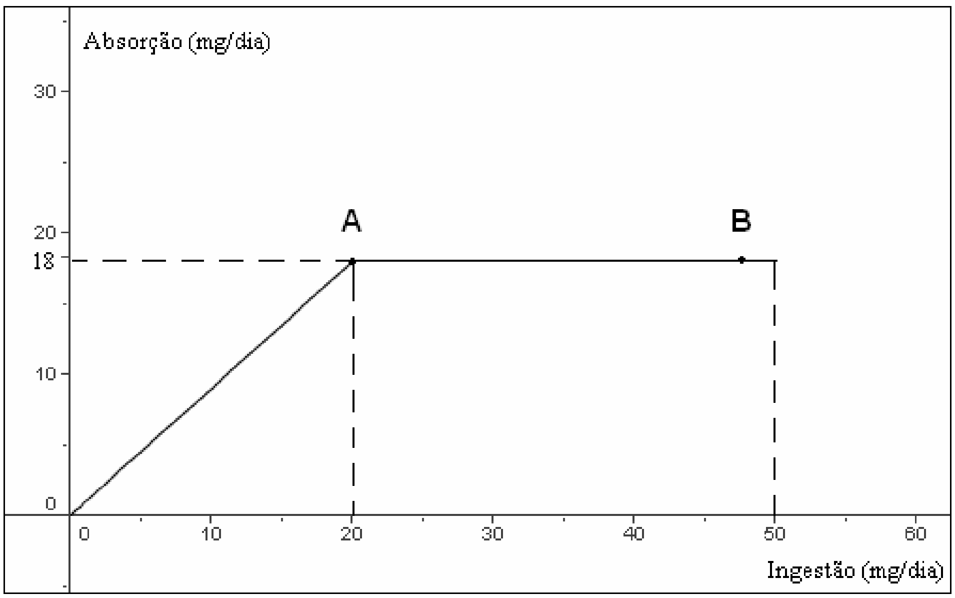
Na 1ª parte, os alunos recebem os conceitos formalizados sobre função e os demais conceitos subjacentes, além dos últimos mapas conceituais desenvolvidos.

- **O problema proposto e o processo de desenvolvimento de padrão algébrico**

Na 2ª parte, o problema é apresentado para os alunos de forma que possam ler e interpretar seu significado (figura 22).

"Um composto ao ser ingerido pelo organismo humano não é totalmente por ele absorvido. O mesmo acontece com o composto VOUMELHORAR que ao ser ingerido pelo corpo humano se comporta conforme o gráfico abaixo. (Considere o segmento AB paralelo ao eixo das abscissas). O fabricante do produto recomenda ainda que não sejam ingeridos mais do que 50 mg/dia, pois pode ocasionar problemas de superdosagem. Expresse matematicamente a relação entre a quantidade absorvida e a quantidade ingerida do composto VOUMELHORAR pelo organismo humano."

Figura 22 – Gráfico absorção x ingestão do composto



Fonte: Dante (2003, p. 123)

Os alunos sem saber quem escolher e ao mesmo tempo não querendo ser voluntários para ir ao quadro, sugerem o aluno PEIXE para desenvolver o problema. Ele concorda prontamente em ir à lousa. Inicia o processo desenhando o gráfico semelhantemente ao gráfico apresentado no protocolo. Em seu desenho, o eixo das abscissas é nomeado como "x" e não como "ingestão"; o eixo das ordenadas não é nomeado, nem como "y", nem como "absorção".

Sua primeira dúvida, ainda neste momento de reprodução do desenho na lousa, é em relação ao ponto B. Ele questiona se o ponto B tem abscissa 50. O aluno GATO afirma que B deveria ter abscissa 50, mas parece não ter. Portanto, em sua opinião, o gráfico apresenta um erro e consideram a abscissa do ponto B igual a 50.

Devido ao fato dos alunos pedirem que os eixos sejam nomeados, o aluno PEIXE modifica o desenho do gráfico, nomeando o eixo horizontal como eixo “x” e o eixo vertical como eixo “y”. Acrescenta que, quando x for 20, por exemplo, y será 18, e, quando x for zero, y também será zero.

Após a configuração do desenho na lousa, o aluno PEIXE inicia sua interpretação. Afirma que a figura desenhada é um triângulo e por isso precisa-se calcular a área desse triângulo. O aluno GATO discorda afirmando que a relação entre a absorção e a ingestão não se encontra dentro do triângulo, ou seja, na área do triângulo, está apenas em sua hipotenusa. O aluno PEIXE colabora com outro pensamento para a interpretação do problema. Afirma que, para estabelecer a relação entre a absorção e a ingestão, é necessário calcular o coeficiente angular da reta utilizando dois pontos.

A pesquisadora intervém neste momento. Questiona o que deve ser feito para estabelecer a relação entre uma ingestão de 5 mg/dia e seu correspondente em absorção. O aluno PEIXE responde que é necessário posicionar o 5 no eixo x, ir até a reta e posicionar um valor qualquer no eixo y; quando alcançar y = 18, torna-se uma constante.

A pesquisadora formula outra questão: “O que deveria ser feito para estabelecer a relação entre uma absorção de 15 mg/dia e seu correspondente em ingestão?”. O aluno PEIXE explica que a pessoa deve posicionar o 15 no eixo y e levar até a reta do gráfico encontrando um suposto correspondente no eixo x. O aluno GATO acrescenta que se o gráfico é uma reta, então, representa uma função do 1º grau. A sugestão surge do próprio aluno GATO. Ele afirma que é interessante utilizar a fórmula geral y = ax + b para substituir os pontos do gráfico. O aluno PEIXE escreve na lousa a seguinte seqüência:

$$20 = 18.a + b$$

$$b = 0$$

$$a = \frac{20}{18} = \frac{10}{9}$$

Ao ser questionado sobre o porquê da escolha realizada para as variáveis x e y, afirma que y é igual a 20 e x é igual a 18 porque está desenhado no gráfico. E, ao observar este mesmo gráfico novamente, percebe que cometeu um erro. Modifica a seqüência da seguinte forma:

$$18 = 20.a + b$$

$$b = 0$$

$$a = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$$

$$y = \frac{9}{10}.x$$

Conclui que a relação entre x e y pode ser representada como

$$f(x) = \begin{cases} \frac{9}{10}.x, & se \ \ x \leq 20 \\ 18, & se \ \ 20 < x \leq 50 \end{cases}.$$

O aluno GATO observa a relação e afirma que os valores de x não podem ser negativos. Devem ser considerados a partir do zero. O aluno PEIXE refletindo sobre o assunto escreve a relação acrescentando que $f: R \rightarrow R$, com R representando o conjunto dos números reais e $f(x) = \begin{cases} \frac{9}{10}.x, & se \ \ 0 \leq x \leq 20 \\ 18, & se \ \ 20 < x \leq 50 \end{cases}$.

Ao serem questionados sobre os elementos que sempre se alteram no problema, os alunos, PEIXE e GATO, afirmam ser a absorção e a ingestão. O aluno GATO acrescenta que a ingestão só pode absorver $\frac{9}{10}$ da quantidade ingerida, até alcançar 20 mg/dia. O aluno PEIXE considera que a ingestão aumenta por dia até 50 mg e não 20 mg. Os alunos acrescentam que, em relação ao comportamento das variáveis, a ingestão aumenta até um determinado momento, e, fica constante em seguida. Além disso, esse aumento acontece no conjunto dos números reais. A absorção, por sua vez, aumenta até 18 mg/dia também variando no conjunto dos números reais.

Ao serem questionados sobre a nomenclatura utilizada nas expressões algébricas, o aluno PEIXE afirma que utiliza x, y e f(x) porque os nomes oficiais dos eixos são x e y. Neste caso, o que representa a ingestão é a variável x e o que representa a absorção é a variável y.

Em relação aos protocolos, o aluno GATO se expressa da mesma maneira que o aluno PEIXE ao utilizar a representação algébrica da relação entre absorção e ingestão do composto, escrevendo-a da seguinte maneira: $f(x) = \begin{cases} \frac{9}{10}.x, & se \ \ 0 \leq x \leq 20 \\ 18, & se \ \ 20 < x \leq 50 \end{cases}$, na qual x representa a quantidade ingerida e f(x) a quantidade absorvida. O aluno PEIXE não preenche diretamente seu protocolo devido ao fato de estar desenvolvendo o raciocínio do problema na lousa.

Os alunos apresentam dificuldade na escolha da variável à qual devem atribuir valores numéricos. Neste caso, especificamente, por utilizarem um modelo definido para representação do problema, no caso a fórmula reduzida da reta para os valores de x entre 0 e 20 mg, pode ter contribuído para a reflexão dos alunos sobre as informações do problema. Parece que fazer a associação entre o eixo x e a ingestão e o eixo y e a absorção do composto não é uma associação simples de realizar.

Essa dificuldade também transpareceu no problema anterior. Como afirma Sierpinska (1992), fazer com que o aluno compreenda quem são os sujeitos que compõem a função e como eles atuam dentro dela é fundamental para que se compreenda a relação desenvolvida como função. Dessa forma, definir as variáveis e ter clareza sobre o papel de cada uma dentro da relação matemática pode ser considerado o primeiro passo para a compreensão dessa relação como função.

Conhecer a regra da relação é imprescindível como afirmam os alunos, mas compreender como as variáveis atuam dentro dessa regra é o que poderá de fato contribuir para análise dessa relação enquanto função.

- **A aplicação do padrão algébrico em situações reais**

A proposta é questionar se o padrão desenvolvido é verdadeiro para quaisquer valores numéricos e com isso prepará-los para definir os conjuntos base para o desenvolvimento da relação enquanto função.

O primeiro questionamento é proposto da seguinte forma: “Sabendo-se que uma pessoa ingeriu 17 mg desse composto em um dia, qual é a quantidade absorvida pelo seu organismo?”. O aluno PEIXE escreve na lousa a seguinte seqüência:

$$f(17) = \frac{9}{10}.17$$

$$y = f(17) = 15{,}3 \text{ mg/dia}$$

Explica que uma pessoa ao ingerir 17 mg deste composto, absorve somente 15,3 mg. Ao serem questionados sobre a possibilidade de 15,3 mg ser um número adequado ou não para o problema, o aluno GATO questiona a pergunta “*por que não seria possível ter 15,3 mg de absorção?*”. O aluno PEIXE afirma que é possível sim, pois esse valor faz parte do contradomínio. Conclui que a função fica definida como $f : R \to R$. O aluno GATO discorda e diz que se a função fosse definida dessa forma, poderia existir ingestão -1, -2, -3, o que não é verdade. Segundo ele, a função deve ser definida nos reais não negativos. O aluno PEIXE afirma que a função pode ser definida como $f: R_+ \to R_+$ ou como $f: R_+ \to R$.

O próximo questionamento é proposto da seguinte forma: “Se uma pessoa absorveu somente 10 mg/dia do composto VOUMELHORAR, ela ingeriu nesse dia quantos mg?”. O aluno PEIXE escreve na lousa a seguinte representação:

$$f(10) = \frac{9}{10}.10$$

Os alunos dizem que esta não é a forma correta de responder à pergunta proposta já que 10 mg/dia representa a absorção e não a ingestão. O aluno corrige conforme a seqüência abaixo:

$$10 = \frac{9}{10}.x$$

$$9.x = 100$$

$$x = \frac{100}{9}$$

$$x = 11{,}1 \text{ mg/dia}$$

Conclui que a pessoa, em um dia, ingere 11,1 mg e absorve 10 mg. Ao serem questionados sobre a viabilidade da resposta 11,1 mg para o problema, o aluno GATO afirma que 11,1 mg pode ser uma resposta adequada porque o medicamento poderia ser comprado pelo peso. Diante da troca de ingestão por absorção ocorrida inicialmente, o aluno GATO diz que também trocou as variáveis mentalmente. Considera que o ideal é trocar a letra x pela palavra ingestão e a letra y pela palavra absorção, para não haver mais problemas.

O aluno PEIXE afirma também ter se confundido, mas prefere trocar a letra x, representante da ingestão pela letra i e a letra y, representante da absorção, pela letra a, por serem mais significativas. É possível que os alunos tenham compreendido que os valores para a ingestão e para a absorção devem ser necessariamente positivos. Por outro lado, podem ser valores de qualquer natureza dentre os reais.

Outra informação importante em relação a estes valores é que eles não crescem indefinidamente. No caso, a absorção tem um limite superior igual a 18 mg/dia e a ingestão tem limite superior igual a 50 mg/dia. É possível que os alunos tenham considerado esse aspecto para representar a relação entre absorção e ingestão. A confirmação desse fato, porém, só é possível após a definição da relação funcional e de seus respectivos conjuntos.

- **A caracterização do padrão algébrico como função**

O objetivo é compreender quais elementos os alunos destacam para caracterizar o padrão algébrico desenvolvido como função e como justificam essa escolha. A pergunta realizada pela pesquisadora que inicia o processo é a seguinte: “Essa relação representa uma função?”. Novamente os alunos preferem responder primeiramente à próxima pergunta proposta no protocolo que se refere a “Qual é o domínio, o contradomínio e a imagem dessa função?”. Este fato pode continuar indicando que, para os alunos, a definição dos conjuntos domínio e contradomínio é o principal aspecto para a caracterização da função.

Quem inicia a discussão é o aluno GATO. Define a função f: $R_+ \to R_+$ porque o valor de x não pode ser negativo. Ao serem questionados sobre os valores do contradomínio da função, o aluno GATO modifica não só o contradomínio, mas também a representação dessa função para A: $R_+ \to R$.

O aluno PEIXE adaptando a idéia do colega escreve que a função pode ser representada por A: $R_+ \to R$ onde A = $\begin{cases} \frac{9}{10}.in, \ se \ \ 0 \le in \le 20 \\ 18 \ , \ se \ \ 20 < in \le 50 \end{cases}$, na qual in representa a variável correspondente à quantidade ingerida do composto. O aluno GATO afirma que, nessa representação, a função A pode ser confundida com a variável A. O ideal é retirar a letra A da função e defini-la como uma função f, na qual f: $R_+ \to R$.

O aluno PEIXE representa a função adaptando novamente a idéia do colega definindo-a como f: $R_+ \to R$, A = f(i) = $\begin{cases} \frac{9}{10}.i, \ se \ \ 0 \le i \le 20 \\ 18, \ se \ \ 20 < i \le 50 \end{cases}$, na qual a letra i representa a variável ingestão e f(i) a variável absorção do composto. O aluno GATO afirma que simplesmente definir a função e escrever sua lei de formação não é suficiente para realmente se ter uma função. É necessário provar que essa relação satisfaz às condições de unicidade e existência dessa função.

- **A prova da unicidade da função**

O aluno GATO afirma que, para provar a condição de unicidade de uma função, é necessário provar que se $i_1 \neq i_2$ então $f(i_1) \neq f(i_2)$. É importante considerar o conjunto ao qual a variável ingestão faz parte. E, ao refletir sobre esse aspecto, considera que essa variável não pertence ao conjunto R_+ e sim ao intervalo [0, 50].

Este aluno compreende que o domínio que determinaram para a função estava equivocado e precisa ser trocado. Senão modificar o domínio existirão valores nesse conjunto que não terão correspondentes no contradomínio. Assim, o domínio é formado pelos números reais compreendidos entre 0 e 50, porque o gráfico não fornece informações sobre a ingestão de valores maiores do que 50 mg/dia .

A função passa a ser definida como: f: $[0,50] \rightarrow R$,

$$A = f(i) = \begin{cases} \frac{9}{10}.i, \; se \;\; 0 \leq i \leq 20 \\ 18, \; se \;\; 20 < i \leq 50 \end{cases}.$$

O aluno PEIXE concordando com o colega inicia sua demonstração utilizando primeiramente os valores para o domínio [0, 20] de acordo com a seqüência:

$$\begin{aligned} & f(i_1) = f(i_2) \\ & \frac{9}{10}.i_1 = \frac{9}{10}.i_2 \\ & i_1 = i_2 \end{aligned}$$

Prossegue a prova considerando o domínio (20, 50] de acordo com a seqüência abaixo:

$$\begin{aligned} & f(i_1) = f(i_2) \\ & 18 = 18 \end{aligned}$$

Fica em dúvida se provou que i_1 é igual a i_2 porque não os representa no resultado final da prova. Como não há uma discussão sobre o assunto prossegue com a prova da existência, prova esta que não realizada na intervenção 18.

- **A prova da existência da função**

O aluno GATO inicia a discussão afirmando que para provar a existência da função nos reais é necessário supor que a variável i não pertence ao intervalo [0, 50]. O aluno PEIXE questiona como deve proceder. Sabendo-se que f(i) não pertence ao intervalo real, pertence a qual intervalo? O grupo responde que essa variável deve pertencer ao conjunto dos complexos e a variável i deve ser igual a a + b.i, sendo este último i igual a $\sqrt{-1}$.

Neste momento, todos concordam que ter duas letras “i” confunde a execução da prova. Dessa forma, decidem substituir o i imaginário por $\sqrt{-1}$ na qual f(i) = b. $\sqrt{-1}$. Afirmam também que o valor de “a” deve ser igual a zero para garantir que a variável i seja um número complexo puro e não pertença ao conjuntos dos números reais.

Considerando a variável i pertencente ao primeiro intervalo de [0, 20], o aluno PEIXE desenvolve a seguinte seqüência:

$$\frac{9}{10}.i = b.\sqrt{-1}$$
$$i = \frac{10.b.\sqrt{-1}}{9}$$

Essa conclusão sobre a variável i gera um absurdo matemático já que i deve pertencer ao intervalo [0, 20], e portanto, um intervalo no conjunto dos reais. Todos os alunos percebem o fato. O aluno PEIXE pensa da mesma forma para provar a existência da função com i pertencente ao segundo intervalo (20, 50]. Desenvolve o seguinte raciocínio:

$$f(i) = b.\sqrt{-1}$$
$$18 = b.\sqrt{-1}$$

A conclusão sobre a variável i no intervalo (20,50] gera outro absurdo, já que 18, sendo um número real, não pode ser ao mesmo tempo um número complexo puro. O aluno PEIXE afirma que finalmente provou a unicidade e a existência dessa função. O aluno GATO acrescenta que provar que uma relação é função significa provar as condições dessa função, ou seja, que para todo i pertencente ao intervalo [0, 50] existe um único A pertencente ao conjunto dos reais.

Em relação aos protocolos, o aluno GATO escreve que essa relação representa uma função porque “*obedece as condições de existência e de unicidade*” da função. Considera o conjunto imagem como “*Im = [0, 18]*”. O aluno PEIXE como não preenche diretamente o protocolo, confirma exatamente as idéias do colega verbalmente. Definir o domínio e o contradomínio dessa função também não é uma tarefa de simples execução. Percebem os erros cometidos somente no momento de executar a prova das condições da função.

Os alunos utilizam os conceitos de domínio, contradomínio, regra e as condições de existência e unicidade para caracterizar a função que representa a relação entre a ingestão e a absorção do composto do problema. É possível, portanto, que os alunos tenham utilizado como base os conceitos teóricos de Lages Lima (1998) ainda em processo de ancoragem aos subsunçores.

As dificuldades enfrentadas para reconhecer os valores numéricos máximos de cada variável não surgem durante o processo de definição das variáveis, mas durante o processo da prova das condições da função. Determinar o domínio e o contradomínio da função não é suficiente para que os alunos definam os conjuntos adequados cujos elementos são representados pelas variáveis ingestão e absorção.

A utilização da prova matemática, mesmo que realizada de maneira não formal, para a verificação se as condições da função estão sendo satisfeitas pode ter auxiliado os alunos na compreensão da própria função desenvolvida.

- **A descaracterização da função**

O objetivo é compreender quais os elementos os alunos utilizam para descaracterizar a função desenvolvida e como justificam suas escolhas. A pesquisadora apresenta o seguinte questionamento: “O que você faria para que essa relação entre a quantidade absorvida e a quantidade ingerida desse composto não representasse uma função?”. O aluno GATO explica que para a relação não representar função é necessário que as condições, pelo menos uma delas, não sejam satisfeitas.

Para não satisfazer a condição da existência é necessário trocar o domínio ou então desconsiderar o valor 18 do contradomínio. Não é função porque não apresenta lei de correspondência. O aluno GATO contribui com um novo raciocínio. Se o contradomínio for trocado pelo conjunto dos números naturais então não há uma correspondência de todos os elementos. Neste caso, por exemplo, quando a variável i for igual a 17 não existirá uma correspondência.

O aluno PEIXE escreve na lousa a função g: $[0,50] \rightarrow N$,

A = f(i) = $\begin{matrix} \frac{9}{10}.i, & se \;\; 0 \leq i \leq 20 \\ 18, & se \;\; 20 < i \leq 50 \end{matrix}$. Afirma que nesta situação muitas correspondências deixam de existir, por exemplo, i = 15,3 mg.

Para que a condição de unicidade não seja satisfeita, o aluno GATO afirma que se pode relacionar para um valor do domínio da função pelo menos dois valores do contradomínio. Sugere que na relação com f(i) = 18 seja utilizado o intervalo (10, 50]. Acrescenta que, se o contradomínio for igual ao conjunto dos naturais, a função deixará de satisfazer às duas condições. O aluno PEIXE define uma nova relação como h: $[0,50] \rightarrow \mathrm{N}$, com A = f(i) = $\begin{matrix} \frac{9}{10}.i, & se\ \ 0 \leq i \leq 20 \\ 18, & se\ \ 10 < i \leq 50 \end{matrix}$.

Em relação aos protocolos, o aluno GATO se expressa da seguinte maneira:

"*condição 1 (não existência) g:* $[0,50] \rightarrow \mathrm{N}$, *A= f(i) =* $\begin{matrix} \frac{9}{10}.i, & se\ \ 0 \leq i \leq 20 \\ 18, & se\ \ 20 < i \leq 50 \end{matrix}$ *e condição 2 (não unicidade) h:* $[0,50] \rightarrow \mathrm{N}$, *com A = f(i) =* $\begin{matrix} \frac{9}{10}.i, & se\ \ 0 \leq i \leq 20 \\ 18, & se\ \ 10 \leq i \leq 50 \end{matrix}$ ".

O aluno PEIXE não responde por escrito o formulário devido ao fato de desenvolver seu raciocínio na lousa. Apesar dos alunos terem modificado a função respectivamente para g e h, não o fazem na lei de formação, conservando a imagem f(i). Esse fato pode ter acontecido porque o nível de exigência mental para este problema é maior do que para o problema da intervenção 18. Ao serem questionados sobre a falha, prontamente os alunos trocam a letra f pelas letras g e h em cada situação.

As modificações realizadas acontecem novamente em relação ao contradomínio e à lei de formação da função. Para não satisfazer a condição da existência é necessário modificar o contradomínio de tal forma que existam valores no domínio que não apresentem uma correspondência no contradomínio. Para não satisfazer a condição da unicidade é necessário modificar a lei de formação para garantir que existam dois correspondentes ou mais no contradomínio.

O aluno GATO até a construção dos mapas conceituais na intervenção 17 associa a variável dependente como representante ora do conjunto imagem, ora do contradomínio da função. Nessas duas últimas intervenções, este aluno, mesmo sem verbalizar sua percepção a respeito do assunto, relaciona em todos os momentos a variável dependente ao conjunto contradomínio, e não mais ao conjunto imagem. Pode ser que esses momentos de aplicação do conceito de função nas resoluções de problemas tenham contribuído para elucidar essa dúvida persistente em todo o processo. Esse fato pode ser comprovado no próximo período, o da auto-avaliação.

ANEXOS

ANEXO I – Grade Curricular do Curso de Licenciatura em Matemática semestre 2007.1

GRADE CURRICULAR PARA A LICENCIATURA
PLENA EM MATEMÁTICA
Total: 2.790 Horas - aula - 168 Créditos
FLUXOGRAMA

SEM	DISCIPLINAS			
1.	*CH401 - 2.0.0 Créditos* Intr. à Univ. e ao curso 30 h	*CT176 - 10.0.0 Créditos* Fundamentos e Cálculo Diferencial e Integral I 150 h	*CT173 - 4.0.0 Créditos* Geometria Euclidiana I 60 h	*CT784 - 6.0.0 Créditos* Fund. de Computação 90 h
2.		*CT110 - 6.0.0 Créditos* Calc. Dif. Integral II Pré-req. CT176 90 h	*CT174 - 4.0.0 Créditos* Geometria Euclidiana II Pré-req. CT173 60 h	*CT245 - 8.2.0 Créditos* Fund. de Física Pré-req. CT176 180h
3.	*CT195- 2.0.0 Créditos* Laboratório de Matemática 30 h	*CT150 - 6.0.0 Créditos* Geometria Analítica I (clássica) 90 h	*CH405 - 4.0.0 Créditos* Psic. Evolutiva II (adolescência) 60 h	*CT347 –8.2.0 Créditos* Fund. de Química 180 h
4.	*CT153 -4.0.0 Créditos* Geometria Analítica II (vetorial) Pré-req. CT150 60 h	*CT236 - 2.0.2 Créditos* Prática de Ensino de Ciências / estágio 120 h	*CH406 - 4.0.0 Créditos* Psic. da Aprendizagem Pré-req. CH405 60 h	*CS355 -8.2.0Créditos* Biologia para Ciências Exatas 180 h
5.	*CT111 - 6.0.0 Créditos* Cálc. Dif. Integral III Pré-req. CT110 90 h	*CT146 - 6.0.0 Créditos* Desenho Geométrico 90 h	*CT134 - 4.0.0 Créditos* Intr. Teor. dos Números 60 h	*CT253 - 4.0.0 Créditos* Ciências Tecnologia e Sociedade 60 h
6.	*CT713-6.0.0 Créditos* Probabilidade I 90 h	*CT132 - 6.0.0 Créditos* Estruturas Algébricas I Pré-req. CT134 90 h	*ES101 - 4.0.0 Créditos* Didática Geral I 60 h	*ES223 - 4.0.0 Créditos* Estr. Func. Ens. fund. e médio 60 h
7.	*CT179 -6.0.0 Créditos* Fundamentos e álgebra Linear I Pré-req. CT132 90 h	*CTXXX - 4.0.0 Créditos* Optativa 60 h	*CT159 - 6.0.0 Créditos* Geometria Descritiva 90 h	*CT192 - 2.0.4 Créditos* Prática de Ensino de Matemática / estágio Pré-req. ES101 210 h
8.	*CT131- 6.0.0 Créditos* Álgebra Linear II Pré-req. CT179 90 h	*CTYYY- 6.0.0 Créditos* OPTATIVA 90 h	*CT721- 4.0.0 Créditos* Cálculo Numérico Pré-req. CT110 60 h	*CT703 - 4.0.0 Créditos* Estatística Descritiva 60 h

DISCIPLINAS OPTATIVAS (04 CRÉDITOS)

CT 172 - Matemática Financeira(CT176)
CT 183 - Funções de Var. Complexas (CT176)
CT 187 - Intr. à Geometria Diferencial (CT111)
CT 714 - Probabilidade II(CT713)
CT 163 - Educação Matemática I
CT133- Estruturas Algébricas II(CT132)
CT 181 - Seminário I - Matemática (CT176)
CT116 - Cálculo. Diferencial e Integral IV(CT111)

DISCIPLINAS OPTATIVAS (06 CRÉDITOS)

CT142 - Análise Matemática (CT116)
CT 138 - Séries e Eq. Diferenciais (CT111)
CT 189 - Aplicações do Cal. Dif. Integral(CT110)
CT 182 - Seminário II(CT111)
CT139 - Eq. Diferenciais e Aplicações (CT110)

Legenda: Em *X.Y.Z Créditos*, temos: X= número de créditos teóricos, Y= número de créditos de laboratório e Z= número de créditos de estágio.
Um crédito teórico corresponde a 15 horas - aula, Um crédito de laboratório corresponde a 30 horas - aula e Um crédito de estágio corresponde a 45 horas - aula.

ANEXO II – Ementa da disciplina de Fundamentos de Cálculo Diferencial e Integral I ofertada em 2007.1

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
DISCIPLINA: FUNDAMENTOS E CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL
Nº DE CRÉDITOS: 10 CÓDIGO CT176 C. HORÁRIA: 150 HORAS/AUL
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

EMENTA:

Funções e gráficos(função do 1° grau, progressão aritmética, função quadrática, números complexos, funções trigonométricas, função exponencial, progressão geométrica), Limite e continuidade de funções reais, Derivada, Integral indefinida, Integral definida.

OBJETIVOS:

i) Revisar alguns tópicos estudados no segundo grau, considerados fundamentais à introdução do estudante à matemática do 3° grau(60 horas)

ii) Introduzir o Cálculo diferencial e integral, ferramenta indispensável a todos que pretendem estudar matemática em nível superior, com a intenção de obter uma graduação Plena em Matemática(90 horas)

CONTEÚDO PROGRAMÁTICO:

0. Generalidades sobre funções; Os conjuntos numéricos: N,Z,Q e R; Funções reais; Função do primeiro grau, equação do primeiro grau e inequações relacionadas; A progressão aritmética como a restrição de uma função do primeiro grau a N; Função quadrática e gráfico, máximo e mínimo, equação do segundo grau; O conjunto dos números complexos e suas propriedades básicas, conjugado e módulo; Funções trigonométricas: seno, cosseno, tangente, cotangente, gráficos e propriedades principais A forma trigonométrica dos números complexos; Fórmula de Moivre; Raízes n-ésimas de um complexo; Função exponencial, progressão geométrica no contexto de função exponencial; Função logaritmo e suas propriedades básicas.

1. Limite e continuidade: Noções de limite; Interpretação geométrica; Propriedades; As formas indeterminadas; Definição de continuidade; Limite e continuidade de funções trigonométricas.

2. Derivada: Definição; Interpretação física e geométrica; Propriedades; Regra da cadeia; Derivada de ordem superior e aplicações relacionadas ao traçado de gráficos (máximos mínimos e inflexão); Derivação implícita; A regra de L'Hospital para a solução de formas indeterminadas de limite; A derivada de funções trigonométricas e trigonométricas inversas.

3. Aplicações da derivada: Retas tangentes e normais; Taxas relacionadas; Máximos e mínimos; Teorema do valor médio; Traçado de curvas.

4. Integral Indefinida: A diferencial; A inversa da diferenciação; A integração por substituição de variável; A integração por partes.

5. Integral definida: Área sob uma curva; Integral definida; Teorema fundamental do cálculo; Integrais de funções trigonométricas; Algumas aplicações de integral definida.

BIBLIOGRAFIA:

O CÁLCULO COM GEOMETRIA ANALÍTICA - Louis Leithold; Volume I
BEZERRA; MATEMÁTICA - Manoel Jairo Bezerra Ed. Scipione.