UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ

LARISSA ELFISIA DE LIMA SANTANA

SABERES CONCEITUAIS E DIDÁTICOS DE PEDAGOGOS EM FORMAÇÃO, ACERCA DE FRAÇÃO

FORTALEZA – CEARÁ
2012

LARISSA ELFISIA DE LIMA SANTANA

A FORMAÇÃO INICIAL DO PEDAGOGO PARA O ENSINO DE FRAÇÃO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Educação do Centro de Educação da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do grau de mestre. Área de Concentração Formação de Professores.

Orientadora: Prof^{a}. Dr^{a}. Marcília Chagas Barreto

FORTALEZA – CEARÁ

2012

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Estadual do Ceará
Biblioteca Central Prof. Antônio Martins Filho

S232s Santana, Larissa Elfisia de Lima
Os saberes conceituais de pedagogos em formação inicial, acerca de Fração / Larissa Elfisia de Lima Santana. – 2012.
182 f. : il. color., enc. ; 30 cm.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual do Ceará, Centro de Educação, Curso de Mestrado Acadêmico em Educação, Fortaleza, 2012.
Área de Concentração: Formação de Professores.
Orientação: Profª. Drª. Marcília Chagas Barreto.

1. Formação inicial. 2. Fração. 3. Educação matemática. I. Título.

CDD: 370.71

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ

Curso de Mestrado Acadêmico em Educação

A FORMAÇÃO INICIAL DO PEDAGOGO PARA O ENSINO DE FRAÇÃO

Autora: LARISSA ELFISIA DE LIMA SANTANA

Defesa em: 24/02/2012

Conceito Obtido: ________________

Nota obtida: ____________________

BANCA EXAMINADORA

____

Profª. Drª Marcília Chagas Barreto – Orientadora
Universidade Estadual do Ceará - UECE

____

Prof. Dr. Paulo Meireles Barguil
Universidade Federal do Ceará - UFC

____

Prof. Dr. Júlio Wilson Ribeiro
Universidade Federal do Ceará - UFC

Se desejamos ensinar matemática para crianças de uma forma que torne todas as crianças mais numeralizadas no mundo de hoje (e até mesmo no de amanhã), temos que saber muito mais sobre como as crianças aprendem matemática e o que a aprendizagem matemática pode fazer pelo pensamento delas.

(Terezinha Nunes e Peter Bryant)

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, pelo apoio incondicional oferecido para que fosse possível conquistar todos os objetivos que até hoje julguei importantes na construção do meu caminhar pela vida.

À minha estimada orientadora, profa. Dra. Marcília Chagas Barreto, pela disponibilidade em contribuir para o meu crescimento acadêmico, pelas orientações valiosas, incentivo e apoio. Considero-a além de uma grande orientadora, também amiga, cujos conselhos e ensinamentos permanecerão indeléveis em minha memória.

Ao Wallace por sua compreensão, paciência e estímulos. É inestimável o valor das aprendizagens e descobertas que temos trilhado juntos.

As minhas queridas amigas Cláudia e Lilian, pelo privilégio da amizade que compartilhamos. E também pela possibilidade de tê-las presentes em todos os momentos marcantes de minha vida.

Aos colegas do grupo de Pesquisa Matemática e Ensino, que me mostraram que, de fato, a união faz a força. Em especial, a minha querida amiga Silvana por todo seu carinho e incentivo.

À turma 2010 com os quais compartilhei conhecimentos, dúvidas, angústias e realizações durante os últimos dois anos. Especialmente as queridas Clarice, Lia, Sarah e Diana que desde a graduação tem sido companheiras muito estimadas.

A Joyce por toda sua ajuda, conversas e momentos agradáveis compartilhados ao longo desses dois anos.

As professoras Alina Spinillo e Síntria Lautert, pelas valiosas contribuições dadas a esse trabalho.

A profa. Dra. Jeannette Filomeno Pouchain Ramos, por todos os ensinamentos e pela amizade a mim ofertada.

Aos sujeitos desta pesquisa, que tornaram possível a realização do trabalho.

A Capes, pela concessão de bolsa de mestrado que propiciou a realização desta investigação.

RESUMO

Neste estudo investigou-se a formação inicial de pedagogos para o ensino de fração nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Foram pesquisados 10 alunos do curso de Pedagogia da Universidade Estadual do Ceará, que já haviam concluído a disciplina voltada para sua formação no que diz respeito ao conceito de fração. A coleta de dados foi realizada por intermédio da aplicação de um roteiro de perguntas referenciado no método clínico-piagetiano, com o objetivo de analisar os conhecimentos nos domínios conceituais e didáticos do conceito de fração. Optou-se pela realização de um estudo de caso, em função da finalidade de analisar em profundidade os conhecimentos de cada domínio. Os resultados foram apresentados por meio de dois enfoques que abordaram, respectivamente: o domínio conceitual da fração, isto é, os conhecimentos apresentados com relação às representações e significados deste conceito; o domínio didático que considerou a percepção dos alunos acerca de como eles pensam em ensinar fração. Os resultados encontrados apontam para a necessidade de se ampliar a formação para o ensino de fração, uma vez que os alunos demonstraram uma percepção limitada no que diz respeito às representações e significados da fração. No que diz respeito ao domínio conceitual evidenciou-se dificuldade, em especial, com os significados medida e número e com as representações numérica decimal e figural discreta. Constatou-se também a transposição de saberes relativos aos números naturais para a fração. No domínio didático observou-se a percepção das representações figurais e concretas como eficazes e eficientes para qualquer situação de ensino relativa à fração. Tal percepção demonstra a não compreensão da importância da diversificação dos registros de representação semiótica. Observou-se ainda a ênfase na elaboração de problemas envolvendo o significado operador multiplicativo. Diante destes resultados, considera-se que a formação inicial desses sujeitos ainda se encontra em descompasso com as indicações apontadas pela literatura acerca da promoção de práticas que propiciem a superação dos obstáculos na compreensão da fração.

Palavras chave: Formação inicial; Fração; Educação Matemática; Pedagogo

ABSTRACT

In this study we investigated the initial preparation of teachers for teaching fraction in the early years of elementary school. We surveyed 10 students of the Faculty of Pedagogy at the State University of Ceará that had already completed the course responsible for their formation in relation to the concept of fraction. The data gathering was accomplished from the application of a structured interview referenced in Piaget's clinical method, in order to analyze the knowledge in the fields of conceptual and didactic of the conception of fraction. We have chosen a study case, depending on the purpose of analyzing in depth knowledge of each domain. The results were presented by two approaches that focused, respectively: the conceptual domain of the fraction, in other words, the knowledge presented about representations and meanings of this concept; the teaching field that considered students' perceptions about how they think about the teaching of fractions. The results point to the need to expand training for teaching fraction, since the students demonstrated a limited perception with regard to the representations and meanings of the fraction. In respect to the conceptual domain it was observed difficulties, in particular, with fraction's meanings of number and measure and with the representation decimal numeric and figural discreet. Besides being verify the transposition of knowledges concerning of rational numbers for fraction. In the didactical field was observed the perception of the figural and concrete representations as effective and efficient for any teaching situation on the fraction. . Such perception shows the lack of understanding of the importance of diversification of registers of semiotic representation. There was also an emphasis on development of problems involving the meaning multiplicative operator. Faced with these results, it is considered the initial formation of these subjects is still out of step with the directions described in literature about the promotion of practices that provide overcoming obstacles in the comprehension of the fraction.

Keywords: Initial preparation of teachers; fractions; Math Education.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS

AIEF – Anos iniciais do Ensino Fundamental

CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

CEFAM - Centros Específicos de Formação e Aperfeiçoamento do Magistério

CMAE - Curso de mestrado acadêmico em educação

CNE – Conselho Nacional de Educação

DCNFP - Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação de Professores

IC - Instituto de Computação

LDBEN – Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional

MAES – Grupo de Pesquisa Matemática e Ensino

NIED - Núcleo de Informática Aplicada à Educação

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais

UECE - Universidade Estadual do Ceará

UNICAMP - Universidade Estadual de Campinas

SAEB - Sistema de Avaliação da Educação Básica

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O presente estudo tem como tema a formação inicial de pedagogos para o ensino de fração. O interesse em investigar esse assunto decorre da trajetória de formação da autora no curso de Pedagogia. Dentre outros fatores, destacam-se as experiências de monitoria acadêmica e estágio de docência, ambas em disciplinas de Ensino de Matemática, que instigaram a percepção crítica para as temáticas relativas à Educação Matemática.

Durante as vivências, tanto da monitoria quanto do estágio de docência, observaram-se com frequência situações em que os alunos do curso de Pedagogia apresentavam dificuldades para lidar com aspectos conceituais e didáticos de fração. Enquanto este assunto era abordado, foi possível observar em relatos dos estudantes aspectos que evidenciavam seus receios, dúvidas e angústias em relação ao tema. Foram também identificadas, em suas falas e produções, concepções limitadas e equivocadas acerca de fração.

Somando-se a essas experiências, a inserção da autora no Grupo de Pesquisa Matemática e Ensino – MAES da Universidade Estadual do Ceará permitiu maior aproximação com investigações acerca dos conhecimentos e lacunas relativas à formação para o ensino de Matemática. Esta experiência motivou, posteriormente, o ingresso no Curso de Mestrado Acadêmico em Educação – CMAE com área de concentração na formação de professores.

Com relação à temática da formação de professores, é possível observar que esta temática tem conquistado um grande espaço dentre as pesquisas no campo da educação. Segundo Pimenta (2009), a formação inicial e contínua tem sido foco de diversas análises que visam compreender aspectos relativos a práticas pedagógicas dos docentes. Conforme Damico (2007, p. 15), “[...] as pesquisas nesta área [formação de professores] cresceram não só quantitativamente, como qualitativamente, o que tem possibilitado um conhecimento mais detalhado das necessidades formativas dos professores”. Desta forma, os saberes necessários ao exercício da docência ganham espaço em investigações que buscam encontrar alternativas e compreender dificuldades, dentro de um contexto educacional de "incertezas e perplexidades" (NÓVOA, 2009).

A formação docente é, atualmente, regulamentada pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – LDBEN nº 9394/96 e por resoluções do Conselho Nacional de Educação – CNE. Neves et al. (2007) indicam que as políticas para a formação de professores têm se confrontado com uma série de problemas, pois se pretende que docentes obtenham uma formação que seja, concomitantemente, científica, pedagógica, profissional e pessoal.

Todavia, cabe destacar que nem sempre se conferiu à formação de professores a relevância hoje observada em investigações e políticas educacionais. Ferreira (2003) afirma que até os anos de 1980 poucas investigações tinham se voltado para a formação de professores no Brasil. Isto porque antes desse período se tinha a concepção de que para se realizar o ensino de um determinado assunto era suficiente apenas a posse do domínio conceitual do mesmo. Posteriormente, passou-se a acreditar que o ato de ensinar dependia da apropriação de conhecimentos didáticos e metodológicos. No entanto, as duas concepções aqui destacadas foram enfatizadas em diferentes momentos, ao longo da história da formação de professores, sem que fosse manifestada a necessidade do estabelecimento de padrões para esta.

Foi apenas recentemente que se passou a atribuir maior importância ao papel do professor no processo educativo percebendo-o como "responsável pela transformação das orientações curriculares em ações efetivas: a gestão da matéria no chão da sala de aula" (THERRIEN; LOIOLA, 2007, p.123). Assim, nos últimos anos, pode-se evidenciar o aumento do interesse de pesquisadores pela temática da formação dos professores (FERREIRA, 2003).

Diante do aumento da preocupação acerca da formação docente, se torna pertinente o questionamento de qual o papel da universidade na preparação desses profissionais. Considera-se que cabe à essa instituição garantir aos futuros professores conhecimentos que permitam a eles a constituição de práticas que propiciem a superação de desafios encontrados na escola e sociedade que o circunda. Para tanto, faz-se necessário destacar que tanto o professor como a universidade devem desenvolver suas funções no processo formativo, levando em consideração as condições e o contexto em que estes se inserem (PIMENTA; LIMA, 2004).

Vale salientar, no entanto, que aqui não se considera que a formação dos professores, sozinha, seja a única responsável por abordar todos os elementos necessários para garantir o funcionamento de um sistema educacional de qualidade. Diversos outros setores da sociedade estão relacionados desde os aspectos ligados às gestões escolares até as maiores instâncias do poder público, devem assumir suas responsabilidades para contribuir pela construção de um sistema educacional de qualidade.

Neste sentido, a importância que se atribui à formação de professores pauta-se na concepção de que a prática docente tem um lugar privilegiado para a formação de saberes. Considera-se, ainda, que o ato de ensinar deve contribuir para o processo de humanização dos alunos, percebendo-se estes como historicamente situados. Assim, a formação que se espera, hoje, deve permitir e incentivar a reflexão sobre o conhecimento de modo que o professor possa transferi-lo para diversas situações e vivências relacionadas à sua prática pedagógica, bem como para realidade na qual está inserido (PIMENTA, 2009).

A formação docente, deste modo, passa a ser considerada como um processo inacabado e em constante transformação. Nesta perspectiva, o processo de formação inicial é responsável por constituir as bases através das quais se estabelecerá o processo de desenvolvimento de uma cultura profissional. Isto significa que a formação inicial assume um papel fundamental por se constituir num período em que as “virtudes, os vícios e as rotinas, se assumem como processos usuais da profissão” (PEREZ, 1999, p.268). Deste modo, é esse o período no qual o professor incorpora características essenciais à sua prática, ou seja, as concepções iniciais que futuros professores trazem para sua formação passam por reelaborações e reconceptualizações nas experiências e trocas proporcionadas na formação inicial, gerando posturas e atitudes que influenciarão no exercício da profissão.

Com respeito à formação inicial, tem-se verificado que os cursos de graduação baseiam-se em currículos que privilegiam conteúdos e atividades distantes das necessidades da escola, desta forma, não conseguem “captar as contradições presentes na prática social de educar” (PIMENTA, 2009, p.16). Assim, a organização curricular propicia aos professores “pouca oportunidade de construir competências que lhes permitam analisar o processo de aprendizagem dos alunos, suas dificuldades, propor e analisar situações didáticas, analisar o desempenho dos alunos e a própria prática docente” (CURI, 2004 p. 77).

Nesta perspectiva, pesquisas têm mostrado que a formação inicial de professores tem sido insuficiente no sentido de colaborar para a preparação de docentes aptos a superar os desafios encontrados na escola. Assim, torna-se pertinente compreender quais são os conhecimentos que se fazem necessários para garantir aos professores uma formação adequada. Damico (2007), ao se referir ao ensino de Matemática, considera necessário que o professor tenha posse de uma variedade de conhecimentos relacionados não só ao conteúdo de ensino, mas ao aprofundamento do conhecimento das estruturas matemáticas[1], dos conteúdos pedagógicos, materiais de ensino, contextos e necessidades educativas, dentre outros.

Assim, é imprescindível a articulação de conhecimentos dos domínios conceituais e didáticos na prática docente. Neste contexto, os elementos destacados pela literatura, somando-se aos aspectos relativos à trajetória acadêmica da autora da pesquisa que ora se apresenta, motivaram o interesse por investigar a formação inicial do pedagogo para o ensino de fração.

A complexidade que envolve o conceito de fração, segundo Berh et al. (1983), exige do professor atenção especial para três perspectivas: a prática, a psicológica e a matemática. O aspecto prático diz respeito às diversas situações do cotidiano que trazem a exigência de diferentes formas de representar fração (medidas e quantidades), tornando evidente a necessidade de ampliação do conjunto dos números naturais. O aspecto psicológico é relacionado ao desenvolvimento de diferentes estruturas mentais que são requeridas para a compreensão e a manipulação das frações no seu sentido mais amplo. Por fim, o aspecto matemático refere-se à importância da apropriação deste conceito para fundamentar o desenvolvimento posterior de outros conhecimentos matemáticos.

[1] A matemática baseia-se no estudo de estruturas abstratas. Assim sendo, os objetos matemáticos são dados junto às suas estruturas, estas são consideradas como “arranjos” ou “a ordem das partes no todo”. Ver (ABE, 1989).

A dificuldade relativa a esse conceito pode ser evidenciada no resultado obtido pelo Sistema de Avaliação da Educação Básica - SAEB (2001), que constatou que apenas 33% dos alunos que terminavam o ensino fundamental conseguiram acertar pelo menos um item envolvendo frações dentre uma lista de problemas envolvendo este conteúdo. Nesse sentido, Nunes e Bryant (1997) chamam a atenção para o fato de que, por muitas vezes, alunos desenvolvem habilidades relativas aos números racionais sem uma adequada compreensão de frações. Isto porque

> Com fração as aparências enganam. Às vezes as crianças parecem ter uma compreensão clara de fração e não o tem. Elas usam os termos fracionais certos; elas falam sobre fração coerentemente; elas resolvem alguns problemas fracionais; mas diversos aspectos cruciais das frações ainda lhe escapam. De fato, as aparências podem ser tão enganosas que alguns alunos passem pela escola sem dominar as dificuldades de fração, sem que ninguém o perceba (NUNES; BRYANT, 1997, p. 91).

Nesse sentido, considera-se que as dificuldades e equívocos conceituais que foram observadas, pela autora, em alunos do curso de pedagogia, durante a vivência da monitoria e do estágio de docência, podem ser testemunhos da afirmação de Nunes e Bryant (1997). Na medida em que esses alunos passaram pelo ensino Fundamental e Médio carregando concepções errôneas acerca de fração.

A variedade de formas de compreender e representar fração tem motivado estudos de diversos autores, acerca dos constructos que compõem esse conceito. Nunes et al. (2003) tomam como base a teoria dos Campos Conceituais para interpretar os significados de fração, classificando-os em cinco tipos: 1) número, 2) parte-todo, 3) medida, 4) quociente e 5) operador multiplicativo[2]. Considera-se que tal classificação oferece um suporte consistente para a análise dos aspectos relativos ao ensino e à aprendizagem deste conteúdo, constituindo-se como base teórica para este estudo.

Em relação às pesquisas realizadas referenciadas nos significados de fração, Magina e Campos (2008) afirmam que situações parte-todo são frequentemente priorizadas no ensino de fração no Brasil. Este tipo de situação permite que sejam explorados aspectos perceptuais em detrimento das relações lógico matemáticas, por exemplo, numa situação em que o professor desenha uma barra de chocolate dividida em três partes iguais e pede ao aluno que identifique a fração correspondente a cada

[2] Os significados de fração serão discutidos no capítulo 2.

parte da barra. Em uma situação deste tipo, o aluno pode apenas olhar para figura e resolver a questão sem a necessidade de efetuar relações lógico-matemáticas mais complexas. Dessa forma, considera-se que

> O método de ensino, [...], simplesmente encoraja os alunos a aplicar um tipo de procedimento de contagem dupla – ou seja, contar o número total de partes, e então as partes pintadas – sem entender o significado deste novo número. (CAMPOS citado por NUNES, BRYANT, 1997, p. 196)

Diante dos entraves observados quanto ao ensino e aprendizagem deste tipo de número Berh et al. (1983, p. 91) afirmam que "os conceitos relacionados aos números racionais estão entre as idéias mais complexas e importantes que as crianças encontram ao longo dos primeiros anos de escolarização". Tal observação vem a complementar a constatação de Nunes et al. (2005), que afirmam serem muitos os alunos que não estabelecem uma conexão clara entre frações e o raciocínio multiplicativo. Nesse sentido, as autoras chamam a atenção para a necessidade de estudos que investiguem as dificuldades inerentes à representação fracionária.

Considerando-se esta necessidade, optou-se pela Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval (1995), para compor o quadro teórico desta investigação. Este autor parte do pressuposto de que os objetos matemáticos só são acessíveis a partir de suas representações. Assim, nesta teoria são evidenciadas as funções exercidas pelas representações semióticas para a aprendizagem matemática.

Sem as representações semióticas não seria possível expressar as representações mentais – "conjunto de imagens e de concepções que um indivíduo pode ter acerca de um objeto ou situação e tudo aquilo que lhes é associado" (DUVAL, 1995, p. 36). É necessário que se distinga um objeto de sua representação para uma efetiva compreensão do conceito matemático. Para tal, a diversificação entre os registros de representação, bem como a coordenação entre eles, permite a ampla apropriação de um conceito matemático.

Com efeito, não existe nenhuma representação que possa ser considerada suficiente para apreensão de um conceito, pois conforme aponta Duval "o trânsito entre as mais diversas representações possíveis de um mesmo objeto matemático em questão é que assume importância fundamental" (MORETI, 2002, p.344).

Diante destas considerações, percebe-se que um mesmo objeto matemático pode ser apresentado sob várias formas ou registros de representação. No caso da fração, objeto de estudo desta investigação, sua representação pode se apresentar em variados tipos de registros como os numéricos (decimal, percentual, fracionário, etc.), figurais, concretos e língua natural. Nesse sentido, a diversidade de representações possível para um conceito implica em alguns obstáculos na sua aprendizagem como a identificação do objeto em suas diferentes representações semióticas e dificuldades para coordenação entre seus diferentes registros de representação.

Deste modo, este trabalho investigou as conceituações de fração elaboradas por alunos do curso de Pedagogia da UECE no que diz respeito ao domínio conceitual e didático deste conceito. Buscou-se ressaltar o que eles sabem e as suas limitações conceituais para o trabalho com diversificados registros de representação semiótica, bem como a percepção acerca dos diferentes significados de fração. Nesse sentido, o problema desta pesquisa se configura em torno da formação inicial dos pedagogos, responsáveis pela introdução do conceito de fração nos anos iniciais do Ensino Fundamental - AIEF.

Nessa perspectiva, destaca-se a seguir o objetivo geral e específicos desta pesquisa:

- Geral: Analisar os domínios conceitual e didático de pedagogos em formação inicial para o ensino de fração;
- Específico: Avaliar a amplitude dos conhecimentos conceituais relativos aos significados e representações de fração de alunos do curso de pedagogia;
- Específico: Identificar a percepção de alunos do curso de pedagogia acerca de aspectos didáticos necessários ao ensino de fração.

Para alcançar esses objetivos, optou-se pela realização de um estudo de caso com abordagem clínica. Tal opção se justifica por se considerar necessária a explicitação dos raciocínios dos alunos acerca de fração para que fosse possível identificar suas concepções acerca dos significados e representações nos domínios conceitual e didático. Assim, aplicou-se um roteiro com perguntas referenciado nos pressupostos do método clínico, com 10 alunos do curso de Pedagogia.

Este trabalho estruturou-se então em cinco capítulos. O primeiro capítulo discutiu a formação do professor para os AIEF, considerando seus aspectos históricos e os desafios e perspectivas que são evidenciados para estes profissionais na atualidade, principalmente no que diz respeito ao ensino da Matemática.

O segundo capítulo tratou de uma revisão da literatura acerca de aspectos que influenciam na compreensão do conceito de fração. Enfatizou-se, especialmente, aqueles relacionados à semântica das frações, com destaque para a categorização dos significados elaborados por Nunes et al. (2003). Abordaram-se também os pressupostos teóricos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, que auxiliaram na análise de sua utilização quando da representação do conceito de fração. Estes foram os elementos que compuseram o quadro teórico desta pesquisa.

No terceiro capítulo, elucidaram-se as opções metodológicas desta investigação. Discutiu-se primeiramente o contexto e os sujeitos da pesquisa, seguindo-se da explicitação do paradigma escolhido, a abordagem metodológica elegida, o método de coleta de dados, bem como os detalhes relativos à aplicação do instrumento e a análise dos dados.

No quarto capítulo, tratou-se da análise dos resultados da pesquisa. Dividiu-se a análise nos enfoques conceituais e didáticos, tratando-se dos dados obtidos por cada uma das questões propostas no roteiro de perguntas. Por fim, no quinto capítulo, apresentaram-se as considerações finais em relação ao trabalho.

CAPÍTULO 1 - FORMAÇÃO DE PROFESSORES PARA OS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL: DESAFIOS E PERSPECTIVAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

O homem não teria alcançado o possível se, repetidas vezes, não tivesse tentado o impossível.
Max Weber

O presente capítulo visa discutir a formação de professores para o ensino nos AIEF, considerando, principalmente, aspectos relativos ao ensino de Matemática. Para tal, considerou-se necessário contextualizar a formação destes professores na história da educação brasileira, buscando-se entender suas concepções e práticas. Procurou-se, também, perceber o sentido conferido aos conteúdos matemáticos nesta formação. A partir da compreensão destes aspectos, refletiu-se acerca dos desafios e perspectivas que atualmente orientam a formação dos profissionais responsáveis pelo ensino da Matemática nos AIEF.

Dessa forma, com base em uma revisão de literatura realizada sobre o assunto, este texto terá dois eixos principais: a história da formação de professores dos AIEF; as perspectivas e desafios atuais para formar professores de Matemática para os AIEF.

Inicialmente, importa destacar que tratar da formação de professores implica discutir aspectos relativos à educação e à pedagogia. Segundo Saviani (2008, p.1), as origens da educação confundem-se

> com as origens do próprio homem. Na medida em que o homem se empenha em compreendê-la e busca intervir nela de maneira intencional, vai constituindo um saber específico que, desde a Paidéia grega, passando por Roma e pela Idade Média, chega aos tempos modernos fortemente associado ao termo pedagogia.

Ao longo da história, a concepção de pedagogia esteve permeada por duas perspectivas. A primeira delas vinculava pedagogia à filosofia, considerando que as questões relacionadas às discussões teóricas sobre ética deveriam ser o cerne da atividade educativa. O segundo entendia a pedagogia num sentido prático, com ênfase em aspectos metodológicos, interpretando, desta forma, a pedagogia como meio pelo qual se poderia alcançar uma formação desejada (SAVIANI, 2008).

Tais concepções de pedagogia explicitam, de modo geral, uma dicotomia entre teoria e prática. Com base nessas ideias, Saviani (2008) identificou na história da formação de professores dois modelos, quais sejam: *o modelo dos conteúdos culturais-cognitivos* e o *modelo pedagógico-didático*.

O primeiro modelo volta-se para uma formação de conteúdos conceituais e cognitivos, considerando que a preparação docente deve conter elementos que garantam ao professor uma cultura geral e domínio do seu objeto de ensino. O segundo foca-se em aspectos práticos relativos ao "como ensinar". Sendo assim, para este modelo "a formação propriamente dita dos professores só se completa com o efetivo preparo pedagógico-didático". (SAVIANI, 2008, p. 8).

Com relação às instituições que privilegiam cada um desses enfoques, Saviani (2008, p. 8) discute que

> Na história da formação de professores, constatamos que o primeiro modelo predominou nas universidades e demais instituições de ensino superior, que se encarregariam da formação de professores secundários, ao passo que o segundo tendeu a prevalecer nas Escolas Normais, ou seja, na formação dos professores primários.

Nesse sentido, a formação dos professores dos anos iniciais do ensino fundamental traz em sua raiz histórica as implicações da ênfase dada aos aspectos teóricos ou práticos desarticulados entre si. Considera-se que para a compreensão destas contradições se faz necessária a apropriação das perspectivas históricas dessa formação no Brasil. Assim, a seguir, realizar-se-á um esboço de como se constitui, ao longo da história, a formação dos docentes dos AEIF.

Histórico da Formação de Professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental no Brasil

Desde os tempos coloniais até meados do Período Imperial, inexistia, no Brasil, uma formação específica para a docência. Esta era substituída por avaliações feitas em concursos para nomeação de professores. Segundo Vicentini e Lugli (2009, p. 29),

> O concurso de nomeação para as aulas régias exigia apenas a apresentação de provas de moralidade fornecidas pelo padre da paróquia e pelo juiz de paz da localidade de origem do candidato à licença docente. Exigia-se, também, que o futuro professor conhecesse aquilo que deveria ensinar; para tanto, ele era avaliado por uma dissertação apresentada à banca de seleção nomeada pelo Diretor-Geral dos Estudos.

Nesse sentido, tanto o ensino quanto a formação dos docentes não passava por nenhum tipo de padronização ou sistematização a nível nacional. O que se vivenciava naquele momento era um ensino constituído por um universo variado em que aulas eram ministradas por religiosos, estrangeiros e associações beneficentes (VICENTINI; LUGLI, 2009).

O interesse do poder público por uma formação sistematizada para o exercício do trabalho docente manifestou-se apenas no início do século XIX, quando, por influência da Revolução Francesa, princípios como universalidade, laicidade e obrigatoriedade passam a reger a escola pública como ainda hoje a pensamos. É a partir deste momento que a instrução popular começa a se constituir como um problema.

Nesta perspectiva, inicia-se o estabelecimento de medidas que demonstram uma maior preocupação com a instrução pública. Podemos tomar como exemplo os discursos do imperador Dom Pedro I, que após a proclamação da independência em 1822, passa a destacar a necessidade de uma legislação dedicada à educação (SAVIANI, 2008).

A partir destes fatos decorre a primeira lei educacional do Brasil independente que tratava dos chamados de estudos menores, criando a Escola de Primeiras Letras[3] em 15 de outubro de 1827. Nessas escolas são iniciadas as tentativas de sistematização de um método de ensino. Adotou-se então um modelo criado na Inglaterra que se denominava como método Lancaster. Este se configurava como o

> aproveitamento dos alunos mais adiantados como auxiliares do professor no ensino de classes numerosas.[...] O método supunha regras predeterminadas, rigorosa disciplina e a distribuição hierarquizada dos alunos sentados em bancos dispostos num mesmo

[3]Escolas responsáveis "pelo ensino da leitura, escrita, quatro operações de aritmética, prática de quebrados, decimais e proporções, as noções mais gerais de geometria prática, a gramática de língua nacional, e os princípios de moral cristã e da doutrina da religião católica e apostólica romana..." (Lei de 15 de outubro de 1827).

> salão único e bem amplo. De uma das extremidades do salão, o mestre sentado numa cadeira alta, supervisionava toda a escola, em especial, os monitores. (SAVIANI, 2007, p. 128).

Segundo Tanuri (2000), essa foi a primeira sistematização de ensino de que se tem registro no Brasil. Contudo, o método Lancaster, ao ser transposto para a realidade brasileira, não apresentou resultados satisfatórios por conta de fatores como instalações com aparelhamento pedagógico insuficiente, pouca dedicação dos professores e ineficácia de sua abordagem quantitativa (SAVIANI 2007).

Diante do fracasso deste método, iniciou-se um debate acerca da necessidade de propiciar aos professores um modelo de formação mais extenso e eficaz. É nesse contexto que a Reforma Couto Ferraz em 1854, como resposta às críticas e aos debates acerca da ineficácia da instrução pública, constituiu-se como uma tentativa de reorganização da educação nacional.

No que diz respeito especificamente à formação de professores, essa reforma se guiava pela concepção que a base para a preparação docente deveria se focar na prática. Deste modo, estipulou-se que aqueles que desejavam exercer a docência deveriam passar pelo sistema de professores adjuntos que consistia em

> contratar, por concurso geral aberto aos discípulos maiores de 12 anos de todas as escolas públicas, docentes auxiliares. Os que se distinguissem nesse concurso comporiam uma lista da qual o governo faria a escolha para nomear os professores adjuntos. Estes ficariam adidos às escolas como ajudantes e para se aperfeiçoarem nas matérias e práticas do ensino. (SAVIANI, 2008, p. 133).

Em outras palavras, o sistema de professores adjuntos correspondia a um treinamento do futuro professor baseado na observação de técnicas e no acompanhamento da prática de um professor experiente. Então, assim como o método lancasteriano, o sistema de professores adjuntos partia de um princípio de aproveitamento de alunos mais adiantados em uma turma. Este foi o modelo que predominou no Brasil durante o período Imperial.

Contudo, além do sistema de professores adjuntos, durante o período Imperial, pretendeu-se adotar outra via para a formação de professores: as Escolas Normais. Este modelo originou-se na Europa, quando, passa a existir uma necessidade, após a Revolução Francesa, de universalização da instrução elementar e consequentemente da organização de sistemas nacionais de ensino.

Em sua origem, as Escolas Normais foram pensadas como um modelo que pudesse garantir a perfeita aplicação de métodos de ensino, bem como o preparo dos professores para as suas tarefas. De acordo com Vicentini e Lugli (2009), a Escola Normal foi concebida como um espaço exclusivo para a formação docente na qual se aprenderia o “modo correto de ensinar – a norma”. Saviani (2008, p.16) explica que a concepção original de Escola Normal deveria levá-la a adotar as ideias próprias do modelo pedagógico-didático de formação. No entanto,

> contrariamente a essa expectativa, predominou nelas a preocupação com o domínio dos conhecimentos a serem transmitidos nas escolas de primeiras letras. Nesse sentido, pode-se considerar que gravitam, ainda, em torno do modelo dos conteúdos culturais-cognitivos.

Tal afirmação pode ser constatada ao se observar a Lei Provincial (Ato n. 10), de 4 de abril de 1835 que normatiza o funcionamento do Curso Normal do Rio de Janeiro. O texto da lei trazia as seguintes explicações:

> A escola será regida por um diretor que ensinará: os conhecimentos de leitura e escrita pelo método lancasteriano, cujos princípios doutrinais e práticos explicará; as quatro operações de aritmética, quebrados, decimais e proporções; noções de geometria teórica e prática; elementos de geografia; princípios da moral cristã e da religião oficial e gramática nacional (VILLELA, 2000, p.109).

Percebe-se, assim, a ausência de referência à formação pedagógico-didática do professor. É através da adoção deste modelo no país que se inicia a sistematização padronizada para a formação docente com planejamentos e espaços específicos para tal.

No entanto, as Escolas Normais ficavam sujeitas à iniciativa das Províncias, ou seja, dependiam do interesse e disponibilidade de recursos dos dirigentes de cada Estado. Isto porque o Ato Adicional de 1834 colocou a instrução primária sob a responsabilidade das províncias e conferiu às Assembléias Legislativas Provinciais a atribuição de legislar sobre “a instrução pública e estabelecimentos próprios a promovê-la” (TANURI, 2000, p.62). Tal configuração levou os Cursos Normais a terem “uma existência incerta, atraindo alunos (não eram admitidas mulheres) em número insuficiente para manter-se em atividade”. (VICENTINI; LUGLI, 2009, p. 32). Com efeito, as escolas eram freqüentemente fechadas, por falta de alunos. Ademais, a legislação do período estipulava que a idade mínima para prestar o exame de seleção da Escola Normal era 18 anos, ao passo que com 12 anos já era permitido exercer a atividade de ensino renumerada como professor adjunto.

Diante deste contexto, a maior parte dos professores ainda permanecia efetivamente sendo formada pelo sistema de professores adjuntos. É por essa razão que Vicentini e Lugli (2009, p.34) afirmam que, para o período, a Escola Normal não passou "de um movimento no plano das idéias, de um ensaio no sentido de ampliar e delimitar os conhecimentos educacionais do que realmente uma política de Estado".

Foi somente após a proclamação da Lei do Ventre Livre, em 1871, que a organização da educação nacional passa a ser efetivamente questionada, sob a influência das ideias liberais e com preocupações relativas à educação das crianças escravas (VICENTINI; LUGLI, 2009). No que diz respeito ao estabelecimento de um padrão de funcionamento para estas, foi somente em 1880 por influência da reforma da instrução pública de São Paulo que a nível nacional passam a se estabelecer sistematizações para o funcionamento destas instituições.

Dentre os aspectos considerados para a formação dos professores na Escola Normal, interessam para esta investigação àqueles relativos à Matemática. Curi (2004) afirma que os conteúdos matemáticos que deveriam ser ensinados aos alunos do Curso Normal, eram semelhantes àqueles que compõem o currículo do que hoje corresponde aos AIEF. A autora tomou como base para sua análise o "Programa de Ensino" do Curso Normal de São Paulo e identificou apenas duas disciplinas referentes à formação matemática dos futuros professores, uma voltada para Aritmética e Álgebra e a outra para Geometria e Trigonometria. Em relação aos conteúdos matemáticos abordados nesta formação, mesmo sendo contempladas duas disciplinas para a Matemática, a ênfase era voltada para a Aritmética, principalmente em relação às quatro operações fundamentais.

Ainda com relação à formação matemática nas Escolas Normais, considera-se que dois aspectos representaram grande influência nos modelos de formação ofertados, são eles: a influência da Psicologia no Campo da Educação e formação de professores; o fenômeno denominado por Shulman como "paradigma perdido".

A influência da Psicologia na Educação pode ser constatada com o prestígio conferido aos livros de Thorndike[4]. Os trabalhos deste autor contribuíram para as primeiras aplicações da psicologia às aulas de Aritmética, Álgebra, leitura e escrita. A sua obra *A nova metodologia da Aritmética* teve grande repercussão no país. Nela se tratava da aplicação das contribuições trazidas pela psicologia experimental ao ensino da Matemática.

Com relação ao "paradigma perdido", este termo foi utilizado por Shulman (1986) para nomear o fenômeno da mudança de foco nas pesquisas, publicações e currículos de formação de professores, por meio da qual se passou a valorizar os conhecimentos pedagógicos gerais em detrimento dos conhecimentos específicos dos conteúdos. Tal aspecto foi evidenciado no Brasil em livros destinados à preparação docente. Esses livros que antes se relacionavam aos conteúdos vinculados para os objetos de ensino, como, por exemplo, Psicologia da Aritmética e da leitura, após nos anos 30, passam a enfocar disciplinas mais gerais como Psicologia da Educação e da aprendizagem.

Evidenciam-se assim os aspectos que influenciaram a formação matemática durante a Escola Normal. Percebe-se que, inicialmente, contava-se com poucas disciplinas voltadas para essa formação e essas se tornaram ainda mais escassas após os anos 1930, quando passam a ser priorizadas as disciplinas de caráter geral. Se para este momento a formação já se mostrava insuficiente para atender as demandas do ensino, tal quadro é ainda mais agravado, quando o Curso Normal, antes voltado especificamente para a formação docente, passa a se equipar ao colegial em sua estrutura e ensino. Este fato decorre da Lei nº 5.692, de 1971, que tornou todos os cursos a nível secundário profissionalizantes. O Ensino Normal passa então a ser chamado de Habilitação Específica para o Magistério, constituindo-se como umas das alternativas de profissionalização a nível médio, no período denominado 2º grau.

---

[4]Edward Lee Thorndike (1874 – 1949) foi um psicólogo americano cujos trabalhos acerca do comportamento animal e do processo de aprendizagem conduziram ao conexionismo. Esta abordagem teórica parte do pressuposto de que a aprendizagem se baseia nas conexões entre as situações e as respostas.

Esta mudança, segundo Vicentini e Lugli (2009), descaracteriza as funções de preparo profissional de normalistas, além de trazer prejuízos para formação específica do professor. Isto porque nesta nova estruturação os conteúdos voltados à docência passaram a ser tratados de forma apressada e com pouco aprofundamento.

Com relação à formação Matemática nos Cursos de Habilitação para o Magistério, os documentos Norteadores dos Currículos incorporavam tendências internacionais para o ensino de Matemática, em especial, o Movimento da Matemática Moderna[5]. Todavia, apesar da utilização desses documentos, obras com grande carga de influência da psicologia experimental continuavam a ser publicadas e utilizadas (CURI, 2004).

De modo geral, as mudanças decorrentes da transformação estrutural da Escola Normal levaram a Habilitação Específica para o Magistério a ser alvo de críticas em relação à inadequação do novo modelo de preparação docente às necessidades formativas do professor (CURI, 2004). As críticas, de modo geral, baseavam-se em três aspectos, quais sejam: o despreparo dos estudantes que se destinavam ao Ensino Normal, a baixa exigência quanto aos conhecimentos necessários para a diplomação e a falta de articulação entre as disciplinas integrantes do currículo (VICENTINI; LUGLI, 2009).

Diante deste contexto de insatisfação com a formação docente, em 1982, o Ministério da Educação e da Cultura propôs o projeto dos Centros Específicos de Formação e Aperfeiçoamento do Magistério – CEFAM. Tal projeto objetivava fortalecer as condições para formar adequadamente os futuros professores que atuariam no ensino pré-escolar, séries iniciais e finais, através da implementação de atividades de formação continuada para os docentes egressos da rede pública (VICENTINI; LUGLI, 2009).

Os cursos oferecidos nessas instituições possuíam uma carga horária maior do que as Habilitações Específicas para o Magistério, tendo em vista que eram feitos em tempo integral e tinham a duração de quatro anos.

[5]Movimento internacional, surgido na década de 1960, nos Estados Unidos, que tinha como intuito enfatizar o rigor, bem como os fundamentos da teoria dos conjuntos e álgebra no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

> A carga-horária semanal distribuía-se em 30 horas-aula das disciplinas da Habilitação Específica para o Magistério e mais 18 horas-aula de atividades de enriquecimento curricular, que funcionavam para a complementação do currículo mínimo: aulas de reforço e o desenvolvimento de projetos e atividades diversificadas para o enriquecimento dos conteúdos das disciplinas (VICENTINI; LUGLI, 2009, p.51).

Para a formação realizada nos CEFAM eram publicados documentos curriculares e materiais instrucionais. Dentre as publicações que versavam sobre o ensino de matemática, conforme interpreta Curi (2004), destaca-se o livro intitulado *Didática da Resolução de Problemas*, de autoria de Dante (1987). Nesta publicação, é tratada a importância da resolução de problemas para a aprendizagem matemática. Outra grande influência na preparação profissional de docentes foi o livro *Didática especial* de Piletti (1985). Este continha um capítulo dedicado ao ensino da Matemática o qual chama a atenção para necessidade de domínio dos conteúdos de ensino pelos docentes e, ainda, traz indicações metodológicas para o uso de materiais como Barras de *Cuisinaire*, o Geoplano, os Discos de Fração, dentre outros.

As experiências dos CEFAM foram consideradas muito positivas e, ainda, no que se refere à formação matemática, pesquisas sinalizam que muitas propostas obtiveram êxito, apesar dos currículos possuírem apenas uma disciplina desta área que era realizada anualmente (VICENTINI; LUGLI, 2009; CURI, 2004).

Contudo, o projeto dos CEFAM, a partir de meados da década de 1980, perdeu sua sequência por conta da descontinuidade administrativa do Ministério da Educação entre 1985 e 1989. Contudo, alguns estados permaneceram financiando seus próprios projetos em virtude dos resultados alcançados (VICENTINI; LUGLI, 2009).

No meio do contexto de desarticulação dos CEFAM, os cursos de Habilitação para o Magistério voltaram a se chamar de Cursos Normais por força da LDB 9394/96, permanecendo com esta nomenclatura até os dias atuais. É importante salientar que, a partir dessa lei, a formação docente passa a ser realizada, preferencialmente, em nível superior, no curso de Pedagogia.

Deste modo, o foco da formação de professores para os anos iniciais do Ensino Fundamental volta-se para os cursos de Pedagogia. Silva (2006, p.11) explica que este curso surgiu “visando a dupla função de formar bacharéis e licenciados para várias áreas”. O curso de Pedagogia não nasceu com as características que possui hoje, voltadas para a formação de professores. “Sua finalidade inicial era formar ‘técnicos em educação’ – diploma que passava a ser exigido para ocupar cargos especializados no Ministério da Educação”. (VICENTINI; LUGLI, 2009, p. 55).

Entretanto, para esta investigação interessa apenas o período a partir do qual o curso de Pedagogia passa a formar professores dos AIEF. Neste sentido, mudanças significativas na formação ofertada por este curso passam a ocorrer a partir dos anos de 1950 com a expansão das universidades públicas. Por conseguinte, cresce também o número de cursos de Pedagogia no País. Entretanto, tal expansão foi alvo de muitas críticas por conta de seu excessivo número de alunos, condições precárias de funcionamento e professores insuficientemente qualificados – formados pelas Escolas Normais (VICENTINI; LUGLI, 2009).

No ano de 1962, o currículo mínimo do curso de Pedagogia sofreu alterações em sua estrutura, o licenciado em Pedagogia deveria, agora, cursar as disciplinas de licenciatura integradas às do bacharelado. Vicentini e Lugli (2009, p.55) explicam que durante as décadas de 1950 e 1960 a área da educação passa ser reconhecida de fato

> como um espaço que exigia um conhecimento especializado e uma formação longa [...] uma vez que não mais se aceitava (embora isso ainda ocorresse) que pessoas sem os conhecimentos específicos interviessem nos sistemas de ensino.

Todavia, a organização do curso se manteve sem grandes modificações até os anos 1980 quando alguns cursos de pedagogia sofreram reformulações no que se refere a seu currículo, habilitações e destinação profissional (CURI, 2004). Tais mudanças no curso são decorrentes de aspectos como a crise da educação nova e a vigência da pedagogia tecnicista.

Com efeito, passa-se a discutir acerca da necessidade de contemplar na formação de professores disciplinas específicas referentes aos conteúdos escolares a serem ensinados, bem como didáticas apropriadas para tal. As orientações para essa formação foram estabelecidas através das Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação de Professores - DCNFP[6]. Estas indicam as competências consideradas necessárias para o exercício da docência.

No parágrafo único do art. 11, as DCNFP, enfatizam que as licenciaturas voltadas à formação de professores que atuam nos AIEF devem dedicar espaço em seus currículos para a constituição de conhecimento sobre os objetos de ensino e suas dimensões pedagógicas. Evidenciando, desta forma, a necessidade de discussões das competências relativas ao ensino de todas as disciplinas que deveriam ser abordadas pelos professores.

Nesse sentido, Curi (2004, p.65) destaca o art. 11, em que as DCNF enfatizam o conhecimento dos objetos de ensino

> **Parágrafo único**. Nas licenciaturas em educação infantil e nos anos iniciais do Ensino Fundamental deverão preponderar os tempos dedicados à constituição de conhecimento sobre os objetos de ensino e nas demais licenciaturas o tempo dedicado às dimensões pedagógicas não será inferior à quinta parte da carga horária total.

Apesar de tais indicações e reformulações, pesquisas como a de Curi (2004, 2005), Gatti e Barreto (2009), dentre outras, apontam que as mudanças postas por força da LDBEN de 1996 ainda não foram incorporadas a muitos projetos institucionais de formação de professores dos AIEF.

Nesse sentido, Curi (2005) analisou ementas de disciplinas voltadas para a formação matemática de professores dos AIEF em 36 cursos de Pedagogia de universidades brasileiras. Seu intuito era verificar se a formação oferecida se adequa às demandas atuais para a preparação docente no que diz respeito à matemática. A autora evidenciou pouca presença de conteúdos matemáticos e suas didáticas nos currículos dos cursos. Notou-se ainda a ausência de temas indicados pelas indicações curriculares recentes nos cursos analisados.

[6]O conselho Nacional de Educação estabelece através da Resolução CNE/CP nº 1, de 18 de fevereiro de 2002 as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores.

De modo geral, na trajetória da formação dos professores que atuarão nos AIEF percebe-se que essa se iniciou com foco nos aspectos relativos à prática como o exemplo do método Lancaster e do sistema dos professores adjuntos. Entretanto, como visto, a sistematização de um modelo para essa formação privilegiou os conhecimentos relativos aos conteúdos, que, por sua vez, têm considerado conhecimentos gerais da educação em detrimento daquelas voltados aos objetos de ensino.

Assim, retoma-se aqui a perspectiva de Saviani (2008), que sustenta a afirmação de que um dos maiores dilemas da formação de professores encontra-se no conflito entre dois modelos de formação, são eles: modelo de conteúdos culturais-cognitivos e o modelo de conteúdos pedagógico-didático. Atualmente, o que se evidencia nas universidades é a ênfase no segundo modelo. Nesse sentido, no processo de formação se faz necessário o foco nos "processos didático-pedagógicos pelos quais os conteúdos se tornam assimiláveis pelos alunos no trabalho de ensino-aprendizagem". (SAVIANI, 2008, p. 152).

Em vista desta trajetória histórica da formação dos professores dos AIEF, a seguir serão abordadas as perspectivas e desafios ainda presentes para a preparação desses profissionais.

Os Desafios e Perspectivas para a Formação de Professores de Matemática dos anos Iniciais do Ensino Fundamental

A necessidade de se repensar a formação de professores tem sido posta em evidência por várias pesquisas na atualidade. Segundo Nóvoa (2009), o início do século XIX representa um momento em que o professor ocupa o centro das preocupações educativas. Para Pimenta (2009), a conscientização da sociedade acerca da importância do professor na formação de crianças e jovens ainda é um fato recente, o que justifica a atenção que pesquisas, nos últimos anos, têm dado à formação desse profissional.

Para Damico (2007), a literatura geral acerca da preparação profissional do docente tem se centrado nas competências necessárias a esse profissional para o exercício da sua profissão. Nacarato et al. (2009) explica que diversos termos são utilizados na literatura para se referir ao "saber docente" como "saberes profissionais", “saberes da docência”, “conhecimentos profissionais”, dentre outros que, apesar da diferença entre as nomenclaturas, convergem na direção de três dimensões, são elas: a dimensão subjetiva, a dimensão do conhecimento acadêmico e a dimensão da prática.

Entretanto, apesar dos vários avanços percebidos nas discussões e produções acadêmicas no sentido de buscar compreender e intervir nas dificuldades que estão presentes na formação docente, Nacarato et al. (2009) salientam que as políticas públicas de educação têm feito uma apropriação equivocada do discurso acadêmico. Segundo os autores, as agências internacionais que definem os rumos da educação em termo de reformas, avaliações, currículos, dentre outros, têm lançado mão dos estudos realizados para legitimar uma perspectiva em que competências são vistas através de um modelo de racionalidade técnica.

Este modelo “consiste na aplicação de teorias e técnicas derivadas da pesquisa sistemática, preferencialmente científica, à solução de problemas instrumentais da prática”. (SCHÖN, 2000, p. 37). Para a formação de professores, a ênfase nesta perspectiva representa a valorização de aspectos relativos ao processo de desenvolvimento de competências.

No que diz respeito especificamente à formação inicial, Pimenta (2009) assevera que investigações recentes em educação têm evidenciado aspectos importantes a serem considerados nas práticas pedagógicas e organizações escolares. A desconsideração de avanços trazidos por pesquisas levam os cursos de formação a “desenvolverem um currículo formal com conteúdos e atividades de estágios distanciados da realidade das escolas”. (PIMENTA, 2009, p.16). Nesse sentido, Damico (2007, p.29) salienta que

> a formação inicial do professor é um processo complexo, que é difícil reduzir a um conjunto restrito de conceitos, mesmo sendo parte de teorias poderosas. Conseqüentemente, o estudo sobre a formação inicial de professores requer a mobilização e uma integração de campos e de teorias diferentes.

Assim, a formação inicial é considerada como o momento em que os programas de formação poderiam responder às demandas provenientes dos diversos setores nos quais ela influi – sociedade, instituições, pesquisadores, formadores de professores, alunos (BLANCO, 2003). Ademais, concorda-se com Damico (2007) ao afirmar que

> [...] um bom processo de formação inicial pode ser um ponto de partida importante para transformações significativas das práticas pedagógicas atuais, além de propiciar a construção de um forte alicerce que facilitará o desenvolvimento profissional do futuro professor.

Em relação à formação do professor de matemática, Fiorentini (1994) realizou um inventário da produção acadêmica na área de Educação Matemática no país. Foi analisado o período compreendido entre os anos 1960 e o início da década de 1990, tomando-se como base 204 teses e dissertações produzidas em cursos de pós-graduação brasileiros. Destes trabalhos, 34 tinham como objeto de estudo a formação de professores. Nesse sentido, observou-se que os primeiros estudos realizados na área davam ênfase a aspectos avaliativos da eficiência do professor a partir de resultados de alunos em exames, o número de cursos realizados pelos docentes, etc. Posteriormente, as investigações começaram a abordar o domínio conceitual do professor, suas crenças, percepções, bem como as variáveis que interferiam no processo de ensino e aprendizagem. Desta forma, o interesse se deslocou para uma perspectiva de compreensão do professor como indivíduo que Damico (2007) denomina de “processos constitutivos de chegar a ser professor”.

No tocante às perspectivas que orientam a formação do professor torna-se imprescindível o conhecimento das direções que são apontadas para o currículo dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Isto porque a formação do professor deve propiciar elementos para que os docentes possam contemplar as diretrizes apontadas pelo currículo em suas práticas. Considerando estes aspectos, Nacarato et al. (2009) elaboraram uma retrospectiva do currículo voltado para os AIEF com o intuito de evidenciar as mudanças que têm sido colocadas para o ensino da matemática e consequentemente para a formação de professores nessa área. A análise inicia-se nos anos de 1980, mostrando a inclusão de novos conteúdos e abordagens, bem como a preocupação com aspectos como a alfabetização matemática, a valorização da resolução de problemas, a não linearidade do currículo, dentre outros. Para a formação de professores, esse período representou a tentativa de direcionar o ensino para uma abordagem construtivista. Contudo, apesar da proposta pedagógica inovadora, constatou-se que a formação matemática presente nos cursos voltados para os AIEF, centrava-se em aspectos metodológicos, desconsiderando os fundamentos da Matemática.

Na década de 1990, são elaborados os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN com intuito de sistematizar um currículo nacional para a Educação Básica. O documento apontava a existência de problemas no processo de formação do professor e sua dependência do livro didático. Era proposto um novo olhar sobre a Matemática no sentido de considerá-la como um instrumento para compreensão e leitura do mundo. Outro aspecto destacado pelo documento era a necessidade de se trabalhar tanto os conceitos como os procedimentos matemáticos, tendo em vista o desenvolvimento da capacidade argumentativa do aluno. Os PCN também buscaram eliminar a dicotomia existente entre os documentos curriculares e os livros didáticos. Desta forma as propostas metodológicas dos livros teriam que estar em sintonia com os princípios apresentados pelo documento.

Estas mudanças e perspectivas estabelecidas pelos PCN permanecem até os dias atuais. Nos últimos anos ocorreram reformulações curriculares em alguns estados brasileiros, mas não há muitas diferenças entre essas propostas e os princípios adotados pelos PCN. Todavia, diversas pesquisas como as de Curi (2004; 2005) têm constatado que essas reformas curriculares não chegam até a formação docente e, consequentemente, à sala de aula. Nesse sentido, o grande desafio atribuído à escola e aos seus professores é construir um currículo de Matemática que transcenda o ensino de algoritmos e cálculos mecanizados, principalmente nas séries iniciais, onde está a base da alfabetização Matemática (NACARATO et al., 2009, p.32).

Diante deste contexto, Damico (2007) explica que o interesse pelo currículo dos AIEF justifica-se pelo papel que estes assumem de filtro e adaptação para as cognições dos professores. É nesse sentido que uma variedade de pesquisadores têm se debruçado sobre o estudo dos conhecimentos que precisam ser contemplados na formação dos professores de modo a atender as demandas que são impostas à prática docente.

No que diz respeito aos domínios e organização dos conhecimentos do professor, muitos estudos têm se apoiado na proposta elaborada por Shulman (1986).

Principalmente, aqueles que relacionam a classificações do conhecimento feitas pelo autor com a Matemática. Segundo Blanco (2003), vários pesquisadores nos últimos anos têm se ocupado desses aspectos, aplicando-os a tópicos matemáticos particulares. Nesse sentido, a seguir, serão discutidas as ideias desse autor.

Shulman (1986) inicia sua discussão chamando atenção para a história da universidade que, em suas origens, considerava conteúdo e pedagogia indissociáveis. O autor relembra que na tradição universitária as mais elevadas titulações eram alcançadas com exames em que os candidatos deveriam ser avaliados tanto em seu conhecimento de conteúdo quanto em suas habilidades para o ensino. Assim, na história da universidade, nem sempre existiu um consenso em relação à separação entre conteúdo e pedagogia. Entretanto, o autor destaca que, com o fenômeno que ele denomina paradigma perdido, as competências exigidas para o professor passam a ser aquelas relacionadas ao processo de ensino e às habilidades pedagógicas voltando-se o foco para a capacidade do professor de ensinar.

Em oposição à distinção feita entre conteúdo e pedagogia, Shulman (1986) propõe uma abordagem que busca equilibrar esses dois aspectos na formação do professor. Nesse sentido, o autor realiza uma análise acerca dos domínios e categorias do conhecimento necessárias ao docente.

A análise de Shulman (1986) parte da consideração de que qualquer conhecimento a ser considerado para a prática docente deve ter como ponto de partida o conhecimento de conteúdo. A partir desta premissa, o autor elabora uma classificação dos conhecimentos necessários para a prática docente, sistematizando-a da seguinte forma: (i) *conhecimento do conteúdo da disciplina*, (ii) *conhecimento didático do conteúdo da disciplina* e (iii) *conhecimento curricular*.

O conhecimento do conteúdo da disciplina diz respeito à totalidade e à organização dos conhecimentos na mente do professor. O autor defende que[7] “para pensar apropriadamente sobre o conhecimento de conteúdo é necessário ir além do

[7] Todas as traduções utilizadas neste texto foram realizadas pela autora.

conhecimento dos fatos ou conceitos de um domínio. Isto requer conhecimento da estrutura do conteúdo específico [...][8]" (SCHWAB citado por SHULMAN, 1986, p.9).

Em linhas gerais, o conhecimento do conteúdo da disciplina deve proporcionar ao professor a competência de ir além do que é posto como verdade para um determinado domínio do saber. Ou seja, o professor deve ser capaz de fazer com que seus alunos compreendam por que é necessário estudar determinado assunto, como ele se relaciona a outros tópicos da mesma ou de outras áreas do saber, na teoria e na prática.

Quanto ao *conhecimento didático do conteúdo da disciplina*, o autor explica que essa se constitui como uma dimensão do conhecimento voltada para o ensino. Configurando-se como "uma forma particular de conhecimento de conteúdo que personifica os aspectos do conteúdo mais pertinentes a sua ensinabilidade"[9] (SHULMAN, 1986, p.9). Vale salientar quais aspectos o autor considera que fazem parte desta categoria, quais sejam: os tópicos abordados de um assunto, as formas mais eficazes de representação das ideias, as analogias, ilustrações, exemplos, explanações e demonstrações. Ainda relacionando-se a essa categoria incluem-se os elementos que tornam a compreensão de um conteúdo mais "fácil" ou "difícil", bem como as concepções corretas ou errôneas (*misconceptions*) que os alunos formam sobre determinado assunto. O entendimento destes aspectos faz-se necessário para que o professor seja capaz de entender a dificuldade do aluno e, assim, elaborar estratégias diferenciadas que o ajudem na reorganização e compreensão de um assunto.

O terceiro conhecimento abordado é o *conhecimento curricular*. Para Shulman (1986, p. 10),

> O currículo é representado por toda a gama de programas concebidos para o ensino de disciplinas específicas e temas em um determinado nível de escolaridade, a variedade de materiais instrucionais disponíveis em relação a esses programas, e o conjunto de características que servem como indicação e contra-indicações para o uso de material curricular ou programa em circunstâncias especiais[10].

---

[8] "To think properly about requires going beyond knowledge of facts or concept of a domain. It requires the knowledge of the specific content's structure".

[9] "the particular form of content knowledge that embodies the aspects of content most germane to its teachability".

[10]"The curriculum is represented by the full range of programs designed for teaching of particular subjects and topics at a given level, the variety of instructional materials available in relation to those

Shulman (1986) defende que o conhecimento curricular é tão importante para o professor como a farmacopeia para um médico. Pois do mesmo modo como se espera que um médico conheça uma ampla gama de tratamentos para lidar com qualquer tipo de doença, dever-se-ia esperar que o professor fosse capaz de compreender e utilizar todas as alternativas curriculares disponíveis.

Machado (2005, p.186) reforça a relevância de tal conhecimento para o professor quando defende que

> O significado curricular de cada disciplina não pode resultar de uma apreciação isolada de seu conteúdo, mas sim do modo como se articulam as disciplinas em seu conjunto; tal articulação é sempre tributária de uma sistematização filosófica mais abrangente, cujos princípios norteadores é necessário reconhecer.

Além dos tipos de conhecimentos que o professor precisa articular em sua prática, outro aspecto pertinente a ser considerado nas diferentes perspectivas que estão colocadas na literatura para a formação do professor é a clareza quanto à sua função em sala de aula. É nesse sentido que diversas pesquisas no campo da Educação Matemática têm utilizado como aporte teórico os estudos realizados Brosseau (1996). Este autor discute os diferentes papéis que o docente pode assumir em sala de aula. Para ele, de forma geral, a função do professor de matemática é recontextualizar o saber, atribuindo sentido ao conhecimento ensinado. Para tanto, é preciso que o professor perceba a aprendizagem como uma modificação do conhecimento por parte do aluno, sendo sua função promover situações para que isso ocorra.

As situações que favorecem a aprendizagem são aquelas em que, a partir da exploração dos conhecimentos prévios dos alunos, o professor busca oferecer elementos que permitam a construção do conhecimento científico. O autor explica tal processo da seguinte forma:

> Para fazer funcionar um conhecimento no aluno, o professor busca uma situação apropriada; para que seja uma situação de aprendizagem, é necessária a resposta inicial que o aluno pensa frente à pergunta formulada não seja a que desejamos ensinar-lhe: se fosse necessário possuir o conhecimento a ser ensinado para poder responder, não se trataria de uma situação de aprendizagem. (BROSSEAU, 1996, p.49).

---

programs and the set of characteristics that serve as both the indications and contraindications for the use of a particular curriculum or programs materials in particular circumstance".

Nesta perspectiva, todo processo de interação entre o aluno e os meios que o professor elabora para aprendizagem constituem o que autor chama de *situação didática*. Estas se definem como

> [...]um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos , e um sistema educativo [o professor] com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição...o trabalho do aluno deveria, pelo menos em parte, reproduzir características do trabalho científico propriamente dito, como garantia de uma construção efetiva de conhecimentos pertinentes (BROSSEAU, 1996, p. 56).

Assim sendo, tendo-se em vista estas considerações acerca das interações entre professor e aluno, o docente em sua prática se depara com diversos papéis que dependem das situações de ensino e das posturas que são para elas exigidas. Para Brosseau (1996), o trabalho do professor é comparado ao de um ator que precisa lidar com o improviso e recorrer a diferentes personagens para se adequar a situações que surgem em sala de aula. Em alguns momentos, deve-se assumir uma postura mais rígida, em outros momentos ser mais dinâmico, ser mais ou menos diretivo, buscando sempre perceber qual a melhor forma de abordar o conhecimento em busca de criar situações propícias à aprendizagem.

Diante destas considerações, evidenciaram-se alguns aspectos que compõem diretrizes, conhecimentos e posturas que estão colocadas para a formação de professores dos AIEF, destacando-se aspectos relativos ao ensino da Matemática. Tais perspectivas representam ainda hoje desafios a serem superados para se possibilitar que os professores superem os obstáculos e atendam às demandas relativas à sua prática.

Nesse sentido, Machado (2005) sustenta que nenhuma transformação ou mudança na educação ocorrerá de forma efetiva sem que se transforme a concepção epistemológica de conhecimento. Para o professor, isso significa que é fundamental que ele tenha clareza acerca das diferentes formas de se perceber a construção do conhecimento. Uma vez que sem ciência deste aspecto, o docente, muitas vezes, se limita a perceber o ensino como uma mera transmissão de conhecimentos, ignorando a capacidade criadora do aluno (GOMES, 2002).

A formação inicial, nesse sentido, precisa ser desenvolvida de modo a possibilitar o

> desencadeamento de ações para que estes professores assumam o compromisso com uma autêntica Educação Matemática. Para tanto, faz-se necessário uma mudança epistemológica nos cursos de formação, para que estes se tornem mais dinâmicos e abertos. (GOMES, 2002, p. 366).

Tal observação vem a complementar o ponto de vista de Pimenta (2009, p. 20), para a qual o maior desafio posto para os cursos de formação inicial "é o de colaborar no processo de passagem dos alunos de seu *ver o professor como aluno* ao *ver-se como professor*" (grifo do autor). Isto porque tal postura influenciará na construção da identidade de professor, pois, segundo a autora, enquanto eles não se identificarem como professores, os saberes da docência não serão suficientes.

Dessa forma, a formação inicial alcançará sua maior contribuição para os futuros professores quando

> desenvolver com eles pesquisas da realidade escolar, com o objetivo de instrumentalizá-los para a atitude de pesquisar suas atividades docentes. Ou seja, trabalhando a pesquisa como princípio formativo da docência (PIMENTA, 2009, p. 28).

Em relação à Matemática, Gomes (2002) acredita que os cursos de formação deveriam oferecer aos seus alunos condições tanto para terem uma concepção adequada de educação matemática como de mediá-la. Deveriam também incentivar a aquisição de conceitos fundamentais que estes futuros professores terão que utilizar em sua prática pedagógica, privilegiando não o domínio de técnicas, mas, sobretudo, a compreensão de tais conceitos.

Para Curi (2004) um dos maiores desafios para a formação inicial consiste em inserir os futuros professores

> no contexto escolar, na realização de tarefas profissionais e (experienciais), o que implica, entre outras, especial atenção para a organização da Prática de Ensino e do Estágio Supervisionado, que ainda vêm sendo realizados mediante práticas burocratizadas, pouco reflexivas, que dissociam teoria e prática, trazendo pouca eficácia para a formação profissional dos alunos.

Considerando-se estas perspectivas, em linhas gerais, os desafios colocados à formação inicial apontam para duas direções: mudança na concepção epistemológica do conhecimento que permeia todo o processo de formação e maior aproximação das atividades desenvolvidas no contexto escolar. Convém destacar que se considerando o objetivo deste estudo de analisar o domínio conceitual e didático de pedagogos, em formação inicial, para o ensino de fração, considerou-se pertinente a sistematização de Shulman (1986) no que diz respeito ao conhecimento do conteúdo da disciplina e ao conhecimento didático do conteúdo da disciplina para fundamentar a análise dos dados.

Tendo-se apresentado um esboço da trajetória histórica, bem como perspectivas e desafios para a formação do professor dos AIEF, a seguir, discutir-se-á as teorias elegidas para compor o quadro teórico deste trabalho no que diz respeito à fração, objeto de estudo desta investigação.

CAPÍTULO 2 – A COMPREENSÃO DO CONCEITO DE FRAÇÃO: PRESSUPOSTOS TEÓRICOS

O saber não se limita à compreensão das leis do universo e à busca de um fundamento da realidade, mas tem como função principal a formação do homem; o sábio não é mais um contemplativo, mas um 'artífice da vida'.
Sêneca

O presente capítulo visa discutir e apresentar os elementos teóricos que serão tomados como base para a organização e elaboração deste trabalho no que diz respeito à compreensão do conceito de fração. Considera-se que o entendimento de um fenômeno requer o apoio de teorias que contribuam na elucidação dos aspectos que o constituem. Neste sentido, buscou-se na literatura discussões que fornecessem um suporte a compreensão dos elementos que se vinculam à aquisição do conceito de fração.

Deste modo, realizou-se uma sistematização de pesquisas no âmbito da Educação Matemática que discutem a aquisição de conceitos matemáticos e em especial a fração. Considerou-se, principalmente, as contribuições de Nunes et al. (2003) e Duval (2009) para o entendimento dos aspectos que implicam no ensino e aprendizagem desse conceito, tendo em vista que o foco desta pesquisa está sob a formação de professores. A escolha destes autores, bem como de suas respectivas elaborações teóricas justifica-se por propiciarem uma análise aprofundada de dois aspectos concernentes às frações: seus significados e representações.

Interessa destacar ainda que a opção por esses autores realizou-se com o apoio do levantamento de pesquisas no âmbito da Educação Matemática. A partir desta revisão foi possível conhecer e elaborar um quadro acerca das produções que tratam de fração e números racionais, situando a relevância da presente pesquisa dentre estes trabalhos. A partir de tal realização foi possível perceber que diversos estudos têm se pautado na elaboração teórica de Nunes et al. (2003), bem como de Duval (2009), contudo ainda são poucas as experiências que colocam a fração sob o enfoque destas duas teorias.

Ante o exposto, a organização deste capítulo contará inicialmente com discussões acerca dos obstáculos para compreensão do conceito de fração que têm sido apontados pela literatura, destacando-se entre os demais aqueles que se referem à multiplicidade de significados aos quais se pode associar esse conceito. Estes últimos serão aprofundados e detalhados a partir de teóricos que discutem diferentes interpretações para as frações, principalmente os estudos de Nunes et al. (2003) referenciados em Vergnaud (1990). Em seguida, serão apresentados alguns pressupostos da teoria dos Registros de Representação Semiótica discutidos por Duval (2009), que contribuem para o entendimento das funções que os registros de representação semiótica podem assumir para a aquisição do conceito de fração. Por fim, será apresentado o levantamento realizado das pesquisas que têm investigado as frações e os números racionais dentro do âmbito da Educação Matemática.

A Complexidade do Conceito de Fração

Diversos estudos têm discutido aspectos relativos às dificuldades apresentadas para a construção do conceito de fração pelos alunos. Tais estudos explicitam a complexidade e diversidade de conceitos que envolvem a aprendizagem de frações, advertindo que a construção deste conceito não ocorre de forma natural.

Magina, Bezerra e Spinillo (2009) identificam na literatura produzida sobre o assunto alguns dos aspectos que são colocados em evidência ao se considerarem as dificuldades para a apreensão deste conceito. Em linhas gerais, os obstáculos para aprendizagem de fração são atribuídos principalmente a aspectos como: a dificuldade em romper com conhecimentos relativos aos números naturais, os diferentes significados que a fração pode assumir, os princípios de equivalência e ordenação, sua associação com outros conceitos matemáticos, a pluralidade de representações do número fracionário, dentre outros.

Segundo Kieren (1988), o entendimento de frações requer que elas sejam incluídas em um campo maior, denominado Números Racionais, que deve ampliar o conjunto dos números naturais, tendo em vista a insuficiência deste conjunto numérico para resolver certos tipos de situações. Nesse sentido, Moreira e David (2007) advertem que ao longo do processo de formação de professores de matemática o conjunto dos racionais é considerado como um objeto simples enquanto que diversas pesquisas têm apontado que a sua compreensão pode ser uma das mais complexas da prática escolar.

Na compreensão da construção de um novo conjunto numérico, como o caso dos números racionais, interessa entender as relações que os elementos mantêm entre si. Isto porque “a aquisição da noção abstrata de número racional está associada a um longo processo de elaboração e reelaboração, quase que elemento por elemento [do conjunto dos números naturais]”. (MOREIRA; DAVID, 2007, p.61).

Nesse sentido, diversas pesquisas têm indicado que parte dos erros das crianças em relação às frações decorre da aplicação de conhecimentos dos números naturais (NUNES, 2003; LOPES, 2008; SPINILLO; LAUTERT, 2006). Itzcovich (2008) chama a atenção para o fato de que esses erros não devem ser percebidos como falta de conhecimento, mas como consequência de um ou vários conhecimentos que os alunos já possuem. Nesta perspectiva, é preciso considerar que, para os alunos, os conhecimentos, que anteriormente os levavam ao êxito no estabelecimento de relações com os números naturais, passam a ser inadequados para as situações que envolvem fração. O papel do professor, deste modo, seria optar por decisões didáticas que contribuíssem para romper e ampliar os conhecimentos que os alunos já possuem.

Para Moreira e David (2007), para a promoção da aprendizagem dos números racionais se faz necessário que o professor trabalhe com os significados concretos das frações, bem como os outros subconstructos do conjunto dos números racionais para que assim sejam compreendidas as relações entre os números, formas de representação, operações, propriedades e todos os novos conhecimentos que precisam ser construídos para que os números racionais sejam assimilados.

Com respeito aos significados que podem ser assumidos pelos números racionais, nos últimos 30 anos uma vasta literatura tem discutido a ideia de que os números racionais são constituídos por vários constructos (KIEREN, 1976, 1988, 1993; BEHR, LESH, POST e SILVER, 1983, 1992, 1993; HAREL e CONFREY, 1994). Kieren (1976) foi o primeiro a introduzir a ideia de que a compreensão do número racional implica no entendimento de seus vários constructos. O autor defende que a aprendizagem dos números racionais depende de uma variedade de experiências com diversas interpretações dos números racionais que propiciem o estabelecimento de relações dos constructos entre si. Nesse sentido, Kieren (1976, p.102) elabora uma classificação teórica considerando a existência de sete constructos para os números racionais, a saber:

1) Os números racionais são frações que podem ser comparadas, somadas, subtraídas, etc[11].
2) Os números racionais são frações decimais que formam uma extensão natural (por meio do nosso sistema de numeração) dos números naturais[12].
3) Os números racionais são classes de equivalência de frações. Então, {1/2, 2/4, 3/6...} e {2/3, 4/6, 6/9...} são números racionais[13].
4) Os números racionais são números na forma p/q, onde p e q são inteiros e $q \neq 0$. Nesta forma, números racionais são números que estabelecem uma razão[14];
5) Os números racionais são operadores multiplicativos[15].
6) Os números racionais são elementos de um campo quociente infinito e ordenado. Eles são números na forma $x = p/q$ onde x satisfaz a equação $qx = p$[16].
7) Os números racionais são medidas ou pontos em uma reta numérica[17].

Posteriormente, Kieren (1988) sintetiza sua interpretação reelaborando uma classificação para os números racionais na sua representação fracionária considerando cinco ideias fundamentais, são elas: relação parte-todo, quociente, medida, razão e operador[18]. O autor desenvolve, ainda, uma teoria com base na composição de uma rede ideal de conhecimentos. Esta rede está entrelaçada por níveis que denotam o processo de construção de um conhecimento ideal sobre os números racionais (KIEREN, 1988). Os níveis são considerados da seguinte forma:

---

[11] "Rational numbers are fractions wich can be compared, added, subtracted, etc".
[12] "Rational numbers are decimal fractions wich form a natural extension (via our numeral system) to the whole numbers.
[13] "Rational numbers are equivalence classes of fractions. Thus, {1/2, 2/6,} and {2/3, 4/6, 6/9...} are rational numbers.
[14] "Rational numbers of the form p/q, where q are integers and $q \neq 0$. In this form, rational number are 'ratio' numbers".
[15] "Rational numbers are multiplicative operators".
[16] "Rational numbers are elements of an infinite ordered quocient field. They numbers of the form $x = p/q$ where x satisfies the equation $qx = p$".
[17] "Rational numbers are measures or points on a number line".
[18] Os aspectos relacionados a cada uma dessas ideias serão aprofundados no tópico dedicado aos estudos de Nunes et al. (2003).

- 1º nível: composto pelos constructos mais simples (parte-todo) e permite o domínio de linguagens simples como metades, terços, etc.
- 2º nível: constituído pelo constructo divisão, a ideia de equivalência e do domínio da formação e divisão de inteiros e unidades;
- 3º nível: integra os constructos medida, quociente, razão e operador;
- 4º nível: relativo ao conhecimento de relações, funções e da formalização dos conhecimentos sobre equivalência dos números racionais;
- 5º nível: concentra a construção dos números racionais e conceitos a eles relacionados, produzindo campo conceitual multiplicativo e o reconhecimento do número racional como um elemento de um campo quociente infinito.
- 6ª nível: nível mais elaborado de compreensão, possibilitando a explicação de vários fenômenos, demonstração de teoremas sobre estruturas matemáticas, bem como a capacidade de transitar entre os níveis anteriores.

Os modelos teóricos definidos por Kieren (1976; 1988; 1993) influenciaram o desenvolvimento de diversos outros estudos acerca dos números racionais e em especial na sua representação fracionária. Dentre eles destaca-se o de Berh et al. (1983, p.10) que redefiniram e subdividiram os constructos destacados por Kieren (1976), interpretando sete subconstructos para frações:

- *Subconstructo medida:* representa a reconceptualização da noção parte-todo da fração. Direciona-se a questão de quanto há de uma quantidade relativa a uma unidade especificada daquela quantidade[19].
- *O subconstructo razão*: expressa uma relação entre duas quantidades, por exemplo, a relação entre o número de garotos e garotas em uma sala[20].
- *O subconstructo taxa:* define uma nova quantidade como uma relação entre duas outras quantidades. Por exemplo, a velocidade é definida como uma relação entre distância e tempo[21]. A diferença entre esse constructo e o da razão é que as razões não podem ser somadas ou subtraídas (MERLINI, 2005).

[19] "represents a reconceptualization of the part-whole notion of fraction. It addresses the question of how much there is of a quantity relative to a specified unit of that quantity".
[20] "expresses a relationship between two quantities, for example, a relationship between the number of boys and girls in a room".
[21] "defines a new quantity as a relationship between two other quantities. For example, speed is defined as a relationship between distance and time".

- *O subconstructo quociente*: interpreta o número racional como uma indicação de quociente. Isto é, *a/b* é interpretado como *a* dividido por *b*[22].
- *O subconstructo das coordenadas lineares*: é similar a noção de Kieren em sua interpretação de medida. Este subconstructo enfatiza propriedades associadas com a topologia métrica da reta numerada racional tais como densidade, distância e não completividade. Os Números Racionais são interpretados como pontos em uma reta, enfatizando que os números racionais são um subconjunto dos números reais[23].
- *O subconstructo decimal:* enfatiza propriedades associadas com o sistema de numeração decimal[24].
- *O subconstructo operador*: impõe ao número racional um conceito de função; um número racional é uma transformação[25].

A importância de tais classificações teóricas decorre do fato de que diferentes estruturas cognitivas são necessárias para lidar com os vários subconstructos de número racional. Dessa forma, o intuito destes estudos era o de fornecer uma base para a análise do desenvolvimento do conceito de número racional em crianças, proporcionando a compreensão de aspectos relativos aos obstáculos para a construção das relações implícitas aos números racionais, suas operações e aplicações que ainda permaneciam sem resposta. A partir destes estudos, foi possível identificar diversas fases de desenvolvimento no pensamento das crianças ao lidarem com números racionais, constatando uma gradual diferenciação e progressiva integração dos subconstructos.

Com base nas relações que podem se estabelecer entre operações matemáticas e os subconstructos dos números racionais em sua forma fracionária, Berh et al. (1983) elaboraram um esquema conceitual evidenciando relações que devem ser

[22] "interprets a rational number as an indicated quotient. That is, a/b is interpreted as a divided by b".
[23] "is similar to Kieren's notion of a measure interpretation. It emphasizes properties associated with the metric topology of the rational number line such as betweenness, density, distance, and (non)completeness. Rational numbers are interpreted as points on a number line, emphasizing that the rational numbers are a subset of the real numbers".
[24] "the decimal subconstruct of rational number emphasizes properties associated with the base-ten numeration system".
[25] "imposes on rational number a function concept; a rational number is a transformation".

consideradas para seu ensino e aprendizagem.Tal esquema pode ser visualizado na figura, a seguir:

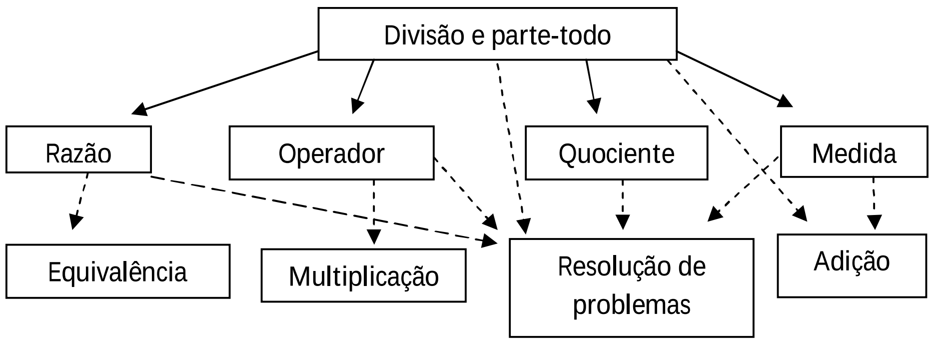


Figura 1: Esquema conceitual para o ensino de números racionais (BERH et al., 1983)).

Com base nas classificações de Kieren (1976) e Berh et al. (1983), Nunes et al. (2003)[26] elaboraram uma nova classificação teórica para fração. Esta sistematizalçao dos autores será considerada como um dos aportes teóricos centrais para esta investigação. Deste modo, na seção a seguir serão detalhados seus aspectos.

Os Cinco Significados de Fração: a Explicitação de seus Aspectos Semânticos

Nunes et al. (2003) elaboraram uma classificação teórica para as frações, relacionando-a a cinco diferentes significados. Tal sistematização é a elaborada à luz da teoria dos campos conceituais de Vergnaud (1990). Com efeito, a compreensão destes significados requer o entendimento de alguns conceitos relacionados a esta teoria. Nesse sentido, a seguir serão explicados alguns elementos desta teoria para fundamentar a discussão acerca dos cinco significados da fração.

Para Vergnaud (1990), a produção e desenvolvimento dos conhecimentos de um indivíduo se dão a partir de um processo de interação com as situações vivenciadas. Deste modo, para compreender a apreensão de um conceito é fundamental considerar os contextos nos quais ele se insere. Isto porque para Vergnaud (1990) cada situação atribui a um conceito diferentes significados.

[26] Os autores, atualmente, possuem uma classificação considerando quatro significados. Todavia, para este trabalho utilizou-se a sistematização apresentada em 2003, pois a classificação atual ainda estava em processo de elaboração e divulgação no período de construção da presente pesquisa.

Na perspectiva desta teoria, os significados dizem respeito aos diferentes esquemas que são evocados na relação entre os sujeitos e as situações específicas de um conceito. Assim, para cada situação, esquemas diferentes são evocados no sujeito. Por exemplo, os esquemas necessários para resolver a adição $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ são diferentes daqueles utilizados para somar 0,5 + 0,5.

Os esquemas dizem respeito à organização invariante dos sujeitos sobre uma classe de situações dadas. Para Vergnaud (1990, p.176),

> O conceito de esquema é particularmente adaptado para designar e analisar classes de situações para as quais o sujeito dispõe em seu repertório, a um momento dado do seu desenvolvimento e sob certas circunstâncias, de competências necessárias ao tratamento relativamente imediato da situação. Mas ele é igualmente válido para a descoberta e invenção em situação de resolução de problemas. Muitos esquemas são invocados sucessivamente e mesmo simultaneamente em uma situação nova para o sujeito.

Segundo Magina, Campos e Gatirana (2001), os esquemas são marcados por três características. A primeira delas diz respeito ao fato que eles são sempre locais, isto é, são relativos às ações requeridas para uma situação específica. A segunda característica refere-se a sua função de organizador dos invariantes nas diversas situações que envolvem um conceito. A terceira característica refere-se ao fato de que os esquemas atuam de forma implícita nas situações.

No tocante aos invariantes, estes são considerados como componentes cognitivos essenciais dos esquemas. Eles podem ser constituídos de duas formas diferentes: implícitos e explícitos. Um invariante é considerado como implícito quando está ligado aos esquemas de ação do indivíduo. Assim, os sujeitos não têm consciência de sua utilização, pois os invariantes implícitos relacionam-se às ações não conscientes. O reconhecimento deste tipo de invariante requer a análise dos objetos e propriedades da situação em que está inserido e dos procedimentos utilizados frente a esta situação (MAGINA; CAMPOS; GATIRANA, 2001). Já os invariantes explícitos estão relacionados às concepções dos sujeitos. Deste modo, podem ser expressos por palavras e outras representações simbólicas.

Diante destas considerações, para Vergnaud (1990) o processo de aquisição do conhecimento se dá por meio de situações e problemas já conhecidos. Isto implica num domínio de validade restrita para os conceitos, pois os sujeitos associam os esquemas construídos para um conceito aos raciocínios relativos às suas experiências com ele. Além disso, a apreensão de um conceito relaciona-se também ao nível de desenvolvimento cognitivo dos sujeitos.

Assim sendo, o domínio de validade de um conceito diz respeito a campos conceituais específicos. Estes últimos são definidos como

> conjunto de situações cuja apropriação requer o domínio de vários conceitos de naturezas diferentes. Essas situações (S) referem-se às realidades, que são trabalhadas pela criança a partir do reconhecimento de seus invariantes (I) que, por sua vez, são expressos por um conjunto de representações simbólicas (R). (MAGINA; CAMPOS; GATIRANA, 2001, p.19).

Para o estudo dos campos conceituais, se faz necessário reconhecer que os conceitos são formados por uma terna constituída por três de conjuntos (S, I, R), são eles: o conjunto das situações (S) que atribuem significados aos conceitos; o conjunto de invariantes (I), isto é, objetos, propriedades e relações que podem ser utilizadas pelo sujeito para atuar sobre as situações; o conjunto de representações simbólicas (R) que podem ser usadas para expressar os invariantes e procedimentos conectados a cada situação.

Nesta perspectiva, o domínio das situações pelos sujeitos depende de uma variedade de conceitos, procedimentos e representações simbólicas, articulados entre si. A partir destes aspectos se torna possível a definição das tarefas cognitivas que devem ser adotadas para cada tipo de situação. Tais aspectos remetem a ideia de que o desenvolvimento de um campo conceitual é um processo que demanda um longo período de tempo em que se faz necessária a vivência com as diversas situações associadas a este campo conceitual.

Observe-se o exemplo dos números racionais cuja aprendizagem requer uma ruptura com as concepções construídas pelos alunos acerca dos números naturais. Nesse sentido, se faz necessário demandar de tempo e estratégias didáticas adequadas para promover a desconstrução dos conhecimentos aplicados aos números naturais, reconstruindo-os no contexto dos números racionais.

No entanto é importante destacar que no processo de construção de um campo conceitual os alunos encontram muitas dificuldades para se desvincular de concepções relativas às situações relativas aos campos conceituais já apropriados por ele. Tome-se novamente o exemplo dos números racionais para os quais se evidencia que os alunos tentam transpor conhecimentos relativos aos números naturais como a concepção de que "multiplicação sempre aumenta". Sabe-se que tal concepção não é mais válida para os números racionais, pois 15 multiplicado por $\frac{1}{3}$ é igual a 5. Assim, a promoção da compreensão de um conceito pelo aluno precisa levar em consideração que os novos conhecimentos a serem ensinados se relacionam a um sistema de significados que os alunos já possuem.

Ante o exposto, pode-se afirmar que uma situação particular ou uma representação específica não evoca no sujeito todos os esquemas disponíveis. Para ilustrar esta assertiva vejamos o caso da representação *um quinto*. O significado que o aluno atribuirá para esta representação dependerá dos esquemas construídos a partir das experiências já vivenciadas com essa representação.

Para o aluno, *um quinto* pode significar a localização de uma fração em uma reta numérica, a parte tomada de uma pizza dividida igualmente em cinco pedaços, a divisão de cinco balas entre cinco amigos, a representação da quantidade de suco e de água serem considerados em uma receita, um número que multiplicado por 20 obtenha 4 como resultado. Em suma, o significado a ser atribuído dependerá da situação na qual será considerado o conceito.

Neste sentido, Nunes et al. (2003) ao relacionarem o estudo de fração à teoria dos campos conceituais sistematizam classificações para as situações e ou conjunto de situações que estão relacionadas ao conceito de fração. Assim, são considerados cinco diferentes significados relacionados a ela, quais sejam: número, parte-todo, medida, quociente e operador multiplicativo.

Este conjunto de significados faz referência a um conjunto de situações que podem ser exploradas dentro de um contexto de diferentes classificações para as quantidades. Considera-se aqui a classificação das quantidades em dois tipos: contínuas e discretas; extensivas e intensivas. Essas classificações baseiam-se no fato de que diferentes pressupostos lógicos podem formar a base para a compreensão dos tipos de quantidade.

Por quantidades contínuas consideram-se aquelas passíveis de serem divididas exaustivamente sem que percam suas características naturais. Por exemplo, uma torta pode ser dividida em quantas partes se desejar sem que deixe de ser torta. Em oposição, as quantidades discretas referem-se a uma coleção de objetos que representam unidades naturais, por exemplo, “três bolas”, “duas camisas”. O resultado da divisão de quantidades discretas é produzido por subconjuntos destas unidades.

Quanto às quantidades que se referem “às relações em vez de à quantidade real elas são chamadas quantidades intensivas, em contraste com quantidades extensivas, que se referem à soma total” (NUNES; BRYANT, 1997, p. 146). De forma complementar, as quantidades extensivas baseiam-se na medida de comparação entre duas unidades de mesma natureza enquanto as relações entre duas quantidades diferentes representam as quantidades intensivas. Nunes et al. (2005, p.22) explicam que a “lógica das quantidades intensivas é diferente da lógica das quantidades extensivas porque não está baseada na relação parte-todo”, mas na relação parte-parte.

Diante destas considerações, a seguir serão detalhados cada um dos cinco significados considerados para a fração, tratando-se deles no contexto das quantidades contínuas e discretas, bem como extensivas e intensivas.

Significado Número

Este significado refere-se ao fato de frações, assim como os números inteiros, se constituírem como números que não precisam, necessariamente, se referir a quantidades específicas. Consequentemente, para este significado também não é necessário fazer referência a um conjunto de situações particulares. Por exemplo, na proposição “converta o número racional 0,5 para sua representação fracionária”, não é preciso que o sujeito seja remetido a nenhum referente específico para compreender o que é solicitado. Nesse sentido, não é preciso fazer referência ao contexto das quantidades contínuas e discretas.

Admitir este significado implica na compreensão do que esse número quantifica e para tal se faz necessário considerar algumas percepções. A primeira delas é a de que o uso da fração possibilita uma ampliação do que era suscetível de ser quantificado com os números naturais. Isto é, esses números surgiram da necessidade de subdividir a unidade num certo número de partes iguais, constituindo-se, dessa forma, em *frações da unidade.* A partir desta percepção é necessário que se reconheça que é possível comparar, em termos de quantidade representada, esses números entre si e com os números naturais, ou seja, as frações são números que estão intercalados entre os números naturais. Em síntese, compreender a fração como número requer a compreensão dos novos objetos, propriedades, relações e representações que a constituem. E são esses conhecimentos que servirão de suporte para a compreensão dos outros significados da fração.

Tais aspectos podem ser ilustrados a partir do exemplo a seguir:

Represente a fração $\frac{4}{6}$ *em uma reta numérica.*

A compreensão deste problema (situação) requer que o aluno perceba a fração, sobretudo, como um número (significado) fração e não apenas a dois números naturais sobrepostos, isto é, é preciso compreender o que a sua representação expressa. Além disso, é necessária a compreensão das propriedades que fazem parte dos números racionais e ainda que se perceba a relação destes com os números naturais para que assim, seja possível localizar a fração em uma reta numérica. Estes aspectos supõem a apropriação do princípio da ordenação (invariante) que permitirá o entendimento de que entre uma fração e outra existem infinitos números.

Significado Parte-todo

Este significado refere-se à compreensão da fração como uma relação parte-todo. Segundo Campos, Magina e Nunes (2006) “a idéia presente nesse significado é a da partição de um todo em n partes iguais, em que cada parte pode ser representada como $\frac{1}{n}$". Em outras palavras, a concepção que é requerida por este significado é que um inteiro/todo (representado por quantidades contínuas ou discretas) é fracionado em partes iguais e que as frações representam exatamente a quantificação das partes tomadas em relação ao inteiro/todo.

Nunes (2003) considera que ao se apresentarem situações desse tipo para os alunos, normalmente, eles interpretam a representação como um processo de dupla contagem na qual acima do traço da fração se escreve o número de partes tomadas e abaixo do traço escreve-se o número total de partes. A autora ainda complementa, afirmando que o procedimento mais comum de abordagem desse significado é a apresentação de uma figura plana dividida em partes congruentes com algumas selecionadas. A seguir, observa-se um exemplo desta abordagem e também uma representação da relação parte-todo em quantidades discretas.

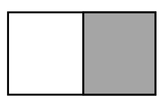
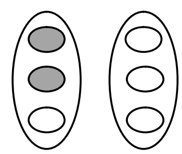
 O retângulo que constitui um todo contínuo, foi dividido em duas partes de mesma área e uma foi considerada.	 As bolinhas constituem um todo discreto. O total das bolinhas foi dividido em duas partes da mesma quantidade e duas das bolinhas estão pintadas.

Figura 2: Representação figural do significado parte-todo em quantidades contínuas e discretas (SILVA; AG ALMOULOUD, 2008).

O significado parte-todo se constitui como base para as interpretações mais complexas da fração. Apresentam-se a seguir exemplos de problemas envolvendo este significado, considerando-se quantidades contínuas e discretas.

Problema 1 (quantidades contínuas): Marina comprou um bolou e partiu em 5 partes iguais. Após o jantar Marina comeu 2 pedaços desse bolo. Que fração representa a quantidade de bolo que Marina comeu?

Problema 2 (quantidades discretas): Na caixa de brinquedos de Luana há 5 bolinhas de mesmo tamanho e formato. 2 bolinhas são verdes e 3 são vermelhas. Que fração representa a quantidade de bolinhas verdes em relação ao total de bolinhas da caixa?

Para a resolução dessas situações é necessário que o aluno tenha previamente desenvolvido algumas competências, a saber: a identificação da unidade; a realização de divisões; a ideia de conservação. Nas duas situações apresentadas, o aluno precisaria reconhecer como era constituído o todo. No *problema 1* era representado pelo bolo e no *problema 2* pela coleção de 5 bolinhas. Além disso, era preciso que aluno tivesse posse da percepção de que o todo se conserva mesmo quando o dividimos em partes, compreendendo assim o que significa realizar divisões. Para tal, é de fundamental importância o desenvolvimento do princípio da conservação de quantidade. Sobre esse aspecto é importante destacar a consideração de que

> [...] se os sujeitos [...] não compreendem a conservação da quantidade, é porque eles não chegaram a construir a noção da própria quantidade, no sentido de quantidade total, e se a isso não chegam é por não poderem compor as relações ou as partes em jogo, pois o seu espírito não ultrapassa o nível das qualidades ou das quantidades "brutas" (PIAGET, 1971, p.35-36).

Nesta perspectiva, entender frações pressupõe a coordenação das relações parte-todo. Sendo este aspecto essencial para a compreensão de frações.

Significado Quociente

A fração como quociente indica simultaneamente uma divisão e seu resultado em quantidades contínuas. Este significado está presente em situações em que se faz necessário dividir igualmente objetos em certo número de grupos, relacionando-se a ideia de divisão. Assim, esse significado está presente em situações em que a divisão se apresenta como estratégia para a resolução. Por exemplo, duas barras de chocolate a serem divididas entre cinco crianças. Tem-se nessa situação duas variáveis: *chocolates* e *crianças*. Dessa forma, a variável *chocolates* corresponderia a composição do todo e a variável *crianças* equivale a quantidade de partes tomadas. A fração, então, corresponderia a uma divisão (dois dividido por 5) e também ao resultado da divisão (cada criança recebe $\frac{2}{5}$).

A seguir, visando a melhor compreensão dos aspectos relativos a este significado, apresentam-se exemplos de situações em que ele se insere abordando quantidades contínuas e discretas.

Problema 1 (quantidades contínuas): Divida 3 pães entre 4 pessoas. Que fração representa a quantidade de pães recebida por cada pessoa?

Para compreender a fração, na situação acima, é preciso que se reconheça que ela representa o quociente que expressa o tamanho que deve ser tomado do todo para ser distribuído igualmente. Em segundo lugar, é preciso admitir que $\frac{3}{4}$ se constitui como uma representação que permite uma melhor explicitação das partes que estão sendo consideradas na situação do que 0,75. E, por fim, reconhecer que ela expressa tanto a divisão em si quanto seu resultado.

Problema 2 (quantidades discretas): Tenho 35 figurinhas e preciso dividi-las igualmente para sete crianças. Que fração representa a quantidade de figurinhas que cada criança irá receber?

Para a compreensão do significado quociente em quantidades discretas faz-se necessário considerar dois fatos. Primeiramente é necessário que o numerador sempre seja divisível pelo denominador, note-se que na situação acima não faria sentido dividir 35 figurinhas para 8 crianças. Assim, no contexto das quantidades discretas a fração representa a relação entre as variáveis, sendo que uma variável corresponde ao numerador e a outra ao denominador (CAMPOS; MAGINA; NUNES, 2006).

Este significado também supõe que as ideias relativas ao significado parte-todo sejam extrapoladas, pois é preciso se levar em consideração duas grandezas distintas ao passo que no significado parte-todo temos referência a uma variável (o inteiro ou a unidade).

Significado Medida

Pode-se associar a fração ao seu significado medida quando ela está vinculada à ideia de comparação entre duas grandezas. Para tal se faz necessário o estabelecimento de um referencial de comparação único para grandezas de mesma espécie como, por exemplo, centímetros para metros. Damico (2007) coloca que reconhecer este significado diz respeito a identificar quantas vezes uma unidade cabe dentro da outra e que a fração exprime o resultado de tal comparação.

Para esse significado, além da abordagem de quantidades contínuas e discretas cabe considerá-la no contexto das quantidades extensivas e intensivas. As quantidades extensivas podem ser representadas por frações quando se tem a finalidade de representar o valor de uma quantidade. Por exemplo, a fração $\frac{12}{60}$ pode se referir a uma quantidade extensiva se tiver a intenção de indicar a quantidade de alunos que reprovaram dentre o total de alunos de uma classe. Neste caso, a medida por ela expressa é o quociente entre número de alunos que reprovaram dividido pelo o número de alunos total da sala.

As quantidades intensivas dizem respeito à relação entre duas variáveis. A aplicabilidade das frações no contexto das quantidades intensivas somente é possível quando duas unidades podem ser reunidas em um todo como quando consideramos “um terço de tinta azul para cada dois terços de tinta branca”.

Observa-se, a seguir, exemplos de problemas que envolvem a fração como medida considerando quantidades contínuas e discretas:

Problema 1 (quantidades contínuas): Para produzir uma determinada cor de tinta é necessário acrescentar 2 latas de tinta rosa para cada 1 lata de tinta branca. Que fração representa a medida da tinta rosa em relação à quantidade total de tinta?

Para reconhecer o significado medida considerando-se quantidades contínuas se faz necessário perceber três aspectos:

- A relação entre as duas variáveis diferentes;
- As quantidades contínuas relacionam-se diretamente às quantidades intensivas, pois é necessário que as partes sejam reunidas em um mesmo todo;
- O todo nestas situações é composto pela relação entre partes;

Problema 2 (quantidades discretas): Para arrecadar dinheiro para um evento da escola, a mãe de Pedro fez 120 biscoitos que foram distribuídos em 15 pacotes. Pedro vendeu 10 pacotes. Que fração representa a quantidade de biscoitos vendidos em relação ao total de biscoitos?

Para compreender a fração como medida de quantidades discretas dois aspectos são necessários:

- A medida em questão é obtida pelo quociente entre o numerador *a* (quantidade de elementos considerados em uma coleção) e o denominador *b* (número total de elementos de uma coleção), isto é a fração $\frac{a}{b}$.
- As quantidades contínuas relacionam-se diretamente as quantidades extensivas nas quais a quantidade é medida pela relação entre duas variáveis.

Significado Operador Multiplicativo

Este significado de fração está associado à ideia de transformação. A fração constitui-se, então, como um operador multiplicativo que imprime uma ação sobre um número transformando o seu valor nesse processo. Desta forma, considerar a fração $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$ como um operador multiplicativo implica reconhecer que nela estão inclusas duas operações: multiplicação por *a* e divisão por *b*. Com efeito, as frações podem ser vistas como o valor escalar aplicado a uma quantidade.

Quando é feita a referência a um número inteiro é possível se expressar dizendo: Carlos tem 10 bolas de gude. No caso da fração como operador pode-se estabelecer a relação: Carlos tem $\frac{2}{4}$ de um conjunto de 20 bolas de gude. Percebe-se, assim, a fração como um multiplicador da quantidade indicada.

Observam-se, a seguir, exemplos que evidenciam aspectos a ser considerados para a abordagem deste significado em quantidades contínuas e discretas.

Problema 1 (quantidades contínuas): Ana comeu 4/6 de uma pizza. Represente com um desenho a quantidade de pizza que Ana comeu.

Problema 2 (quantidades discretas): Em uma eleição o candidato “A” conseguiu obter 81 votos. Em uma pesquisa realizada com eleitores constatou-se que 2/3 dos que votaram no candidato “A” eram mulheres. Quantas mulheres votaram no candidato “A”?

Note-se que para as quantidades contínuas a fração no significado operador multiplicativo funciona como uma máquina que reduz ou amplia a quantidade sob a qual se aplica pois no caso apresentado o todo (pizza inteira) é transformado de modo que após aplicação da fração como operador é possível evidenciar que de 6 pedaços sobraram apenas 2, diminuindo sua quantidade. Em relação ao problema que envolve quantidades discretas, a ação da fração é operar como um multiplicador divisor. A fração, dessa forma, compõe um “contexto natural para a composição de transformações (funções, operador – significado), a idéia de inversa (o operador que reconstrói o estado inicial) e a idéia de identidade (o operador que não modifica o estado inicial)”. (MERLINI, 2005, p, 31).

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica: o Papel das Representações na Aprendizagem Matemática

Para o estudo de um conceito matemático se faz necessário destacar aspectos que concernem tanto às exigências científicas relativas a este conteúdo quanto aos processos cognitivos referentes ao seu processo de aquisição conceitual. É neste sentido que a teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2009) oferece um aporte teórico consistente e que propicia a compreensão de aspectos relativos ao funcionamento cognitivo dos sujeitos, bem como sua interação com o objeto matemático.

A referida teoria permite a análise de dois aspectos fundamentais para a compreensão do processo de aprendizagem matemática, quais sejam: o estudo dos elementos que sobressaltam nas transformações podem ser realizadas nos diferentes registros de representação semiótica e a natureza dos registros que se apresentam para um objeto matemático. Tais aspectos têm como base a compreensão de que o uso de sistemas semióticos de representação é fundamental para o exercício e desenvolvimento das atividades cognitivas fundamentais. Com efeito, se faz necessário conhecer quais sistemas cognitivos são necessários mobilizar para apropriação dos objetos matemáticos e assim, efetuar variadas transformações em seus registros de representação semiótica.

Nesta perspectiva, Duval (2009) considera que a atividade matemática requer o desenvolvimento e aquisição de sistemas cognitivos específicos. Tal fato decorre da conexão entre o pensamento humano e as operações semióticas, desta relação se estabelece a premissa de que "não haverá compreensão possível sem o recurso às representações semióticas". (FLORES, 2006, p.3).

A semiótica "é a ciência que tem por objeto de investigação todas as linguagens possíveis, ou seja, que tem por objetivo o exame dos modos de constituição de todo e qualquer fenômeno como fenômeno de produção de significação e sentido" (SANTAELLA, 1983, p.2). É neste sentido que Duval (1995), a partir da compreensão de que a Matemática se constitui como uma linguagem, considera que a sua apreensão vincula-se a utilização de diversos sistemas de representação.

Convém destacar que Duval (1995) situa a teoria dos Registros de Representação Semiótica como uma abordagem cognitiva diferenciada que visa à compreensão de como o aluno compreende, efetua e controla os processos matemáticos.

A diferenciação entre os processos cognitivos requeridos para a apropriação dos objetos matemáticos e aqueles relativos às outras ciências reside em dois aspectos. O primeiro deles diz respeito ao fato de que os "objetos matemáticos, começando pelos números, não são objetos diretamente perceptíveis ou observáveis com a ajuda de instrumentos. O acesso ao número está ligado à utilização de um sistema de representação que os permite designar". (DUVAL, 2003, p.13). Em segundo lugar, a aprendizagem matemática requer a apropriação de uma grande variedade de registros de representação semiótica.

Por representação semiótica entende-se o conjunto de produções compostas pelo emprego dos signos. Parodiando Descartes[27], o autor escolheu o termo "registros"

---

[27] Descartes é responsável por considerar nos símbolos matemáticos a distinção entre significante e significado, possibilitando ao pensamento matemático à função de abstração. Além disso, é considerado como um dos responsáveis por uma primeira versão de escritura simbólica em matemática, dando ordem

para designar os diferentes sistemas simbólicos onde se pode elaborar uma representação semiótica. A seguir, visualiza-se o quadro elaborado por Duval (2003) contemplando os tipos de classificações possíveis para representações e registros.

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	**REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA**
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis.	Língua natural Associações verbais (conceituais). Formas de raciocinar: • argumentação a partir de observações, de crenças...; • dedução válida a partir de definição ou de teoremas	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0,1,2 ou 3). • Apreensão operatória e não somente perceptiva; • Construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escritas: • Numéricas (binária, decimal, fracionária...); • Algébricas; • Símbólicas (línguas formais). Cálculo.	Gráficos cartesianos. • Mudança de sistema de coordenadas; • Interpolação, extrapolação.

Quadro 1: Classificação de registros e representações mobilizáveis no trabalho com a Matemática (DUVAL, 2003, p.14)

Assim, as representações são classificadas em discursivas e não discursivas e os registros em multifuncionais e monofuncionais. As representações discursivas são aquelas que expressam discurso articulado no qual se encontram todos os elementos necessários à compreensão da mensagem.

Como visto, as representações discursivas e não discursivas podem ser apresentadas em registros multifuncionais ou monofuncionais. Os registros multifuncionais relacionam-se a possibilidade da realização de tratamentos algoritmizáveis, isto é, “não são passíveis de utilização de procedimentos fechados com seus signos, pois eles apresentam possibilidades polissêmicas de interpretações”. (SOUSA, 2009, p.27). Já os registros monofuncionais vinculam-se aos sistemas simbólicos cujos tratamentos se dão principalmente por meio de algoritmos.

Diante desta variedade de registros de representação semiótica, do ponto de vista desta teoria, o cerne das dificuldades para a aprendizagem matemática está

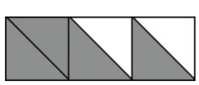
à matemática e ao pensamento matemático. Daí, o surgimento da duplicação dos objetos matemáticos enquanto objetos do pensamento e objetos representados, denominados como registro das significações e registro simbólico (FLORES, 2006).

relacionado a dois problemas centrais, a saber: a confusão entre o objeto matemático e a sua representação; a dificuldade de transitar entre diferentes representações.

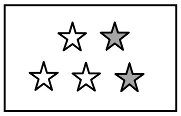
O acesso aos objetos matemáticos passa necessariamente por suas representações semióticas. Com efeito, não se deve confundir um objeto matemático e sua representação, pois

> Toda confusão entre o objeto e sua representação provoca, com o decorrer do tempo, uma perda de compreensão. Os conhecimentos adquiridos tornam-se então rapidamente inutilizáveis fora de seus contextos de aprendizagem: seja por falta de atenção, seja porque eles tornam-se representações inertes não sugerindo tratamento produtor. (DUVAL, 2009, p.14).

Esta preocupação se torna ainda mais pertinente ao se considerar que um mesmo objeto matemático pode ser apresentado através de diferentes registros de representação. Observe-se o exemplo das frações, objeto de estudo desta pesquisa, que, segundo Maranhão e Igliori (2003), quando introduzido no ensino fundamental aparece representado por três tipos de registros de representação, são eles: registro simbólico – numérico (fracionário e decimal) ou algébrico; figural (considerando quantidades contínuas e discretas); língua natural. Além destes três registros apontados pelas autoras, acrescenta-se o registro concreto e os registros numéricos percentual e da divisão que também se constituem como possíveis representações para a fração. A seguir apresentam-se alguns exemplos desses registros.

Registros de representação da fração			
Registro figural	*Registro simbólico*	*Registro Concreto*[28]	*Registro na língua natural*
Contínuo 	Numérico $\frac{4}{6}$ 0,5 66, 66% 4 ÷ 6		Uma fração pode ser escrita seguindo as regras e convenções do Sistema Decimal de Numeração Um número racional escrito na forma $\frac{a}{b}$ com a e b inteiros e $b \neq 0$ está representado por uma

[28] Foto retirada do site: http://www.casadaeducacao.com.br

Discreto 	Algébrico $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$, $a,b \in$ Z a. $10^{n/3}$		fração

Quadro 2: Diferentes Registros de Representação Semiótica da fração. Fonte: elaborado pela autora.

Sobre a pluralidade de sistemas semióticos, Duval afirma que a diversificação de representações de um mesmo objeto amplia as capacidades cognitivas dos sujeitos bem como suas representações mentais. O desenvolvimento destas últimas, “efetua-se como uma interiorização das representações semióticas da mesma maneira que as imagens mentais são uma interiorização das percepções”. (DUVAL, 2009, p.17).

Considerando-se esta relação entre representações mentais e representações semióticas, se torna possível afirmar que o conteúdo de uma representação depende mais do registro de representação do que do objeto representado. Entretanto, como é possível não confundir um objeto matemático e sua representação se a única forma de acesso a ele é por meio de sua representação?

Do ponto de vista desta teoria, o acesso a compreensão em matemática tem como condição fundamental a articulação dos registros, isto é, a mobilização simultânea de ao menos dois registros. Assim, a compreensão matemática implica na capacidade de mudar de registro. Percebe-se, então, que as implicações destas considerações para o ensino da matemática apontam para a necessidade de que as várias representações possíveis de um mesmo objeto sejam não apenas identificadas, mas também coordenadas entre si.

Nessa perspectiva, a coordenação entre registros de representação de um objeto matemático se constitui como aspecto fundamental para o acesso à compreensão em matemática. Segundo Duval (2009, p. 22) “É a articulação de registros que constitui uma condição de acesso à compreensão em matemática, e não o inverso, qual seja, o ‘enclausuramento’ de cada registro”.

Duval (1995) chama atenção para o fato de que o papel das representações semióticas na aprendizagem matemática ultrapassa a mera exteriorização das representações mentais. Para o autor, os registros de representação semiótica cumprem três funções, quais sejam: comunicação, objetivação e tratamento.

A comunicação é a função que diz respeito à expressão das representações mentais. Esta é a condição fundamental para que seja possível transmitir uma mensagem a um interlocutor. Ou seja, a comunicação refere-se ao modo pelo qual se torna possível a visibilidade, a transparência e, assim, a ordenação dos objetos de conhecimento.

A objetivação relaciona-se à possibilidade do uso das representações semióticas como instrumento para tomar consciência do saber construído. Essa consciência vincula-se ao sujeito que, em processo de apreensão de um conhecimento, faz uso das representações para tornar claro para si mesmo o conhecimento a ser apreendido. A elaboração de esquemas, gráficos, resumos, sínteses, dentre outros, exemplificam o recursos aos registros de representação semiótica para possibilitar a objetivação de um conhecimento.

O tratamento é a "transformação de representação interna a um registro de representação ou a um sistema". (DUVAL, 2009, p.56). A resolução de uma equação se constitui como um exemplo de tratamento, pois são realizados procedimentos baseados em regras e propriedades de um registro que possibilitam a transformação de uma representação inicial em uma representação terminal no mesmo registro.

As funções de comunicação e tratamento costumam ser priorizadas na escola. Este fato decorre da percepção de que no processo de apreensão conceitual é preciso primeiro *compreender para representar*. Diferentes teóricos defendem esta concepção. Em oposição a esta noção, a premissa defendida pela teoria dos registros de representação semiótica é a de que "através das representações semióticas que se torna possível efetuar certas funções cognitivas essenciais do pensamento humano" (DAMM, 1999, p.143).

Nesse sentido, Duval (2009, p.15) denomina de "*semiósis* a apreensão ou a produção de uma representação semiótica, e *noésis*, os atos cognitivos como a apreensão conceitual de um objeto, a discriminação de uma diferença ou a compreensão de uma inferência". A partir destes elementos, o autor, enuncia o que considera como lei fundamental para compreensão do funcionamento cognitivo do pensamento humano: "Não existe *noésis* sem *semiósis*, isto é, sem o recurso a uma pluralidade pelo menos potencial de sistemas semióticos, recursos que implicam em sua coordenação pelo próprio sujeito" (DUVAL, 1995, p.5).

Com efeito, as representações semióticas estão ligadas a três atividades cognitivas fundamentais. A primeira delas é a *formação* de representações num registro semiótico particular. Nas palavras de Duval (2009, p. 54) ela é "o recurso a um (ou muitos) signos para atualizar a atenção voltada para um objeto ou para se substituir essa atenção". A formação de uma representação deve respeitar as regras próprias ao sistema empregado, essas regras são denominadas como *regras de conformidade.* Elas são responsáveis pela definição de um sistema de representação e dos tipos de unidades constitutivas de todas as representações possíveis em um registro. Desse modo, as regras de conformidade "permitem o reconhecimento das representações como representações num registro determinado" (DUVAL, 2009, p.56). Por exemplo, um enunciado em alemão possui elementos e traços que permitem identificá-las como uma expressão desse idioma. A importância destas regras está no fato de elas serem fundamentais tanto para a comunicação quanto para o tratamento dentro de sistema semiótico formado.

O tratamento, já discutido anteriormente, é considerado tanto como função como atividade cognitiva ligada às representações semióticas. Ele é responsável por transformações internas a um mesmo registro. Quando considerado na perspectiva de atividade cognitiva, Duval chama a atenção para a necessidade de se considerar o que denomina como regras de expansão. Essas são definidas como "regras que, uma vez aplicadas, resultam em uma representação de mesmo registro que a de partida". (DUVAL, 2009, p.57). Para se fazer o tratamento em uma adição de frações, por exemplo, é necessário que se compreenda a regra de expansão, segundo a qual se percebe que as partes em que os diferentes todos foram partidos, expressas no denominador, deve ser sempre igual, sob pena de se cometer erros no tratamento.

A terceira atividade cognitiva pontuada nesta teoria é a conversão. Converter consiste em “transformar a representação de um objeto, de uma situação ou de uma informação dada num registro em uma representação deste mesmo objeto, dessa mesma situação ou da mesma situação num outro registro”. (DUVAL, 2009, p.58). Por exemplo, a colocação em algoritmo dos dados do enunciado de um problema consiste em uma conversão dos elementos e relações evidenciados no registro em língua natural por outros correspondentes no registro simbólico. Para a realização desta conversão é necessária a seleção de elementos do registro de partida e a sua reorganização em um registro de chegada. Assim, o conteúdo de uma representação de chegada pode apenas cobrir parcialmente o conteúdo de uma representação de partida em uma atividade de conversão. Isto significa que “duas representações de um mesmo objeto, produzidas em dois registros diferentes, não têm de forma alguma o mesmo conteúdo” (DUVAL, 2003, p. 23).

Ao contrário do que acontece nas atividades de formação e tratamento, para a realização de conversões, frequentemente, não há regras bem definidas. E mesmo quando é possível estabelecer regras de forma clara, existem dificuldades relativas a cada sentido de conversão, pois “as regras de conversão não são as mesmas segundo o sentido no qual a mudança de registro é efetuada”. (DUVAL, 2009, p.59.).

Dessa forma, para a atividade de conversão são relacionados dois fatores que determinam sua complexidade, são eles: os níveis de congruência e heterogeneidade dos sentidos de conversão. Os níveis de congruência referem-se à proximidade entre os registros de partida e de chegada em uma conversão. Considerando-se a congruência de uma conversão duas situações são possíveis:

> Ou a representação terminal transparece na representação de saída e a conversão está próxima de uma situação de simples codificação – se diz que há congruência – , ou ela não transparece absolutamente e se dirá que ocorre a não congruência (DUVAL, 2003, p. 19).

A determinação dos níveis de congruência de uma conversão relaciona-se a três aspectos, a saber: correspondência semântica das unidades de significado; unicidade semântica terminal; conservação da ordem das unidades de significado. O primeiro aspecto, correspondência semântica das unidades de significados, refere-se à análise do sentido que é mantido entre unidades significativas do registro de partida e de chegada numa atividade de conversão. Por exemplo, no seguinte problema: “Pedro conseguiu na primeira rodada obter 100 pontos em um jogo de *videogame*. Na segunda rodada do jogo ele perdeu 1/5 dos pontos obtidos anteriormente e na terceira rodada ele perdeu 2/5 dos pontos obtidos da primeira rodada. Quantos pontos ele perdeu após a segunda e terceira rodada do jogo?”. Pode-se considerar que não existe correspondência semântica neste problema, tendo em vista que o termo “perder”, normalmente, associado à subtração, nesta situação, adquire sentido de adição.

A unicidade semântica terminal diz respeito à verificação das situações de modo a perceber se cada unidade significativa no registro de partida corresponde a apenas uma unidade significativa no registro de chegada. Observe-se o exemplo do problema a seguir: “Sara tinha vinte balas e ganhou dez de sua mãe. Com quantas balas Sara ficou?” Neste problema cada unidade significante em língua natural que são “vinte”, “ganhou”, “dez” corresponde à apenas uma unidade significante no registro de chegada aritmético: “20+10”.

O terceiro aspecto relativo ao nível de congruência de uma conversão é conservação da ordem das unidades de significado. Este diz respeito à correspondência entre a ordem em que as unidades significantes são organizadas no registro de partida e de chegada. No problema: “Carlos tem trinta e cinco anos. Seu irmão Jorge tem sete anos a menos que ele. Quantos anos tem Jorge?” Note-se que a ordem das unidades significativas “trinta e cinco”, “ menos” e “sete” , referentes ao registro de partida, será mantida no registro de chegada “35 – 7”. Desta forma, a conversão conserva a ordem das unidades de significado.

Outro fator que determina o grau de complexidade de uma conversão é a heterogeneidade dos sentidos de conversão. Esse fenômeno diz respeito aos diferentes níveis de dificuldade que podem ser encontrados para a conversão entre um registro de partida e de chegada e o seu sentido inverso. Sobre esse aspecto, Duval (2003, p.20) afirma que “nem sempre a conversão se efetua quando se invertem os registros de partida e de chegada. Isso pode conduzir a contrastes muito fortes de acerto quando se inverte o sentido de conversão”.

Ainda com respeito a esse aspecto, o autor alerta que a escola frequentemente prioriza um dos sentidos da conversão, pautando-se na crença de que se efetuando a conversão em um sentido automaticamente se é capaz de converter no outro sentido. Tal percepção é falsa, pois a atividade de conversão necessita da

> articulação entre as variáveis cognitivas que são específicas do funcionamento de cada um dos dois registros. Pois são essas variáveis que permitem determinar quais as unidades de significado pertinentes que devem ser levadas em consideração, em cada um dos registros (DUVAL, 2009, p. 59).

Evidenciam-se, desta forma, as atividades cognitivas de formação, tratamento e conversão como aspectos fundamentais na produção e compreensão em matemática. Interessa destacar, no entanto, que para Duval (2009, p.20) a conversão merece papel de destaque considerando-se que "toda atitude intelectual que se opera de um raciocínio, de uma explicação, de uma descrição, de um cálculo, de uma resolução de problema, implica freqüentemente que as representações semióticas sejam convertidas para que sejam tratadas".

Com efeito, os fracassos e bloqueios dos alunos se tornam explícitos quando são remetidos a situações em que se faz necessária a mudança ou mobilização simultânea entre registros. A explicação para esta constatação está no que Duval (1995) denomina como enclausuramento no monoregistro. Este último diz respeito a práticas que priorizam apenas um registro de determinado objeto matemático. Quando o aluno não dispõe de representações diferentes de um mesmo objeto matemático, sua capacidade de reconhecer e compreender este objeto em representações diferentes é limitada, podendo levá-lo a acreditar que uma determinada representação é o objeto matemático em sua essência.

Em síntese, o reconhecimento da pluralidade de registros de representações dos objetos matemáticos é condição fundamental para que sejam mobilizados conhecimentos relativos a estes objetos. Neste sentido, aplicando-se os pressupostos defendidos por Duval, especificamente ao conceito de fração, evidencia-se a necessidade que seja enfatizada na prática pedagógica relativa a esse conceito o trabalho com seus diferentes registros de representação, principalmente no que diz respeito à conversões e coordenações entre os registros.

Diante destas considerações, na seção seguinte, se apresentará uma revisão de pesquisas realizadas no âmbito da Educação Matemática que tratam da fração e números racionais, tendo-se como finalidade identificar as preocupações e abordagem que têm sido enfatizadas.

Estudos sobre Fração no Campo da Educação Matemática: Estado da Questão

Dentre outros fatores, a realização de uma investigação científica requer que esta se constitua como relevante para a área na qual este se insere. Desta forma, com o intuito de identificar a pertinência do estudo da temática das frações, elaborou-se um estado da questão, buscando compreender como se têm realizado os estudos que abordam esse assunto dentro do campo da Educação Matemática.

Segundo Nóbrega-Therrien e Therrien (2004, p.7), a realização do estado da questão leva "o pesquisador a registrar, a partir de um rigoroso levantamento bibliográfico, como se encontra o tema ou objeto de estudo de sua investigação no estado atual da ciência ao seu alcance". Os autores ainda esclarecem que para a realização de tal exercício deve-se priorizar como fontes de consulta teses, dissertações, relatórios de pesquisa e estudos teóricos por estes possibilitarem a caracterização do objeto de estudo e, consequentemente, a identificação e definição de categorias centrais.

Neste estudo, optou-se por priorizar pesquisas realizadas para a elaboração de trabalhos de mestrado e doutorado por possibilitarem uma visão aprofundada de teorias, perspectivas e resultados que têm sido constatados em relação a esta temática. Para tanto, realizou-se um levantamento dos trabalhos produzidos em universidades brasileiras. Para tal verificação, utilizou-se o *site* banco de teses da CAPES. O campo de pesquisa foi delimitado através da utilização das seguintes palavras-chave: números racionais, fração, ensino de fração.

O recorte temporal da pesquisa se concentra dentre o período de 1996 a 2009, pois os trabalhos sobre a temática disponibilizados no site pesquisado datam deste período.

Para a realização deste estado da questão, buscaram-se trabalhos que tratassem de números racionais e fração, pois os estudos que abordam frações inevitavelmente discutem números racionais e como se pretendia traçar um panorama das discussões sobre fração, considerou-se pertinente observar a frequência em que são produzidas pesquisas acerca destas temáticas. O levantamento das pesquisas se caracterizou por dois momentos, o primeiro foi o processo inicial de busca e categorização dos trabalhos, o segundo foi o refinamento das pesquisas encontradas, selecionando os estudos de maior proximidade com o objeto do presente trabalho.

Na busca inicial, foram encontrados 50 trabalhos, estes foram divididos nas seguintes categorias: *estudos com ênfase em aspectos relativos ao aluno* (26 trabalhos); *estudos com ênfase em aspectos teóricos e/ou metodológicos de ensino* (13 trabalhos); *estudos com ênfase em aspectos relativos ao professor* (11 trabalhos). Com relação à primeira categoria identificada, *estudos com ênfase em aspectos relativos ao aluno*, verificou-se que mais da metade dos trabalhos realizados sobre o assunto têm colocado em destaque esta perspectiva. Estas pesquisas preocuparam-se com crenças, representações e significações que seus respectivos sujeitos atribuem à fração e/ou números racionais. No que se refere à categoria de *estudos com ênfase em aspectos teóricos e/ou metodológicos de ensino*, estes trabalhos abordavam fração e número racional visando tratar de contribuições de teóricos como Jean Piaget e Raymond Duval, criar ambientes virtuais específicos para o ensino e aprendizagem destes conceitos, analisar livros didáticos e documentos.

Quanto à categoria de *estudos com ênfase em aspectos relativos ao professor*, optou-se por fazer uma nova divisão desta que passou a ser organizada da seguinte forma: *estudos com ênfase nas práticas e concepções docentes relativas à fração e número racional* (8 trabalhos); *estudos com ênfase na formação de professores para o trabalho com fração e número racional* (3 trabalhos). Como o foco do presente estudo está voltado para a formação de professores, priorizou-se, nesse texto, à análise destas categorias, justificando-se tal opção pela necessidade de aprofundar a compreensão acerca de quais lacunas, dúvidas e perspectivas são apontadas quando a relação entre o professor e os números racionais e/ou fração é colocada em destaque, uma vez que o presente trabalho põe em evidência a preparação docente para o trabalho com fração.

Nesse sentido, a primeira categoria considerada é relativa aos *estudos com ênfase nas práticas e concepções docentes relativas à fração e número racional* (ver apêndice A, quadro 7). Dentro desta classificação encontra-se o trabalho de Silva (2005), que buscou compreender como os erros relativos aos números racionais são concebidos e tratados por professores de Matemática do Ensino Fundamental. Os sujeitos desta pesquisa foram dois professores dos anos finais do Ensino Fundamental e 17 alunos escolhidos dentre as turmas desses docentes. A metodologia utilizada foi a aplicação de questionários sobre fração com os alunos e posteriormente foi requisitado aos professores que identificassem a qualidade, a origem e as formas de superação possíveis para os erros dos alunos. Os resultados desta pesquisa evidenciaram que os docentes pesquisados apresentaram uma tendência em localizar a origem dos erros dos alunos na precariedade da Matemática ensinada nas séries anteriores. Além disso, a autora ainda identificou nos professores lacunas conceituais e dificuldades para ensinar números racionais de forma contextualizada. Tais constatações revelam, segundo a própria autora, a permanência de uma prática conservadora e descontextualizada de tratamento de erros. Este estudo ainda traz apontamentos quanto à necessidade de realizar uma formação docente que propicie ao professor melhores possibilidades de compreender e intervir na aprendizagem de números racionais.

Ainda em relação à primeira categoria, Soares (2007), ancorada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, analisou os planejamentos de 4ª a 8ª série[29] de uma professora do Ensino Fundamental. A autora teve a intenção de investigar como era realizada a abordagem dos números racionais nessas séries considerando os seguintes aspectos: diferenciação entre representante e representado; diversificação dos registros de representação semiótica; ênfase em conversões ou tratamentos. Assim, foi realizado um estudo de caso de abordagem qualitativa, utilizando-se os planejamentos da professora como fonte para a coleta de dados. De modo geral, para as séries analisadas foi constatado um tratamento linear e com ênfase procedimental em relação aos números racionais. Nas diferentes séries analisadas a autora percebeu a ênfase em registros de representação diferentes: registros figurais e numéricos na 4ª série e início

[29] Correspondem na nomenclatura atual do 5º ao 9º ano.

da 5ª; registro numérico fracionário e decimal no final da 5ª e nas 6ª e 7ª séries. Em síntese, foi percebido que o registro numérico foi o mais privilegiado em todas as séries. Com relação aos tratamentos observou-se o prevalecimento destes em detrimento das conversões. Diante destes resultados, o estudo concluiu que a abordagem dos números racionais observada favorecem a confusão entre representante e representado, ocasionando concepções equivocadas acerca dos números racionais.

O trabalho de Machado (2007) buscou relacionar concepções e as práticas de professores de matemática com relação aos conteúdos de fração voltados para o Ensino Fundamental. Foi utilizado o aporte teórico da Teoria dos Campos Conceituais para que, através de entrevistas e observações de aulas, fosse possível relacionar as concepções que os professores detinham sobre fração com os aspectos enfatizados em suas práticas. Os resultados desta investigação demonstraram que o tempo de prática dos professores exerceu significativa influência na sua capacidade de realizar boas transposições didáticas. No que se refere à formação matemática, as diferentes graduações (Matemática e Pedagogia) das quais eram provenientes os docentes pesquisados não influenciaram significativamente em diferenças em suas concepções e práticas quanto ao número racional. Vale destacar ainda que autora observou o predomínio do subconstructo parte/todo, concluindo que as dificuldades dos alunos com números racionais têm relação direta com o modelo da transposição didática feita pelo professor no momento do ensino. A autoria sinaliza a necessidade de realização de pesquisas futuras que possam esclarecer a incoerência entre o dizer e o fazer dos professores.

Também com preocupações relativas aos saberes dos professores acerca dos números racionais, Fonseca (2008) investigou saberes e não saberes de professores dos AIEF com relação aos números racionais. A autora afirma que há uma carência de estudos nessa área, que propiciem o aprofundamento da discussão sobre a aprendizagem e o ensino dos números racionais nos primeiros anos de escolaridade. Assim o objetivo desta pesquisa se volta para a identificação dos seguintes aspectos relacionados aos números racionais: saberes que orientam as práticas; constituição dos saberes sobre o conceito; Como metodologia foram utilizadas entrevistas e observações com 8 professoras dos AIEF. A partir da análise dos diferentes saberes de professores no que refere aos números racionais, foi considerado que os docentes apresentam muita insegurança em aspectos conceituais e metodológicos para o ensino dos números racionais. Os significados dos números racionais eram tratados de forma intuitiva necessitando então de maior compreensão destes para que se tornasse possível a sua formalização . Diante de tais resultados, a autora considerou pertinente destacar a necessidade de uma reformulação da formação inicial e/ou continuada dos professores dos AIEF para o trabalho com este conceito.

Com efeito, a complexidade que envolve a elaboração do conceito de fração traz à tona diversas inquietações como as encontradas no trabalho de Santos (2005). O autor parte do objetivo de investigar se é possível reconhecer as concepções acerca de frações de professores nos 1º e 2º ciclos (polivalentes) e no 3º ciclo (especialistas) do Ensino Fundamental. Para tal, foi realizado um estudo diagnóstico com 67 professores de sete escolas da cidade de São Paulo. Foi solicitado aos sujeitos da pesquisa que elaborassem e em seguida resolvessem problemas sobre fração. Os dados foram analisados considerando os enunciados e as resoluções separadamente. O autor constatou que os professores têm tendência a elaborar problemas contemplando o significado operador multiplicativo. Com relação às resoluções dos professores, foi percebida à ênfase em aspectos procedimentais. Todos os dados analisados evidenciaram que não existiu diferença significativa entre as concepções de fração de professores dos AIEF (polivalentes) e professores especialistas (licenciados).

O trabalho de Silva (2007), em sua dissertação intitulada *Os significados dos números racionais desenvolvidos por professores e por autores de livros didáticos na EJA*, analisou o ensino de frações na Educação de Jovens e Adultos. A pesquisa tinha o objetivo de perceber como os diferentes significados da fração eram abordados por professores e livros didáticos voltados para a Educação de Jovens e Adultos. Os dados foram coletados por meio de observações em sala de aula, questionários, entrevistas e análise de livros didáticos. Com relação aos professores, o estudo constatou que o significado mais abordado foi o parte-todo, seguindo-se do multiplicador operativo. Os significados medida, quociente e número não foram identificados. Com respeito aos livros didáticos, percebeu-se ênfase no significado parte-todo e operador multiplicativo.

Souza (2006) realizou uma investigação com base na atualização de atividades elaboradas por Régine Douady envolvendo enquadramento de números racionais em intervalos. A pesquisa teve como método o estudo de caso. Foram analisadas duas professoras do Ensino Fundamental experientes no trabalho com essas atividades. Verificaram-se os aspectos que seriam levados em consideração pelas professoras ao discutirem e elaborarem planejamentos de aulas referentes a essas atividades. A autora concluiu que as atividades elaboradas pelas professoras com base no referencial teórico solicitado foram coerentes e contribuíram para que estas percebessem a importância das atividades com enquadramento de números racionais para o ensino de fração.

Canova (2006) realizou um estudo com o objetivo de identificar e analisar as crenças, concepções e competências de professores que atuavam nos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental no que diz respeito ao conceito de fração. A autora utilizou questionários e entrevistas clínicas para identificar as crenças, concepções e competências dos sujeitos. Considerou-se que as crenças dos professores não são influenciadas pela sua prática docente. As concepções dos professores dos anos iniciais se restringiam ao significado parte-todo considerando quantidades contínuas. Quanto aos professores dos anos finais percebeu-se a exploração de mais variáveis da fração. Em relação à competência, constatou-se que não houve um desempenho equitativo entre os cinco significados da fração e os invariantes. Por fim, é colocada a necessidade de ampliação conceitual por parte de professores que trabalham com fração no Ensino Fundamental.

No que concerne à categoria *formação de professores para o ensino de números racionais e fração* (ver apêndice A, quadro 8) apenas três trabalhos foram identificados. Estes trabalhos aproximam-se diretamente de nosso objeto de estudo, deste modo, além do detalhamento de suas temáticas, metodologias e resultados serão expostos os elementos que denotam suas aproximações e diferenciações do presente estudo.

O primeiro trabalho considerado para esta categoria foi o de Silva (2007), com a tese de doutorado que teve como objetivo analisar aspectos que interferem no desenvolvimento profissional de professores dos AIEF, no que se refere à representação fracionária dos números racionais tendo como base a realização de uma formação continuada. Para a coleta de dados, foram realizadas 16 sessões de 4 horas cada, das quais: 6 sessões foram destinadas à aplicação de uma avaliação diagnóstica; 9 sessões foram dedicadas a estudos dos significados das frações e à vivência de metodologias diversificadas; uma das sessões foi dedicada à elaboração de uma seqüência de trabalho pelos professores, que foi desenvolvida com seus alunos em sala de aula. As conclusões desta pesquisa evidenciaram que há necessidade de um enfoque mais amplo do conceito de números racionais, complementado pela análise dos diferentes significados de sua representação fracionária tanto em cursos de formação inicial como de formação continuada. Além disso, a autora considera que para superar os desafios evidenciados pelos professores como relação ao ensino e aprendizagem de fração se faz necessária uma constante reflexão sobre a prática, especialmente em ambientes que propiciem um trabalho colaborativo.

O estudo de Silva (2007), feito em sua tese de doutorado, aproxima-se ao objeto de análise da presente pesquisa por se relacionar à formação de professores dos AIEF para o ensino de fração, considerando também o enfoque dos significados de fração. No entanto, o foco da pesquisa de Silva está voltado para a formação continuada e considerando-se as indicações realizadas a partir dos resultados de que se faz necessário ampliar a percepção conceitual da fração em formação inicial e continuada, considera-se que se torna relevante a realização de pesquisas que discutam a formação inicial.

Nesta perspectiva, Barros (2007) utilizou a Sequência Fedathi, aliada à Engenharia Didática[30], com o objetivo de perceber como estas metodologias podem contribuir para a melhoria do ensino e da aprendizagem de frações considerando-se a formação inicial de pedagogos. Para a realização de sua pesquisa, a autora contou com o suporte de oficinas pedagógicas e da plataforma TelEduc[31]. Os resultados desta pesquisa indicaram que os alunos e professores do curso de Pedagogia têm uma visão estreita sobre as frações e desconhecem metodologias para seu ensino, além de possuir

[30] Ver: ARTIGUE, M. Ingénierie didactique. In: BRONCKART. J.P (dirigée). Et alli. **Didactique dês mathématiques** – Textes de base em pédagogie. Delachaux et Niestlé S, A., Lausanne (Switzerland) Paris, 1996.

[31] O TelEduc é um ambiente de educação a distância desenvolvido pelo Núcleo de Informática Aplicada à Educação (NIED) e pelo Instituto de Computação (IC) da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP).

concepções equivocadas sobre o assunto. A autora assim explicita a necessidade de uma abordagem mais ampla do conceito de fração durante a formação de pedagogos.

Considera-se que os resultados da pesquisa de Barros (2007) apontam para necessidade de pesquisas que aprofundem os aspectos constatados de modo a compreender como a formação dos pedagogos tem tratado dos aspectos relacionados à fração e, ainda, que conhecimentos didáticos esses alunos possuem.

Nesse sentido, considera-se que Damico (2007) contempla algumas das lacunas que foram deixadas pelas pesquisas anteriormente explicitadas no que diz respeito à formação inicial e a análise de conhecimentos didáticos de fração. O trabalho do autor teve como sujeitos de sua pesquisa alunos da licenciatura em Matemática e seus respectivos professores formadores. O autor utilizou quatro instrumentos para a coleta de seus dados: questionário, entrevista, questões elaboradas pelos estudantes e aplicação de um teste com perguntas sobre fração. Como resultado de sua investigação, o autor concluiu que professores em formação inicial nas licenciaturas têm uma visão sincrética de números racionais, existindo um desequilíbrio entre os conhecimentos processual e conceitual, sendo o processual predominante. O autor também indica que há um baixo conhecimento didático relacionado à representação dos conhecimentos de números racionais abordados no Ensino Fundamental.

Os objetivos da presente investigação se assemelham aos da pesquisa realizada por Damico (2007). Assim como autor, investigaram-se conhecimentos conceituais e didáticos de futuros professores de Matemática com relação aos números racionais. No entanto, o foco da pesquisa centra-se nos conhecimentos acerca dos números racionais de modo geral, enquanto nesta investigação priorizou-se o conceito de fração. Além disso, Damico (2007) volta seu estudo para a licenciatura em Matemática, que habilita docentes para o ensino nas séries finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio, ao passo que a pesquisa que ora se apresenta tem seu foco direcionado para a formação de pedagogos, responsáveis pelo ensino nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Diante do que foi exposto nos três estudos que relacionam as temáticas de fração e formação de professores, bem como nos outros encontrados neste levantamento, evidenciou-se a relevância de estudos que relacionem a fração com os diversos aspectos dos processos de ensino e de aprendizagem. Muitas das investigações se centram em aspectos cognitivos de crianças em idade escolar, sendo a formação de professores pouco explorada nesse campo. Tal afirmação pode ser confirmada com base nos achados do levantamento realizado, no qual, dentre os 50 trabalhos encontrados, 8 eram voltados para a perspectiva do professor e apenas 3 tratavam da formação de professores.

O fato de a formação de professores para o ensino de fração permanecer ainda pouco problematizada e explorada justifica a escolha do tema desta investigação. Ainda mais, considerando que a formação inicial de pedagogos quando esse assunto ainda carece de investigações que aprofundem suas implicações nas práticas dos professores que serão responsáveis pelo ensino de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

CAPÍTULO 3 – PERCURSO METODOLÓGICO

O valor de todo o conhecimento está no seu vínculo com as nossas necessidades, aspirações e ações; de outra forma, o conhecimento torna-se um simples lastro de memória, capaz apenas - como um navio que navega com demasiado peso - de diminuir a oscilação da vida quotidiana.
V. O. Kliutchevski

O presente capítulo tem como intuito evidenciar as opções metodológicas deste trabalho, cujo objetivo é analisar o domínio conceitual e didático de pedagogos em formação inicial, para o trabalho com fração. O planejamento da pesquisa se constitui como aspecto essencial para garantir a viabilização de todo o desenvolvimento da investigação, bem como a obtenção de resultados confiáveis.

É importante destacar que todo processo de produção de conhecimento é inevitavelmente permeado por dois aspectos: a curiosidade e o significado. Freire (1996) considera a curiosidade como motivação principal para o questionamento da realidade e através de indagações, dúvidas e desconstrução de certezas, somos impulsionados a buscar novos saberes. Nesse sentido, naturalmente, percebemos a essência e a diferença das coisas e, a partir dessa dinâmica, são atribuídos significados pessoais a cada saber.

Desta forma, pretende-se evidenciar que, no processo de busca por elementos que auxiliem na obtenção de respostas a um problema de pesquisa, não só as percepções, mas a trajetória de vida, os sentimentos e emoções do pesquisador, encontram-se presentes no trabalho produzido. Apesar do rigor e procedimentos exigidos para a validação e reconhecimento de uma investigação científica, não é possível separar a influência de todos os aspectos subjetivos e objetivos que relacionam o pesquisador com o saber produzido.

Diante destas considerações, a seguir, serão explanados o paradigma e o método de pesquisa, sucedendo-se a descrição do instrumento utilizado para coleta de dados. Em seguida detalha-se o lócus da pesquisa, os sujeitos e a aplicação do instrumento de coleta de dados, bem como a especificação dos critérios adotados para a organização dos dados da análise.

O paradigma de pesquisa

Entende-se por paradigma o “conjunto básico de crenças e ações” que direciona a ação do pesquisador (GUBA citado por ALVES-MAZOTTI, 1996, p.17). A necessidade de explicitá-los, ao desenvolver uma investigação, justifica-se por estes representarem o filtro pelo qual o pesquisador “enxerga a realidade, sugerindo perguntas e indicando possibilidades”. (LUNA, 1999, p. 32).

Além disso, considerando-se que a visão de ciência como neutra e objetiva foi superada (ALVES-MAZZOTTI, 1996), torna-se pertinente que o pesquisador exponha com clareza e coerência sua opção paradigmática.

No campo das Ciências Sociais e Humanas, Alvez-Mazzotti (1996) indica que prevalecem quatro paradigmas: positivismo, pós-positivismo, teoria crítica e naturalismo/construtivismo. Em oposição a tal categorização, autores como Johnson e Onwuegbuzie (2004), Santos Filho e Gamboa (2002), defendem que os paradigmas devem ser divididos em quantitativo e qualitativo.

A diversidade de sistematizações entre paradigmas decorre de um embate histórico chamado “guerra dos paradigmas”, que na década de 1980 colocou em evidência a oposição quanti-qualitativa. Entretanto, Alves-Mazzotti (1996) considera que tal dicotomia decorre de uma exagerada simplificação do conhecimento científico, na medida em que a complexidade de um objeto de pesquisa suscita a utilização de perspectivas diferentes para que seja possível uma compreensão abrangente deste. Assim, pensar num paradigma que tenha como enfoque elementos apenas qualitativos ou quantitativos, exclui aspectos de outras naturezas que poderiam auxiliar na elucidação do fenômeno estudado.

Neste estudo, optou-se pelo aporte do modelo interpretativo, também conhecido como construtivista ou naturalista. Este paradigma apresenta como característica central a premissa de que a interpretação de um fenômeno depende, principalmente, da percepção dos sujeitos envolvidos e do contexto no qual se inserem.

Segundo Alves-Mazzotti (1996), para a compreensão deste paradigma faz-se necessário entender que elementos deste são incompatíveis com outras sistematizações teóricas, a saber: a) *o peso da teoria nos fatos* – os fatos só são considerados como tal a partir da vinculação a um referencial teórico; b) *a subdeterminação da teoria* – nenhuma teoria pode ser inteiramente testada, pois existem várias elaborações teóricas acerca de um fenômeno e não há critérios fundacionais para determinar qual a melhor teoria; c) *o peso dos valores nos fatos* – nenhuma investigação é isenta de valores, assim sendo, a realidade sempre é enxergada a partir de valores e teorias que direcionam o olhar do pesquisador; d) *a natureza interativa da díade pesquisador/pesquisado* – o conhecimento resulta da atividade humana, destarte, seria equivocado considerá-lo como verdade definitiva e imutável.

A partir de tais incompatibilidades com outras sistematizações teóricas, derivam as características do paradigma interpretativo que tem como cerne três aspectos: *ontologia relativista* – diante das inúmeras interpretações da realidade, o relativismo é considerado como uma perspectiva coerente por respeitar as múltiplas determinações de um objeto de estudo; *epistemologia relativista* – como as realidades dependem da subjetividade dos sujeitos, os resultados sempre decorrem da interação entre pesquisador/pesquisado; *metodologia hermenêutica dialética*: as construções individuais derivam de interpretações constituídas através da hermenêutica e confrontadas dialeticamente.

Diante de tais características, pode-se inferir que este paradigma evidencia uma concepção de realidade constituída por múltiplas determinações, consequentemente, os fenômenos são relativos a um determinado contexto. Assim, crenças, valores e contradições permeiam o conhecimento socialmente produzido.

Deste modo, a escolha pelo suporte do paradigma naturalista/construtivista suscita uma interpretação e análise do objeto de pesquisa que considere os sujeitos envolvidos a partir das escolhas e significações individuais, bem como suas crenças, valores e dimensões do contexto no qual estão inseridos. Tendo em vista que esta investigação se ocupa da análise da formação do pedagogo para o ensino de fração, faz-se necessário desvelar os sentidos e a importância que os futuros professores atribuem a este saber, considerando a diversidade de elementos que integram seu processo de preparação profissional. Justifica-se, dessa forma, a adequação do paradigma interpretativo a este estudo.

Definido o paradigma a ser adotado nesta pesquisa, a seguir será realizada uma explanação detalhada da abordagem escolhida para auxiliar na elucidação dos aspectos que se pretende investigar neste estudo.

A abordagem do tipo estudo de caso

O estudo de caso é uma abordagem de pesquisa que tem como cerne o estudo de casos únicos ou múltiplos, evidenciando suas identidades e características próprias. Desta forma, permite "retratar a realidade de forma profunda e mais completa possível, enfatizando a interpretação ou a análise do objeto". (FIORENTINI; LORENZATO, 2007, p. 110).

Ponte (2006, p.5) afirma que "um caso constitui uma entidade bem definida, necessariamente inserida num certo contexto". Assim sendo, pode-se inferir que neste tipo de investigação são levados em consideração, fundamentalmente, dois aspectos: o caso a ser analisado e seu contexto. Com efeito, Stake (1998, p.11) destaca que na realização de uma pesquisa desse tipo faz-se necessário revelar "diferenças sutis, sequências de acontecimentos e a globalidade das situações", permitindo assim abarcar a complexidade de um caso particular. Vale salientar que esses elementos precisam ser contemplados de forma a articular e a compreender as relações existentes entre eles, mas, também, delineando limites para que o pesquisador consiga perceber onde termina o fenômeno e começa o contexto.

Para a caracterização de um caso é preciso evidenciar qual a abrangência e natureza da unidade e a fundamentação teórica que norteiam o trabalho do pesquisador. A explicitação clara e coerente desses aspectos permite elucidar quais são os propósitos com os quais o investigador se compromete e a partir de que ótica o fenômeno será compreendido.

Um estudo de caso pode tratar de um ou mais casos, que podem ser constituídos por instituições, indivíduos, disciplinas, etc. Ponte (2006) destaca que estes casos funcionam, sobretudo, como exemplos, que podem ser destacados por uma conotação “negativa”, “positiva” ou “neutra”. Ou seja, podem revelar aspectos de experiências bem sucedidas, fracassos ou analisar detalhadamente um caso ainda não observado e estudado. Em suma, este método se ocupa da explicitação das determinações – internas e externas, diretas e indiretas – que um fenômeno recebe do seu contexto.

Nesse sentido, Stake (2000, p.144) defende que esta abordagem tem um caráter muito pessoal, o “pesquisador é encorajado a contribuir com as suas perspectivas pessoais para a interpretação”. É decorrente desse caráter tão particular, que o estudo de caso sofre críticas no que se refere à sustentação que oferece para a generalização, pois estas “são usualmente baseadas em um conjunto de experimentos replicando o mesmo esquema em diferentes condições” (ALVES-MAZZOTI, 2006, p.10). Consequentemente, questiona-se o rigor científico permitido por esta abordagem.

Em contrapartida a tal lógica, Yin (2001) elabora a definição de generalização analítica, a qual é gerada não a partir de amostras estatisticamente representativas, mas através dos conjuntos particulares de resultados que podem originar proposições teóricas que seriam aplicáveis a outros contextos. Com efeito, a maior contribuição possibilitada por esta abordagem é “seu profundo alcance analítico interrogando a situação, confrontando-a com outras situações já conhecidas e com as teorias existentes” (PONTE, 2006, p.7).

Embora existam outras classificações de estudo de caso, para efeito deste trabalho será tomada a de Stake (2000) que distingue três tipos, definidos a partir de suas finalidades: intrínseco, instrumental e coletivo. Os casos intrínsecos são aqueles nos quais os aspectos que justificam sua constituição como objeto de estudo baseam-se em suas características específicas. Nesse sentido, em um estudo do tipo instrumental, os casos são escolhidos por possibilitarem a compreensão de algo mais amplo, e, às vezes, podem fornecer elementos para contestar uma generalização amplamente aceita a partir de um exemplo que não se adeque a ela. Finalmente, nos casos coletivos, o pesquisador aborda coletivamente mais de um caso para a investigação de um fenômeno e tal estudo pode ser utilizado em outros casos.

O presente trabalho se enquadra dentro da perspectiva instrumental. Este tipo de estudo costuma ser utilizado quando o objeto de pesquisa traz a necessidade de uma compreensão geral que pode ser obtida mediante o estudo de um caso particular (STAKE, 2000). Pois nesta pesquisa tem-se como objetivo o entendimento acerca do domínio conceitual e didático que alunos do curso de Pedagogia detêm em relação à fração, de modo a compreender quais são os conhecimentos dos quais estes estudantes dispõem ao concluírem sua formação para promover em suas práticas a compreensão do conceito de fração. De modo geral, considera-se que o presente estudo pode levar à uma melhor compreensão acerca das dificuldades enfrentadas pelos sujeitos desta pesquisa em relação à fração, mesmo que não se possa universalizar esta percepção. É nesse sentido que se considerou pertinente a opção pela realização de um estudo de caso de abordagem clínica. Isto significa que os dados utilizados para a realização do estudo do caso serão coletados por meio dos pressupostos indicados pelo método clínico-piagetiano. A seguir, serão explicitados os princípios indicados por este método.

O método clínico-piagetiano

O método clínico-piagetiano consiste em uma apresentação de problemas a sujeitos de uma pesquisa visando à reflexão aprofundada da forma como estes desenvolvem suas ideias a respeito de um determinado fenômeno. Este método tem como fundamento a percepção de que a reflexão e a observação são atitudes que estão intrinsecamente vinculadas à atividade pesquisar. No processo de investigação de um fenômeno, o pesquisador "observa os fatos, reflete sobre eles, desenvolve suas ideias, volta às observações para confirmá-las" (CARRAHER, 1994, p.3).

Nesta perspectiva, a finalidade do método clínico-piagetiano é possibilitar a compreensão de como o sujeito pensa, analisa situações, resolve problemas, para, assim, tornar possível a explicitação do seu raciocínio. Todavia, faz-se necessário considerar que a ação de um sujeito reflete não apenas seu raciocínio, mas também seus objetos e crenças frente a uma situação (CARRAHER, 1994).

Diversos estudiosos têm apontado que entrevistas comuns, de modo geral, podem ter suas análises prejudicadas por distorções que sujeitos podem imprimir sobre suas verdadeiras crenças e atitudes, influenciados pela sensação de que estão sendo avaliados pelo pesquisador. Assim, na análise de fenômenos psicológicos como a aprendizagem, por exemplo, a condição propiciada por uma entrevista para a realização de inferências pode conduzir a inferências falsas.

Uma alternativa encontrada para minimizar a influência desses aspectos nos resultados de uma investigação é a de se recorrer a medidas que indicam atitudes sem que os sujeitos sejam consultados diretamente sobre elas. Nesse sentido, o método clínico tem como ponto de partida a confrontação do sujeito com problemas acerca de um determinado fenômeno que ele deve resolver e explicar. Desta forma, suas concepções e conhecimentos são explicitados através de suas ações sem que os sujeitos sejam questionados diretamente sobre elas.

Para a realização de um estudo utilizando-se do método clínico a escolha prévia de situações relacionadas ao objetivo do estudo se constitui como aspecto fundamental. Desta forma, o pesquisador pode prevenir que, durante a aplicação dos problemas, não se perca tempo com questões irrelevantes para seu objeto de estudo. Sobre esse aspecto, Carraher (1994, p. 27) adverte que

> um roteiro não deve ser visto, porém, como uma série de regras a serem cegamente obedecidas. A compreensão de cada situação deve ser verificada à medida que o exame prossegue, assim como o significado das respostas do sujeito, não sendo possível esquematizar de antemão procedimentos para tais fins.

Com respeito à postura do pesquisador na aplicação dos problemas, faz-se necessário o destaque de alguns aspectos que são fundamentais para garantir a fidedignidade dos resultados obtidos. O primeiro deles diz respeito à necessidade de que o pesquisador estabeleça previamente as perguntas a serem utilizadas com os sujeitos, de modo que estas sejam compreensíveis e evitem ambigüidade ou ações diretivas. O segundo aspecto relaciona-se à atenção do pesquisador, pois é preciso que ele acompanhe o raciocínio do sujeito de modo a ser possível realizar inferências sobre o que o sujeito diz e faz. Outro aspecto essencial é que o pesquisador evite realizar conclusões pelo sujeito, deixando-o sempre formar suas próprias conclusões. Por fim, é parte indispensável para o método clínico a obtenção de justificativas às respostas dadas, isto porque “[...] as justificativas dadas pelos sujeitos auxiliam-nos na compreensão do modo pelo qual o sujeito chega à sua resposta e das relações que ele vê entre as partes do problema”. (CARRAHER, 1994, p.34).

Diante destas considerações, optou-se pelo uso do método clínico nesta investigação visto que se tem por objetivo a análise de conhecimentos de domínio conceitual e didático de alunos do curso de pedagogia em relação à fração. Dessa forma, elaborou-se um roteiro com questões relativas aos dois domínios considerados nesta pesquisa. Todas as perguntas contaram com o suporte teórico da classificação de Nunes et al. (2003) acerca dos cinco significados de fração, bem como o de Duval (2009) acerca dos registros de representação Semiótica. A seguir será descrito o instrumento utilizado para a coleta de dados a partir dos elementos teóricos que o constituem.

Descrição do roteiro de perguntas

Para a coleta dos dados a partir do método clínico foi utilizado um roteiro de perguntas (ver apêndice B) relacionadas à fração. Este era composto por 11 questões considerando os dois enfoques desta pesquisa: domínio conceitual (7 questões) e domínio didático (4 questões). O domínio conceitual teve a finalidade de explorar e identificar a variedade de conceitos e representações dos alunos em relação à fração. Já o domínio didático diz respeito à análise de como os alunos pensam em ensinar fração.

Sabe-se que o conceito de fração é constituído por vários outros subconceitos e apresenta diversos obstáculos a sua compreensão. Nesse sentido, como base na revisão de literatura realizada, selecionaram-se alguns aspectos conceituais referentes aos seus significados e representações, bem como algumas variáveis que influenciam em sua percepção. O roteiro utilizado, desta forma, contemplou os seguintes aspectos:

- *Domínio conceitual* - percepção dos significados da fração em concepções espontâneas e contextos; significado medida considerando quantidades intensivas; significado número considerando o princípio da ordenação; significado de número em uma reta numérica; identificação da fração em diferentes registros representações; tratamento no registro figural; diversificação dos registros de representação; conversões no sentido decimal para fracionário e fracionário para decimal.

- *Domínio didático* - análise da concepção errônea de uma criança sobre o significado de medida; aspectos relacionados à congruência de uma representação para uma situação envolvendo o significado medida; proposição de representações para o ensino de fração; reconhecimento dos elementos significativos nas situações que envolvem os cinco significados de fração; percepção acerca da fração enquanto componente curricular obrigatório; elaboração de questões envolvendo o conteúdo de fração.

A seguir, serão detalhados os objetivos de cada uma das questões abordadas nos dois domínios consideradas.

Domínio Conceitual

Questão 1 – Aborda a diversificação dos registros de representação. Teve a finalidade de perceber a amplitude representacional dos conceitos, isto é, pretendia-se identificar em que representações os sujeitos reconheciam a fração. Abordaram-se os registros de representação figural (contínuos e discretos), numérico (decimal, divisão, multiplicação e adição) e em língua natural. Com relação aos significados foram contemplados o parte-todo e quociente.

Questão 2 – Trata das concepções espontâneas dos sujeitos em relação à fração, considerando definições e contextos elencados pelos sujeitos. Através destes elementos, pretendeu-se perceber quais e quantos significados são contemplados nas definições e contextos indicados pelos sujeitos.

Questão 3 – Enfoca o significado de número, considerando a percepção dos sujeitos acerca do princípio de ordenação de frações. Além disso, pretendia-se verificar se os alunos tinham conhecimento de que a noção de sucessor e antecessor é aplicada somente aos números naturais ou se iriam tentar transpor os conhecimentos dos números naturais para os racionais.

Questão 4 – Aborda o significado de número, considerando a fração em uma reta numérica. Analisa novamente o princípio da ordenação e compreensão dos elementos que compõe a representação numérica fracionária. Além disso, pretendia-se perceber que aspectos seriam considerados para o posicionamento de frações intercaladas entre números naturais.

Questão 5 – Trata do significado de medida, considerando quantidades intensivas. A organização dos elementos significativos do enunciado considerou uma ordem inversa àquela tradicionalmente em problemas de fração. Isto é, no lugar de fornecer o todo para que fossem identificadas as partes, foram destacadas partes para que a partir delas fosse composto o todo. Além disso, pretendia-se analisar o desempenho dos sujeitos ao utilizar o registro figural enquanto estratégia de resolução.

Questão 6 – Aborda a diversificação dos registros de representação semiótica e observância às regras de composição na formação dos registros. Pretendia-se promover a mobilização de conhecimentos acerca de fração entre vários registros. De forma específica, foram verificados os tipos de registro abordados com maior frequência e se o uso dos registros escolhidos adequava-se à situação.

Questão 7 – Trata da realização de conversões no sentido decimal para fracionário e fracionário para decimal. Pretendia-se analisar as estratégias de conversão, as dificuldades relacionadas a cada um dos sentidos de conversão, a compreensão dos elementos dos registros e a compreensão de cada registro.

Domínio Didático

Questão 1 – Aborda uma situação a ser analisada pelos alunos. Esta tratava de um problema envolvendo o significado medida considerando quantidades intensivas e, em seguida, propunha uma representação figural e a resposta de uma criança fictícia. Pretendia-se observar como seriam percebidos no problema os elementos relativos ao significado e os elementos significativos do enunciado para a realização das conversões necessárias para a resolução. Buscou-se ainda analisar os critérios utilizados para averiguar a eficácia de uma representação a um problema e a capacidade de diversificação de registros de representação ao propor registros em uma situação de ensino.

Questão 2 – Trata de um conjunto de enunciados, em que cada um deles relacionava-se a um dos cinco significados de fração. Pretendia-se perceber se os elementos de cada significado seriam percebidos de modo a considerar que cada uma das questões aborda a fração sob uma perspectiva diferente. Além disso, foram verificados os elementos que os alunos identificavam nos problemas como obstáculos à compreensão de fração.

Questão 3 – Abordava a fração enquanto componente do currículo dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Pretendia-se perceber como aspectos deste conceito eram considerados pelos sujeitos de modo a justificar a inclusão da fração como um conteúdo obrigatório indicado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais.

Questão 4 – Foi solicitado aos alunos do curso de pedagogia que elaborassem uma questão envolvendo o conteúdo de fração voltado para alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Pretendia-se conhecer os significados de fração que os alunos objetivavam contemplar em suas práticas, bem como a forma como seriam consideradas as quantidades contínuas e discretas.

Apresentada estrutura do roteiro de perguntas, interessa destacar aspectos relacionados ao lócus e os sujeitos da pesquisa.

Lócus da Pesquisa

Optou-se pela realização da pesquisa no curso de Pedagogia da UECE. Seu funcionamento foi autorizado pelo Decreto Federal n.º 22974 de 22 de Abril de 1947 e reconhecido em 9 de junho de 1963, pelo Decreto Federal n.º 52192. No ano de 2012, o curso completará 58 anos da formação de sua primeira turma.

Atualmente, a formação habilita seus alunos para a atuação no Magistério das disciplinas pedagógicas de nível médio e para docência na Educação Infantil e nos anos iniciais do Ensino Fundamental. O curso funciona nos turnos manhã e noite e no semestre de 2011.2 o curso contava com 836 alunos matriculados.

Diante destes dados, percebe-se que este curso é responsável pela formação de uma significativa quantidade de profissionais que atuarão nos AIEF em todas as disciplinas. O interesse dessa pesquisa é relativo à preparação para lidar com o ensino da Matemática e, mais especificamente, para o trabalho com fração. Sendo assim, considera-se que a análise do domínio conceitual e didático de alunos deste curso possibilitará uma compreensão aprofundada de conhecimentos com os quais estes alunos contarão quando se tornarem efetivamente professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

O currículo do curso de Pedagogia da UECE sofreu alterações recentemente, no ano de 2008, ampliando o espaço dedicado à área de Matemática. O curso que antes contava com apenas uma disciplina de sessenta horas-aula agora conta com duas disciplinas de sessenta e oito horas-aula totalizando cento e trinta e seis horas-aula dedicadas à formação matemática dos futuros professores. As disciplinas de Matemática que compõe o atual currículo do curso são Matemática na Educação Infantil e nos anos Iniciais do Ensino Fundamental I, que se dedica aos aspectos relativos à Aritmética e Matemática na Educação Infantil e nos anos Iniciais do Ensino Fundamental II, que tem foco na Geometria.

Com base nestes aspectos, a seguir serão explicitados os aspectos definidos para a seleção dos sujeitos que auxiliaram na resposta aos objetivos desta pesquisa.

Os sujeitos da pesquisa

Para selecionar sujeitos, de forma a atender aos objetivos da pesquisa, estipularam-se os seguintes critérios: ser aluno (a) matriculado no curso de Pedagogia da Universidade Estadual do Ceará; ter cursado uma das duas disciplinas voltadas para a formação Matemática que compõe o currículo do curso (Matemática na Educação Infantil e nos anos Iniciais do Ensino Fundamental I e II) nos turnos manhã ou noite[32]; não possuir experiência com o ensino de Matemática nos anos iniciais do ensino fundamental[33]; ter disponibilidade para participar da pesquisa.

No processo de definição dos caminhos metodológicos pertinentes a esta investigação, tomou-se como primeira tarefa a definição da amostra de pesquisa. Para tal, foram solicitadas, por meio de ofício à coordenação do Curso de Pedagogia,

[32] A disciplina Matemática na Educação Infantil e nos anos Iniciais do Ensino Fundamental I é voltada para conteúdos da Aritmética e é nela que é contemplada a fração. Considerando-se que esta disciplina é pré-requisito para cursar Matemática na Educação Infantil e nos Iniciais do Ensino Fundamental II, a seleção de sujeitos que já cursaram qualquer uma das duas disciplinas garante que os mesmos já tenham concluindo toda a sua formação para o ensino de frações.

[33] Tal critério foi considerado para garantir que aspectos relativos à prática com o ensino de Matemática não influenciassem nos resultados da análise, considerando-se que o foco desta pesquisa está na formação inicial.

informações sobre os alunos que cursaram as duas disciplinas de Matemática nos turnos ofertados no primeiro semestre do ano de 2010. Dessa primeira análise, foram encontrados 80 alunos que haviam cursado a disciplina.

De posse dos dados acerca dos sujeitos, considerou-se necessário definir o instrumento a ser utilizado para a coleta. Para tal, era necessário considerar as opções metodológicas da investigação. Nesta pesquisa, optou-se pela realização de um estudo de caso de abordagem clínica, pois se tinha o objetivo de analisar os domínios conceituais e didáticos dos alunos de pedagogia em relação à fração. Assim, o instrumento utilizado foi um roteiro de perguntas que visava ao aprofundamento dos aspectos relativos ao raciocínio dos sujeitos sobre fração. Diante destes aspectos, estipulou-se a utilização de uma amostra composta por 10 dos alunos que cursaram pelo menos uma das disciplinas de Matemática no semestre 2010.1, selecionando-se 5 do turno da manhã e 5 do turno da noite.

Feitas as considerações necessárias acerca dos sujeitos, a seguir explicitar-se-á os passos relativos à coleta de dados.

Os passos da coleta de dados

Selecionados os sujeitos de pesquisa, foram realizados contatos via *e-mail* para solicitar a participação dos alunos. Interessa destacar que os sujeitos ofereceram resistência para aceitar à participação na pesquisa, justificando ter receios relativos à falta de afinidade ou familiaridade com frações. No momento do contato inicial, foram enviados *e-mails* para 80 alunos solicitando-lhes a participação, apenas 4 alunos responderam a solicitação. Optou-se então pela realização de contatos telefônicos com os sujeitos. Após a obtenção da aceitação dos 6 sujeitos restantes para compor a amostra estabelecida, iniciou-se o processo de agendamento da aplicação do roteiro de perguntas. Entretanto, encontraram-se algumas dificuldades também para a aplicação, pois alguns alunos desistiram da participação desmarcando com antecedência ou apenas não compareciam na data agendada. As dificuldades evidenciadas permitem inferir que os alunos possuem receios e restrições para discutir aspectos relativos ao ensino e aprendizagem de fração.

Após o contato inicial com os sujeitos, foram marcados encontros para explicitar os aspectos relativos ao termo de consentimento livre e esclarecido para a participação na pesquisa, de acordo com as exigências requeridas pelo Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos e Animais Prof. Leonard Michel Martin. Após a aceitação dos alunos, selecionaram-se dois dos sujeitos para a realização de um pré-teste que tinha como objetivo a depuração do instrumento escolhido para a coleta de dados. Este consistiu na aplicação do roteiro visando constatar a viabilidade das questões para atingir os objetivos da pesquisa e, assim, obter-se uma base para a aplicação do roteiro com os demais sujeitos. Após a realização do pré-teste optou-se por retirar uma das questões que faziam parte do domínio conceitual. O tempo de aplicação do pré-teste foi de duas horas, considerou-se este tempo de duração muito extenso e cansativo para os sujeitos. Por este motivo, optou-se pela retirada de uma das questões para possibilitar a redução do tempo de aplicação que após a mudança passou a ser de 1 hora e 30 minutos.

Em seguida, agendou-se a aplicação do roteiro de perguntas conforme os pressupostos do método clínico-piagetiano com 10 sujeitos. As formas de registro utilizadas incluíram gravações de áudio e notas de campo. Os alunos foram nomeados como P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7, P8, P9 e P10 de acordo com a ordem cronológica de realização das entrevistas, conforme a relação abaixo.

ALUNO	ENTREVISTA
P1	27/05/2011
P2	30/05/2011
P3	06/06/2011
P4	10/06/2011
P5	13/06/2011
P6	15/06/2011
P7	15/06/2011
P8	20/06/2011
P9	16/08/2011
P10	24/08/2011

Tendo-se explicitado os detalhes da aplicação do roteiro de perguntas, a seguir, serão descritos os procedimentos utilizados na análise dos dados.

A análise dos dados

A análise dos dados da pesquisa demanda do pesquisador um cuidadoso processo de organização das fontes de modo a ser possível extrair delas o maior número possível de informações pertinentes ao seu objeto de pesquisa. Em função disto, para que não se perca informações relevantes para a pesquisa, em meio à quantidade de dados, a utilização de um *software* para a análise de dados qualitativos tem se constituído como um grande auxílio.

Para esta pesquisa foi utilizado o *software* Nvivo8[34], voltado à análise de dados qualitativos. Para a análise foram utilizadas as seguintes ferramentas deste programa: Fontes (*Sources*) – permite a inserção das fontes no programa; Nós (*Nodes*) – possibilita a organização das fontes em categorias e Relatórios (*Reports*) – gera relatórios com as fontes organizadas por categoria, possibilitando o estabelecimento de diversas relações entre elas. As fontes utilizadas foram, predominantemente, em meio textual em virtude de se ter trabalho com transcrições de áudio. Além disso, utilizaram-se algumas imagens, referentes às respostas dos sujeitos para as questões do roteiro. Os nós (categorias) elegidos para a análise das transcrições foram pré-estabelecidos com base nos pressupostos teóricos orientadores da pesquisa, entretanto os dados da pesquisa também sugeriram novas categorias. Cada questão do roteiro foi considerada com um nó e os elementos teóricos evidenciados constituíam-se como subcategorias. Assim, em cada nó, eram alocadas as falas dos sujeitos que remetiam às percepções a cada um dos significados de fração e as suas concepções acerca dos registros de representação da fração.

Ao final de cada categorização, foi solicitada ao NVivo8 a criação de relatórios da análise para facilitar a visualização da árvore hierárquica dos nós e das falas contidas em cada um deles. Também foi solicitada a criação de gráficos relacionando o desempenho dos sujeitos em diferentes categorias.

Com base nos aspectos evidenciados, no próximo capítulo, serão discutidas as resoluções das questões realizadas pelos alunos, bem como a sua argumentação para

[34] Pacote de software para análise dados qualitativos produzido pela *QSR International*. Este programa de computador foi projetado para pesquisadores qualitativos trabalharem com uma variedade de informações, em diversas mídias, tais como texto, imagem, áudio e vídeo.

agirem da forma como o fizeram. Todos os dados foram analisados de modo a contemplar os aspectos teóricos que compõem o referencial desta pesquisa.

CAPÍTULO 4 - ANÁLISE DOS DADOS – OS SABERES CONCEITUAIS E DIDÁTICOS DE PEDAGOGOS EM FORMAÇÃO, ACERCA DE FRAÇÃO.

> *Quero dizer que ensinar e aprender vão se dando de maneira tal que quem ensina aprende, de um lado, porque reconhece um conhecimento antes aprendido, e de outro, porque, observando a maneira como a curiosidade do aluno aprendiz trabalha para apreender o ensinando-se, sem o que não o aprende, o ensinante se ajuda a descobrir incertezas, acertos, equívocos.*
> *(Paulo Freire)*

Esta seção destina-se a análise dos dados obtidos por meio dos problemas propostos, que foram referenciados no método clínico-piagetiano e aplicados com os alunos do curso de Pedagogia da UECE. Cabe relembrar que se estipulou como critério para os sujeitos da pesquisa, que estes tivessem cursado pelo menos uma das duas disciplinas ofertadas pelo curso e não tivessem experiência com o ensino de Matemática nos AIEF.

Para a análise, dois enfoques foram considerados: o primeiro relaciona-se ao domínio conceitual da fração - DC; o segundo diz respeito ao domínio dos aspectos didáticos da fração - DD. O primeiro enfoque teve o objetivo de investigar os conhecimentos matemáticos dos alunos do curso de pedagogia em relação aos diversos registros de representação pelos quais a fração pode ser expressa, como também às situações que imprimem a este conceito cinco diferentes significados. No segundo enfoque, pretendeu-se analisar a percepção dos alunos acerca de como ensinar fração, considerando-se aspectos relativos às suas representações e significados.

Tendo-se exposto os critérios e enfoques utilizados para a análise, a seguir, serão apresentadas e discutidas as respostas dos alunos do curso de Pedagogia, considerando-se os enfoques anteriormente relatados de forma individual.

Domínio Conceitual

Nesta unidade de análise serão discutidos aspectos referentes ao *domínio conceitual de fração*. A importância da apropriação do conceito de fração incluindo suas representações e significados já foi previamente discutida e explorada no capítulo

1. Nesse sentido, esta seção tem a finalidade de apresentar e explorar a variedade de conceitos, procedimentos e representações dos alunos do curso de pedagogia em relação à fração.

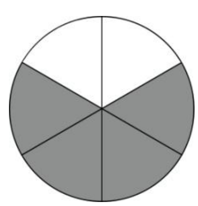
Cada questão proposta neste enfoque objetivou incitar conhecimentos relativos às representações e aos significados da fração, considerando-os individualmente e/ou em relação entre si. A análise será realizada contemplando individualmente cada uma das questões que foram propostas para os alunos e, em seguida, discutir-se-á, de forma geral, as constatações relativas a esse primeiro enfoque.

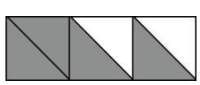
Questão 1 – Reconhecimento da Fração em seus Diferentes Registros de Representação

Na primeira questão, foi solicitado aos alunos que identificassem diferentes registros de representação da fração dentre uma variedade de representações apresentadas para eles. Pretendia-se observar a amplitude conceitual dos sujeitos no que diz respeito ao reconhecimento da fração em seus diferentes Registros de Representação Semiótica. Foram abordados os seguintes registros: figural (itens a,b,c,i), numérico (itens e,f,g,h) e em língua natural (item d). Com relação aos significados, as representações evidenciadas remetem aos significados parte-todo (itens a,b,c,i) e quociente (item e,f). Observa-se, a seguir, o enunciado da questão.

1ª) Identifique abaixo as formas corretas para representar a fração $\frac{4}{6}$:

a) 

b) 

c) 

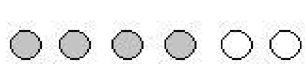
d) Quatro sextos

e) 0,66...

f) $4 \div 6$

g) 4 x 6

h) 4 + 6

i) 

As respostas dos alunos foram discutidas a partir de seus erros e acertos em cada item. Foi considerado como *acerto* à associação correta entre as representações e *erro* à articulação errada entre as representações ou à desconsideração de uma associação possível. Observa-se, a seguir, o desempenho dos sujeitos em cada um dos itens. Os números indicados relacionam-se aos seus acertos.

Questão 1	Item a	Item b	Item c	Item d	Item e	Item f	Item g	Item h	Item i
Acertos	9	10	10	8	6	8	10	10	7

Quadro 3: Distribuição dos acertos dos sujeitos em cada item da questão do DC.

Os itens "a", "b", "c", e "i" apresentavam registros de representação figurais que remetiam às relações parte-todo. Nos itens "a", "b" e "c" foram abordadas quantidades contínuas e no item "i" uma quantidade discreta. A representação evidenciada no item "a" destacava três das partes de um todo dividido em seis, não se constituindo como uma representação correta para a fração $\frac{4}{6}$. Foram observados nove (09) acertos para este item. Infere-se que o alto índice de acertos evidenciado pode ser relativo a possibilidade de realizar a associação entre as representações utilizando o procedimento de dupla contagem, que consiste em enumerar em quantas partes o todo foi dividido e considerar o número de partes tomadas (NUNES; BRYANT, 1997). Esta estratégia foi evidenciada em respostas como a de P1, a seguir:

> *Pesquisadora: [...] a fração tá pedindo quatro sextos e você ta considerando que...*
> *P1: 4 partes de 6, entendeu? Do 6, na verdade o 6 que é o geral. Então, tudo bem, tem 1,2,3,4,5,6, tá certo na quantidade geral só que eu vi logo que tanto pintadas como não pintadas só tem 3, então não pode representar quatro sextos.*

No item "b" utilizou-se a representação da *pizza*, frequentemente empregada na escola. Todos os sujeitos tiveram êxito neste item. Tal índice de acertos talvez se justifique pela familiaridade com a representação, como é possível observar nas falas de P6 e P7.

> *Essa aqui eu acho que é a mais típica [item b].*

> *[...] "b" tá em formatos de círculos, então a gente pode representar como um bolo, uma pizza, sei lá, então assim, como ela tá cortada em seis partes e quatro partes estão pintadas, então eu posso representar essas quatro partes pintadas como o quatro que é o numerador e o seis que é o todo que é o denominador.*

Nunes e Bryant (1997) reafirmam que esse tipo de representação pode ser considerada como uma das formas mais comuns de introdução à fração para a criança. Neste tipo de abordagem de frações "não há relações entre números, mas duas contagens: uma contagem das partes que você comeu e uma das partes em que você tinha dividido a pizza". (NUNES, 2003, p.128). Assim, um ensino que tenha como foco este tipo de exercício leva os alunos a desenvolverem seus raciocínios sobre fração com base, principalmente, na percepção em detrimento das relações lógico matemáticas envolvidas. Tal constatação corrobora com a premissa apontada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica acerca da necessidade da diversificação dos registros. Para Duval (1995), a prática pedagógica centrada no mono-registro conduz o aluno a confundir o conceito com a sua representação, levando-o a uma compreensão fragmentada. Em outras palavras, se o indivíduo é capaz de transitar pelas diferentes representações da fração corretamente, isto o levará a uma percepção ampla do conceito.

No item "c" são enfatizados os mesmos aspectos dos dois itens anteriores, no entanto, a disposição dos cortes que dividem o todo foi colocada de uma forma diferente, rompendo com o modelo tradicional das "pizzas" ou "barras de chocolate". Todos os participantes acertaram este item. No entanto, P1 e P6 relataram que a disposição diferenciada dos cortes os confundiu a princípio, só sendo possível relacionar corretamente as representações numérica e figural após uma segunda tentativa. Observa-se, a seguir, as falas de P1 e P6 sobre este item.

> *Pesquisadora: E a "c"?*
> *(...)*
> *P2: Porque ela foi cortada de uma forma diferente. Aqui são 3 quadrados, certo?! E cada quadradinho desse foi divido ao meio, então formando assim dois triângulos em um quadrado. <u>Então a visualização fica menos perceptível do que nas outras.</u>*
>
> *P6: [...] a "c" eu ainda a fiquei meio assim porque depois que eu prestei atenção nesses tracinhos aqui.*
> *(...)*
> *P6: 4 né? 1,2,3,4...2,4,6...acho que essa aqui [item c].*

Considera-se que as falas dos sujeitos evidenciam o seu condicionamento aos modelos mais típicos de representação figural. Apesar de também possibilitar o uso do procedimento de dupla contagem a representação abordada no item "c" apresenta um nível maior de dificuldade para a percepção visual da fração do que as outras apresentadas nesta questão.

No item “i”, apresentou-se uma representação figural considerando uma quantidade discreta. Sete (07) sujeitos obtiveram êxito neste item. Para este tipo de representação fazia-se necessário que os alunos percebessem o todo como um conjunto de objetos idênticos como relata P2.

> *P2: Aqui também, a “i” seria seis bolinhas, mas como são bolinhas, a gente poderia dividir num grupo de seis bolinhas, por exemplo, e daríamos quatro. Então pra mim esse grupo de seis bolinhas seria o todo, então no caso representa a fração.*

P3, P5 e P6 não conseguiram visualizar o todo nesta representação, evidenciando dificuldades na compreensão da fração quando associada a quantidades discretas conforme se observa em suas respostas.

> *Pesquisadora: Certo. E a opção “i”?*
> *P3: A ‘i”? Eu acho que a “i” eu marquei mas não tá certo. Porque tem 6 figuras só que tão separadas. O total são seis com quatro pintadas, mas elas estão separadas então não representam um todo.*
> *Pesquisadora: O todo é sempre junto?*
> *P3: É. É, deveria ser sempre junto.*
>
> *P5: [...] aqui eu não marquei exatamente porque eu não tenho a segurança se é...o todo tem que ser na mesma estrutura ou se pode ser em estruturas separadas assim. Porque na minha concepção eu vejo pequenas...é aqui não são seis bolinhas? Mas são isoladas, eu não estou vendo conexão entre elas, então eu não sei se isso é considerado como um todo.*

Mais uma vez, considera-se que a dificuldade dos alunos é proveniente do condicionamento a reconhecer fração somente em um tipo específico de representação. Duval (2003) destaca as representações semióticas como elementos fundamentais para a evolução do pensamento matemático. Primeiramente, porque os objetos matemáticos não são diretamente observáveis e seu acesso depende de um sistema de representações e, em segundo lugar, porque as possibilidades de tratamento matemático dependem do sistema de representação utilizado. Sem dúvida, se o acesso às frações depende de suas representações e essas são limitadas, a restrição representacional resultará numa percepção estreita das relações que envolvem esse conceito.

O registro numérico estava presente nos itens “e”, “f”, “g” e “h”. No item “e”, abordou-se um registro numérico decimal e nos itens “f”, “g” e “h” estavam representadas operações matemáticas. O item “e” exibiu o menor índice de acertos dentre todos os itens, apenas 6 (seis) alunos conseguiram relacionar os registros de representação fracionária e decimal. A realização da divisão entre o numerador e o denominador foi a estratégia utilizada pelos sujeitos que obtiveram êxito neste item.

Destaca-se a fala de P9 que demonstra essa estratégia.

> *Pesquisadora: Mas ela também pode ser representada por um número decimal?*
> *P9: Pode, é o resultado dela, né?*
> *Pesquisadora: O número decimal para você é o resultado da fração?*
> *P9: É. Daí você tem a partir da fração, você pode transformar, aliás o número decimal você pode chegar a fração e mostrar que existem essas relações né?!.*

Percebe-se assim que o registro numérico decimal é considerado o resultado da fração. A representação numérica fracionária que sobrepõe numerador e denominador, separando-os por um traço, expressa para os sujeitos a operação de divisão. Com efeito, "as frações (como parte de uma unidade) podem ser vistas como resultados de divisões de certo número de unidades em partes iguais". (MACHADO; MENEZES, 2008, p. 8). Tal fato remete a fração ao seu significado quociente, na qual ela é considerada como uma divisão e, ao mesmo tempo, o resultado desta divisão. Assim, na divisão entre os números naturais 4 e 6 o resultado poderia ser expresso tanto pela representação fracionária ($\frac{4}{6}$) como pela representação decimal (0,66..). Todavia, interessa destacar a continuação da fala de P9, na qual relata:

> *[...] Já aqui eu tenho aquele...um negócio assim, mais...poderia chamar de sintético, mas aquela coisa onde eu faço um cálculo, eu conheço os números, eu faço uma divisão e chego a um valor.*
> *Pesquisadora: (...)*
> *P9: É, assim é <u>simplesmente mostrando como é ela literalmente</u>, né? Na expressão matemática. Certo?*

O argumento da aluna de que o registro decimal expressa como a fração "é literalmente" possibilita inferir que a aluna considera esse registro como uma forma de visualizar com mais facilidade a quantidade representada. Ademais, é possível interpretar que se, para a aluna, o registro decimal expressa uma ideia literal, o registro fracionário exprime um significado de outra ordem semântica. Os registros fracionário e decimal possuem distinções entre si, pois apresentam diferentes variáveis ligadas a dois aspectos: ao seu funcionamento e às variações de congruência. Não se pode esquecer, no entanto, que ambos os registros representam o mesmo objeto matemático. Observam-se abaixo as respostas de sujeitos que não conseguiram perceber esse aspecto.

> *P10: [...] Agora, o item "e" eu não… não marcaria porque na minha educação básica o que a gente menos trabalhou foi a questão de dividir os números… assim…um número menor por um número maior pra dar decimal. Era muito difícil ser trabalhado isso.*

P4:E...esse aqui, o item "e", zero vírgula sessenta e cinco, eu não tenho a mínima idéia se...se isso representaria a ideia...que eu tenho problema com números com zero vírgula alguma coisa. Nunca tive afinidade.

P10 e P4 expressam sentir dificuldade em lidar com o registro decimal e, mais especificamente, realizar divisões de números, cujo cociente seja número decimal. Segundo Leen Streefland (1984), a base conceitual do ensino das frações está na divisão. Com efeito, faz-se necessário possibilitar aos alunos o estabelecimento de relações entre as variáveis envolvidas, de modo que a notação em números fracionários apareça com o resultado do raciocínio. De modo análogo, afirma-se que o registro em números decimais também deve ser produto de relações entre os números. Caso contrário, a compreensão acerca desses registros se limitará a memorização de regras e como argumenta Nunes (2003, p.122), "essa é uma aprendizagem que se esquece; quem não se esquece de como é fazer a conta, se esquece do porquê fazer assim".

Além da dificuldade com a divisão, outra dificuldade evidenciada na fala dos pelos sujeitos foi a equivalência de frações, como se observa na resposta de P3:

Pesquisadora: Certo. A "e"?
P3: A "e" a fração da "e" é no caso $\frac{66}{100}$, são, é 66 centésimos então não tem nada...66 centésimos num...não tem nada a ver com quatro sextos. (P.3).

Nota-se que P3 em sua tentativa de transitar entre as representações, converte o registro decimal 0,66... para o registro fracionário $\frac{66}{100}$, no entanto, a aluna não percebe a relação de equivalência entre $\frac{66}{100}$ e $\frac{4}{6}$. Deste modo, não percebe que ambas as representações expressam a mesma relação entre a parte considerada e o todo. A equivalência se constitui como um dos principais invariantes aos quais se relaciona o conceito de fração. A sua não compreensão implica também na dificuldade em lidar apropriadamente com frações em suas diferentes representações e significados. Além dos fatores explicitados, as dificuldades conceituais observadas, possivelmente, resultam de práticas de ensino que desconsideram a necessidade de coordenação de pelo menos dois registros (DUVAL, 2003).

Em relação aos itens "f", "g" e "h" que apresentavam registros numéricos das operações de divisão, multiplicação e adição, respectivamente, observou-se que apenas em relação ao item "f" foram cometidos erros. Todos os sujeitos acertaram os itens "g" e "h", demonstrando compreender que as frações não representam multiplicação e adição. Quanto ao item "f", 8 (oito) sujeitos perceberam a relação entre a fração e a operação de divisão. A relação entre divisão e fração, apesar de evidente, é pouca explorada no contexto do ensino tradicional de frações. P6 demonstra perceber o item "f" como uma representação possível, mas acredita que seria uma representação inadequada para o trabalho com crianças.

> *P6: Essa aqui eu até pensei em marcar porque é uma divisão 4 sobre 6, é uma fração né? Mas pra representar mesmo, no caso fosse pra uma criança ela ia ver como uma divisão, uma operação divisão, né? Pra representar mesmo eu acho que não seria, assim educação fundamental, ensino fundamental. Tem que ser na série mais adiante.*
> *Pesquisadora: Mas...pra fração, pra você ela é válida? Independentemente da série?*
> *P6: Eu acho válido porque o quatro e o seis se você colocar o tracinho no meio... [...].*

A aluna apresenta uma preocupação pertinente, uma vez que seria equivocado pensar no número $\frac{4}{6}$ como uma representação da operação de divisão. Nunes et al. (2005, p.53) defendem que diante da diversidade de possibilidades de representação de um conceito matemático é necessário que o professor reflita sobre qual "forma de representação é mais acessível aos alunos nas diferentes idades para saber como tratar o conceito em sala de aula". Além disso, é importante salientar que, de acordo com a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, para a evolução do pensamento matemático, faz-se necessário o uso apropriado de diversificados registros de representação semiótica (DUVAL, 2009).

No que diz respeito às dificuldades evidenciadas nos sujeitos que cometeram erros, nesse item, observou-se uma percepção equivocada das relações entre o tratamento vinculado à operação de divisão e àquele utilizado para identificação de frações equivalentes, como é possível perceber na resposta de P3.

> *P3: A "f" é 4 dividido por 6 né? Talvez pudesse ser.*
> *Pesquisadora: Por que pode ser?*
> *P3: Porque a representação da fração não quer dizer isso 4...4 dividido por 6, ou não? Porque quando você simplifica uma fração você não divide pra simplificar? Então podia ser uma divisão de quatro sextos seja a mesma coisa do que 4 dividido por 6. Não, não é não. Porque se fosse simplificado daria um outro número e esse aqui já não dá a mesma coisa, então eu acho que não é não.*

P3 evidencia não compreender a diferença entre a operação de divisão e o algoritmo utilizado para realizar a simplificação de frações. Este último consiste em dividir o numerador e o denominador pelo máximo divisor comum entre os dois, de forma a reduzi-los a uma fração equivalente. Dessa forma, pondera-se que sem entender efetivamente o conceito de divisão e considerando que a simplificação de frações envolve uma divisão, P3 acredita que esses dois tipos de tratamentos são utilizados para uma mesma finalidade. Demonstrando assim não compreender efetivamente tanto o conceito de divisão quanto o de equivalência. P8, por sua vez, não nota nenhuma relação entre o registro numérico fracionário e a representação da operação de divisão, conforme se visualiza abaixo.

> *P8: [...] Não é por que...não passa de uma divisão.*
> *Pesquisadora: Divisão?*
> *P8: É...*
> *Pesquisadora: Não pode ser que representa quatro sextos?*
> *P8: Não. Seria uma divisão, então não representaria a divisão, oh...a fração quatro sextos.*

Os equívocos evidenciados podem ter tido origem em um processo de formação na escola em que se utilizaram a aprendizagem de regras e enclausuramento de registros, resultando em interpretações confusas da fração.

As consequências da memorização de regras sem uma efetiva compreensão dos aspectos envolvidos também pode ser evidenciadas na resposta de P9 ao explicar seu raciocínio em relação ao item "g".

> *P9: Pronto. É a "g", a não ser que eu trabalhasse com o raciocínio de aplicar a propriedade... aí seria né, porque 4 vezes 6 não é a mesma coisa de 4 dividido por 6, né? [...] nem 4 x 6, a não ser que eu trabalhasse com uma propriedade, mas se bem que não daria né? A propriedade 4x6 não é a mesma coisa que 6 ÷ 4, são coisas diferentes. Então eu não conseguiria ver assim.*

Acredita-se que P9 faz referência à propriedade comutativa da multiplicação que enuncia que a ordem dos fatores não altera o produto de uma multiplicação. A aluna tenta aplicar esta propriedade através de uma relação entre as operações de multiplicação e divisão. Demonstra, dessa forma, não perceber que esta premissa é aplicada somente ao contexto da multiplicação. Diante desta constatação, considera-se que as percepções apresentadas pela aluna podem ser atribuídas às experiências escolares que se encaixam dentro do quadro que tem sido evidenciado por pesquisas da área (NUNES, 2003; NUNES; BRYANT, 1997). Estas investigações relatam que o ensino de números, símbolos e regras é baseado em práticas que enfatizam a memorização mecânica. Como conseqüência, os raciocínios que dão base para compreensão dos conceitos são pouco explorados e os conteúdos se apresentam para os alunos desprovidos de sentido.

Em relação ao item “d”, que abordava uma representação em língua natural, considerou-se acerto para 8 (oito) sujeitos. Para a resolução deste item era necessário que o sujeito admitisse a língua natural como uma representação apta a expressar um conceito matemático, o que P8 e P9 não fizeram, conforme pode-se verificar em suas falas, a seguir:

> *P8: Tá ok. Tá certo. É por que...não sei...tem que ser de forma escrita quatro sextos? Não sei... se valeria também a forma como tá aqui.* (P.8).
>
> *P9: [...] aqui seria apenas a descrição digamos literal em português quatro sextos. Seria apenas uma, uma poderia até ser se quando eu escrevo quatro sextos, você mentalmente vê 4 dividido por 6, né. Sobre esse aspecto poderia até ser.*

P8 explicita não incluir a representação em língua natural dentro de um conjunto do que ele percebe como representações válidas para a fração. Já P9 demonstra dúvidas quanto à possibilidade de considerar essa como uma representação de 4/6. A não compreensão da língua natural como uma representação de fração indica limitação conceitual dos sujeitos em relação ao conceito e suas representações. Duval (2009) assume a língua natural como representação por excelência. Para o autor,

> A língua natural constitui um registro à parte. Não somente em razão da sua maior complexidade e do número consideravelmente elevado de variações que ela oferece, mas também em razão de sua prioridade genética sobre outros registros e de seu papel único em relação à função meta-discursiva de comunicação. (DUVAL, 2009, p.107).

Neste sentido, desconsiderar esta representação para o contexto das frações implica na desconsideração de variadas articulações proporcionadas por essa representação que trazem possibilidades de ampliação da percepção do conceito.

Em síntese, observou-se que as representações nas quais os sujeitos explicitaram maior dificuldade foram as numéricas do tipo decimal e divisão, bem como a figural discreta. As percepções evidenciadas pelos sujeitos nesta questão evidenciam lacunas conceituais no que diz respeito às representações da fração e suas articulações entre si. Nesse sentido, destaca-se a afirmação de Duval (2009, p.98) acerca das consequências da prática mono-registro, “desde que se sai do contexto onde se fez a aprendizagem, a maior parte se revela incapaz de mobilizar os conhecimentos adquiridos e que, no entanto, ‘eles sabem’”.

Questão 2 – Percepção Formalizada e Intuitiva dos Significados de Fração

Na segunda questão, objetivou-se perceber, através de uma definição construída pelos sujeitos, a presença de elementos ligados aos cinco significados de fração nas concepções espontâneas[35] dos alunos, além de conhecer os contextos e situações em que eles a utilizam. Considera-se que a memorização formal de um conceito não assegura sua apropriação, tendo em vista que “os conceitos matemáticos traçam seus sentidos a partir de uma variedade de situações”. (MAGINA; CAMPOS; GATIRANA, 2001, p. 9). Com efeito, solicitou-se também dos sujeitos a explicitação de contextos e situações em que percebem utilizar a fração. Acredita-se que o uso do contexto permite recorrer a conhecimentos extra-escolares como apoio para análise e controle de situações.

Diante desta percepção, a análise da questão considerou quais e quantos significados de fração foram contemplados nas definições e situações explicitadas pelos alunos. No que diz respeito às definições, os dados relativos à quantidade de sujeitos que destacaram elementos de cada significado pode ser visualizado na tabela abaixo.

Tabela 1: Quantidade de sujeitos que contemplaram cada significado de fração em suas definições.

Significados de fração contemplados nas definições	
Significado	**Quantidade de Sujeitos**
Parte-todo	8
Quociente	3
Número	6
Medida	0
Operador Multiplicativo	0

É possível visualizar que, nas definições elaboradas pelos alunos, foram evidenciados aspectos relacionados a três significados: parte-todo, quociente e número. O significado parte-todo foi identificado nas definições de oito (08) entrevistados. Para ilustrar as repostas com elementos relativos a esse significado, destacam-se, as falas de P5 e P6:

> *P5: Fração...a fração pelo que eu entendo, é tirar um pedaço de um todo, como eu já te disse antes né? Você pode tirar o pedaço pelo todo. É uma parte do todo.*

[35] Para esta pesquisa, consideramos por concepção espontânea as percepções do conceito de fração ligadas às vivências cotidianas do sujeito.

> *P6: Fração [...] é...como uma definição matemática né? Fração é a parte de um todo. Pra mim a fração é isso. É a parte de alguma coisa, alguma coisa que está completa e você divide em fração.*

P5 e P6 demonstraram perceber que a fração como a parte de um todo. O fato de 8 entre 10 sujeitos fazerem referência a esse significado reforça pesquisas como a Campos (2011) na qual afirma que situações de parte-todo são priorizadas no ensino de fração no Brasil. A respeito desse significado, é importante ter em vista a discussão realizada por Nunes e Bryant (1997). Para os autores, lidar bem com a fração em seu significado parte-todo, mas não compreender de forma eficaz situações que envolvam outros significados, demonstra que é possível usar "linguagens de fração sem compreender completamente sua natureza" (NUNES; BRYANT, 1997, p.193). Com efeito, a compreensão do conceito de fração só se dá através de uma ampla apropriação de seus significados, propriedades e representações.

O segundo significado mais evidenciado nas definições dos alunos foi o de número. Foi possível identificá-lo na fala de seis (06) sujeitos. Observa-se, a seguir, a resposta de P1, representativa deste grupo.

> *P1: [...] Mas ela, a fração, eu acho que foi criada né?! Foi originada pra representar exatamente esses números que são quebrados.*
> *Pesquisadora: Ela é pra representar um número quebrado?*
> *P1: É.*
> *Pesquisadora: Me dá assim uma definição da fração.*
> *P1: Fração é um número...é a representação.*

Admitir a fração em seu significado de número implica na compreensão de que ela expressa uma quantidade específica. P1 demonstra pensar sobre a fração entendendo-a como um número que expressa quantidades menores que uma unidade ou um todo. No entanto, ao tentar formalizar uma definição, a aluna afirma que "fração é um número...é a representação". A fala de P1 reforça a constatação de Duval (1995) de que se observa, de modo geral, a existência de uma confusão entre a representação do objeto matemático com o próprio objeto matemático. Considera-se que a aluna não compreende a diferença entre o conceito de fração e a sua representação, evidenciando deter uma compreensão superficial ao passo que "para a compreensão da matemática é de fundamental importância a distinção entre o objeto matemático tratado e a sua representação". (DAMM, 1999, p. 136).

No tocante ao significado quociente, este foi percebido nas definições de três (03) alunos. De acordo com Mamede, Nunes e Bryant (2005, p.282) "em situações quociente, o numerador designa o número de recipientes e o denominador designa o número de itens que estão sendo partilhados" [36]. Logo abaixo, seguem as repostas de P6 e P9 que evidenciam elementos do significado quociente da fração.

> *P6: [...] é...a divisão, é a divisão assim o compartilhar né, o dividir alguma coisa. Eu acho que a fração ajuda muito nisso e a fração é divisão né é...divisão né? Então facilita você trabalha com uma situação se for muito grande...trabalhar com as frações...porções. É isso.*
>
> *P9: Porque a gente sempre vê a relação de um todo com algo né. Divisão de brinquedo né [inaudível] nós temos tantos brinquedos na sala e vamos dividir pra tantas crianças. Mas assim né de divisão mesmo.*

Nas falas de P6 e P9, é possível perceber a compreensão das relações envolvidas na fração no significado quociente. As alunas fazem referências a partes de um todo a serem divididas. Pesquisas apontam que o significado quociente não é completamente ignorado no processo de ensino das frações, por conta de o aspecto partitivo deste número estar presente em inúmeras situações cotidianas. No entanto, segundo Streefland (1984), a grande dificuldade na compreensão deste significado se deve às sequências de ensino que abordam a fração com ênfase em tratamentos, ou seja, priorizam-se procedimentos em detrimentos de suas relações.

Em relação aos significados de medida e operador multiplicativo, não foram identificados elementos que remetam a essas interpretações nas definições dos alunos. Não se tem a intenção de afirmar que o fato de os sujeitos não terem se remetido a esses significados indica uma completa falta de compreensão ou a desconsideração destes. As concepções espontâneas dos sujeitos explicitam os elementos do conceito de fração que são compreendidos e considerados pelos participantes. O fato de aspectos dos significados de medida e operador multiplicativo não terem sido mencionados em nenhuma definição, podem indicar a necessidade de que esses significados sejam melhor explorados em situações de ensino.

Além da quantidade de alunos que se referia a cada significado individualmente, verificou-se, também, se os sujeitos em suas definições fizeram referência a elementos de mais de um significado de fração. Tais dados foram

[36] "in quotient situations, the denominator designates the number of recipients and the numerator designates the number of items being shared".

assinalados na tabela abaixo.

Tabela 2: Quantidade de significados de fração identificados nas definições elaboradas pelos sujeitos na questão 2 do DC.

Quantidade de significados de fração identificados nas definições	
Quantidade de significados	**Quantidade de sujeitos**
1 significado	5
2 significados	3
3 significados	2
Mais de 3 significados	0

É possível observar que dos 10 alunos analisados, cinco (05) fizeram referência a apenas um significados, três (03) remeteram-se a dois significados, dois (02) mencionaram três significados e nenhum aluno explicitou elementos de mais de três significados em suas definições. Considera-se importante ressaltar que no tocante aos cinco alunos que fizeram referência a apenas um significado, o significado parte-todo foi contemplado por 3 (três) alunos e o de número por 2 (dois) alunos. A partir destes resultados, considera-se que os alunos evidenciaram a necessidade de ampliar sua compreensão acerca do conceito de fração. Um maior aprofundamento conceitual depende, entre outros fatores, da percepção de que a fração pode expressar diferentes relações a depender da situação em que está inserida. Além disso, o professor precisa perceber "as dificuldades que são inerentes aos tipos de situações, de maneira a não ficar apenas repetindo, ao longo da formação inicial do estudante, problemas que requeiram dele um único raciocínio". (MAGINA; CAMPOS; GATIRANA, 2001, p.23).

Ainda em busca de apreender a concepção dos alunos acerca do conceito de fração, indagou-se acerca dos contextos e situações em que eles percebem utilizá-la. Pretendeu-se possibilitar aos alunos que mobilizassem seus conhecimentos sobre fração de forma intuitiva.

De acordo com Nunes (2003, p.123) "usamos muito o raciocínio de frações na prática, o que não usamos é a formalização escrita de frações". Nesse sentido, pretendeu-se verificar se seriam mencionados exemplos de situações que fizessem referência a significados diferentes daqueles utilizados em sua definição (tabela 1).

Com efeito, quatro significados foram identificados nos contextos apontados pelos sujeitos, a saber: parte-todo; quociente; medida; operador multiplicativo. Observa-se, então, uma variedade maior de significados em relação aos apontados nas definições. Segue no quadro abaixo uma síntese das menções aos significados por cada sujeito.

Sujeito \ Significado	Parte-todo	Quociente	Número	Medida	Op. Multiplicativo
P1	-----------	X	-----------	-----------	X
P2	-----------	-----------	X	X	-----------
P3	-----------	-----------	X	-----------	X
P4	X	X	-----------	-----------	-----------
P5	-----------	X	-----------	X	X
P6	X	-----------	-----------	-----------	-----------
P7	X	X	-----------	X	X
P8	-----------	X	-----------	-----------	-----------
P9	-----------	X	-----------	-----------	X
P10	-----------	-----------	X	X	-----------

Quadro 4: Distribuição de significados da fração , a partir da referência a contextos.

O significado parte-todo que obteve o maior número de referências nas definições (8), aparece contextualizado na resposta de apenas três (03) participantes. Para exemplificar situações destacadas pelos sujeitos que envolvem esse significado, segue abaixo a fala de P6:

> *P6: Quando eu vou comer eu vejo meu prato, eu como a carne, divido a carne pra poder comer. Se eu vou tomar café, partir um pão, pego o queijo, vou partir o queijo, estou tirando uma fração do queijo né? É...fazer alguma vitamina...vou partir a fruta...acho que em todo momento da vida eu utilizo fração, todos os contextos. Seja comendo, ou seja, dormindo, seja vendo a hora, no ônibus quando você vai pagar tem que dar o troco.*

Percebe-se na fala acima a constante ideia da divisão de um todo qualquer em partes. A aluna não imprime nenhum sentido às divisões realizadas de forma a atribuir uma significação à atividade de partição do todo. Nas situações referidas, as divisões dos alimentos como carne, café, queijo, dentre outros, são feitas sem um propósito específico. Para aluna, qualquer ato de partição se constitui como uso de frações. Assim, considera-se que a forma como os contextos são expressos indica que a aluna não percebe uma funcionalidade efetiva para o uso desse número em situações cotidianas.

Streefland (1997, p.347) argumenta que "frações, oferecem um modelo que não reflete exatamente a vida cotidiana" [37]. Em outras palavras, a intenção do autor é evidenciar que a fração não se refere a um valor absoluto. Em situações cotidianas, é comum termos de lidar com a divisão de unidades tais como laranjas que não são iguais ou equivalentes. A matematização das situações depende, então, da compreensão das relações parte-todo.

Em relação ao significado quociente, ao se tratar de contextos, percebeu-se seus elementos na resposta de seis (06) sujeitos. Interessa destacar que nas definições elaboradas pelos alunos, ele foi identificado na fala de três participantes. Observa-se um exemplo de contextualização deste significado nas falas de P1 e P5 logo abaixo.

> *P1:[...] eu acho que a fração é muito importante pra gente socializar, tipo naquela coisa de vamos dividir um biscoito, um pacote de biscoito, não, mas eu só tenho tantos biscoitos e tem tantas crianças e aí o que é que eu faço? Eu acho que é importante pra socialização, eu acho que ela vai compreender melhor se a gente trabalhar com elas mesmos sendo as pessoas, os personagens da questão.*
>
> *P5: [...]A divisão não deixa de ser uma fração, no dia a gente usa...*
> *Pesquisadora: A fração é uma divisão?*
> *P5: Não deixa de ser, né?*

Em sua fala, P1 evidencia a necessidade de divisão do todo em partes iguais e a relação entre duas variáveis, crianças e biscoitos. Já P5 explica que percebe a fração como uma divisão. Kieren (1988) explica que "as frações são números produzidos por divisões e que, portanto, são números do campo dos quocientes". Assim, as frações são números e como tal expressam quantidades e não operações matemáticas. Os outros sujeitos que formularam contextos vinculados ao significado quociente demonstraram não compreender efetivamente a relação entre fração e divisão.

Além da divisão, a fração se associa a outros conceitos como divisão, probabilidade, porcentagem, razão e proporção. A vinculação da fração a esses conceitos se constitui como obstáculo para sua compreensão (MAGINA; BEZERRA; SPINILLO; 2009). Nesse sentido, é preciso que os alunos compreendam efetivamente cada conceito para que sejam capazes de reconstruir os conhecimentos já estabelecidos, de forma a estabelecer corretamente as relações entre os conceitos. De acordo com

[37] "fractions, offer a model that does not reflect real life exactly".

Itzcovich (2008), todos os conhecimentos estão integrados a um sistema de significados que os alunos já possuem, desta forma, fazem-se necessárias decisões didáticas que permitam a desconstrução das verdades já estabelecidas de forma a ser possível mobilizar conhecimentos para diversos contextos.

O significado número que apareceu contextualizado nas situações evidenciadas por três (03) sujeitos. Nas definições esse significado foi contemplado na fala de seis (06) alunos. Observa-se, a seguir, a fala de P2 que evidencia esse significado.

> *Pesquisadora: Em que tipo de situação?*
> *P2: Quando a gente vai somar números que não são inteiros...e 0,6 não é um número inteiro.*
> *Pesquisadora: E a fração que é 4/6 ela não é número inteiro?*
> *P2: Não ela não é, mas assim ela somada...vou somar e todos os números estão em números decimais, números não inteiros, então [...].*

Considera-se que o menor aparecimento deste significado em relação aos contextos deve-se a necessidade se remeter a comparações com números naturais e a percepção do que esse número quantifica.

Outro significado evidenciado nos contextos retratados pelos sujeitos é o de medida. Nos contextos evidenciados, foi possível perceber aspectos desse significado nas falas de quatro (04) alunos. Esses dados contrastam com os relativos às definições dos alunos em que não foi manifestada nenhuma referência ao significado de medida. Observam-se algumas contextualizações desse significado.

> *Pesquisadora: A gente usa a fração no cotidiano?*
> *P2: Eu uso...as vezes eu uso, não normalmente, assim todos os dias, todas as horas, mas...eu frequentemente uso.*
> *[...]*
> *P2: Pra medir as coisas. Pra calcular, pra medir.*
> *[...]*
> *Pesquisadora: Mas o que você tá medindo com a fração?*
> *P2: O todo. Estou medindo uma parte do todo.*

> *P5: [a fração] É pra gente ter a noção de um todo mesmo [...] se ele tem um todo e eu quero tirar alguma informação daquele todo, por exemplo, hã...de dez alunos, quantos alunos fizeram a prova desse semestre, ali é um todo de dez alunos...aí foram quatro, então de dez alunos, quatro fizeram a prova desse semestre. É o que eu estou tentando, entendeu? Colocar na minha concepção aqui.*

P2 e P5 explicitam a percepção da fração aplicada à atividade de medir. Na situação mencionada por P5, a fração que expressa a relação entre os alunos que fizeram a prova com os demais alunos é representada por um medida (significado) obtida entre o número de alunos que fizeram a prova e o número total de alunos. As frações surgem constantemente no cotidiano em situações que envolvem medidas e quantidades. Considera-se que o significativo número de referências dos sujeitos à fração enquanto medida deve-se a familiaridade com situações deste tipo.

O significado operador-multiplicativo aparece contextualizado nas situações descritas por cinco (05) sujeitos. Interessa destacar que nenhum aluno explicitou aspectos conceituais desse significado em suas definições. A fala de P9 ilustra uma contextualização envolvendo este significado como se observa abaixo.

> *Pode ser levada para vida adulta, com os adultos, né? Os adultos, eles trabalham muito com o dinheiro, né? Então as frações assim né, quanto...principalmente porcentagem eu gosto...quantos por cento eu vou ter de reajuste, quanto isso representa a mais no meu salário, essa fração é, de tanto? É um todo que é tanto, e vou receber uma parte que é tanto, né? Dentro de um contexto de adulto, eles trabalham muito nessa perspectiva que é uma coisa muito concreta. Bem concreta.*(P.9).

Em seu relato, P9 faz referência ao conceito de porcentagem**.** Nunes et al. (2003) explicam que existem situações em que as frações podem ser relacionadas a conceitos como porcentagem, razão e probabilidade. Entretanto, os autores não os consideram significados de fração, pois eles estão diretamente vinculados a dois dos significados já definidos – medida e operador multiplicativo. As situações que fazem referência à porcentagem têm vinculação com o significado de operador multiplicativo. Para melhor demonstrar a presença de um operador multiplicativo (significado) em situação de porcentagem, será utilizado o exemplo de P9 do reajuste de um salário. Supondo-se que o valor do reajuste de um salário qualquer seja 20%, a fração $\frac{20}{100}$ é relacionada ao valor total do salário. Se o valor do salário for 500 reais, a fração $\frac{20}{100}$ funcionará como um operador do valor inicial (500 reais), sendo possível multiplicá-lo por 20 e dividir por 100, para chegar ao valor final que será o reajuste de 100 reais. Evidencia-se, dessa forma, a presença do significado operador multiplicativo na situação de porcentagem.

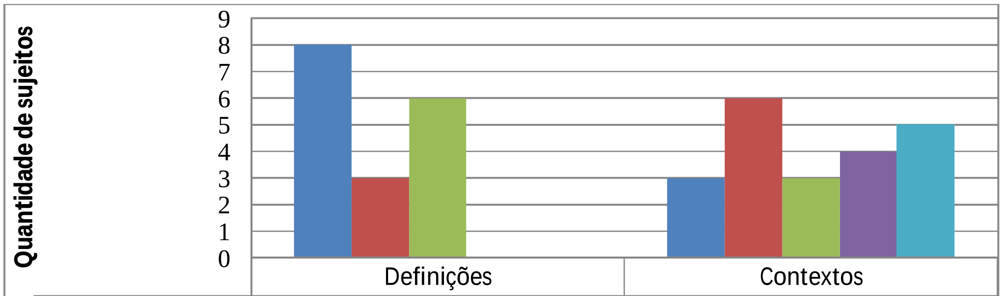
É importante esclarecer que a porcentagem "é a proporção de uma quantidade, de uma grandeza em relação a outra, avaliada sobre a centena." (DAMM, 1997, p. 7). A relação com a centena é a característica fundamental da porcentagem. Com efeito, a fração em si não expressa a porcentagem, pois cada tipo de registro possui suas especificidades e obedece a regras específicas de funcionamento em relação à base dez e o valor posicional (VIZOLLI, 2003).

Além dos aspectos relacionados aos significados de fração, também foram observados elementos relacionados à percepção dos sujeitos da representação de fração. Observa-se o caso de P1 em que faz uma relação equivocada entre números racionais na representação fracionária e inteiros.

> *P1: Todo número é...tá sobre um né? Então todo número é uma fração. Mesmo o inteiro.*
> *Pesquisadora: O número inteiro também é uma fração?*
> *P1: É porque está sobre um. É tipo quanto é 10? 10 é 10 dividido por 1, a fração é que tem um embaixo, quando eu até vou fazer o M.M.C de todos os números...quando tem um número que não tem nada embaixo é porque tem o número 1, aí você faz tanto dividido por tanto e faz o M.M.C como se fosse um.*(P.1).

P1 considera que "todo número é uma fração" porque "quando tem um número que não tem nada embaixo é porque tem o número 1". A afirmação da aluna explicita ter como base a representação da fração no registro numérico. Pode-se perceber que P1 pensa na fração como a sobreposição de dois números. Desta forma, as relações que a aluna estabelece têm como base a representação da fração em detrimento de seus aspectos conceituais. A aluna evidencia, ainda, não compreender que números inteiros e racionais expressam tipos de quantidade diferentes. É possível que as experiências da participante com fração tenham se baseado no uso de mono-registro. Segundo Duval (2009, p.98), as práticas em mono-registro levam o aluno a "uma compreensão que não permite qualquer transferência. Só uma compreensão integrativa, quer dizer, uma compreensão fundada sobre uma coordenação de registros dá essas possibilidades de transferência".

Para a questão 2, percebe-se então, que há um contraste entre os significados evidenciados nas definições e aqueles identificados nos contextos e situações evidenciados pelos alunos. Esta relação pode ser visualizada no gráfico a seguir que estabelece uma comparação entre os dados.



	Definições	Contextos
Parte-todo	8	3
Quociente	3	6
Número	6	3
Medida	0	4
Op. Multiplicativo	0	5

Gráfico 1: Comparação entre uso de significados de fração em definições e situações contextuais elencadas pelos alunos do curso de Pedagogia.

Pode-se perceber que todos os cinco significados de fração foram contemplados nos contextos apontados, enquanto que nas definições apenas três significados foram evidenciados. Os significados parte-todo e número sofreram um decréscimo, ao passo que os significados medida e operador multiplicativo, que não foram identificados em nenhuma definição, apareceram nos contextos destacados por quatro (04) e cinco (05) alunos, respectivamente. Diante destes resultados, faz-se pertinente o seguinte questionamento: que fatores justificam a percepção de mais significados ao tratarmos dos contextos?

Para responder a essa indagação recorre-se, primeiramente, à perspectiva defendida por Gerard Vergnaud (1990) de que os conceitos só adquirem sentido dentro de um conjunto de situações. Para o autor, os conceitos estão intrinsecamente ligados à vida cotidiana, no entanto só adquirem funcionalidade quando reunidos em proposições, sentenças, enunciados e teoremas. Relacionando-se esta premissa com a defendida por Duval (1995), essa variedade de situações requer também uma diversidade de representações. Para a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, as representações cumprem um papel na aprendizagem matemática que aponta para além da comunicação e tratamento dos registros, as representações semióticas se constituem, sobretudo, como ferramenta para a aquisição conceitual.

Requisitou-se dos alunos a elaboração de definições, no sentido de evidenciar concepções espontâneas que revelassem características e aspectos de generalização que são atribuídas ao conceito de fração pelo sujeito. Acredita-se que as definições dos alunos expressaram elementos ligados às situações de ensino vivenciadas e às experiências ligadas ao uso de elementos formalizados do conceito. Em relação aos contextos, o ato de retomar vivências ligadas ao uso cotidiano da fração permitiu evocar conhecimentos ligados a aspectos de cunho mais intuitivo, evidenciando os sentidos que os números fracionários possuem para os sujeitos.

É nesta perspectiva que se justifica a percepção de um número maior de significados quando estes são considerados a partir de elementos ligados ao cotidiano. No entanto, é relevante destacar que os sujeitos desta pesquisa estão sendo habilitados para o exercício da docência nos anos iniciais do ensino Fundamental e precisam estar aptos a permitir aos seus alunos a passagem da experiência sensorial/intuitiva com as frações para a atividade de formalização do conceito. Nunes (2003) alerta que o foco do ensino de frações tem se pautado nos aspectos perceptuais da fração em detrimento das relações conceituais. O fato de apenas três significados terem sido evidenciados nas definições elaboradas pode indicar que, ao pensar sobre os aspectos formais da fração, os sujeitos deixam de considerar elementos do conceito que só são percebidos no âmbito intuitivo. Considera-se que o tamanho da amostra não permite maiores generalizações acerca deste aspecto. Desta forma, aponta-se como pertinente a realização de investigações acerca de aspectos concernentes à relação entre a percepção intuitiva/sensorial do conceito de fração e a percepção dos aspectos formais, entre professores e alunos.

Questão 3 – Ordenação de frações

A terceira questão discutiu a existência de antecessor e o sucessor para a fração. Tinha-se o intuito de verificar se os alunos percebem que a relação de antecessor e sucessor é válida somente para o conjunto dos números naturais. Esta questão abordou a fração em seu significado de número, bem como algumas percepções dos alunos acerca da representação numérica fracionária. Todos os sujeitos consideraram que o número $\frac{7}{9}$ possui antecessor e sucessor. Eles não percebem que entre uma fração e outra existem infinitos números, não sendo possível determinar sucessor e antecessor. As respostas dos participantes foram classificadas em cinco categorias, conforme expresso na tabela a seguir.

Tabela 3: Distribuição das respostas, por categoria, em função de sucessor e antecessor de frações.

Distribuição das respostas relacionadas a cada categoria da questão 3	
Categorias	**Quantidade de sujeitos**
Conserva o mesmo denominador	6
Conserva o mesmo numerador	1
Altera numerador e denominador	1
Considera equivalência de frações	2
Não consegue identificar	1

As três primeiras categorias identificadas vinculam-se a aspectos relativos à representação numérica da fração. Na primeira categoria elencada, estão os sujeitos que para identificar o sucessor e o antecessor da fração $\frac{7}{9}$ consideraram que deveriam *conservar o mesmo denominador* e apenas diminuir e acrescentar uma unidade ao numerador para encontrar o antecessor e o sucessor, respectivamente. Seis (06) sujeitos tiveram suas respostas relacionadas a essa categoria, destaca-se abaixo a resposta de P5, representativa destes sujeitos.

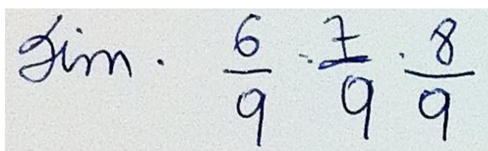


Figura 3: Representação de antecessor e sucessor baseada na conservação do denominador (P5, Q3 - DC[38]).

Os alunos que se enquadraram nesta categoria demonstraram a percepção da necessidade de conservar a quantidade de partes em que o todo estava dividido, relacionando sempre partes iguais. O que evidencia a compreensão do que significa o todo da fração.

A segunda categoria verificada nas respostas dos alunos refere-se à compreensão de que é necessário *conservar o numerador* e alterar o denominador, subtraindo ou somando uma unidade a ele, para encontrar o antecessor e sucessor de uma fração. P4 foi a única participante a evidenciar este raciocínio. Destaca-se abaixo sua resposta.

---

[38] As questão serão colocas em siglas na legenda. Domínio Conceitual – DC, Domínio Didático – DC, Questão 1 – Q1 e assim por diante.

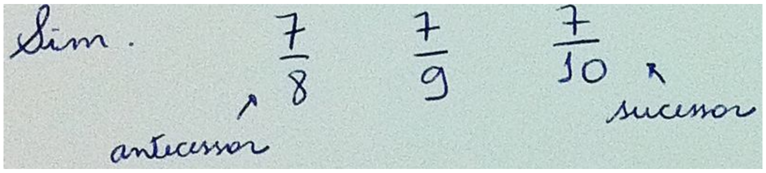


Figura 4: Representação de antecessor e sucessor baseada na conservação de numerador (P4, Q3 – DC).

Ainda considerando aspectos relativos à representação, a terceira categoria percebida diz respeito a percepção de que para encontrar sucessores e antecessores da fração é necessário *alterar o numerador e o denominador*, acrescentando ou subtraindo a eles uma unidade. P8[39] foi o único participante a ter sua resposta vinculada a esta categoria. Observa-se abaixo a representação elaborada pelo aluno.

Figura 5: Representação de antecessor e sucessor baseada na alteração de numerador e denominador (P8, Q3 – DC).

As três categorias evidenciadas acima têm em comum o uso da representação como base para o raciocínio sobre fração. É possível inferir que, para estes sujeitos, a fração não esteja sendo considerada como um número (significado), mas como a sobreposição de dois números naturais. Acredita-se que tal fato demonstra dificuldade por parte destes alunos em relacionar o número fracionário com a quantidade que ele expressa. Neste sentido, considera-se que estes resultados reforçam a constatação de Duval (1995) ao afirmar que a confusão entre o objeto matemático e a sua representação constitui-se como um dos mais graves problemas na aprendizagem matemática.

Além dos fatores ligados a representação, estes alunos evidenciam transpor para a fração a mesma lógica de ordenação aplicada aos números naturais, conforme-se se visualiza na fala de P6.

> *P6: [..] se eu pego um todo e divido em 9 ele vai ter de um nono até o nove nonos. Então, pra mim chegar ao sete nonos eu tenho que passar pelos seis nonos e pra depois disso no oito nonos.*

---

[39] O aluno P8 delimitou duas possibilidades de respostas para a questão 3. Desta forma, sua reposta foi considerada como pertencente a duas categorias diferentes, a saber: altera denominador e denominador; considera equivalência de frações.

É possível que os alunos ainda não tenham conseguido realizar rupturas necessárias com os saberes construídos a partir dos números naturais. Ou seja, eles ainda não compreendem os aspectos vinculados às propriedades e relações dos números naturais que não podem ser transpostos para o contexto das frações. A esse respeito Moreira e David (2007, p.61) discutem que "a aquisição da noção abstrata de número racional está associada a um longo processo de elaboração e reelaboração, quase que elemento por elemento" do conjunto dos números naturais. Nesse sentido, os autores indicam que

> o professor da escola básica tem que trabalhar com os significados concretos das frações e outros subconstructos para que o aluno alcance, eventualmente, a idéia abstrata de número racional, mas esse processo de construção da abstração não como resultado apenas da demonstração da possibilidade de se exibir formalmente um conjunto com as características ***essenciais*** (e já concebidas) dos racionais. Ao contrário, este conjunto numérico ampliado, assim as relações entre seus elementos (MOREIRA; DAVID, 2010, p.61).

A quarta categoria observada relaciona-se a equivalência de frações. Os dois (02) alunos inclusos nessa categoria explicitaram a concepção de que a formação de antecessor e sucessor para a fração se dava a partir do estabelecimento de frações equivalentes representadas por numerais menores e maiores, respectivamente. É possível observar este raciocínio na resposta de P9 a seguir.

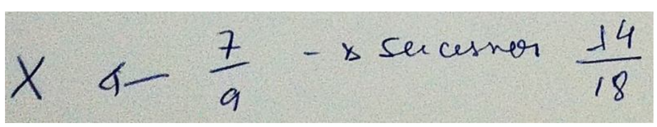


Figura 6: Representação de antecessor e sucessor baseada na equivalência de frações (P9, Q3 – DC).

É possível perceber que a aluna tentou encontrar um valor equivalente à fração $\frac{7}{9}$ multiplicando o numerador e o denominador por 2, a fração encontrada após a realização do tratamento foi $\frac{14}{18}$ que foi considerada como o sucessor de $\frac{7}{9}$. Segue a explicação de P9.

> *P9: Tá, assim… até onde eu me lembro, o antecessor e o sucessor eles são **proporcionais**, tanto o numerador quanto o denominador.*
> *[...]*
> *P9: Tipo assim, como 7 é número primo, né, [...]eu acredito que eu não teria como fazer o antecessor e o sucessor dentro do que eu penso… das proporções.*
> *Pesquisadora: Você não tem como fazer ou você acha que o $\frac{7}{9}$ não tem?*

P9: No $\frac{7}{9}$ não tem, porque 7 é número primo. Então, eu não poderia dividi-lo pra poder fazer o antecessor. Poderia até fazer o… aliás, o sucessor, mas não antecessor a 7.
Pesquisadora: Como seria o sucessor?
P9: Ah… por exemplo, poderia multiplicar o todo por dois, seria $\frac{14}{18}$. Então aí poderia reduzir isso, né… simplificar, né… ficaria mais $\frac{7}{9}$.
[...]
Pesquisadora: E o antecessor não tem, né?
P9: Não. Eu não sei. Eu acredito que não, né? Até onde eu me lembro, isso aí.

Observa-se que, para P9, o sucessor é encontrado ao multiplicar o numerador e o denominador pelo mesmo número. A aluna afirma não existir nenhum antecessor à fração $\frac{7}{9}$, possivelmente, por não haver nenhum número natural pelo qual a aluna pudesse dividir a fração de modo a encontrar outra fração equivalente. Assim, ela abre mão de determiná-la, optando por representá-la por “x”. É nítida a percepção da aluna de que $\frac{14}{18}$ é uma fração maior que $\frac{7}{9}$, a participante não percebe que ambas as frações representam a mesma quantidade. A aluna evidencia, desta forma, não compreender a equivalência de frações. Para Nunes (1997; 2003; 2005) a equivalência e a ordenação de frações se constituem como os invariantes centrais da fração. A compreensão destes é fundamental para a efetiva apreensão deste conceito. Nesse sentido, se torna relevante destacar os resultados obtidos na pesquisa realizada por Campos (2011) que constata que os alunos demonstram maior facilidade de lidar com a equivalência e ordenação de frações em situações quociente.

Por fim, a quinta categoria elencada se refere à resposta de P10, que apesar de acreditar ser possível identificar um antecessor e um sucessor para frações, não consegue especificá-los. A aluna baseia sua resposta na lógica que utiliza para pensar nas relações entre números decimais como é possível perceber logo abaixo.

P10: Não. Um antecessor e um sucessor?Possui, mas quais são? [risos] Assim, a gente sabe que todo número possui um antecessor e um sucessor, né? Mas acredito que, "quais são?" a gente só vai realmente saber a partir da divisão.
Pesquisadora: Por que você acha isso?
P10: É porque…eu não sei se já foi embutido, assim. Eu sempre trabalhei… quando eu trabalhei a questão de antecessor e sucessor, era mais com números exatos. E se fosse números decimais já era um número… por exemplo, uma fração… um meio, por exemplo, que é 0,5. Aí, tem o antecessor e o sucessor.
Pesquisadora: Qual seria?
P10: O antecessor seria 0,49, [...]. E o sucessor, 0,51. Mas, assim, de fração mesmo... eu não me recordo, na minha educação básica, de ter trabalhado

antecessor e sucessor de fração assim formada $\frac{7}{9}$ *qual o antecessor e qual o sucessor.*
[...]
Pesquisadora: E sem fazer essa transformação para o número decimal você não sabe me dizer se existe?
P10: Não. Eu não consigo. Acho que deficiência mesmo da formação. Que hoje em dia é que tem mudado um pouco, mas a gente vê que ainda tem muito… muito a se mudar, né?.

P10 demonstra visualizar o número decimal como dois números naturais separados por uma vírgula. Desta forma, para a aluna, 0,49 e 0,51 são considerados como sucessor e antecessor de 0,50. Brown (1981, p.64) obteve resultados semelhantes a estes em sua pesquisa. A pesquisadora identificou *misconceptions*[40] relativas aos raciocínios de alunos sobre números racionais e ao listar implicações para o ensino com base nestes aspectos rela que:

> Acima de tudo fica claro que a aprendizagem sobre números inteiros e decimais não é apenas uma questão de relembrar os nomes das casas decimais e algumas regras para as operações, como alguns livros parecem indicar. [...] essa aprendizagem envolve a internalização de uma cadeia de relações e conexões, algumas vinculadas ao próprio sistema decimal, algumas a outros conceitos como o de fração e número racional, a certas correspondências visuais e às aplicações no mundo 'real'.

De modo geral, considera-se que as concepções evidenciadas pelos alunos nesta questão

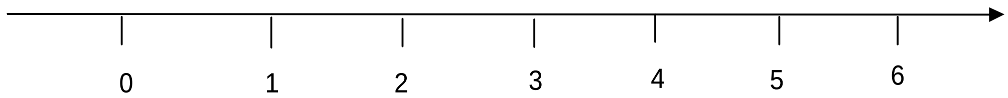
demonstram a dificuldade em perceber a fração em seu significado número. Os alunos consideraram apenas a representação numérica como base para o estabelecimento de seus raciocínios. Além disso, as estratégias explicitadas pelos sujeitos demonstraram que estes não compreendem os princípios de ordenação e equivalência da fração, seus dois invariantes centrais.

Questão 4 – Significado número na reta numérica

A quarta questão teve como intuito investigar a percepção dos alunos em relação à fração no seu significado número. Utilizou-se uma proposta similar à elaborada por Damico (2007) em sua pesquisa. A seguir, observa-se o enunciado da questão.

[40] Concepções errôneas.

4ª) Marque na semi-reta numerada abaixo a localização **aproximada** dos pontos correspondentes a $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{6}{4}$; $\frac{15}{4}$.



As respostas dos alunos foram avaliadas considerando a localização correta das frações na semi-reta. Observa-se, a seguir, o desempenho dos sujeitos.

Questão 4	2/3	4/5	4/3	6/4	15/4	Não Respondeu a questão
Acertos	6	6	6	6	7	1

Quadro 5: Distribuição dos acertos dos sujeitos na localização de frações em uma semi-reta numerada.

A compreensão dos resultados relativos ao índice de acerto dos alunos depende do entendimento dos raciocínios e estratégias utilizadas pelos estudantes para lidar com a fração em seu significado número. Assim, as respostas dos alunos foram classificadas em dois grupos de acordo com os aspectos evidenciados em suas estratégias de resolução, quais sejam: 1) conversão para o registro decimal; 2) associação da reta ao modelo parte-todo.

No primeiro grupo, estão os sujeitos que realizaram a *conversão do registro fracionário para o registro decimal*. Seis (06) alunos utilizaram esta estratégia, todos obtiveram êxito na localização das frações. A fala de P10 é representativa destes sujeitos.

> *Pesquisadora: Então, me explica como foi que você fez para achar essa localização.*
> *P10: Bom, é… eu tentei né, a minha lembrança do meu ensino fundamental, né, normalmente quando o professor pedia pra gente… pra gente localizar ele entre dois... uma fração entre dois pontos sempre me vinha à cabeça a divisão mesmo, num papel, pra poder saber, realmente, aonde se encaixaria. É por isso, que eu fiz, de cada um eu fiz a divisão da forma…da forma bem básica, assim, que todo mundo faz.*

Em seu relato, P10 afirma ter optado por realizar a conversão para o registro decimal por conta das lembranças relativas ao seu ensino fundamental. A aluna expressa a concepção de que para visualização da localização de um número racional na reta só é necessário o uso da representação numérica decimal. Os outros participantes que utilizaram a conversão como estratégia de resolução alegaram que tal procedimento permite evidenciar, de forma mais clara, as relações entre a fração e os números da reta, como justifica P2:

> *Pesquisadora: Como é que a gente faz pra encontrar?*
> *P2: Dois terços...eu dividiria.*
> *Pesquisadora: Dividiria o quê?*
> *P2: Eu dividiria o numerador e o denominador.*
> *Pesquisadora: Porque?*
> *P2: Porque ficaria mais fácil de encontrar. Ficaria mais fácil do que fração. Porque a reta tá em números inteiros.*

Entende-se que a necessidade de realizar a conversão para o registro decimal indica que a representação no registro fracionário não torna evidente, para os alunos, o quantidade que é expressa por ele. Em outras palavras, o registro fracionário não é suficiente para que perceptualmente seja feita uma relação entre a fração e os números de uma reta numérica. Percebe-se nos alunos um condicionamento a realizar a conversão para o registro decimal. Deste modo, infere-se que a exploração do registro fracionário considerando suas relações em uma reta numérica ainda não parece ser abordada em situações de ensino satisfatoriamente.

Embora estes resultados apontem para uma melhor exploração da representação fracionária, o uso da estratégia de conversão pode indicar a percepção da fração como um número. O uso da conversão traz ao aluno a possibilidade de trabalhar com a representação que melhor compreende e o fato de alguns alunos perceberem as duas representações expressam uma mesma quantidade, pode ser acompanhada da noção de que ambas representam um número.

O segundo tipo de raciocínio evidenciado foi de *associação da reta ao modelo parte-todo.* As respostas de três (03) alunos foram consideradas nesta categoria, todos os alunos que usaram esse raciocínio não obtiveram êxito na localização das frações. Para estes alunos, o segmento constituído pelos pontos que vão do 0 ao 6 foi percebido como o todo e as subdivisões do 0 ao 1, do 2 ao 3 e assim por diante, como partes deste todo. Destaca-se a resposta de P3 para ilustrar essa estratégia.

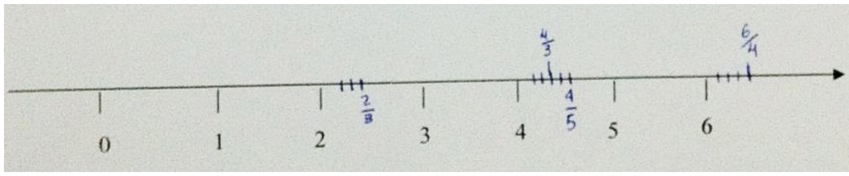


Figura 7: Representação baseada na associação da reta ao modelo parte-todo (P3, Q4 – DC)

> *Pesquisadora: [...] Qual foi o raciocínio que você utilizou?*
> *P3: Que no caso esses números da reta são é...números inteiros, aí daí a...tipo a...a fração* $\frac{2}{3}$*, então ela vai estar depois do 2, logo depois do 2 seria a...* $\frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}$.

A lógica utilizada por P3 não possibilitou a aluna localizar a fração $\frac{15}{4}$ na semi-reta indicada com o segmento que vai dos pontos 0 ao 6. Pois a aluna acredita que o denominador marca a parte fracionada do número e, ainda, que, quanto maior o denominador, maior será o número produzido pela divisão entre a parte e o todo. Nesse sentido, para manter este raciocínio, a aluna sentiu a necessidade de ter na reta a marcação do ponto 15 para ser possível localizar $\frac{15}{4}$. Ao perceber que sua lógica não possibilitava a localização de todas as frações que foram solicitadas, a aluna passa a acreditar que seu raciocínio a conduziu ao erro como é possível perceber em sua resposta.

> *P3: Eu só sei que está errado porque eu deveria achar quinze quatros nela e se é possível achar nela, então o raciocínio que eu fiz é errado, entendeu? Assim, se a questão pede para que eu ache essa questão aqui, então é possível e eu não sei.*
> *Pesquisadora: Mas e se não tivesse o quinze quartos?*
> *P3: Aí eu teria feito achando que estava certo. Desse jeito agora. Esse quinze quartos entrega que eu não sei de nada. E é bem útil né? Você faz toda feliz...aí vê que não sabe de nada.*

Compreende-se que a complexidade desta situação decorre da necessidade de reconhecer que a fração representa um número. Principalmente quando a base do ensino de fração na escola tem se centrado na relação parte-todo. Na fala de P3, a aluna demonstra não compreender quantidade expressa pela representação fracionária, talvez por força de suas experiências pautadas no modelo parte-todo.

A aluna P5 também considerou a reta como o todo, mas teve uma percepção diferente da relação entre a fração e a reta, como é possível observar em sua resposta.

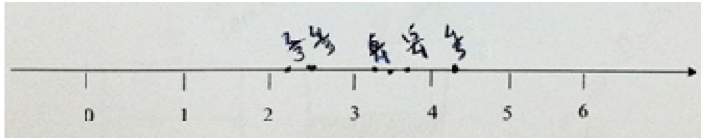


Figura 8: Representação baseada na associação da reta ao modelo parte-todo, considerando cada segmento como um novo todo (P5, Q4 – DC).

> *P5: Eu imagino como se aqui [segmento* $\overline{03}$*] fosse um todo, como se o todo fosse esse 3, esses 3 espaços aqui.*
> *Pesquisadora: Do 0 ao 3?*
> *P5: E eu teria que encaixar mais ou menos o antecessor e o sucessor, entendeu? De dois terços e quatro terços. Do mesmo jeito os outros.*
> *Pesquisadora: [...] Aqui é...do 0 ao 3 então é um todo?*
> *P5: É. Pra esse número aqui.*
> *Pesquisadora: Que é o dois terços e o quatro terços? Do 0 ao 4 é um outro todo?*
> *P5: Isso.*
> *[...]*
> *P5: É porque...eu imagino que aqui tivesse umas divisões e depois houvesse um...uma soma do que já havia com esses aqui...porque é uma linha reta, o todo aqui é 6...eu tentei encaixar, é mais ou menos isso, eu tentei encaixar...sobre o todo que é o denominador na reta que tem até o 3, ai posso colocar aqui nos espaços que eu achava que iria se encaixar.*

A partir de sua explicação, é possível evidenciar que a aluna também considerou a reta como o todo, mas cada segmento era percebido como um novo todo. Para a aluna, todas as frações com denominador 3 devem vir antes do inteiro 3, da mesma forma, todas que têm denominador 4 devem vir antes do 4 e assim por diante. Assim, depois desta localização baseada no denominador, as frações são organizadas pelo numerador, considerando que quanto maior o numerador maior é o número. Foi com esta lógica que ela conseguiu localizar corretamente a fração 15/4. Entende-se que os alunos que consideram a reta como o todo evidenciam na fração aspectos ligados à sua representação ao passo que fica evidente, mais uma vez, a confusão entre o objeto matemático e sua representação. Além disso, o condicionamento ao modelo parte-todo limita estratégias e raciocínios para lidar com os diferentes significados de fração.

Damico (2007) ao propor uma questão similar para alunos iniciantes e concluintes de um curso de licenciatura em Matemática constatou um índice de acerto de 75% na localização de frações na reta. Com relação aos raciocínios evidenciados nos alunos, também foi identificada a conversão para o registro decimal e a associação da reta ao modelo parte-todo. Considera-se que os resultados obtidos pelo autor são muito próximos aos alcançados na presente pesquisa.

Em suma, os dados obtidos com relação ao significado número da fração demonstram que os alunos que futuramente serão responsáveis pela formação de professores de matemática, encontram problemas para compreender a fração na reta numérica. Neste sentido, corrobora-se com o argumento de Pinto e Tal (1996) de que o sistema universitário, e no caso desta pesquisa a formação inicial dos docentes, não possui abordagem satisfatória dos sistemas numéricos. Os autores afirmam que há uma superestimação no tocante à compreensão dos estudantes acerca dos sistemas numéricos. Assim, de acordo com os autores, parte-se da percepção de que a intuição dos alunos se faz suficiente para a compreensão das representações na reta real, consequentemente não se dedica espaço pedagógico suficiente para discussão sobre os números e o significado matemático da reta numérica.

Questão 5 – Significado Medida e Tratamento em Registro Figural

Na quinta questão, utilizou-se um problema proposto por Despina Desli e discutido por Nunes et al. (2009) que tinha como intuito comparar o desempenho de crianças inglesas ao lidarem com a linguagem de razões e de frações. Na análise realizada por Desli, o uso de material manipulativo se apresentou como aspecto de influência na compreensão de crianças ao se tratar da linguagem de frações, possibilitando a conexão entre as ideias de divisão e fração.

Para a presente pesquisa, o uso desta situação-problema teve a finalidade de conhecer e analisar as estratégias utilizadas pelos alunos em uma situação envolvendo o significado medida, bem como a habilidade na realização de um tratamento a partir do registro figural. Para Duval (1995), este registro constitui uma representação não discursiva, ou seja, não expressa sem apoio de outros registros os elementos do problema. Observa-se a seguir o problema proposto:

5ª) Duas garotas estão fazendo um suco. A receita indica que elas devem usar um terço de suco concentrado e dois terços de água. Elas querem fazer 18 litros de suco. Quanto de suco e quanto de água deve ser usado? **Resolva utilizando o registro figural**.

As respostas dos alunos foram categorizadas, considerando se o registro figural foi utilizado para, efetivamente, resolver o problema, conforme era solicitado, ou se o problema foi resolvido em outros registros e o figural foi usado apenas como apoio para comunicação da resposta. Assim, elencaram-se três categorias de respostas, a saber: tratamento no registro figural (03 sujeitos); tratamento em outros registros com apoio do registro figural (04 sujeitos); não chegou a nenhuma resolução (03 sujeitos).

Todos os três sujeitos que realizaram o tratamento no registro figural chegaram a respostas corretas. Entretanto, P2, inicialmente, elaborou uma representação na qual considerava o todo como dois recipientes separados, conforme se observa a seguir.

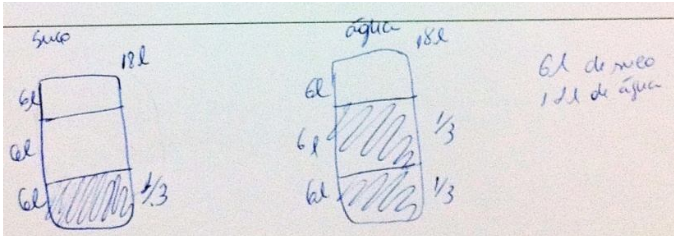


Figura 9: Representação de dois todos separados (P2, Q5 – DC).

Questionou-se à aluna se ela havia considerado que existiam dois todos na situação proposta. Ao refletir sobre sua representação a partir da indagação realizada, P2 passa a acreditar que cometeu um erro e elabora uma nova representação. Observa-se a fala e a nova representação elaborada pela aluna a seguir.

> *Pesquisadora:O todo são esses 2 recipientes?*
> *P2: Visualmente.*
> *[...]*
> *P2: Não, eu fiz separadamente porque eu achei que visualmente seria mais fácil. Na verdade, não está certa a forma como foi resolvida, mas visualmente, visualmente...*
> *Pesquisadora: Por que não está certo?*
> *P2: Porque dessa forma estaria 32 litros aqui. E não 18 litros.*
> *Pesquisadora: Porque você fez assim?*
> *P2: Por que eu entenderia, mas se eu fosse explicar para um aluno ele não iria entender.*

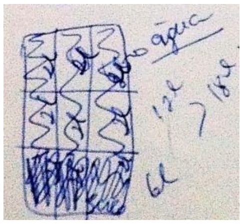


Figura 10: Representação de apenas um todo (P2, Q5 –DC).

Em sua explicação, a aluna demonstra compreender que o todo, neste caso, é formado a partir da mistura dos dois líquidos (partes) e chega a uma resposta correta. A nova representação elaborada também reforça esta percepção. No entanto, a representação produzida, inicialmente, não é coerente, pois o todo é representado a partir de dois recipientes. Desta forma, a representação elaborada não expressa informações necessárias para uma compreensão adequada da situação. Segundo Duval (1995), a formação de uma representação se constitui como uma atividade cognitiva que requer

> o conhecimento das regras de conformidade ou de funcionamento, próprias de cada sistema semiótico utilizado. A observância dessas regras é indispensável tanto para a comunicação quanto para o tratamento dentro do registro em que a representação tenha sido formada (SOUSA, 2010, p.58).

Assim, a elaboração de uma representação incorreta implica em problemas na comunicação, pois a ideia que será expressa conduzirá o receptor ao erro. Considera-se, ainda, que a produção de representações incoerentes pode expressar limitação conceitual, pois somente a partir da compreensão ampla de um conceito se torna possível a reconstrução e mobilização conhecimentos de modo coerente.

Em relação aos cinco alunos que realizaram o tratamento em outros registros com apoio do registro figural, observou-se a necessidade da utilização do algoritmo como apoio. Logo abaixo, observa-se a representação e a resposta de P6 que é ilustrativa deste grupo de alunos.

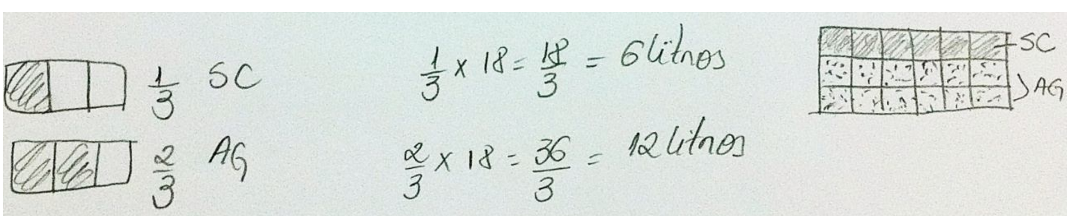


Figura 11: Tratamento realizado quase exclusivamente com apoio do registro numérico (P6, Q5 –DC).

> *Pesquisadora: Como foi que você fez?*
> *P6: Porque um terço são 18 litros. Aí é um terço de suco concentrado, pra 18 litros dá 6 litros de suco concentrado e aqui vai dar 12 de água. Eu acho...pra dar 18 litros.*
> *Pesquisadora: [...] como é que você fez o cálculo?*
> *P6: Eu multipliquei 18 por 1 e dividi por 3. E aqui eu multipliquei por 2 e dividi por 3. Mas na figurinha não... só se eu fizer assim o bichinho [a*

figura] , mas aí como é que você chegou a essa conclusão. Porque não pode fazer a continha. Porque depois pelo desenho dá para fazer, faz 6 partes e 12 partes, mas tem que fazer as continhas. Não tem como fugir das continhas. Tem que usar, né a divisão e também a multiplicação.

P6 quando afirma, em sua resposta, que “não tem como fugir das continhas” evidencia sua dificuldade em utilizar representações diversificadas. Sabe-se que os algoritmos ocupam a maior parte do tempo pedagógico na escola e que é comum a prática pedagógica em mono-registro. Nesse sentido, é possível que o condicionamento ao uso do algoritmo justifique o fato de alguns alunos encontrarem dificuldades para transitar entre diferentes registros de representação. Segundo Duval (2009, p.98), a prática em mono-registro leva o aluno a “uma compreensão que não permite qualquer transferência” dos conhecimentos. Isso incide diretamente na capacidade de mobilizar informações conceituais de um mesmo objeto entre diferentes representações.

Ainda em relação aos sujeitos que não conseguiram realizar o tratamento no registro figural, destaca-se a resolução de P4, logo abaixo.

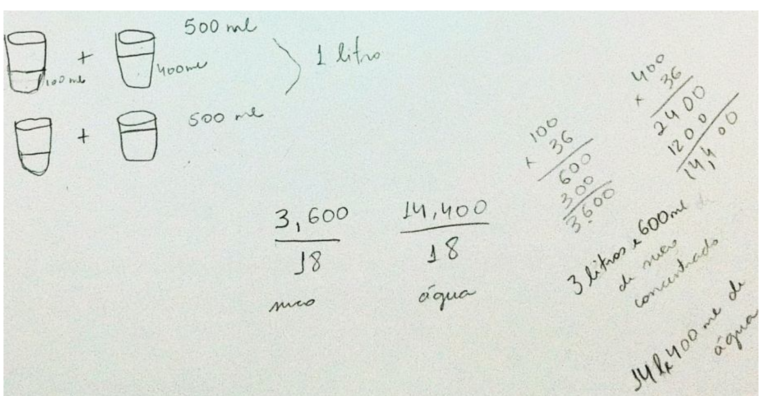


Figura 12: Falha no tratamento realizado nos registros figural e numérico. (P4, Q5 – DC).

P4: [...] eu sinceramente, não saberia explicar, pros meus alunos, uma questão dessa. Porque...eu sempre tive dificuldade em matemática, desde criança...
[...]
P4: Eu peguei o referencial 18, porque ó... eu cheguei a esse resultado, né? 3 litros e 600ml de suco concentrado. Então, como é o resultado final pra elas fazerem 18 litros, então... de suco concentrado...dos 18 litros do suco eu tenho 3 litros e 600ml de só suco concentrado. E da água, de água...desses 18 litros eu tenho 14 litros e 400ml de água [...].

Na representação elaborada pela aluna é possível perceber que ela realiza um relação de 100 ml para 400ml, como se isto representasse a relação de 1/3 para 2/3, como é possível evidenciar na marcação feita nos copos. Depois disto, ela multiplica 36 (que se pode inferir ser o dobro dos litros que se desejava produzir) por 100ml e depois por 400ml. No resultado encontrado, a vírgula é posicionada de acordo com a necessidade de compor os 18 litros totais de suco e, assim, ela chega a 3,600ml de suco e 14,400ml de água. Em seguida, para voltar à configuração fracionária, ela coloca os números decimais produzidos sobre 18 e assim dispensa o estabelecimento da verdadeira relação fracionária pedida no problema de 1/3 de suco para 2/3 de água. Através da resolução da aluna, é possível perceber a importância que os elementos numéricos possuem para a realização de operações. Nesse sentido, nota-se dificuldade no uso do registro figural como instrumento para a resolução.

Diante destes dados reforça-se a constatação de Sousa (2009, p. 63) de que "[...] o ensino centrado em procedimentos algorítmicos, ou seja, em tratamentos (mudanças dentro do mesmo registro) em um único registro (numérico) tem enclausurado os alunos no mono-registro, limitando a sua compreensão".

Somando-se a esses aspectos, sabe-se que o ensino tradicional dos algoritmos é feito sem o estabelecimento de relações entre números. Este tipo de prática não leva compreensão efetiva dos procedimentos e raciocínios requeridos para a realização de uma operação matemática. É nesse sentido que Nunes (2003, p.123) destaca que "a diferença entre saber fazer e compreender é que o aluno toma consciência do que sabe fazer e reconstrói esse conhecimento em um nível diferente".

Em relação aos três participantes que não encontraram a resolução para essa questão. Duas justificativas foram apresentadas. A primeira foi a de que faltavam dados que permitissem a resolução da questão. As alunas P3 e P9 sentiram falta de um referencial que explicitasse a quantos litros de suco as quantidades $\frac{1}{3}$ de concentrado e $\frac{2}{3}$ de água estariam associadas. Observa-se este aspecto na resposta de P3.

> *P3: O que eu não consigo entender é que se elas juntarem essa quantidade aqui do suco com a água. Quanto ela vai fazer no final? Eu sei quanto elas querem. Mas quando elas juntarem esses 2 ingredientes na medida em que a receita manda, quanto vai tá feito?*
> *Pesquisadora: Quanto vai tá feito...é de litros de suco?*
> *P3: Isso.*

A segunda justificativa explicitada foi a de P5 que afirmava o desconhecimento de um procedimento que seria necessário para conseguir relacionar quantidades expressas em litro e em fração. A aluna acreditava ser necessário realizar uma conversão na qual o registro de partida estaria representado por frações e o registro de chegada se constituiria na unidade de medida litro. Segue abaixo a fala de P5.

> *P5: É como é que eu vou extrair isso de um número e de outro, entende? Tipo, eu sei o que é fração, eu tenho noção de cada informação de um número que é fração assim, colocar em figura, mas não sei extrair o resultado dali. Eu sempre tive essa dificuldade na escola e estou tendo aqui também agora.*
> *[...]*
> *P5: Se o meu total é 18 litros eu teria extrair esses dois terços dos 18 litros...pegaria mais ou menos esse caminho para poder chegar até a água e até o suco concentrado...*
> *Pesquisadora: Pra chegar a quantidade?*
> *P5: É porque ele não me deu um total que é 18l?! Então desses 18l que é o meu resultado final...o suco, eu vou ter que extrair daqui os dois terços e converter...*
> *Pesquisadora: Converter...*
> *P5: É, eu vou ter que tirar aqui desses 18l os dois terços e o um terço de suco concentrado.*

As duas justificativas apresentadas possibilitam a percepção de que a dificuldade das alunas está na inversão da ordem dos dados no enunciado problema. Pois, parte-se do todo (quantidade final de suco) para que sejam identificadas as duas partes (quantidades) que estão em jogo, mas que só são expressas em forma de fração. Assim, sem as quantidades iniciais, a ordem das unidades significantes do problema fica invertida, o que faz com que o problema tenha baixo nível de congruência, segundo os pressupostos apresentados na teoria de Duval (2009).

Para essa questão, de modo geral, a necessidade de utilizar o registro figural apresentou-se como elemento que atribuiu maior grau de complexidade a questão. Para a maioria dos alunos o condicionamento ao uso dos algoritmos inviabilizou a mobilização dos conhecimentos para uma representação diferente da usual. No entanto, para aqueles que utilizaram o registro figural com sucesso, percebeu-se que para a necessidade da construção de uma representação que evidenciasse a relação entre parte e todo com base em elementos mais vinculados à percepção do que aos algoritmos, pode ter favorecido a compreensão dos elementos do significado medida.

Questão 6 – Diversificação dos Registros de Representação de Fração

Na sexta questão, foi solicitada para os alunos a elaboração de quatro tipos de representações diferentes para o número racional dois terços. Pretendia-se avaliar os conhecimentos dos sujeitos em relação à diversificação de registros, bem como seu conhecimento em relação às regras de conformidade quando da formação das diferentes representações semióticas. Em relação à diversidade de registros, interessa destacar que é possível que os alunos tenham sido influenciados pela primeira questão abordada no enfoque do domínio conceitual. Nesta questão, foi requisitada a identificação de representações possíveis para uma fração dentre diversos tipos de registros elencados. Deste modo, considera-se que os sujeitos possam ter recorrido a algumas representações presentes na primeira questão.

Entretanto, foi possível observar que os sujeitos elaboraram uma variedade de representações, extrapolando aquelas já utilizadas na referida questão. A seguir, será apresentada uma tabela com os tipos de registros identificados nas respostas dos alunos.

Tabela 4: Registros de Representação Semiótica associados a fração pelos sujeitos.

Registros de Representação Semiótica identificados na questão 6	
Tipo de registro de representação	**Quantidade de sujeitos**
Registro numérico fracionário	9
Registro numérico decimal	5
Registro numérico percentual	1
Registro numérico divisão	3
Registro figural contínuo	9
Registro figural discreto	1
Registro em língua natural	1

No tocante aos registros numéricos, é possível visualizar na tabela que este foi o tipo de registro mais utilizado. Foram evidenciados os seguintes registros numéricos: o fracionário, o decimal, o percentual e a divisão. O registro fracionário foi o mais utilizado dentre os registros numéricos, sendo identificado nas respostas de nove (09) alunos. Este resultado pode ser justificado pelo fato de essa ser a representação de fração que aparece com maior freqüência na escola. Segundo Machado e Menezes (2008, p.5), “apesar dos avanços no ensino da matemática, o ensino de frações continua se caracterizando por uma prática voltada para uma aprendizagem mecânica do algoritmo, constituindo-se em um desafio aos professores que procuram desenvolver uma real compreensão desse conceito em seus alunos” (MACHADO; MENEZES, 2008,

p. 5). Todavia, apesar da familiaridade dos sujeitos com essa representação, é interessante destacar duas das representações elaboradas por P4, logo abaixo:

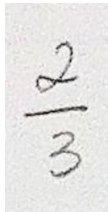


Figura 13: Representação vertical do registro numérico fracionário (P4, Q7 - DC)

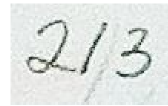


Figura 14: Representação horizontal do registro numérico fracionário (P4, Q7 - DC).

Note-se que, para a aluna, a mudança da disposição dos números do sentido vertical para horizontal constituiu uma representação diferente. Contudo, ambas as representações estão sujeitas às mesmas regras e propriedades. Para Duval (2009), há dois tipos de atividades que resultam na transformação das representações semióticas, a saber: a conversão e o tratamento. O primeiro diz respeito à mudança de registro e o segundo relaciona-se a transformações internas dentro de um mesmo registro. Assim, para que uma representação sofra alterações ou constitua um novo registro é preciso que seja realizado algum tipo de transformação representacional, o que não ocorre no caso de P4.

Com relação ao registro numérico decimal, cinco (05) alunos o contemplaram em suas respostas. Verifica-se que embora este registro tenha sido abordado em outras questões, os alunos ainda cometem erros. Destaca-se, abaixo, a resposta e a explicação de P3:

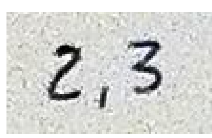


Figura 15: Representação numérica decimal incorreta (P3, Q6 –DC).

P3: Como é dois terços na forma decimal? 2,3? 2,3? 0,23 não pode.
Pesquisadora: Porque não pode?
P3: Porque ele tem 2 casas depois da vírgula aí já é...ai seria vinte e três sobre cem. E dois vírgula três é vinte e três sobre cem. É?
[...]
P3: [...] eu acho que é dois vírgula três, mas se alguém me der dois vírgula três e me disser transforme em fração eu vou colocar vinte e três sobre dez e vinte e três sobre dez é a mesma coisa de dois vírgula três? Não né?
Pesquisadora: O que é que você acha que é?
P3: Não. Não sei, só não parece.
Pesquisadora: Tá.

P3: Eu vou colocar. Eu não consigo pensar em outra possibilidade. (P.3).

P3 demonstra desenvolver seu raciocínio com base no procedimento aplicado à conversão do registro decimal para o registro fracionário. Apesar de ter memorizado a regra necessária para essa conversão, a aluna evidencia não compreendê-la, pois, em sua fala, é possível perceber que a aluna associa a aplicação da regra para frações que tenha como denominadores o número dez e seus múltiplos, enquanto que a para a questão seria necessário pensar sobre a fração 2/3. O mesmo acontece para a conversão do sentido decimal para o fracionário. Com efeito, salienta-se a perspectiva colocada pela Teoria dos Registros de Representação Semiótica de que a conversão não pode ser reduzida a um tratamento, pois nesta atividade cognitiva "é necessária [a] articulação entre as variáveis cognitivas que são específicas do funcionamento de cada um dos dois registros" (DUVAL, 2009, p.17).

Ainda no que diz respeito aos registros numéricos é interessante discutir o fato de os alunos terem contemplado o registro percentual e o da divisão em suas respostas. O registro percentual foi evidenciado por P7, que elaborou a representação 66,66%. É relevante salientar que este registro não foi abordado anteriormente em nenhuma questão. O conceito de porcentagem relaciona-se diretamente ao de fração. Entretanto, ao optar pelo uso da fração, deve-se considerar relações parte-todo enquanto que o uso da porcentagem requer a avaliação da proporção de uma quantidade em relação a outra, avaliada sobre a centena. Acredita-se que o uso deste registro demonstra a possibilidade de extrapolar e ampliar a gama de registros de representações semióticas utilizadas para um conceito, de modo a estabelecer relações diferenciadas. Dessa forma, aponta-se para a necessidade de vivências e experiências, em todos os níveis de ensino, que permitam aos estudantes perceber a existência das inúmeras relações e representações que podem ser utilizadas para abordar um conceito matemático.

Com relação ao registro numérico da divisão, três (03) alunos o utilizaram em suas respostas. Acredita-se que a compreensão desta como representação possível para a fração evidencia a consideração da relação de divisão implícita na fração. Acredita-se que é baixa a incidência dessa representação nas repostas dos sujeitos uma vez que ela já havia sido abordada anteriormente na questão 1.

No que diz respeito aos registros figurais elaborados, nove (09) alunos representaram quantidades contínuas e apenas um (01) evidenciou uma quantidade discreta. Os alunos que elaboraram representações contínuas evidenciaram de forma apropriada os elementos da fração dois terços, com exceção de P3 que elaborou a representação abaixo.

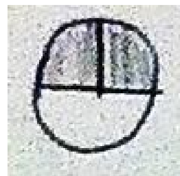


Figura 16: Desconsideração da igualdade entre as partes da fração em um registro figural contínuo (P3, Q6 – DC).

Não foi disponibilizado para os sujeitos nenhum instrumento de medição que possibilitasse a divisão em partes exatamente iguais. No entanto, apesar de não se ter considerado o fato de as partes estarem totalmente idênticas, o desenho de P3 explicita que a aluna desconsiderou a necessidade de igualdade de partes de uma fração, tendo em vista que a aluna dividiu a figura ao meio e depois dividiu uma das metades da figura.

Em relação ao registro figural considerando uma quantidade discreta, apenas P4 elaborou uma representação deste tipo, conforme se visualiza abaixo.

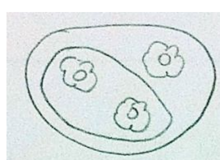


Figura 17: Representação no registro figural considerando uma quantidade discreta (P4, Q6 –DC).

Considera-se que a baixa incidência de representações de quantidades discretas deve-se ao condicionamento dos alunos a situações de ensino que introduzem e enfatizam a fração em situações parte-todo com quantidades contínuas. A esse respeito, Nunes e Bryant (1997, p.216) discutem que através da exploração de situações de divisão as crianças são capazes de estabelecer relações tanto com elementos contínuos quanto discretos. É preciso então que a escola explore relações ultrapassem as quantidades contínuas. Além disso, os autores ainda apontam que a ampliação das representações simbólicas dos números racionais como um fator que amplia a compreensão de alunos. Logo, relaciona-se este aspecto aquele defendido por Duval (1995) a respeito da necessidade de um ensino que diversifique e articule diversas representações de um mesmo objeto matemático.

Em relação ao registro em língua natural, P6 foi o único a utilizá-lo, repetindo a representação já presente no enunciado da questão. Deste modo, a mera repetição deste registro não é considerada como a produção de uma representação diferenciada, tendo em vista que se solicitava a elaboração de quatro representações diferentes partindo-se do registro em língua natural o que denota a não utilização deste.

Ainda em relação ao êxito na elaboração de quatro tipos de representações diferentes entre si, constatou-se que cinco (05) participantes não elaboraram as quatro representações solicitadas. Evidencia-se, assim, a dificuldade em perceber a fração em registros diversificados. Este fato se torna ainda mais relevante ao se levar em consideração que, anteriormente, já se havia abordado várias representações da fração e ainda assim os alunos não representaram a fração de quatro maneiras diferentes. Evidencia-se, portanto, limitação da percepção dos alunos em relação aos diferentes registros de representação semiótica.

Diante destes resultados, considera-se que a influência da primeira questão não parece ter sido determinante para as respostas dos alunos. Infere-se que as representações que foram por eles escolhidas são aquelas com as quais possuem maior familiaridade a partir de sua própria escolarização. De modo geral, as representações mais contempladas foram à numérica fracionária e decimal e a figural contínua, normalmente abordadas no ensino de fração.

A esse respeito, Duval (2003, p.21) afirma que “os fracassos ou os bloqueios dos alunos, nos diferentes níveis de ensino, aumentam consideravelmente cada vez que uma mudança de registro é necessária ou que a mobilização simultânea de dois registros é requerida”. Isto significa que há um “enclausuramento” provocado pelo mono-registro que impede o reconhecimento de um objeto matemático em representações diferentes. Tal fato denota ainda a confusão entre representante e representado.

Com efeito, importa destacar que os registros de representação semiótica, em sua função de comunicação, devem permitir a compreensão dos elementos que expressa. Levando-se este aspecto para a prática docente, o professor deve ser capaz de dispor de conhecimentos acerca de uma gama de registros que possibilitem a escolha de uma ou várias representações que o ajudem a expressar a ideia que deseja comunicar. Diante dos resultados aqui obtidos, considera-se pertinente a realização de pesquisas que explorem os tipos de representações nas quais futuros professores reconhecem a fração, de modo a se pensar em estratégias que visem ampliar a percepção de fração, alterando o quadro que aqui se apresenta.

Questão 7 – Conversões do Registro Decimal para o Fracionário e do Fracionário para o Decimal

A sétima e última questão do enfoque do domínio conceitual requisitava a realização de conversões de registro numérico fracionário para o decimal e do registro decimal para o fracionário. Tinha-se como finalidade analisar a competência dos sujeitos em compreender e realizar as conversões em ambos os sentidos.

A conversão assume papel de destaque na teoria dos Registros de Representação Semiótica. Ela se constitui, do ponto de vista cognitivo, como a atividade de transformação de representação fundamental, pois mobiliza mecanismos necessários à compreensão de um objeto matemático. Do ponto de vista matemático, a conversão traz a possibilidade de escolha de registros de menor custo cognitivo para o tratamento, além da possibilidade de obtenção de registros de suporte (DUVAL, 2003).

Para Duval (1995), a natureza cognitiva desta atividade está relacionada a dois fenômenos, são eles: congruência e não congruência; heterogeneidade dos sentidos de conversão. Com efeito, baseada na premissa de Duval, Sousa (2009, p.70) afirma que

> os erros em resoluções de problemas estão ligados prioritariamente a níveis de congruência e esta não pode ser avaliada de forma absoluta, isto é, um problema não é, em si mesmo, congruente ou não. É necessário considerar a qualidade dos registros que estão em jogo, além do sentido em que se faz a conversão.

Diante destes aspectos, esta questão teve como finalidade analisar as dificuldades apresentadas pelos alunos considerando-se os sentidos da conversão entre os registros decimal para fracionário e do fracionário para decimal. No quadro a seguir é possível visualizar o desempenho dos sujeitos em cada uma das conversões.

Questão 7	**a) 0,87**	**b) 1,55**	**a)** $\frac{3}{7}$	**b)** $\frac{5}{4}$
Êxito na conversão	7	7	6	8

Quadro 6: Acertos dos sujeitos em conversões do registro decimal para fracionário e do fracionário para decimal.

Observa-se que o sentido da conversão não representou diferenças marcantes no desempenho dos sujeitos. Para a primeira conversão, isto é, dos números decimais para a fração, é necessário que o sujeito compreenda o que a vírgula representa na constituição do número decimal Deste modo, torna-se possível perceber que os dígitos presentes após a vírgula constituem décimos e centésimos e que a correspondência com esses elementos determinará o denominador da fração a ser formada. No entanto, a realização desta conversão também pode ser pautada na regra que afirma: contam-se os números depois da vírgula e a sua quantidade corresponderá à quantidade de zeros no denominador. Este foi o caso de P7, que obteve êxito na conversão, com a aplicação da regra, conforme é possível perceber em sua fala, a seguir.

> *P7: é 0.87 aí como tem duas casas decimais após a vírgula, então duas casas decimais representam dois zeros. Aí você diz: de onde você tirou esses dois zeros? [...] Duas casas após a virgula representa dois décimos né, e o numerador vai ser esse número que tiver após a virgula, no caso, o 7 e os 2 zeros seguidos do 1. Porque, assim, se fosse 1, se fosse 1 casa seria só um zero, oitenta e sete sobre cem..* (P7).

Apesar da aplicação correta da regra, observe-se que o aluno demonstra não conhecer as unidades que compõe o número decimal, já que ele afirma que as duas unidades após a vírgula são décimos ao invés de centésimos. Desta forma, a compreensão efetiva da conversão do registro decimal para o fracionário ultrapassa a aplicação desta regra. Com efeito, no que diz respeito à aprendizagem pautada na aplicação mecânica de procedimentos, Nunes (2003, p. 122) explica que “essa é uma aprendizagem que se esquece; quem não se esquece de como é fazer a conta, se esquece do porque fazer assim”. Acredita-se que este foi o caso de P5 e P8 que por não se lembrarem da regra, optaram por não tentar realizar a conversão requisitada. Já P4 errou por não ter recordado de todos os aspectos do procedimento de conversão vinculado a regra, conforme é possível ver na figura abaixo.

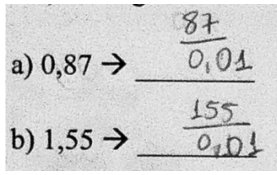


Figura 18: Erro de conversão no sentido decimal para fração (P4, Q7 - DC).

Considera-se que o erro ocorreu devido ao fato da aluna preocupar-se apenas com regras de expansão do registro, características dos tratamentos, conforme é possível perceber em sua fala: “Aqui ó, eu me lembrei um pouco do meu ensino médio. Não sei se eu tô equivocada. Aí eu peguei o 87 e coloquei sobre 0,1. E aí tem aquela contagem das casas, né? [...] eu julgo agora que seja 0,01, por causa da contagem das casas... uma, duas (P4)”. Explicita-se, assim, que embora se trate de um processo de conversão, a aluna procede como se efetivasse apenas um tratamento, submetido a regras.

Em relação à conversão do número fracionário para o decimal, nove (09) sujeitos tentaram promovê-la utilizando-se da divisão. Neste último caso, percebe-se que o comando para proceder à divisão já está explícito na própria representação fracionária, restando ao aluno apenas executá-la. É provável que essa representação tenha estimulado os sujeitos a proceder à conversão. Considera-se que os quatro (04) erros cometidos pelos sujeitos nesta conversão são decorrentes apenas de falhas no próprio procedimento do algoritmo da divisão: P5 converte $\frac{3}{7}$ para 0,4, acreditando ser possível desprezar os demais dígitos; na mesma conversão, P2 e P6 erram na divisão dos centésimos chegando às respostas 0,41 e 0,45, respectivamente. O mesmo acontece com P5 que converte $\frac{5}{4}$ para 1,21. A única conversão realizada sem a utilização da divisão foi a de P3. A aluna apenas tomou os algarismos presentes na representação de partida e os reorganizou como números decimais, substituindo a barra de divisão pela vírgula, conforme figura abaixo:

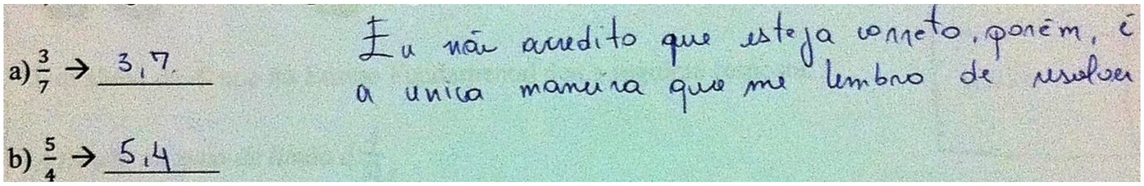


Figura 19: Erro de conversão no sentido fração para decimal (P3, Q7 – DC).

Como foi possível perceber, tanto os alunos que cometeram erros, como aqueles que obtiveram êxito nas conversões recorreram à memória para recordar de uma regra que lhes foi apresentada em seu processo de escolarização. A aplicação dessas regras não tem significado para os alunos que acabam por realizar as conversões de forma mecânica. Nesse sentido, as conversões são executadas com base em regras como se fossem tratamentos, realizando apenas uma "codificação". Duval (2003) chama a atenção para a irredutibilidade da conversão ao tratamento, pois, para o autor, as regras de codificações permitem apenas leituras pontuais das representações, limitando a apreensão global e qualitativa que se faz necessária para extrapolar, interpolar ou para utilização das representações para fins de controle ou exploração.

Ainda no que diz respeito à conversão, esta é considerada como a base para a compreensão integrativa dos conceitos, que, por sua vez, só acontece através da coordenação entre dois ou mais registros de representação semiótica. Assim, de modo geral, apesar de se ter observado mais êxitos do que fracassos na realização das conversões em ambos os sentidos, os sujeitos demonstram não compreender efetivamente os aspectos relativos a esta atividade cognitiva.

Síntese do Domínio Conceitual

O enfoque do domínio conceitual objetivou identificar e analisar os conhecimentos dos alunos do curso de Pedagogia no que diz respeito às representações e significados da fração. No que concerne às representações, de modo geral, os alunos evidenciaram dificuldades em lidar com a fração em seus registros de representação numéricos (decimal e divisão) e nos registros figurais (quantidades discretas). Percebeu-se, em vários momentos, que os alunos desenvolveram seus raciocínios sobre fração pensando em representações específicas, ou seja, eles identificam os objetos matemáticos com os conteúdos de certas representações, quais sejam: a representação numérica fracionária e as representações figurais contínuas, mais especificamente a pizza e a barra de chocolate. Outro aspecto observado foi a forte vinculação do raciocínio dos alunos aos procedimentos de tratamento como, por exemplo, na realização de conversões, eles se limitavam a tentativa de aplicar regras, descartando a análise das relações entre os elementos significativos de cada representação, aspecto fundamental para a conversão.

Confirmou-se também a dificuldade já amplamente discutida na literatura sobre o assunto, que diz respeito à ruptura com os conhecimentos relativos aos números naturais. Os sujeitos tentaram transpor por várias vezes os conhecimentos dos números naturais para os números racionais no que diz respeito ao princípio da ordenação, a relação de tratamentos, propriedades, regras, dentre outros. Por fim, cabe destacar a dificuldade demonstrada para realizar tratamentos utilizando o registro figural. Ao tentar realizar tal tratamento, os alunos apenas transpunham os procedimentos que se usam em algoritmos numéricos para o registro figural.

Diante deste quadro, considera-se que as percepções dos aspectos formais da fração, aquelas de cunho mais abstrato e geral, ainda são limitadas, devido à tendência dos sujeitos de pensar nas relações que envolvem o conceito de fração a partir de representações específicas que são diretamente vinculadas ao uso de algoritmos ou com ênfase em aspectos perceptuais. Nesse sentido, tais constatações apontam para dificuldades na diferenciação entre a fração e suas representações, consequentemente evidenciou-se dificuldade para lidar com a diversidade de registros desse conceito. Quanto às atividades ligadas à transformação da representação constataram-se dificuldades para a realização de conversões e tratamentos em registros diferentes dos mais frequentemente explorados na escola.

Com respeito aos significados, observou-se que os sujeitos percebem seus aspectos ligados à intuição, mas não apresentam, de modo geral, domínio dos aspectos formais que envolvem os diferentes elementos e relações presentes em cada um dos significados. Quanto ao significado número, evidenciou-se que sua compreensão é prejudicada pelo condicionamento a pensar na representação ao invés dos aspectos conceituais. Em relação ao significado medida, grande parte dos sujeitos chegaram às respostas corretas em uma situação envolvendo este significado, contudo evidenciou-se que ao se resolver situações envolvendo o significado medida grande parte dos alunos

(60%) chegavam às respostas corretas, contudo 40% dos alunos simplesmente tentaram encaixar os dados do problema em algum algoritmo, descartando e menosprezando aspectos básicos do raciocínio envolvido neste significado. Por fim, mais uma vez o modelo-parte todo foi predominante, sendo base para o raciocínio da fração. Os alunos tentaram transpor aspectos desse raciocínio a outros tipos de situação como, por exemplo, no caso da reta numérica. Quanto ao significado quociente observou-se nas falas dos alunos que a fração é considerada, em alguns casos, como a própria operação da divisão. Deste modo, constata-se que há percepção da relação de divisão implícita nas frações, contudo os elementos que constituem tal conexão ainda não são percebidos com clareza. No que diz respeito ao significado operador multiplicativo, constatou-se que grande parte dos sujeitos o percebem quando vinculam frações às situações que lhe são mais familiares (cotidianas), mas ainda o desconsideram numa perspectiva de formalização do conceito de fração. Ante o exposto, considera-se que os sujeitos percebem todos os significados da fração, mas se faz necessária a vivência de um maior número de situações que os envolvam para que seja possível compreendê-los efetivamente.

Domínio Didático

A presente unidade de análise trata de questões relacionadas ao *domínio didático da fração* que diz respeito à percepção dos alunos acerca de como ensinar fração. Neste enfoque, serão abordados elementos considerados pelos sujeitos no que concerne às formas representação e aos significados contemplados ao se tratar da fração em uma situação de ensino.

Interessa destacar que no roteiro de entrevista elaborado, quatro questões foram dedicadas para este enfoque. Todas as questões foram discutidas com os sujeitos desta pesquisa. No entanto, devido à limitação de tempo para a realização da presente investigação, optou-se por realizar a análise apenas das questões 1 e 4. A justificativa para a escolha destas questões decorre do fato de que alguns elementos relativos às questões 2 e 3 já haviam sido contemplados no domínio conceitual, como a percepção dos elementos dos cinco diferentes significados, através das concepções e contextos.

Desta forma, a seguir, as questões serão analisadas individualmente, considerando os aspectos teóricos já discutidos.

Questão 1 – Significado medida, análise do erro de uma criança e proposição de representações para o ensino de fração

Nesta questão foi trazida uma situação para ser analisada pelos alunos. Primeiramente, colocou-se o enunciado de uma situação-problema abordando fração em seu significado medida, considerando quantidades contínuas (as partes podem ser reunidas em um mesmo todo). O enunciado também contava com uma representação em registro figural. Por fim, apresentou-se a possível resposta de uma criança do 4º ano do Ensino Fundamental para a situação-problema. Diante destes elementos, solicitou-se, então, que os alunos explicassem raciocínio da criança e tecessem opiniões sobre a representação proposta, bem como acerca de outras possibilidades de representações a serem usadas para a questão. A seguir, é possível observar a questão 1.

Questão 1 – Para fazer uma jarra de limonada Pedro usou dois copos de água para cada copo de suco de limão. Que fração representa a quantidade de suco de limão presente nesta mistura?

Água *Limão*

Um aluno do 4ª ano do Ensino Fundamental deu a seguinte resposta:

A fração de suco de limão é $\frac{1}{2}$.

a) Explique o raciocínio dessa criança
b) Você considera que a representação do problema com os desenhos facilitou ou dificultou a compreensão da questão pela criança?
c) Que outra representação você utilizaria?

As respostas dos alunos foram classificadas considerando três aspectos: a *explicação acerca do raciocínio da criança; a percepção acerca da representação proposta no problema; outras representações propostas para o ensino*.

Em relação à primeira categoria, apenas (02) alunos perceberam que a resposta da criança estava incorreta. No problema proposto se considerava a relação entre duas variáveis diferentes, que deveriam ser reunidas em um mesmo todo. P3 explicita perceber corretamente as relações envolvidas no problema, conforme sua fala:

> *P3: Mas olha só: que fração representa a quantidade de suco de limão?! Representa nesta mistura! Então é como se já estivesse junto e o junto são 3. e ele representa 1 dos 3. Aí é um terço, né não?*
> *Pesquisadora: Você acha que é um terço?*
> *P3: Acho. Mas ele quer saber como foi que ele pensou né?*
> *Pesquisadora: É.*
> *P3: Ele pensou separadamente, eu acho cada um, cada dois...*
> *Pesquisadora: Separadamente?*
> *P3: **É que eu estou pensando na mistura, no todo e aqui ele pensou separadamente**. Dois copos de água e um de suco, então a cada dois coloca um.*

É possível inferir que, para P3, a referência do enunciado a mistura foi um aspecto que a levou a pensar no todo como a junção das três partes. A aluna nota que o erro da criança incide justamente no fato dela não ter compreendido a formação do todo nesta situação. A complexidade de perceber o significado de medida nesta situação reside na necessidade que a razão que é coloca entre as duas variáveis pode ser expressa pela fração se considerarmos as partes tomadas de um todo.

No que se refere aos alunos que analisaram erroneamente a situação, oito (08) alunos não conseguiram perceber o todo formado a partir da junção das partes que eram desiguais entre si. P8 e P10 consideraram a linguagem das razões para explicar o raciocínio da criança. Observa-se a seguir a resposta de P10, ilustrativa deste aspecto:

> *P10: Certo. O raciocínio da criança eu acredito tenha sido assim: um copo de limão para dois copos de água, né? Por isso que ele colocou 2… um meio. Mas […] acredito que tenha sido mesmo essa relação de um copo de limão, de suco de limão, pra dois copos de… com água, né?*

Note-se que P8, em sua resposta, refere-se à relação um copo de limão para cada copo de água que diz respeito a razão entre os elementos. De fato, o problema possibilitava uma compreensão baseada na linguagem da razão e utilizando o esquema de raciocínio que Nunes et al. (2009) nomeiam como *um-para-muitos*[41]. No problema proposto, por exemplo, a fim de se manter a constante, a cada 1 copo de suco de limão acrescentado deve-se acrescentar dois copos de água. No entanto, as respostas de P8 e P10 desconsideraram que nesta questão foi solicitado que a resposta fosse expressa

[41] Para maior aprofundamento sobre o assunto ver as considerações de Nunes e Bryant (1997) acerca do raciocínio multiplicativo. Segundo os autores, “as situações multiplicativas envolvem uma relação constante de correspondência um-para-muitos entre dois conjuntos. Esta correspondência um-para-muitos constante é a invariável na situação” (NUNES; BRYANT, 1997, p.143).

através de uma fração, considerando, desta forma, as relações entre as partes (limão e água) a serem reunidas em um mesmo todo (a mistura). Com efeito, Nunes et al. (2009, p.158) afirma que “os alunos têm maior facilidade em conectar as situações problemas a seu raciocínio multiplicativo quando um problema é apresentado usando-se a linguagem de razões do que usando-se a linguagem de frações”.

Tal fato pôde ser evidenciado com os sujeitos que tentaram utilizar elementos relacionados ao raciocínio fracionário como o conceito de metade e o estabelecimento de relações parte-todo. Com efeito, estes alunos evidenciaram não compreender o significado de medida da fração, como é possível evidenciar na fala de P4, a seguir:

> *P2: [...] ele deixa claro que são dois copos de água para cada um de limão, dois e um. A gente sabe que a metade de dois sempre é um, como ele tá pedindo em fração e foi isso que ele fez colocou em fração, ou seja, a metade de dois copos. A metade está sendo representada por um meio, a metade de qualquer coisa seria um meio.*

A aluna explicita não perceber a mistura como o todo. Ela pensa em metade, mas relaciona seu raciocínio com a razão 1:2 referente às variáveis colocadas na questão. A esse respeito, Nunes et al. (2003) afirma existir a necessidade de se promover a conexão entre a notação de razões e frações. Corroborando esta afirmação, Duval (2009) assevera que a compreensão dos alunos da conversão entre registros diferentes não se dá de forma espontânea, se faz necessário, então, que sejam vivenciadas experiências diversificadas com registros de representação semiótica para que o aluno seja capaz de evoluir conceitualmente.

Esta observação vem complementar outro aspecto observado nas explicações dos sujeitos, o aprisionamento à representação numérica da fração. Observa-se esse aspecto na fala de P7, a seguir, que demonstra não compreender a composição do todo.

> *P7: [...] o numerador é o quê? O numerador é aquela parte significativa pra aquela situação então é o quê? É o suco de limão. Então, os dois copos vai ser justamente o todo, ou seja, o que é que foi utilizado do todo, né?! O todo de dois copos então ele com esse desenho ele pensou é um sobre dois.*

Note-se que aluno demonstra considerar fração, não como um número em si, mas como algo composto de dois números isolados (o numerador e o denominador).

Esta percepção evidencia que o raciocínio sobre a fração se dá com base em aspectos ligados à representação e não nas relações conceituais envolvidas no problema.

Em síntese, as explicações dos alunos acerca do raciocínio da criança evidenciaram que os sujeitos, ao serem remetidos a uma situação de análise de resposta, assumiam que o raciocínio da criança era igual aos seus. Tome-se o exemplo de P8, que afirma: “essa criança igual a mim...ela deve...eu não sei se ela não...porque os dois copos é uma medida total...a cada dois copos ele colocou um, então o 2 representa o total e o 1 forma a parte” (P8). Tal fato se justifica pela dificuldade em compreender os elementos e as relações que envolvem a fração no significado de medida.

A segunda categoria considerada para questão diz respeito às percepções dos alunos acerca da representação figural proposta. P5, apesar de ter julgado que a resposta da criança estava correta, considerou que a representação figural evidenciava elementos errados, podendo ser melhorada “através de desenhos assim que não utilizasse o mesmo tamanho” (P5). Ao fazer tal afirmação, é possível inferir que a aluna acredita que se fossem colocados tamanhos diferentes para as partes e o todo, a compreensão da questão seria facilitada. Evidencia-se, então, que a aluna desconsidera a igualdade necessária entre as partes que estão em jogo na fração. Com exceção de P5, os sete (07) alunos que consideraram que o raciocínio da criança estava correto avaliaram que representação colocada na questão como um elemento que facilitou a sua compreensão.

É importante destacar que essa situação-problema conta com representações em dois diferentes registros, logo em seu enunciado – o registro em língua natural e o registro figural. Observe-se que o registro em língua natural fala de uma “mistura” que deve corresponder ao todo a ser considerado na fração e este todo não está representado no registro figural. Evidencia-se assim uma inconsistência entre as representações nos registros de partida. Para resolver a situação seria necessário que se procedesse à conversão dos registros de partida (língua natural com apoio figural) para o registro de chegada (numérico fracionário).

Percebe-se, entretanto, que, em relação ao registro figural, tal conversão tem baixo nível de congruência, pois nela não se encontram dois dos três fatores considerados por Duval (1995) como determinantes do nível de congruência, quais sejam: unicidade semântica terminal e conservação da ordem das unidades. O primeiro – unicidade semântica terminal – está ausente, devido ao fato de não haver, no registro figural, uma representação que explicite o todo.

Além disto, os dois copos de água presentes no registro de partida não estarão explicitamente representados no registro de chegada (numérico fracionário $\frac{1}{3}$), pois somamos as 2 partes de água com 1 de suco formando um todo composto por 3 partes. A função das duas partes de água é compor o todo, mantendo a proporção. Com relação ao segundo fenômeno – conservação da ordem das unidades de significado – percebe-se que a situação proposta evidencia uma característica diferente daquelas utilizadas mais freqüentemente no ensino tradicional da fração, onde se explicita o todo e se pergunta a respeito das partes envolvidas na questão. Nesta situação, o aluno precisa compreender a composição do todo a partir das partes fornecidas, sendo necessário um raciocínio inverso àquele tradicionalmente enfatizado na escola.

Nesse sentido, os sujeitos que consideraram que o registro figural facilitou a compreensão do problema pela criança, evidenciaram não perceber o baixo nível de congruência da situação. Observa-se, a seguir, as considerações de P1, acerca do registro figural do problema:

> *P10: Às vezes não é nem a matemática [...]. Às vezes é bem o português mesmo. Quando a criança lê, né, se a… criança tá entendendo ou não. E quando tem uma figura, eu acho que fica mais fácil ela chegar a um pensamento pelo menos lógico do que seria a representação da questão.*

A fala de P10 sugere que o uso de figuras facilita a compreensão de problemas matemáticos. Percebe-se que a afirmação “quando tem uma figura, eu acho que fica mais fácil” indica que, para a aluna, de modo geral, a figura se constitui como um elemento facilitador da compreensão do problema. Todavia, para esta situação-problema a afirmação da aluna não é válida devido ao baixo nível de congruência evidenciado no registro figural quando colocado em relação ao registro em língua natural. Verifica-se, assim que foi descartada a análise detalhada das relações entre os elementos evidenciados nas representações.

Ainda em relação à concepção de que a figura é um elemento que facilita a compreensão, percebeu-se que esta percepção se pauta na crença de que a que a figura evoca um tipo de raciocínio diferente daquele utilizado ao se pensar sobre os números, tal aspecto pode ser observado na fala de P9, a seguir;

> *P9: Eu acho que o aspecto mais forte é… é de você facilitar a visualização mesmo […] concreto, né? Do que eu simplesmente pegar números e tentar fazer um raciocínio mecânico, numérico.*

Infere-se que P9 ao se mencionar os números refere-se à representação aritmética destes. Observe-se que a aluna compreende que o raciocínio sobre os números é mecânico. Tal afirmação possibilita a interpretação de que P9 não compreende as inúmeras relações que envolvem os números e os associa aos procedimentos que são utilizados para a resolução de problemas. Esta percepção, possivelmente, é decorrente de experiências com ênfase maior em tratamentos do que conversões. Estas últimas são fundamentais para que "o aluno possa, por si próprio, transferir ou modificar formulações ou representações de informações durante uma resolução de problema" (DUVAL, 2003, p.23)

Do ponto de vista da teoria dos Registros de Representação Semiótica a Matemática se constitui como uma linguagem que precisa ser lida, interpretada e compreendida. Assim, as representações semióticas possuem um papel fundamental para a aprendizagem matemática. Não se pode esquecer, no entanto, que é preciso que se utilize e articule entre si diversas representações para possibilitar a ampliação da percepção conceitual.

No tocante à terceira categoria analisada, que diz respeito às outras representações propostas para o ensino, as sugestões dos sujeitos se configuraram da seguinte forma: três (03) alunos sugeriram o uso representações concretas e sete (07) de representações figurais. A fala de P1, logo abaixo, demonstra uma sugestão de representação concreta.

> *P1: [...] pra facilitar, pra ajudar, eu colocaria mesmo os ingredientes. Levaria pra sala a água [...] dois copos, né, de água? Pronto, levaria dois copos de água, e pra cada dois copos de água que eu colocar, eu ia colocar um copo de...um suco de limão...um copo de suco de limão. Aí, que fração representa a quantidade de suco de limão presente nessa mistura?*

O uso da representação concreta permite a manipulação de objetos que representam aspectos conceituais envolvidos em uma situação. Entretanto é preciso que sejam percebidos os elementos significativos do registro de partida para que seja realizada uma conversão de modo a contemplar estes elementos no registro de chegada. Assim como qualquer outra, a representação concreta possui limitações próprias. Desse modo, uma vez realizada a mistura, a representação concreta não facilitaria a compreensão da questão, o que não foi percebido pela aluna P1.

Nesse sentido, constatou-se que sete (07) alunos sugeriram representações ainda no registro figural. Esses sujeitos explicitaram sentir dificuldade em pensar em representações diferenciadas. Os argumentos que foram utilizados pautavam-se na concepção de que a representação figural proposta na situação já se constituía como boa o suficiente.

> *P6: Que outra representação eu utilizaria? [...] Deixa eu ver. Eu acho que eu utilizaria a mesma. [...] eu acho que utilizaria a mesma. Necessariamente eu preciso escolher outra?[...] Eu utilizaria o desenho também porque facilita.*

A aluna explicita não perceber a necessidade da diversificação de registros de representação semiótica. Tanto P6, como os outros alunos que sugeriram representações ainda no registro figural explicitam, para esta questão, possuírem uma limitação quanto à diversificação de representações.

Interessa notar que os sujeitos foram questionados acerca de uma situação de ensino e deveriam evidenciar, desta forma, aspectos relativos à representações que pensam em utilizar em suas práticas. O que se percebeu foi à crença de que as representações figurais e concretas são consideradas sempre como "facilitadoras da compreensão". Kerlaske (1986) critica a ênfase excessiva no uso de figuras, pois, para a autora, não são somente os aspectos perceptuais de figura que são relevantes para a compreensão de elementos relacionados à fração como, por exemplo, o princípio da equivalência. Nesse sentido, Duval (1995, p.347) afirma que "nenhum sistema de representação pode reproduzir uma representação cujo conteúdo seja completo e adequado ao objeto representado". Justificando-se assim a importância da diversificação dos registros de representação semiótica. No entanto, evidenciou-se ainda que alunos não sugeriram a articulação entre representações, optando pelo mono-registro.

Tais dados são similares aos de Campos, Nunes e Magina (2006), que ao investigarem conceitos e estratégias de ensino para o ensino de fração em professores polivalentes, constataram que as estratégias de ensino resumiam-se ao uso do material concreto e desenho. O que se evidencia dessa forma é a confirmação da tendência já explicitada, pela literatura sobre o assunto, no diz respeito às situações de ensino priorizarem as comparações envolvendo aspectos perceptuais da fração.

Além desses aspectos, evidenciaram-se lacunas conceituais quanto ao significado de medida da fração. Muitas das proposições e análises, que se mostraram equivocadas, deviam-se também a não compreensão dos elementos conceituais envolvidos. Logo, sem uma adequada compreensão conceitual não se faz possível pensar em situações de ensino que explorem adequadamente o conteúdo em questão. Principalmente, no que diz respeito aos tópicos abordados por Shulman quanto ao domínio didático do conteúdo, pois este depende de uma apropriada compreensão conceitual.

Questão 4 – Elaboração de problemas envolvendo fração

Nesta questão foi solicitado aos alunos do curso de pedagogia que elaborassem um problema envolvendo o conteúdo de fração voltado para alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Pretendia-se conhecer os significados de fração que os alunos objetivavam contemplar em suas práticas, bem como a forma como seriam consideradas as quantidades contínuas e discretas. Na análise, primeiramente serão discutidos aspectos relacionados aos significados. Desta forma, as respostas dos sujeitos foram organizadas, considerando quais significados foram contemplados nos problemas elaborados pelos sujeitos, conforme a tabela a seguir.

Tabela 5: Significados de fração identificados nos problemas elaboradas pelos sujeitos na questão 4 do Domínio Didático.

Significados de fração identificados questões	
Significados	**Quantidade de sujeitos**
Parte-todo	2
Quociente	2
Operador Multiplicativo	5

Com respeito ao significado parte-todo, observa-se que apenas dois (02) alunos o utilizaram nas questões elaboradas. Considera-se que este resultado revela um aspecto peculiar por diferenciar-se do que se tem observado frequentemente nas pesquisas acerca do ensino de fração. Estas investigações, constantemente, têm observado que professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental dão ênfase ao significado parte-todo em situações de ensino. Pode-se inferir que a baixa incidência em problemas contemplando este significado pode ser atribuída à diversidade de situações e representações que os sujeitos tiveram acesso durante a entrevista, levando-os a pensar na proposição de questões que ultrapassem o reconhecimento de partes de um todo. Observa-se a seguir a proposta de P5, quecontempla este significado.

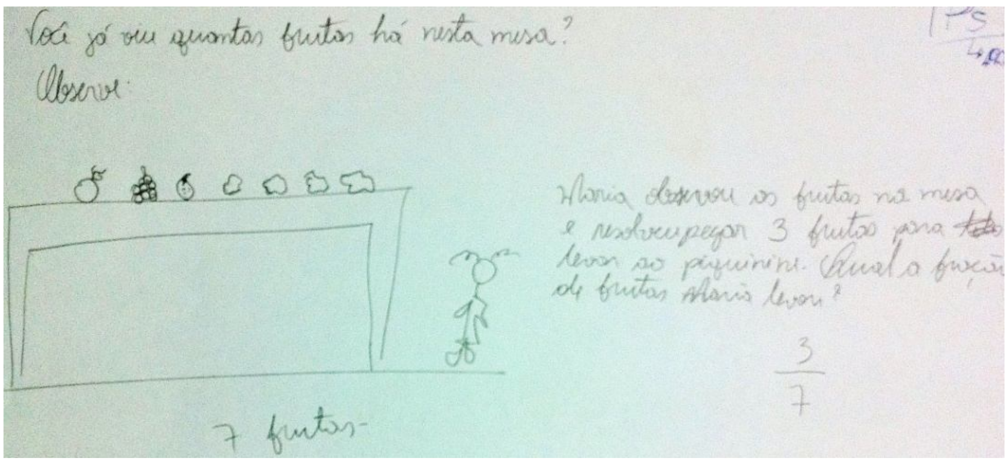


Figura 20: Problema envolvendo o significado parte-todo (P5, Q4 – DD).

O problema elaborado por P5 conta com o apoio de uma representação no registro figural. A aluna afirmou que sua questão foi voltada para crianças do segundo ano do Ensino Fundamental e teve a intenção de trabalhar “parte pelo todo”. Com efeito, a situação favorece a utilização da estratégia de observação da figura, contagem das frutas e determinação das quantidades que comporiam o numerador e o denominador. A abordagem escolhida por P5 segue o modelo tradicional de introdução às frações, mostrando-se todo e partes para que sejam relacionados à representação numérica fracionária. No entanto, observou-se que a aluna optou por abordar quantidades discretas, diferenciando-se assim da abordagem mais frequente do significado parte-todo que considera quantidades contínuas, segundo Magina, Bezerra e Spinillo (2009). Vale salientar que P5, anteriormente, na questão 1 do domínio conceitual, não havia percebido a possibilidade de se representar frações por quantidades discretas. Acredita-se que as diferentes percepções evidenciadas em momentos diferentes da entrevista indicam limitações no conceito de fração.

Em relação ao significado quociente, dois (02) alunos elaboraram questões envolvendo este significado. Campos, Magina e Nunes (2006) apontam que o uso das situações quociente para introdução de frações oferece um poderoso recurso para o trabalho com seus invariantes: equivalência e ordem. Além disso, Nunes (2003) e Nunes e Bryant (1997) apontam que o ensino de frações envolvendo situações de distribuição tem se mostrado como uma abordagem exitosa para promover a compreensão de algumas importantes relações que envolvem este conceito. Observa-se a seguir a questão elaborada por P1 envolvendo o significado quociente:

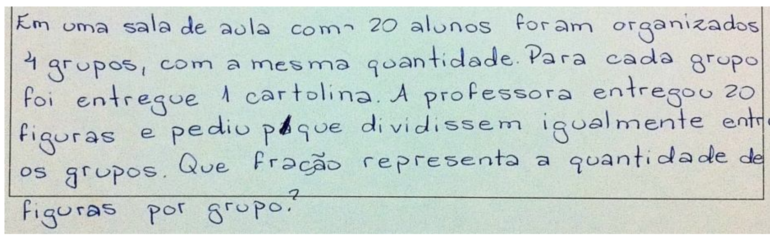

Em uma sala de aula com 20 alunos foram organizados 4 grupos, com a mesma quantidade. Para cada grupo foi entregue 1 cartolina. A professora entregou 20 figuras e pediu p que dividissem igualmente entre os grupos. Que fração representa a quantidade de figuras por grupo?

Figura 21: Problema quociente (P1, Q4 – DD).

Na questão proposta por P1, a divisão se apresenta como estratégia bem adaptada para sua resolução, desta forma está abordando o significado quociente. Além disso, a aluna considera uma quantidade discreta. P1 teve a intenção de relacionar sua questão a uma situação cotidiana, então, primeiramente, foi explicada a situação para em seguida ser elaborada a questão. A situação da divisão de uma turma em grupos e posteriormente a distribuição de cartolinas e figuras entre esses grupos seria realizada na sala de aula antes da aplicação da questão, conforme explica P1:

> *P1: Colocar uma coisa prática, que no caso aí eles não estariam fazendo exatamente...trabalhando fração diretamente. Eles iam tá fazendo um trabalho de classe, né....e vão fazer...entrar numa semana cultural...com cartaz, folder. Assim a professora envolveria eles [...]numa questão prática,né...e assim, no final das contas....eles iam poder vivenciar a fração. Eu acho que é isso. Eu acho que a fração de forma mais prática.*

Diante da explicação da aluna, percebe-se a intenção de aproveitar uma situação de sala de aula para, a partir dela, abordar a fração. Considera-se que a questão elaborada vai além dos aspectos tradicionalmente enfocados no ensino deste conceito, pois o enfoque escolhido ultrapassa aspectos perceptuais da fração e mais vez se utiliza quantidades discretas. Interessa destacar que no enunciado da questão elaborada são oferecidos dados desnecessários para a resolução. O dado relativo à quantidade de pessoas não é necessário para se chegar a uma solução, visto que a relação solicitada é entre figuras por grupo e não entre figuras e pessoas. A informação relacionada à distribuição de 1 cartolina por grupo também não é relevante e até mesmo o dado relativo à quantidade de figuras não é essencial na situação, pois a fração que estabelece a relação entre a quantidade de figuras por grupo é sempre a mesma $\frac{1}{4}$, independentemente da quantidade de figuras. Durante sua explicação, P1 não demonstrou perceber que oferece dados supérfluos na questão. Isto poderia se constituir como uma estratégia didática para se abordar as formas com podem ser explorados os elementos significativos em um enunciado, mas como a aluna não demonstrou perceber este aspecto, não se considera que esta abordagem tenha sido proposital.

Com respeito ao significado operador multiplicativo, cinco (05) alunos o contemplaram nas questões elaboradas. As proposições dos alunos tratam a fração como um valor escalar aplicado a uma quantidade, conforme o exemplo de P9, logo abaixo.

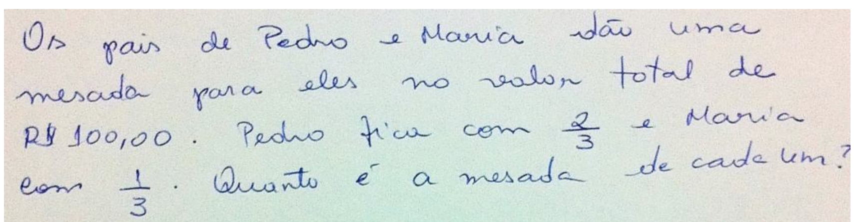

Os pais de Pedro e Maria dão uma
mesada para eles no valor total de
R$ 100,00. Pedro fica com $\frac{2}{3}$ e Maria
com $\frac{1}{3}$. Quanto é a mesada de cada um?

Figura 22: Problema operador multiplicativo (P9, Q4 – DD)

Assim como P9, as outras questões voltadas para o significado operador multiplicativo, tratam de situações que envolvem o cálculo de quantias para a quais a fração se constitui como um multiplicador. A questão elaborada por P9 aborda quantidades discretas. Assim, a fração se constitui num corpo munido de duas operações: inicialmente se tem o estado inicial de 100 reais que aplicado às frações em jogo na questão será multiplicado pelo numerador e dividido pelo denominador. A partir destas operações o valor inicial é transformado chegando aos valores finais. Os resultados evidenciados assemelham-se aos encontrados por Santos (2005), que ao solicitar a elaboração de problemas envolvendo fração para professores das séries iniciais e finais do Ensino Fundamental identificou o significado operador multiplicativo em 66,66% dos problemas. Assim como o referido autor, acredita-se que o fato do significado operador multiplicativo ter sido o mais abordado relaciona-se a grande aproximação deste significado com o contexto do algoritmo. Utilizar a fração como operador multiplicativo implica em uma relação algorítmica direta como, por exemplo, ao se requisitar calcule $\frac{3}{4}$ de 40. Considera-se ainda que a maior exploração deste significado possa ser oriunda de uma tentativa de conectar as frações a situações do cotidiano. Contudo, se a percepção que se tem do uso da Matemática no cotidiano resume-se à aplicação de cálculos, consequentemente as tentativas de se contextualizar frações irão remetê-las a situações em que são percebidas junto à aplicação de algoritmos.

Nesse sentido, Lopes (2008) discute que o uso das frações no cotidiano tem se tornado raro num contexto em que representações analógicas cedem lugar às digitais, dificultando o acesso às frações em situações onde eram utilizadas como medida de quantidades. É pertinente a tentativa de busca por contextos realistas, no entanto, faz-se necessário o cuidado para não recair em contextualizações inadequadas. Além disso, é necessária atenção para não recair no uso de questões que requerem sempre o mesmo raciocínio. Todos os alunos que abordaram esse significado trataram da distribuição de salários, mesadas, ou seja, sempre com quantidades discretas.

Ainda em relação às questões elaboradas pelos alunos, destaca-se o caso de P10, em que não se evidenciou a fração para a resolução da questão, conforme se observa a seguir.

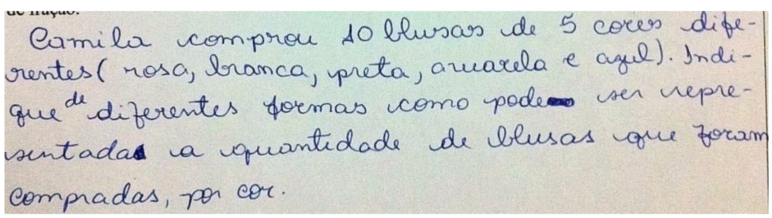

Camila comprou 10 blusas de 5 cores diferentes (rosa, branca, preta, amarela e azul). Indique de diferentes formas como pode ser representada a quantidade de blusas que foram compradas, por cor.

Figura 23: Problema que não envolve fração diretamente (P10, Q4 – DD)

Note-se que a aluna demonstrou não compreender a necessidade de trabalhar aspectos relacionados às noções de unidade e partição que se relacionam ao conceito de fração. Quando a aluna solicita a indicação de diferentes formas de representação da quantidade de blusas compradas por cor, a fração é uma das possibilidades, mas não a única. Para que a questão proposta abordasse diretamente a fração era necessário se fazer referência à relação entre o total de blusas compradas e cada cor de blusa. Acredita-se que a questão da aluna pode ter sido pensado sob influência da questão 1 do domínio conceitual, na qual se pede a identificação de diferentes representações da fração. Tendo vista que a aluna requisita que seja representada de diferentes formas a relação por ela solicitada.

Outro aspecto que se evidenciou nas questões elaboradas foi a ordem como os elementos que compõe a fração foram enunciados. Dito de outra forma considerou-se se os problemas forneciam o todo para que fossem identificadas as partes ou se a partir de partes evidenciadas era solicitada a composição do todo. Tal perspectiva é valorizada por Duval (2009), que considera elemento fundamental para avaliação do nível de congruência nas conversões a ordem em que se expõem as unidades significantes entre os registros. Tradicionalmente, os problemas com fração partem de um todo para que sejam identificadas as partes. Quando a lógica inversa é requerida, são demonstradas dificuldades para compreender a composição do todo. Percebeu-se que todos os sujeitos propuseram problemas nos quais estava explícito o todo para, então, serem encontradas as partes.

Com respeito à consideração de quantidades contínuas e discretas, constatou-se que apenas um sujeito propôs uma questão envolvendo quantidades contínuas. Trata-se da proposição de um problema parte-todo, envolvendo o consumo de uma pizza por diferentes sujeitos, em que cada um fica com quantidades diferenciadas da pizza. Este dado se contrapõe ao achado de pesquisas como a de Magina, Bezerra e Spinillo (2009, p.414) na qual assevera que “em termos de representação, observa-se uma forte ênfase em quantidades contínuas do que em quantidades discretas, sobretudo no ensino introdutório, passando-se a ideia de que a fração é um pedaço de algo (pizza, barra de chocolate)”. Acredita-se que é essencial que situações de ensino de fração alternem a abordagem dos dois tipos de quantidade. Infere-se que o fato de a maioria dos alunos (9 de 10) contemplarem quantidades discretas pode ser relativa, mais uma vez, a tentativa de relacionar à fração a situações cotidianas. Streefland (1997) ressalta que as unidades que envolvem a fração no cotidiano geralmente não se referem a todos que podem ser exatamente iguais como a divisão de uma tangerina, por exemplo, os gomos a serem distribuídos podem parecer idênticos, mas não serão efetivamente iguais. É nesse sentido que o trabalho com quantidades discretas, cuja divisão implica a relação da fração com uma coleção de objetos iguais, possibilita a realização de partições que sejam mais precisas.

O não aparecimento de situações contemplando os significados de número e medida evidenciam a necessidade de ampliação das possibilidades para o trabalho didático com as frações. Kieren (1976), ao se referir aos diferentes significados não só da fração, mas dos números racionais de modo geral, afirma que a compreensão efetiva desses requer não apenas o enfoque individual de significados (denominados por ele de subconstructo), mas também a relação entre si.

Síntese do domínio didático

O enfoque do domínio didático da fração objetivou conhecer a percepção dos alunos acerca de como eles pensam em ensinar fração. A análise de suas proposições levou em consideração o uso de diferentes representações e significados que devem ser abordados nas práticas docentes visando à promoção de uma efetiva aprendizagem do conceito.

Os alunos não perceberam o erro da criança, evidenciando não terem compreendido efetivamente a questão que tratava do significado medida. A intenção em se solicitar a análise do raciocínio de uma criança que cometeu um erro, era a de se observar como os alunos do curso de pedagogia lidariam com o erro desta criança. Entretanto, o erro não foi percebido, o que aponta para falhas na compreensão do conceito de fração. Sem o entendimento deste número e suas relações não é possível elaborar estratégias que promovam a superação dos obstáculos à aprendizagem de fração.

Outro aspecto observado foi que grande parte dos sujeitos considerou a representação figural como um aspecto que facilita a compreensão de uma questão, partindo da crença de que o uso de figuras é um fato que necessariamente auxilia no entendimento de um problema. Do ponto de vista da teoria dos registros de representação semiótica, nenhuma representação isoladamente é suficiente para a aprendizagem de um conteúdo. Cada representação expressa o conceito de maneira diferente, tem custos cognitivos diferentes para seu tratamento e conversão, fazendo-se necessário sempre que se use e articule diferentes registros de representação semiótica.

Tal aspecto vem a complementar o que foi percebido nas representações que foram sugeridas pelos sujeitos para o ensino de uma questão de frações envolvendo o significado de medida. Já havia na questão uma representação no registro figural e foi solicitada a utilização de registros diferentes a serem utilizados na questão em uma situação de ensino. O que se observou foi que os alunos encontraram dificuldades para utilizar registros diferentes daquele proposto na questão e, ainda, os que propuseram um registro diferente centraram-se no registro de representação concreto. Estes resultados indicam uma lacuna no que diz respeito à diversificação dos registros para o ensino de frações.

Com relação aos significados da fração, percebeu-se, inicialmente, dificuldade em compreender, na situação proposta, os elementos que são requeridos pela fração em seu significado medida, isto é, quando é exigida a comparação de duas grandezas. Quanto à proposição de questões abordando significados, percebeu-se a presença de apenas três significados: parte-todo, quociente e operador multiplicativo. No domínio conceitual, ao falarem de contextos da utilização das frações, os alunos demonstram ter a percepção de situações diversificadas para este conceito, envolvendo todos os seus significados. Entretanto, ao serem remetidos a situações de ensino evidenciaram lançar mão de proposições que não contemplam todos os significados da fração.

De modo geral, acredita-se que tais constatações dão indícios da necessidade do planejamento das situações de ensino que contemplem os cinco significados da fração, articulando-os sempre com o uso de seus diversos registros de representação semiótica. É necessário maior conhecimento e divulgação quanto à importância das representações semióticas para aprendizagem deste conceito, pois acredita-se que práticas pedagógicas que contemplem todos os significados da fração e que tenham mais ênfase na conversão e coordenação entre os registros de representação do número fracionário são essenciais para a composição de práticas que visem a promover a compreensão das crianças acerca deste conceito.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Mas é do buscar e não achar que nasce o que eu não conhecia.
(Clarice Lispector)

O desenvolvimento deste estudo teve como motivação principal a preocupação acerca da formação de professores de Matemática para os anos iniciais do Ensino Fundamental. Na literatura voltada para a Educação Matemática, vários autores discutem as dificuldades relativas ao ensino e aprendizagem da Matemática enquanto conteúdo escolar. Considera-se a Matemática como um instrumento que possibilita a leitura e compreensão do mundo. A realização da presente investigação permitiu conhecer diferentes raciocínios, percepções e visualizações que são possíveis de se constituir através de conceitos matemáticos. A riqueza de possibilidades propiciadas por esta ciência está além da agregação de conceitos e conteúdos, mas nas ferramentas de pensamento que podem ser constituídas através dela. Os sujeitos desta pesquisa, em diversos momentos, explicitaram diferentes lógicas e hipóteses acerca do conceito de fração. Independentemente de serem corretas ou não, tais percepções deixam clara a apreensão de significados individuais construídos através de vivências e experiências.

É nesse sentido que ensinar Matemática se constitui como uma tarefa de fundamental importância para possibilitar que os aprendentes possam contar com vivências e experiências que propiciem uma compreensão adequada dos conceitos matemáticos. Para tal, a docência voltada ao ensino de Matemática requer o desenvolvimento de conhecimentos específicos e habilidades que ultrapassem o mero conhecimento de procedimentos matemáticos.

Assim, graves limitações em relação à compreensão dos conteúdos a serem ensinados resultam em restrições igualmente sérias para a prática docente. Partindo-se desta percepção, a realização de investigações que tenham como foco as concepções e práticas docentes assume inquestionável relevância. Nesse sentido, a formação de professores para o ensino de Matemática tem se constituído, ao longo da história, como um desafio. Dentre as lacunas reveladas pelas investigações, encontra-se o ensino e a aprendizagem de fração. As pesquisas dedicadas a esse assunto têm evidenciado a necessidade de abordagens mais amplas das frações na formação dos professores.

Nesse sentido, a realização do presente estudo visou aprofundar e discutir a formação de professores para o ensino de frações sob uma perspectiva diferente daquelas já contempladas pelas pesquisas que tratam desta temática. Tratou-se aqui da formação inicial de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Buscou-se analisar conhecimentos conceituais e didáticos da fração com quais os alunos contam ao concluir a formação matemática ofertada pelo curso de Pedagogia. Tais conhecimentos foram estudados sob a ótica da classificação teórica de Nunes et al. (2003) acerca dos cinco diferentes significados da fração e de teoria dos Registros de Representação Semiótica.

Para discutir os achados desta pesquisa considerou-se necessário retomar aspectos relativos ao ensino tradicional da fração já amplamente discutidos na literatura (MAGINA, CAMPOS, NUNES, 2006; SPINILLO, LAUTERT, 2006; NUNES, BRYANT, 1997; NUNES, CAMPOS, MAGINA, BRYANT, 2009). Os aspectos da abordagem que tem sido evidenciada para o ensino da fração na escola é considerada aqui como um modelo. Desta forma, tentou-se compreender se resultados achados nesta investigação indicam que a formação dos pedagogos para o ensino de fração encontra-se dentro deste modelo. E ainda, se os conhecimentos didáticos evidenciados pelos alunos se constituem como indicações da manutenção ou alteração desta perspectiva. Assim, a seguir serão discutidos alguns dos achados desta pesquisa e suas possíveis consequências, considerando-se suas características de manutenção ou não do modelo de ensino de fração vigente.

O primeiro resultado a ser destacado é grande familiaridade que os sujeitos demonstram com representações frequentemente associadas ao ensino tradicional das frações, são elas: a numérica fracionária (dois números separados por um traço) e a figural contínua (pizzas, barra de chocolates, tortas etc.). Em contraste, ao lidarem com representações diferenciadas destas privilegiadas pelo modelo de ensino tradicional de fração os sujeitos apresentaram dificuldades. Tome-se como exemplo os alunos que não conseguiram identificar a fração no contexto das quantidades discretas e em registros como o numérico decimal e língua materna. Além disso, os alunos em suas proposições didáticas demonstraram a concepção de que o registro figural e concreto são representações eficientes para todo tipo de situação que envolva fração. Percebendo-os como indispensáveis para o ensino. Tais concepções em alunos que estão em preparação para o exercício da docência podem sinalizar a constituição de práticas de ensino que continuem a privilegiar representações específicas no ensino de fração.

Outro aspecto dos achados a se evidenciar é a aplicação de conhecimentos relativos aos números naturais para o contexto dos números racionais. Este é um aspecto já amplamente discutido na literatura sobre o assunto e as práticas do modelo de ensino tradicional não têm sido eficientes em proporcionar rupturas necessárias para que seja possível compreender que ao lidar com frações se está lidando com um novo conjunto numérico. A percepção explicitada pelos alunos acerca de sucessores e antecessores para a fração pode ser considerada como consequência da dificuldade em romper com os conhecimentos relativos aos números naturais. Os sujeitos manifestaram a concepção de que era necessário pensar em aspectos ligados à representação (numerador e denominador) e relacioná-los aos mesmos princípios que se aplicam aos números naturais. Demonstrando não compreender que ao utilizar o raciocínio das frações estão trabalhando com um conjunto numérico diferente do conjunto dos números naturais. As possíveis consequências deste resultado para a constituição das práticas destes alunos se voltam para a possibilidade de não serem realizadas escolhas didáticas que sejam eficientes para propiciar às crianças a compreensão das rupturas necessárias com o conjunto dos números naturais.

Observou-se também a dificuldade dos sujeitos na compreensão dos diferentes significados da fração. Foram observados obstáculos para lidar com a fração principalmente em seus significados número e medida. Ao tentar localizar frações em uma reta numérica, alguns sujeitos evidenciaram dificuldades em percebê-la efetivamente como um número. Suas estratégias se baseavam na aplicação de regras que explicitavam não compreender e na tentativa de associar a reta numérica aos aspectos do significado parte-todo. Em relação ao significado medida, percebeu-se dificuldade para compreender a composição do todo ao se lidar com variáveis distintas. Considera-se que estas dificuldades podem ser fruto de experiências com fração nas quais não foram vivenciadas uma diversidade de representações e situações. Como já mencionado, o modelo de ensino tradicional privilegia representações específicas, portanto, limita a amplitude das situações que poderiam ser abordadas com esse número. Assim, as dificuldades dos alunos em perceber e lidar com os diferentes significados da fração podem ser consequência desta abordagem. Levando esta limitação para possíveis práticas destes alunos é possível que, pelo fato de os alunos ainda não terem desenvolvido estratégias para o trabalho com os cinco diferentes significados da fração, também não os explorem de forma ampla em suas práticas.

No que diz respeito ao contexto das proposições didáticas, o quadro identificado não foi diferente. Os sujeitos já haviam evidenciado dificuldade em perceber a fração em sua variedade de representações, logo em suas proposições didáticas não contemplaram registros de representação diversificados. De modo semelhante, ao elaborarem problemas envolvendo fração também não abordaram os cinco significados da fração. Notou-se que as representações priorizadas pelos alunos em suas proposições didáticas foram o registro figural, numérico fracionário e concreto e, quanto aos significados, a ênfase foi para parte-todo, quociente e operador multiplicativo. Assim, tais resultados evidenciam, em primeiro lugar, que estes alunos desenvolvem seus raciocínios com base nas representações da fração e não em suas relações. Em segundo lugar, acredita-se que os achados da pesquisa sinalizam para uma tendência a se reproduzir o ensino tradicional de frações, contemplando poucas representações e significados.

Cabe destacar também alguns resultados relativos à percepção dos sujeitos quanto à realização de procedimentos que envolvam fração. O primeiro diz respeito ao tratamento no registro figural. Ao tentarem realizar tratamentos utilizando o registro figural, observou-se nos sujeitos a necessidade de se utilizar o registro numérico como apoio. No entanto era com base neste registro que se estabelecia o raciocínio para a resolução e o registro figural aparecia apenas como ilustração dos procedimentos realizados. O segundo aspecto a se destacar é a estratégia evidenciada por dois alunos ao tentar encontrar o sucessor e o antecessor de uma fração. Percebeu-se utilização da simplificação de frações. Os sujeitos demonstraram não compreender que a simplificação é um procedimento que produz frações equivalentes, utilizando-se de suas regras em situações em que não se adequa. O terceiro aspecto a se salientar quanto aos procedimentos é relativo a dificuldade evidenciada em compreender a conversão da fração para o registro decimal e do registro decimal para a fração. Para realizar as transformações, os alunos demonstraram se pautar na mera aplicação de regras. Todos os três aspectos citados são considerados como possíveis consequências do modelo tradicional de ensino de fração que se pauta na ênfase procedimental. Nesse sentido, o que se percebe é que os alunos parecem sentir a necessidade da realização de algoritmos para conseguir estabelecer seus raciocínios, mesmo quando o algoritmo não representa a melhor solução ou até quando não compreendem o próprio algoritmo.

As repercussões deste tipo de vinculação a procedimentos para a constituição de práticas futuras podem ser sinalizadas por um dos resultados encontrados no domínio didático. Percebeu-se que na proposição de problemas o significado operador multiplicativo foi privilegiado, este significado é o que mais se aproxima e se adequa a aplicação de algoritmos. Portanto, considera-se que a ênfase dada aos seus elementos pode indicar uma concepção de ensino de fração que continue a se centrar em procedimentos.

Como decorrência deste tipo de ensino os conhecimentos de fração que os sujeitos constroem se concentram, principalmente, no âmbito intuitivo, diretamente vinculado às percepções. Assim, novamente se evidenciou as consequências desse tipo de abordagem nos raciocínios explicitados pelos sujeitos desta pesquisa. Observe-se o exemplo da discrepância entre significados da fração que os alunos percebem quando a relacionam a situações de uso formal e cotidiano. Deste modo, constatou-se que os sujeitos perceberam mais elementos da fração quando estes se vinculam diretamente a conhecimentos intuitivos. Nesse sentido, os alunos evidenciam que já percebem e utilizam intuitivamente os significados da fração, o que se faz necessário, portanto, é que tais percepções possam ser formalizadas para que seja possível que estes alunos constituam práticas voltadas para proposição e exploração do conceito de fração contemplando suas representações e significados. Considera-se que o fato de todos os sujeitos perceberem os significados da fração, mesmo que num âmbito intuitivo, aponta para a possibilidade que de uma formação que articule aspectos intuitivos e formais dos significados pode contribuir para a superação deste problema.

Nesta perspectiva de aspectos que possam sugerir alterações em aspectos relacionados ao modelo tradicional de ensino de fração, convém destacar três achados dessa pesquisa. O primeiro deles diz respeito ao fato de que apesar de o significado parte-todo ter sido reconhecido e evidenciado em definições e contextos relativos à fração enquanto o mesmo não foi observado nas proposições de problemas elaborados pelos alunos. Poucas das questões elaboradas pelos alunos contemplaram o significado parte-todo. Este resultado pode sinalizar para a possibilidade de que a percepção dos alunos na proposição de problemas não reproduzirá necessariamente a ênfase no significado parte-todo.

Outro achado desta pesquisa a se destacar é o fato que os problemas propostos, em sua maioria, abordaram quantidades discretas, tal fato aponta para a possibilidade de se ultrapassar a ênfase em representações contínuas frequentemente constatada pela literatura. Por fim, salienta-se a diversidade de representações elaboradas pelos sujeitos ao serem solicitados a representar a fração de quatro maneiras diferentes. Apesar de os registros mais contemplados serem os mesmos já apontados pela literatura como mais comuns no ensino tradicional (figural contínuo e numérico fracionário), a indicação de registros como o percentual e o da divisão pode indicar a percepção da relação que a fração estabelece com outros conceitos. E ainda, a possibilidade de que essas relações possam ser evidenciadas quando estes alunos se tornarem efetivamente professores.

Considera-se que os resultados desta pesquisa evidenciam que são necessárias ações no sentido de modificar as abordagens de fração que tem sido tradicionalmente observadas. Nesta perspectiva, todas as lacunas evidenciadas no que diz respeito aos significados e representações relacionados à fração permitem a reflexão acerca da necessidade de que se promova uma formação, em todos os níveis de ensino, em que se estimule o pensar sobre os números. Ou seja, é preciso que a compreensão do número aconteça de forma efetiva. Todas as indicações da literatura apontam para práticas e perspectivas para o ensino que percebem a Matemática como a memorização de regras e a aplicação de procedimentos.

As teorias que visam contribuir para a compreensão das dificuldades que são apresentadas pelos alunos na aquisição de um conceito reforçam que o ensino que se tem realizado da Matemática não fornece aspectos necessários para que se promova a compreensão de seus aspectos. Consequentemente, conceitos como o de fração, são ensinados ao longo de vários anos na formação dos alunos sem que se propicie sua compreensão. Nesse sentido, torna natural que nos domínios conceitual e didático da fração sejam evidenciadas inconsistências conceituais pelos alunos.

As constatações acima mencionadas são consideradas como consequências de vivências e percepções da Matemática como uma ciência composta por conceitos e assuntos complexos. O condicionamento a não pensar sobre a fração leva à impressão de que todas suas regras e relações são inexplicáveis e que todas as suas representações e significados são imposições que são vinculados a regras e procedimentos sem sentido. Durante o desenvolvimento desta pesquisa por diversas vezes foi possível escutar expressões como “a Matemática é difícil”, “nunca entendi bem as frações”, “lidar com número é sempre complicado”, dentre outras. Tais falas refletem a ausência de significação e sentido que são decorrentes do “não pensar sobre os números”. Além disso, como ensinam Duval (2009) e Nunes et al. (2003) , o “não pensar sobre a representação” e o “não interpretar significados”.

De forma geral, como resposta ao objeto desta pesquisa, pode-se afirmar que os alunos do curso de Pedagogia estão terminando sua formação com uma visão sincrética das frações. A visão que se tem apresentado pelas teorias que tratam dos conhecimentos necessários a uma boa construção do conceito de fração, demonstra que os conhecimentos explicitados pelos sujeitos da pesquisa ainda estão aquém do que é necessário para que se superem as dificuldades para o ensino e aprendizagem de fração.

Todavia, estes sujeitos demonstraram ter consciência de suas limitações com relação ao conceito de fração e em suas falas, foi possível perceber a preocupação em elucidar suas concepções e raciocínios de modo a contribuir com este estudo. Como já relatado anteriormente muitos estudantes tiveram receios para aceitar a participação nesta investigação ao saber da temática, mas os sujeitos que fizeram parte da amostra expuseram suas angústias e receios demonstrando preocupações relativas a melhorias no quadro do ensino de fração que ora se apresenta. Apesar da amostra analisada não permitir maiores generalizações, os resultados encontrados sinalizam que a instituição analisada, no tocante à formação dos pedagogos para o ensino de fração, está em descompasso com as indicações de pesquisas que visam promover os avanços na aprendizagem desta temática.

A promoção de mudanças nessa formação exige que sejam realizados esforços por parte dos sujeitos em busca de superar suas limitações, bem como da universidade na busca de propiciar reflexões, pesquisas e discussões que permitam a mudança de concepção sobre a fração. Ressalta-se ainda que a formação inicial é apenas o princípio de um processo de formação que deve ser contínua e inacabada quando se tem a intenção de exercer a docência. Para finalizar, é importante considerar que as mudanças na formação de Professores de Matemática não acontecem de forma imediata. É preciso lidar com concepções e práticas enraizadas ao longo de vários anos e para alterá-las é demandado tempo, esforço e paciência para se possam promover mudanças gradativas. Porém, considera-se que apesar da mudança se constituir em um processo lento e ligado a vários entraves, ela é possível e é nesse sentido que pesquisas devem continuar a contribuir para conhecer e explicar as dificuldades encontradas no ensino e aprendizagem da Matemática.

REFERÊNCIAS

ABE, Jair Minoro. **A noção de estrutura em matemática e física**. Estud. av., São Paulo, v. 3, n. 6, Aug. 1989 .

ALVES-MAZZOTTI, A. J. O debate atual sobre os paradigmas de pesquisa em educação. In: **Cadernos de Pesquisa,** n. 96, p. 15-23, 1996.

BARRETO, M. C.. SOUSA, A. C. G. **Os Registros de Representação Semiótica e o Trabalho com Aritmética nas Séries Iniciais da Escolaridade: uma experiência de formação docente,** XII Encontro Brasileiro de Pesquisa em Educação Matemática. Rio Claro SP, 2008.

BARROS, M. J. S. **Reaprender frações por meio de oficinas pedagógicas**: desafio para a formação inicial. Dissertação (Mestrado em Educação Brasileira). Fortaleza: Universidade Federal do Ceará, 2007.

BEHR, M. J; LESH, R.; POST, T.; SILVER, E. Rational number concepts. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Ed.). **Acquisition of Mathematics concepts and processes**. New York: Academic Press, 1983.

BEHR, M. J.; HAREL, G.; POST, T.; LESH, R. Rational number, ratio, and proportion. In: GROUWS, D. A. (Ed.). **Handbook of research on Mathematics teaching and learning**. New York: MacMillan, 1992.

______; ______; ______; ______. Rational numbers: toward a semantic analysis – emphasis on the operator construct. In: CARPENTER, T. P.; FENNEMA, E. H.; ROMBERG, T. (Ed.). **Rational numbers**: an integration of research. Hillsdale: Lawrence Erbaum, 1993.

BICUDO, M. A [org.]. **Pesquisa em educação matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999. – (Seminários & Debates)

BLANCO, M. M. G. A formação inicial de professores de matemática: fundamentos para a definição de um curriculum. In: FIORENTINI, D. (org). **Formação de Professores de Matemática**: explorando novos caminhos com outros olhares. Campinas, Sp: Mercado das Letras, 2003.

BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: matemática/Brasília: 2007.

BRITO, M. R. F. (org.). **Solução de problemas e a matemática escolar**. Campinas, SP: Editora Alínea, 2006.

BROSSEAU. Guy. Os diferentes papéis do professor. In: PARRA, Cecília. SALZ, Irma. **Didática da Matemática**: reflexões psicopedagógicas.. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

BROWN. Margareth. Place value and decimals. In: HART, K (ed). **Children's understanding of mathematics**. London: Jonh Murray, 1981

CAMPOS, Tânia Maria Mendonça. MAGINA, Sandra. NUNES, Terezinha. O professor polivalente e a fração: conceitos e estratégias de ensino. **Educação Matemática e Pesquisa**. São Paulo, v. 8, n. 1, pp. 125-136, 2006.

CAMPOS, Tânia Maria Mendonça. Sobre ensino e aprendizagem de frações. In: XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Recife. **CIAEM 2011.** Recife: Ufpe, 2011. p. 1 - 8.

CANOVA, R. F. **Crença, concepção e competência dos professores do 1º e 2º ciclos do ensino Fundamental com relação à fração.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2006.

CARRAHER, Terezinha Nunes. **O método clínico usando os exames de Piaget**. São Paulo: Cortez, 1994. (Biblioteca da Educação, Série 1, Escola, v. 10)

CHIZZOTTI, Antonio. **Pesquisa em ciências humanas e sociais**. São Paulo: Cortez Editora,1998.

CRESWELL, J. W. **Projeto de Pesquisa:** métodos qualitativo, quantitativo e misto. 2ed. Porto Alegre: Artmed, 2007.

CURI, E. **A Formação Matemática de Professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental face as Demandas Nacionais**. VII Encontro Nacional de Educação Matemática. Pernambuco, Recife: SBEM, 2004.

CURI, E. **Formação de professores polivalentes**: uma análise dos conhecimentos para ensinar matemática e de crenças e atitudes que interferem na constituição desses conhecimentos. Dissertação (Mestrado). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2005.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Educação Matemática da teoria à prática**. Campinas: Papirus, 2007

DAMM, R. F. Registros de Representação. In: MACHADO, Sílvia D. A. et al. **Educação Matemática**: uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999.

DAMICO, A. **Uma investigação sobre a formação inicial de professores de matemática para o ensino de números racionais no ensino fundamental**. Tese (Doutorado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2007.

DUVAL, R. **Sémiosis et pensée humaine** – registres sémiotiques etapprentissages intellectuels.Peter Lang. SA. Neuchâtel, Suisse: 1995.

______________. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, Sílvia Dias Alcântara (org.).

Aprendizagem em matemática – registros de representação semiótica. Campinas, SP:Papirus, 2003.

______________.**Semiósis e Pensamento Humano** – registros de representação semióticos e aprendizagens intelectuais (fascículo I). São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

FRASER, M. T. D. GONDIM, S. M. G. Da fala do outro ao texto negociado: discussões sobre entrevista na pesquisa qualitativa. São Paulo: Paidéia, 2004.

FERREIRA, A. C. Um olhar retrospectivo sobre a pesquisa brasileira em formação de professores de matemática. In: **Formação de Professores de Matemática**: explorando novos caminhos com outros olhares. Campinas, Sp: Mercado das Letras, 2003.

FIORENTINI, D. (org.) **Formação de professores de matemática**: explorando novos caminhos com outros olhares. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2003.

FLORES, Cláudia Regina. Registros de Representação Semiótica em Matemática: história, epistemologia, aprendizagem. **Bolema** (Rio Claro), v. 26, p. 77-102, 2006.

_________, D., LORENZATO, S. : Investigação **em Educação Matemática** – Percursos Teóricos e Metodológicos. Campinas, SP: Autores Associados, 2007.

FONSECA, H. N. T. **Os números racionais nos anos iniciais do ensino fundamental**: investigando saberes docentes. Dissertação (Mestrado). Belo Horizonte: Universidade Federal de Minas Gerais, 2008.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia:** saberes necessários a prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

GASKELL, G. (editores). **Pesquisa qualitativa com texto, imagem e so**m: um manual prático. Petropólis, RJ: Vozes, 2002.

GOMES, Maristela Gonçalves. **Obstáculos epistemológicos, obstáculos didáticos e o conhecimento matemático nos cursos de formação de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental**. Contrapontos - ano 2 - n. 6 - p. 423-437 - Itajaí, set./dez. 2002.

GUBA, E. G; LINCOLN, Y. S. Competing paradigms in qualitative research. In: DENZIN, N. K; LINCOLN, Y. S. (Eds.). **Handbook of qualitative research**. Thousands Oaks/California: SAGE, 1990, p. 105-117.

HAREL, G.; CONFREY, J. **The development of multiplicative reasoning**. Albany: SUMY, 1994.

ITZCOVICH, Horácio. **La Matematica Escolar**: las practicas de enseñanza em el aula. Buenos Aires: AIQUE, 2008.

JOHNSON, R. B; ONWUEGBUZIE, A. J. Mixed methods research: a research paradigm whose time has come. **Educational Researcher**, v. 33, n. 7, p. 14-26, out. 2004.

KERSLAKE, D. **Fractions**: children's strategies and errors. Londres: NFR-NELSON, 1986.

KIEREN, T. E. On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In: LESH, R. (Ed.). **Number and measurement**: paper from a research workshop. Columbus: ERIC/MEAC, 1976.

_________. Personal knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development. In: HIEBERT, J.; BEHR, M. **Number concepts and operations in the middle grades**. Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 1988.

LOPES, José Antonio. **O que nosso alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações**. Bolema, Rio Claro (SP), Ano 21, nº 31, 2008, p. 1 a 22.

LUNA, S. V. O falso conflito entre tendências metodológicas. In: FAZENDA, I. (Org.). **Metodologia da pesquisa educacional.** São Paulo: Cortez,. p. 21-331999.

PONTE, J. P. **Estudos de caso em educação matemática**. Bolema**,** ano 21, nº 25, 2006. p.105-132.

MACHADO, S. D. A. (org.). **A aprendizagem em Matemática**: Registros de Representação Semiótica. Campinas, SP: 2003. (Coleção Papirus Educação)

MACHADO, Nilson José. **Epistemologia e Didática**: As concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente. 6 Ed. São Paulo: Cortez, 2005.

MACHADO, Cacilda Tenório Oliveira; MENEZES, Josinalva Estacio. **Concepções de professores que ensinam matemática sobre números fracionários, suas experiências e as implicações em suas práticas na 5ª série do ensino fundamental**. Educação Matemática em Revista. nº25, ano 13. 2008.

MACHADO, C. T. O. **Concepções epistemológicas de professores de matemática sobre números fracionários, suas experiências e as implicações em suas práticas na 5ª série do ensino fundamental**. Dissertação (Mestrado). Pernambuco: Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2007.

MAGINA, Sandra. CAMPOS, Tânia M. M. GATIRANA. Verônica. **Repensando adição, subtração**: contribuições da teoria dos campos conceituais. São Paulo: PROEM, 2001.

MAGINA, S. CAMPOS, T. A fração na perspectiva do professor e do aluno das séries iniciais da escolarização brasileira. **Boletim de Educação Matemática**,São Paulo, Vol. 21, No. 31, 2008.

MAGINA, S. BEZERRA, F.B. SPINILLO, A. Como desenvolver a compreensão da criança sobre fração? Uma experiência de ensino. **R. Bras. Est. pedag.**, Brasília, v.90, n.225, p.441-432, maio/ago. 2009.

MARANHÃO, M. C. S. A. IGLIORI, S. B. C. Registros de Representação e Números Racionais. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (org.). **A aprendizagem em Matemática**: Registros de Representação Semiótica. Campinas, SP: 2003. (Coleção Papirus Educação)

MERLINI, V. L. **O conceito de fração em seus diferentes significados**: um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2005.

MINAYO, M. C. S.. **O desafio do conhecimento**: pesquisa qualitativa em saúde. 9. ed. São Paulo: Hucitec, 2006.

MOREIRA, P. C. DAVID, M. M. M. S. **A formação matemática do professor:** licenciatura e prática docente escolar. Belo Horizonte: Autência, 2007.

MORETTI. M.T. **O papel dos registros de representação na aprendizagem matemática.** Contrapontos - ano 2 - n. 6 - p. 423-437 - Itajaí, set./dez. 2002

NACARATO, Adair. M. MENGALI, Brenda. L. S. PASSOS, Cármen. L. B. **A matemática nos anos iniciais do ensino fundamental**: tecendo fios do ensinar e do aprender. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2009.

NEVES, R. S. P. NASCIMENTO, A. M. P. BACCARIN, S. A. MUNIZ, C. A. **Formação inicial de professores de Matemática:** uma análise a partir dos dados do ENADE 2005. IX Encontro Nacional de Educação Matemática – diálogos entre pesquisa e prática educativa. Belo Horizonte, 2007.

NÓBREGA-THERRIEN, S. M. ; THERRIEN, Jacques. Os trabalhos científicos e o estado da questão. **Estudos em avaliação educacional.** Fundação Carlos Chagas. 2004.v.15. n. 30.p.5-16

NÓVOA, A. **Professores**: imagens do futuro presente. Lisboa: Editora EDUCA, 2009.

NUNES; Terezinha. BRYANT, Peter. **Crianças fazendo Matemática.** Tradução de Sandra Costa. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

_________et al. **The effect of situations on children´s understanding of fractions**. Trabalho apresentado à British Society for Research on the Learning of Mathematics, Oxford, June, 2003.

NUNES, Terezinha. Criança pode aprender frações. E gosta! In: GROSSI, Ester Pilar (org.). **Porque ainda há quem não aprende**? A teoria. Petrópolis, RJ: Vozes, 2003.

________ et al. **Educação Matemática 1**: números e operações numéricas. São Paulo: Cortez, 2005.

PEREZ, G. Formação de professores de matemática sob a perspectiva do desenvolvimento profissional. In: BICUDO, Maria A [org.]. **Pesquisa em educação matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999. – (Seminários & Debates)

PIAGET, J. **A gênese do número na criança**, trad. port. de Christiano Oiticica, Rio de Janeiro: Zahar, 1971.
PIMENTA, Selma Garrido. LIMA, Maria Socorro Lucena. **Estágio e Docência**. São Paulo: Cortez, 2004.

PIMENTA, S. G. Formação de professores: identidade e saberes da docência. IN: PIMENTA, Selma Garrido (org.). **Saberes Pedagógicos e a atividade docente**. São Paulo: Cortez, 2009.

________, S. G. (org.). **Saberes Pedagógicos e a atividade docente**. São Paulo: Cortez, 2009.

PINTO, M.; TALL, D. Student teachers' conception of the rational number. In: PUIG, l.; GUTIÉRREZ, A. (Ed.). **Proceeding of the 20th PME International Conference**, v. 4, . 139-146, 1996.

PONTE. J.P.M. Perspectivas de desenvolvimento profissional de professores de matemática. In: ______ et al. (Ed.). **Desenvolvimento profissional de professores de matemática**: que formação? Lisboa: SPCE, 1995.

PORTO, Raquel. **Frações na escola elementar**. PABAEE, Belo Horizonte. 1963.

SALES, José Álbio Moreira de; BARRETO, Marcília Chagas; NUNES, João Batista Carvalho; NUNES, Ana Ignez Belém Lima; FARIAS, Isabel, Maria Sabino de; MAGALHÃES, Rita de Cássia Barbosa Paiva (Orgs.). **Formação e práticas docentes**. Fortaleza: EdUECE, 2007.

SANTOS, A. **O conceito de fração em seus diferentes significados:** um estudo diagnóstico junto a professores que atuam no Ensino Fundamental. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2007.

SANTOS, FILHO, J. C.; GAMBOA, S. S. **Pesquisa educacional:** quantidade-qualidade. São Paulo: Cortez, 2002.

SPINILLO, Alina. Galvão; LAUTERT, Síntria. O diálogo entre a psicologia do desenvolvimento cognitivo e a educação matemática. In: Luciano Meira; Alina Spinillo. (Org.). **Psicologia Cognitiva**: cultura, desenvolvimento e aprendizagem. 1 ed. Recife: Universitária da UFPE, 2006, v. 1, p. 46-80.

SAVIANI, Dermeval. **As concepções pedagógicas na história da educação brasileira.** Texto elaborado no âmbito do projeto de pesquisa "O espaço acadêmico da pedagogia no Brasil”, financiado pelo CNPq, para o “Projeto 20 anos do Histedbr”. Campinas, 25 de agosto de 2005.

SAVIANI, Dermeval. **História das idéias pedagógicas no Brasil**. Campinas, SP: Autores Associados, 2007. – (Coleção memória da educação)

_______, Dermeval. **A pedagogia no Brasil**: história e teoria. Campinas, SP: Autores Associados, 2008.

SCHÖN, Donald. **Educando o profissional reflexivo**: um novo design para o ensino e a aprendizagem. Tradução de Roberto Cataldo Costa. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000

SILVA, A. R. H. S. **Concepção do professor de matemática e dos alunos frente ao erro no processo de ensino e aprendizagem dos números racionais.** Dissertação (Mestrado). Pontifícia Universidade Católica do Paraná, 2005.

SANTOS, Aparecido Dos. **O conceito de fração em seus diferentes significados: um estudo diagnóstico junto a professores que atuam no Ensino Fundamental.** 2005. 203 f. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

SILVA, Carmen Silvia Bissoli. **Curso de pedagogia no Brasil**: história e identidade. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

SILVA, A. F. **O desafio do desenvolvimento profissional docente:** análise da formação continuada de um grupo de professores das séries iniciais do ensino fundamental, tendo como objeto de discussão o processo de ensino e aprendizagem de fração. Tese (Doutorado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2007.

SILVA, E.J. **Os significados dos números racionais desenvolvidos por professores e por autores de livros didáticos na EJA.** Dissertação (Mestrado). Universidade Cruzeiro do Sul, 2007.

SILVA, Maria José Ferreira da. AG ALMOULOUD, Saddo. **As operações com números racionais e seus significados a partir da concepção parte-todo**. Bolema, Rio Claro (SP), Ano 21, nº 31, 2008, p. 1 a 22.

SAEB. **Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica**. Brasília: MEC, 2001.

SHULMAN, L. S. Those who understanding: knowledge growth in teaching. **Educational Research**, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

SOARES, M. A. S. **Os números racionais e os registros de representação semiótica**: análise de planejamento das séries finais do Ensino Fundamental. Dissertação (Mestrado). Ijuí: Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, 2007.

SOUSA, A. C. G. **Representações Semióticas e formação docente para o trabalho com números e operações nos anos iniciais do ensino fundamental:** uma experiência de formação. Dissertação (Mestrado em Educação). Fortaleza: Universidade Estadual do Ceará, 2009.

SOUZA, J. M. L. **Enquadramento de Números Racionais em Intervalos de Racionais:** uma Investigação com Professores do Ensino Fundamental. Dissertação (Mestrado). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2006.

SPINILLO, A. G. O sentido de número e sua importância na Educação Matemática. In: BRITO, M. R. F. (org.). **Solução de problemas e a matemática escolar**. Campinas, SP: Editora Alínea, 2006.

STAKE, R. E. **Investigación com estudio de casos**. Madrid: Morata, 1998.

________________, R. E. Case studies. In: DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. (ed.) **Handbook of qualitative research**. London: Sage, 2000.

STREEFLAND, Lee. **How to teach fractions so as to be useful**. Utrecht: OW & OC, 1984.

________________. Charming fractions or fractions being charmed?, In Nunes,T. & Bryant, P. (Eds) **Learning and Teaching Mathematics** – An International perspective. East Sussex: Psychology Press, 1997. pp. 347-372.

TANURI, Leonor Maria. História da Formação de Professores. 500 anos de educação escolar. **Revista Brasileira de Educação**, São Paulo: ANPED, n.14, mai-ago. 2000.

THERRIEN, J. MAMEDE, M. LOIOLA, F. Trabalho docente e transformação pedagógica da matéria: alguns elementos da gestão dos conteúdos no contexto da sala de aula. In: SALES, José Álbio Moreira de; BARRETO, Marcília Chagas; NUNES, João Batista Carvalho; NUNES, Ana Ignez Belém Lima; FARIAS, Isabel, Maria Sabino de; MAGALHÃES, Rita de Cássia Barbosa Paiva (Orgs.). **Formação e práticas docentes**. Fortaleza: EdUECE, 2007.

VERGNAUD, Gerárd. **La théorie des champs conceptuels**. Recherches en Didactique des Mathématiques, v. 10, n. 23, 133-170, 1990.

VICENTINI, Paula Perin. LUGLI, Rosario Genta. **História da Profissão Docente no Brasil**: representações em disputa. São Paulo: Cortez, 2009.

VIZOLLI, I. . **Registro de representação semiótica no estudo de porcentagem**. In: Simpósio Internacional de Pesquisas em Educação Matemática - SIPEM, 2003, Santos. Anais II SIPEM, 2003.

YIN, R. K.. **Estudo de caso***:* planejamento e método. Porto Alegre: Bookman, 2001

APÊNDICES

APÊNDICES A – QUADRO COM O LEVANTAMENTO DO TRABALHOS DO ESTADO DA QUESTÃO

ANO	NÍVEL	AUTOR	TÍTULO	NÍVEL/MODALIDADE DE ENSINO	INSTITUIÇÃO
2005	Mestrado	Alciony Regina Herderico Souza Silva	Concepção do professor de matemática e dos alunos frente ao erro no processo de ensino e aprendizagem dos números racionais	5ª,6ª e 7ª anos do Ensino Fundamental	Pontifícia Universidade Católica do Paraná
2005	Mestrado	Aparecido dos Santos	O conceito de fração em seus diferentes significados: um estudo diagnóstico junto a professores que atuam no Ensino Fundamental	Ensino Fundamental	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
2007	Mestrado	Cacilda Tenório Oliveira Machado	Concepções epistemológicas de professores de matemática sobre números fracionários, suas experiências e as implicações em suas práticas na 5ª série do ensino fundamental	Anos iniciais do Ensino Fundamental	Universidade Federal Rural de Pernambuco
2007	Mestrado	Everaldo Jose da Silva	Os significados dos números racionais desenvolvidos por professores e por autores de livros didáticos na EJA	Educação de Jovens e Adultos	Universidade Cruzeiro do Sul
2008	Mestrado	Herika Nunes Torres Fonseca	Os números racionais nos anos iniciais do ensino fundamental: investigando saberes docentes	Docentes dos anos iniciais do Ensino Fundamental	Universidade Federal de Minas Gerais
2006	Mestrado	Janaína Maria Lage de Souza	Enquadramento de Números Racionais em Intervalos de Racionais: Uma Investigação com Professores do Ensino Fundamental	Docentes dos anos finais do Ensino Fundamental	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
2006	Mestrado	Raquel Factori Canova	Crença, concepção e competência dos professores do 1º e 2º ciclos do ensino Fundamental com relação à fração	Docentes dos Anos Iniciais do EF	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
2007	Mestrado	Maria Arlita da Silveira Soares	Os números racionais e os registros de representação semiótica: análise de planejamento das séries finais do Ensino Fundamental	Ensino Fundamental	Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul

Quadro 7: Estudos com ênfase nas práticas e concepções docentes relativas à fração e número racional.

ANO	NÍVEL	AUTOR	TÍTULO	NÍVEL/MODALIDADE DE ENSINO	INSTITUIÇÃO
2007	Doutorado	Alécio Damico	Uma investigação sobre a formação inicial de professores de matemática para o ensino de números racionais no ensino fundamental	Ensino Superior/ Formação Inicial	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
2007	Doutorado	Angélica da	O desafio do desenvolvimento	Formação	Pontifícia

		Fontoura Garcia Silva	profissional docente: análise da formação continuada de um grupo de professores das séries iniciais do ensino fundamental, tendo como objeto de discussão o processo de ensino e aprendizagem de fração	Continuada/Docentes dos anos iniciais do Ensino Fundamental	Universidade Católica de São Paulo
2007	Mestrado	Maria Jose Costa Dos Santos Barros	Reaprender frações por meio de oficinas pedagógicas: desafio para a formação inicial	Ensino Superior/Formação Inicial	Universidade Federal Do Ceará

Quadro 8: Estudos com ênfase na formação de professores para o trabalho com a fração e número racional.

APÊNDICE B – ROTEIRO DE PERGUNTAS

IDENTIFICAÇÃO

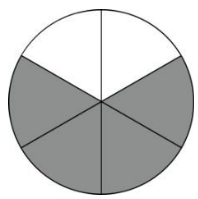
Abreviatura do nome:____________________ Semestre:____________

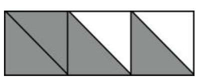
Cursou: ☐ Matemática na Educação Infantil e nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

☐ Matemática na Educação Infantil e nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental II.

PARTE 1: DOMÍNIO CONCEITUAL

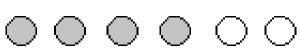
1ª) Identifique abaixo as formas corretas para representar a fração $\frac{4}{6}$:

a)  b) 

c)  d) Quatro sextos

e) 0,66 f) $4 \div 6$

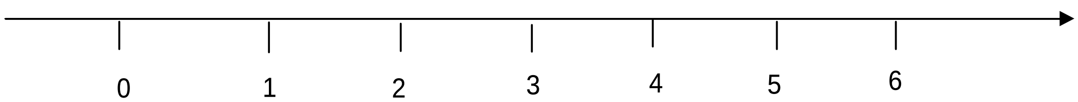
g) 4 x 6 h) 4 + 6

i) 

2ª) O que é fração? Em que contextos ou situações você percebe que utiliza a fração?

3ª) A fração 7/9 possui um antecessor e um sucessor? Se sim, quais?

4ª) Marque na semi-reta numerada abaixo a localização **aproximada** dos pontos correspondentes a $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{6}{4}$; $\frac{15}{4}$.



5ª) Duas garotas estão fazendo um suco. A receita indica que elas devem usar um terço de suco concentrado e dois terços de água. Elas querem fazer 18 litros de suco. Quanto de suco e quanto de água deve ser usado? **Resolva utilizando o registro figural**.

6ª) Represente o número racional *dois terços* de quatro maneiras diferentes.

7ª) Converta as representações:

7.1) Do registro decimal para o registro da fração:

a) 0,87 → ________

b) 1,55 → ________

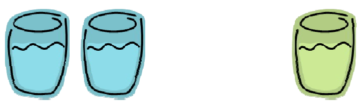
7.2) Do registro da fração para o registro decimal:

a) $\frac{3}{7}$ → ________

b) $\frac{5}{4}$ → ________

PARTE II: DOMÍNIO DIDÁTICO

1ª) Para fazer uma jarra de limonada Pedro usou dois copos de água para cada copo de suco de limão. Que fração representa a quantidade de suco de limão presente nesta mistura?



Um aluno do 4ª ano do Ensino Fundamental deu a seguinte resposta:

A fração de suco de limão é $\frac{1}{2}$

a) Explique o raciocínio dessa criança
b) Você considera que a representação do problema com os desenhos facilitou ou dificultou a compreensão da questão pela criança?
c) Que outra representação você utilizaria?

2ª) Nas situações abaixo, que elementos você destacaria como possíveis dificuldades de compreensão por parte das crianças? Que diferença você percebe entre as situações?

I)Represente o número 3/24 na reta numérica.

II)Alice ganhou 3 tortas e deve distribuí-las igualmente entre suas 4 irmãs. Que fração representa a quantidade de torta que cada irmã receberá?

III) Em uma loja restam no estoque 6 camisas do mesmo tamanho e formato. 4 camisas são brancas e 2 camisas são verdes. Que fração representa a quantidade de camisas verdes em relação ao total de camisas da loja?

IV) Maurício participará de um jogo. Dentro de uma caixa foram colocadas 3 bolas vermelhas e 5 bolas amarelas. Sem ver, Maurício deverá tirar uma das bolas da caixa. Se a bola for vermelha ele ganhará o jogo. Que fração representa a chance de Maurício de ganhar o jogo?

V) Jorge é maratonista e treina três vezes por semana. Na segunda-feira ele levou 30 min e 18,3 segundos para realizar seu trajeto. Na quarta-feira ele levou 30 min e 17,1 segundos. Por fim, na sexta-feira ele levou 30 minutos e 19,0 segundos. Jorge tem conseguido melhorar seu tempo de corrida?

VI) Camila recebe 200 reais de mesada por mês. Ela gasta $\frac{2}{3}$ da sua mesada com roupas. Quanto ela gasta com roupa?

3ª) Na sua percepção, por que a fração está incluída como um dos conteúdos obrigatórios a serem estudados nos anos iniciais?

4ª) Elabore uma questão para alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental envolvendo o conteúdo de fração.