UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
FACULDADE DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E LETRAS DE IGUATU
CURSO DE GRADUAÇÃO EM FÍSICA

FRANCISCO TIAGO BARBOZA SAMPAIO

EQUAÇÃO DE DIFUSÃO NA TEORIA DE HORAVA-LIFSHITZ: UM ELO ENTRE FÍSICA TEÓRICA E EXPERIMENTAL

IGUATU-CEARÁ
2017

Francisco Tiago Barboza Sampaio

EQUAÇÃO DE DIFUSÃO NA TEORIA DE HORAVA-LIFSHITZ: UM ELO ENTRE FÍSICA TEÓRICA E EXPERIMENTAL

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura Plena em Física da Faculdade de Educação, Ciências e Letras de Iguatu - FECLI como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciado em Física.

Orientador: Prof. Dr Celio Rodrigues Muniz.

IGUATU-CEARÁ

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Universidade Estadual do Ceará

Sistema de Bibliotecas

S192e Sampaio, Francisco Tiago Barboza.
Equação de difusão na teoria de Horava-Lifshitz: um elo entre Física teórica e experimental [recurso eletrônico] / Francisco Tiago Barboza Sampaio. - 2017.
1 CD-ROM: il.; 4 ¾ pol.

CD-ROM contendo o arquivo no formato PDF do trabalho acadêmico com 37 folhas, acondicionado em caixa de DVD Slim (19 x 14 cm x 7 mm).

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) - Universidade Estadual do Ceará, Faculdade de Educação, Ciências e Letras de Iguatu, Graduação em Física, Iguatú, 2017.
Orientação: Prof. Dr. Celio Rodrigues Muniz.

1. Difusão. 2. Relatividade. 3. Horava-Lifshitz. I. Título.

CDD: 530.07

FRANCISCO TIAGO BARBOZA SAMPAIO

EQUAÇÃO DE DIFUSÃO NA TEORIA DE HORAVA-LIFSHITZ: UM ELO ENTRE FÍSICA TEÓRICA E EXPERIMENTAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Física da Faculdade de Educação, Ciências e Letras de Iguatu da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para à obtenção do grau de Licenciada em Física.

Aprovada em: 24 de janeiro de 2017.

BANCA EXAMINADORA

Célio Rodrigues Muniz

Prof. Dr. Célio Rodrigues Muniz (Orientador)
Faculdade de Educação, Ciências e Letras de Iguatu - FECLI
Universidade Estadual do Ceará - UECE

Mykaell Martins da Silva

Prof. Mykaell Martins da Silva
Faculdade de Educação, Ciências e Letras de Iguatu - FECLI
Universidade Estadual do Ceará - UECE

Leonardo Tavares de Oliveira

Prof. Me. Leonardo Tavares de Oliveira
Faculdade de Educação, Ciências e Letras de Iguatu - FECLI
Universidade Estadual do Ceará - UECE

A Deus, a toda minha família, pelo apoio, incentivo e companheirismo. Ao meu orientador Prof. Celio Rodrigues Muniz por todos os saberes compartilhados. Ao Prof. Leonardo Tavares de Oliveira por toda a ajuda fornecida no decorrer deste trabalho.

“A persistência é o caminho do êxito.”

(Charles Chaplin)

Resumo

Por meio das equações de derivadas parciais, discutimos os processos de difusão relativístico e não relativístico, incluindo suas soluções. Em primeiro lugar, estuda-se a Equação de Difusão Clássica (EDC), a qual descreve o movimento totalmente aleatório de partículas microscópicas com baixas velocidades (energias). É importante destacar que é apresentado também, neste trabalho, uma prática experimental desenvolvida por analogia, que objetivou evidenciar a difusão nos casos unidimensional e bidimensional. Primeiramente, fez-se necessário uma ampla pesquisa bibliográfica acerca de processos difusivos e, em especial, o estudo e aplicações do Movimento Browniano. Utilizando um gerador de abalos mecânicos, fez-se uma adaptação para o caso de difusão, já que o gerador era utilizado para evidenciar conceitos de oscilações mecânicas. A este aparelho foi acoplada uma superfície de vidro, lugar onde as partículas, simuladas por pequenas esferas de metal, irão sofrer difusão aleatória. É importante destacar que analisa-se tanto o caso unidimensional como o bidimensional. Destaca-se também a importância do experimento como ferramenta lúdica para o ensino de processos difusivos, que pode ser aplicada, facilmente, em aulas de física e química. Em seguida, tratam-se das equações que descrevem o comportamento difusivo em altas energias, inclusive no contexto de teorias de gravidade quântica, notadamente na de Horava-Lifshitz. Esta teoria surgiu em 2009 como proposta alternativa para se compatibilizar uma teoria de gravidade geométrica com os princípios da mecânica quântica na escala de Planck, compatibilização que não é possível de se encontrar consistentemente na gravidade de Einstein. A nova equação foi obtida a partir da continuação analítica da equação de Schroedinger relativística, com o laplaciano devidamente modificado a partir da introdução de um expoente crítico z nas derivadas espaciais, o que implica a quebra de simetria de Lorentz, que é uma das principais características da teoria de Horava - Lifshitz, resultando numa ruptura da isotropia espaço-temporal que se manifesta no processo de difusão, evidenciada por meio do cálculo da dimensão espectral.

Palavras-chaves: Difusão. Relatividade. Horava-Lifshitz.

Abstract

Through the partial derivative equations, we discuss relativistic and non-relativistic diffusion processes, including their solutions. Firstly, we study the Classical Diffusion Equation (EDC), which describes the totally random motion of microscopic particles with low velocities (energies). It is important to highlight that this work presents an experimental practice developed by analogy, which aimed to evidence the diffusion in one-dimensional and two-dimensional cases. Firstly, an extensive bibliographical research about diffusive processes and, in particular, the study and applications of the Brownian Movement was necessary. Using a mechanical quenching generator, an adaptation was made for the diffusion case, since the generator was used to evidence concepts of mechanical oscillations. To this apparatus was coupled a glass surface, where the particles, simulated by small metal spheres, will undergo random diffusion. It is important to note that both the one-dimensional and the two-dimensional case are analyzed. We also highlight the importance of the experiment as a playful tool for the teaching of diffusive processes, which can be easily applied in physics and chemistry classes. Next, we discuss the equations that describe the diffusive behavior at high energies, including in the context of theories of quantum gravity, especially in Horava-Lifshitz. This theory emerged in 2009 as an alternative proposal to reconcile a theory of geometric gravity with the principles of quantum mechanics in the Planck scale, compatibilization that can not be found consistently in Einstein's gravity. The new equation was obtained from the analytical continuation of the relativistic Schroedinger equation, with the Laplacian duly modified from the introduction of a critical exponent z in the spatial derivatives, which implies the breaking of Lorentz symmetry, which is one of the main characteristics Of the Horava-Lifshitz theory, resulting in a rupture of the space-time isotropy manifested in the process of diffusion, evidenced by the calculation of the spectral dimension.

Keywords: Difusion. Relativity. Horava-Lifshitz.

Lista de Figuras

Sumário

1 INTRODUÇÃO

A difusão é o processo ou efeito de difundir, espalhar, propagar ou divulgar. Os estudos iniciais acerca da difusão foram feitos pelo Químico Thomas Graham (1805-1869). Seus trabalhos ficaram concentradas no tocante à difusão de gases e líquidos. Posteriormente, Adolf Eugen Fick (1829-1901), professor de anatomia da Universidade de Zurique, propôs uma lei que descreve de forma quantitativa processos difusivos, sendo então conhecida como Lei de Fick da Difusão. Tal proposta é representada através de uma equação diferencial que, por sua vez, versa inúmeros casos de difusão de matéria ou energia em meios onde inicialmente não existe equilíbrio.

Os processos difusivos são muito comuns na natureza, e fazem com que as partículas encaminhem-se para o seu estado de equilíbrio. Fisicamente, podemos definir que a difusão é o processo pelo qual as partículas de um material se difundem num espaço que antes estava ausente, levando este material para o estado de equilíbrio. O efeito de difundir acontece com partículas em movimento totalmente irregular e aleatório em nível subatômico. Deste modo, a difusão advém de colisões microscópicas e estocásticas. Um exemplo clássico de processos difusivos é o conhecido movimento browniano (MOYSÉS, 2002). O Movimento Browniano foi proposto por Robert Brown, em 1827. O movimento consiste em partículas com oscilações altamente irregulares submersos em um fluido. Esta ação serve para descrever vários processos de difusão que ocorrem na natureza e na sociedade, como condutividade térmica em metais e oscilações no mercado financeiro, entre outros. Os estudos de Brown puderam ser comprovados por Einstein que, em 1905, publicou um artigo que explicava de forma detalhada como o que Brown tinha observado era o resultado do pólen sendo movido por moléculas de água. É destacável que, neste trabalho, realizaremos uma prática experimental feita por analogia. Desta forma, mostraremos de maneira macroscópica um fenômeno que acontece microscopicamente, a saber: difusão. A prática é feita com alguns materias acessíveis e pode servir como ferramenta de auxílio pedagógico para o ensino de física e química.

A Equação de Difusão Clássica (EDC) é uma equação em derivadas parciais que descreve processos difusivos em escalas de baixas velocidades quando comparadas com a velocidade da luz. Podemos obter tal equação, facilmente, combinando a Lei de Fick de Difusão com a Equação da Continuidade. Vale destacar que a Equação Diferencial é de primeira ordem na coordenada temporal e de segunda ordem nas coordenadas espaciais. Por outro lado, quando se passa para escalas de altas velocidades, ou seja, altas energias, não existe ainda um consenso em relação a qual equação descreve melhor processos de difusão. Dessa maneira, faz-se necessário alguma proposta de equação que governe de forma correta a difusão em escalas de altas velocidades. Assim, após vários estudos de alguns cientistas, foi proposto inicialmente uma equação chamada de equação do telégrafo (ET). O nome advém do fato ser equação similar a equação do telegrafista, a qual é geralmente usada em estudos para a monitoração do fluxo de uma corrente elétrica.

Podemos deduzir tanto a EDC quanto a ET através de um problema clássico da Física Estatística, a saber: o caminhante aleatório (SALINAS, 1997). Com relação à ET, tem-se uma equação de segunda ordem na variável temporal e nas coordenadas espaciais, porém essa equação ainda apresenta algumas dificuldades em sua interpretação e derivação. Sendo assim, é usada uma nova proposta para descrever processos nessa complexidade, a chamada: Equação de Schroedinger Relativística Analiticamente Continuada (ESRAC). A ESRAC, como a ET, é compatível com os princípios da Relatividade Restrita de Einstein (simetria de Lorentz), e contorna algumas dificuldades que surgem nesta última, como em sua derivação a partir de argumentos estocásticos.

Um estudo interessante que pode ser feito é verificar quais as consequências de se violar explicitamente a simetria de Lorentz tanto na ET quanto na ESRAC. Petr Horava, com efeito, fez isso com a ET em 2009, ao introduzir sua teoria de gravitação quântica, conhecida como Teoria de Horava-Lifshitz. Tal teoria propõe resolver dificuldades encontradas ao se descrever diversos processos em altas energias, na escala de Planck ou além, incluindo-se aí a difusão. A ideia resume-se a tornar compatíveis conceitos de gravidade geométrica com os princípios da mecânica quântica, algo que não fica bem evidenciado utilizando-se a Teoria da Relatividade Geral de Einstein.

Posto tudo isso, este trabalho visa discutir aspectos de Física Moderna e Contemporânea a partir do fenômeno da difusão, tanto do ponto de vista teórico quanto experimental, incluindo-se aí tópicos de Ensino. Na seção Difusão Clássica, iremos discorrer sobre a EDC e suas principais caracteristicas, bem como mostrar formas de a deduzir e sua respectiva solução. Na seção seguinte, abordamos a prática experimental passo a passo, desde sua construção até as possíveis aplicações no ensino. A seção 4 versa sobre a Difusão Relativística, incluí-se aí a ET e a ESRAC, suas deduções e respectivas soluções. A quinta seção trata da Relatividade e a Teoria de Horava-Lifshitz, destacamos os principais aspectos, como as transformações de Lorentz e comprimento de Planck. Na sexta seção, propomos uma equação de difusão que seja totalmente compatível com os princípios de gravidade e da mecânica quântica, fazendo a quebra de simetria de Lorentz em altas energias, marca gravada da Teoria de Horava-Lifshitz. A equação encontrada será, dessa maneira, corretamente trabalhada em diversas aplicações, sendo a principal delas o cálculo da dimensão espectral do espaço-tempo em altas energias.

2 DIFUSÃO CLÁSSICA

2.1 EQUAÇÃO DE DIFUSÃO CLÁSSICA

A equação clássica da difusão (EDC) é uma equação em derivadas parciais que descreve o transporte de partículas microscópicas devido ao seu movimento balístico e as múltiplas e aleatórias colisões que sofrem com outras partículas do meio. Uma forte característica da ECD é o fato de ser uma equação diferencial parcial linear de primeira ordem no tempo e de segunda ordem nas coordenadas espaciais, tendo assim espaço e tempo características distintas, o que a torna incompatível com os postulados da Relatividade Restrita de Einstein, e é válida, portanto, para baixas velocidades quando comparadas à velocidade da luz.

Uma forma simples de demonstração da EDC, é utilizando a primeira lei de Fick da difusão, juntamente com a equação da continuidade (WEISS, 1996). Suponha uma substância com densidade $\rho = \rho(\mathbf{r},t)$, que se difunde em um meio. A primeira lei de Fick, a que diz respeito a corrente de difusão $\mathbf{j}$, é expressa da seguinte forma

$$\mathbf{j} = -D\nabla\rho, \tag{2.1}$$

onde D é chamado de coeficiente de difusão, e o sinal negativo implica que a substância difunde-se do meio mais denso para o meio menos denso. Por sua vez, a equação da continuidade, que explicita a conservação da substância dentro de um volume V, é descrita por

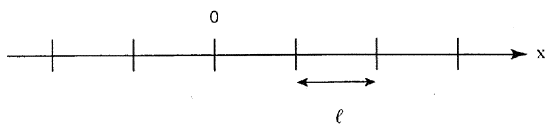
$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{j} = 0. \tag{2.2}$$

Combinando a primeira lei de Fick (2.1) com a equação da continuidade (2.2), tem-se a chamada ***Equação de Difusão Clássica***

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = D\nabla^2\rho. \tag{2.3}$$

Outra maneira de encontrar a EDC é utilizando um problema clássico da Física Estatística, chamado *problema do caminhante aleatório* (SALINAS, 1997). O processo consiste em um indivíduo que, em intervalos de tempo fixo τ, se desloca em linha reta, a partir da origem, dando passos de comprimentos iguais a l para a direita ou para a esquerda, com probabilidades independentes de posição p e $q = 1 - p$, respectivamente, onde $p + q \leq 1$, ou o caminhante aleatório permanecera na mesma posição com probabilidade $1 - p - q$.

Figura 1: *Caminho aleatório, passos de comprimento l, sobre eixo Ox.*



Fonte: Elaborada pelo autor.

A probabilidade total do indivíduo se encontrar na posição x após um intervalo de tempo t, é

$$\rho(x,t) = \rho(x,t-\tau)(1-p-q) + \rho(x-l,t-\tau) + \rho(x+l,t-\tau),$$

onde como o caminhante está na posição x num tempo t, implica que o mesmo, anteriormente, estava na posição $x - l$ e movendo-se para direita (probabilidade p), ou na posição $x + l$ e deslocando-se para esquerda (probabilidade q), ou permanece no mesmo local inicial (probabilidade $1 - p - q$). Com isso, se fizermos a expansão de cada termo da última equação acima como série de Taylor, tem-se

$$\tau\frac{\partial \rho}{\partial t} = l(p-q)\frac{\partial \rho}{\partial x} + l^2(p+q)\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + O(\tau^2) + O(l^3). \tag{2.4}$$

Definindo os parâmetros,

$$u = \lim_{\varepsilon,l,\tau\to 0}\frac{\varepsilon\, l}{\tau} \quad \text{e} \quad D = \lim_{l,\tau\to 0}\frac{\kappa\, l^2}{\tau},$$

onde $\varepsilon = q - p$ e $\kappa = p + q$. Por fim, dividindo a equação (2.4) por τ e tomando os limites dados acima, tem-se

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -u\frac{\partial \rho}{\partial x} + D\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}. \tag{2.5}$$

A equação (2.5) é a equação clássica de difusão na qual levamos em consideração a velocidade u

do indivíduo que se desloca para esquerda ou direita. Caso $p = q$ implica que $u = 0$ e retornamos a equação (2.3) unidimensional que descreve o movimento Browniano. Já para uma análise em três dimensões desse problema, leva ao processo de difusão de moléculas gasosas. Deste modo, a equação que governa esse processo de difusão será a EDC, como vista em (2.3), mas levando em consideração a velocidade em que o caminhante desloca-se para a esquerda ou para direita.

A solução da EDC vista acima tem ampla aplicação em processos da natureza e da sociedade, como a difusão de nutrientes no oceano (OKUBO, 2010), sociais e econômicos, como a difusão de novos produtos no mercado (MAHAJAN, 1985). Porém, quando se passa à escala de velocidades relativísticas, presentes em inúmeros fenômenos astrofísicos e cosmológicos, ainda não existe um consenso sobre a forma da equação de difusão, bem como as interpretações físicas das suas soluções (HERRMANN, 2009). Assim, os estudos sobre processos de difusão relativística foram realizados por vários autores, na qual obtiveram inicialmente uma proposta de equação chamada de equação do telégrafo.

2.1.1 Solução da EDC

A Equação Clássica de Difusão, como vista anteriormente, para o caso o unidimensional, é dada por:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \tag{2.6}$$

para $p = p(x,t)$ e $p(x,0) = \delta(x)$, onde $\delta(x)$ é a função delta de Dirac

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \neq 0; \\ \infty, & \text{se } x = 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

com

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1.$$

Encontraremos a solução da EDC usando as transformadas de Fourier (T.F). Inicialmente, temos que a T.F de uma função f é dada por:

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t)e^{ikx}dx, \tag{2.8}$$

assim $-k^2\hat{f}(k)$ é a T.F de $\Delta f(x)$. Com isso, $\hat{p}(k,t)$ é:

$$\hat{p}(k,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,t)e^{ikx}dx.$$

Aplicando a T.F na EDC, obtemos:

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \frac{\partial p}{\partial t} dx$$

assim,

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial t} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,t) e^{ikx} dx \right),$$

portanto,

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial t}(k,t) = \frac{d}{dt}[\hat{p}(k,t)],$$

no entanto, usando o fato que $\widehat{f''}(x) = -k^2 f(x)$, logo

$$\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial t^2}(k,t) = -k^2 \hat{p}(k,t)$$

voltando a EDC, tem-se

$$\frac{d}{dt}[\hat{p}(k,t)] = -Dk^2 \hat{p}(k,t) \tag{2.9}$$

cuja sua solução é

$$p(x,t) = C_1 e^{-Dk^2 t} \tag{2.10}$$

Onde C_1 é uma constante. Para $\hat{p}(k,0)$ tem-se que $\hat{p}(k,0) = C_1 e^{-Dk^2.0}$, o que equivale a $\hat{p}(k,0) = C_1$. A solução $p(x,t)$ é dada pela transformada inversa de Fourier (T.I.F), que é dado por:

$$p(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Dk^2 t + ikx} dk \tag{2.11}$$

completando os quadrados e resolvendo a integral, temos:

$$p(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-x^2/4Dt}, \tag{2.12}$$

é a solução da EDC. A solução acima tem o comportamento de uma distribuição Gaussiana em relação a x.

3 PRÁTICA EXPERIMENTAL POR ANALOGIA - MOVIMENTO BROWNIANO

Não é de hoje que o ensino da Física, assim como a educação em geral, apresentam muitas dificuldades (ARAÚJO e ABIB, 2003); em se tratando do ensino de ciências, o desafio é ainda maior, pois os alunos enfrentam a ciência, mais especificamente a física, como algo acabado e inaplicável. Pensando nisso, novas metodologias de ensino aplicáveis no ensino médio devem ser incorporadas com o objetivo de melhorar as práticas pedagógicas. Nesse sentido, é necessário relacionar o conteúdo explanado em sala de aula com os conhecimentos prévios do individuo, tornando assim a aprendizagem significativa.

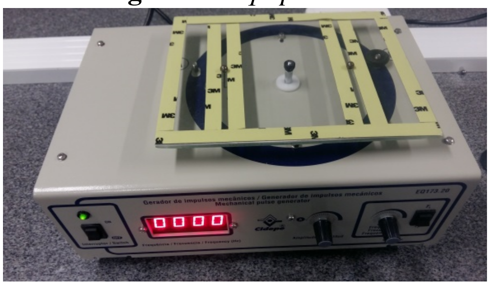
Os parâmetros curriculares nacionais (PCN) preveem a possibilidade do ensino de Física Moderna no âmbito do ensino médio, com o objetivo de tornar o aluno apto para investigar e entender fenômenos físicos relacionados à estrutura microscópica da matéria e suas propriedades. Nesse sentido, a presente seção traz uma proposta para o ensino de Física Moderna no ensino médio, de modo a utilizar um experimento obtido por analogia, que busca evidenciar de forma macroscópica um fenômeno que acontece microscopicamente, a saber: movimento browniano.

Primeiramente, foi necessária uma ampla pesquisa bibliográfica em artigos, livros e na rede mundial de computadores acerca dos tópicos: átomos, moléculas, difusão, e as possíveis metodologias de aplicação no ensino médio. Outro aspecto a considerar é que uma experiência que permite a manipulação de materiais pelos estudantes ou uma demonstração experimental pelo professor, nem sempre precisa estar associada a um aparato sofisticado. Importa à organização, discussão e reflexão sobre todas as etapas da experiência, o que propicia interpretar os fenômenos físicos e trocar informações durante a aula, seja ela na sala ou no laboratório (SEED, 2008). Desse modo, atividades mediadas por práticas experimentais auxiliam no processo ensino-aprendizagem.

Neste sentido, é possível realizar experimentos na sala de aula, ou mesmo fora dela, utilizando materiais de baixo custo, podendo contribuir para o desenvolvimento da criatividade dos alunos. É importante destacar que a importância de um laboratório bem equipado na condução de um bom ensino é indispensável, mas é possível superar a ideia de que a falta de um laboratório equipado justifique um ensino fundamentado apenas no livro texto (ROSITO, 2003). As atividades experimentais não requerem local específico nem carga horária e, portanto, podem ser realizadas a qualquer momento, tanto na explicação de conceitos, quanto na resolução de problemas, ou mesmo em uma aula exclusiva para a experimentação (SALVADEGO, 2008).

Para a construção do experimento, utilizamos o Laboratório de Pesquisa e Ensino de Física (LAPEF) da Faculdade de Educação, Ciências e Letras de Iguatu (FECLI). Utilizando um gerador de abalos, fez-se uma adaptação para o caso de difusão, já que o gerador era utilizado para evidenciar conceitos de oscilações mecânicas. Logo após, ao aparelho foi acoplada uma superfície retangular de vidro, lugar onde as partículas, simuladas por pequenas esferas metálicas, dessas encontradas em rolamentos de rodas de bicicleta, irão sofrer difusão aleatória. A figura abaixo mostra o equipamento depois da sua devida adaptação.

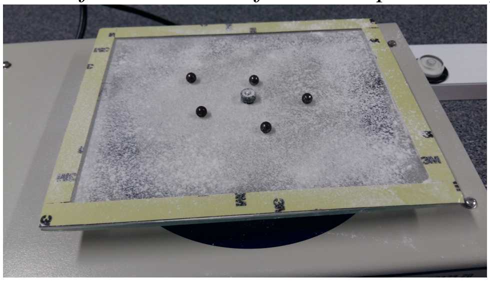
Figura 2: *Equipamento.*



Fonte: Elaborada pelo autor

Destacam-se os valores da frequência e amplitude associadas ao gerador de abalos, a saber, frequência estabelecida em 13Hz e amplitude máxima do gerador. O valor citado é a frequência de ressonância do sistema, na qual as esferas começarão efetivamente a "difundir" sobre o vidro. Primeiramente, encontramos dificuldades para visualizar a difusão das esferas, pois utilizamos uma superfície mais massiva, e que possuía dimensões de 19cm x 24cm, o que dificultou a vibração e o movimento aleatório das mesmas. Já utilizando uma superfície com dimensão de 22 cm x 18cm encontramos melhores resultados. Notamos a difusão das esferas em todas as direções da superfície vítrea. Procuramos alternativas para marcar a trajetória das esferas na superfície, várias ideias foram testadas, entretanto algumas sem êxito. Tentamos utilizar tinta fresca nas esferas, assim sua trajetória ficaria marcada na superfície, mas a difusão não ocorreu devido o atrito entre a esfera pintada e a superfície de vidro ter aumentado. Outra tentativa e a mais viável foi utilizar pó de fermento de bolo, com essa alternativa pudemos ver, de fato, a difusão aleatória das esferas. A imagem abaixo ilustra a plataforma adaptada com o pó que marcará a trajetórias das esferas.

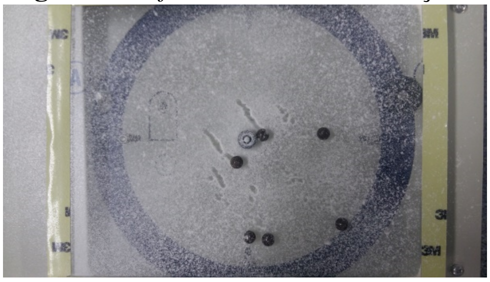
Figura 3: *Plataforma onde as esferas irão se difundir e o pó usado para marcar a trajetória .*



Fonte: Elaborada pelo autor

A figura a seguir ilustra a trajetória totalmente irregular das esferas, caracterizando a analogia feita entre o experimento e a difusão em todas as direções.

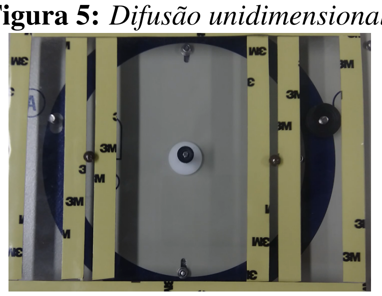
Figura 4: *Difusão em todas as direções.*



Fonte: Elaborada pelo autor

Além da adaptação feita para o caso da difusão em várias direções, também foi feita a analogia para o caso unidimensional. Para que isso fosse possível, foi utilizado fita dupla face em duas partes da superficie, possibilitando assim o deslocamento da esfera apenas em um eixo. Neste caso, não foi necessário o uso do pó de fermento de bola para marcar a trajetória da esfera. A figura abaixo evidencia a difusão em apenas uma direção. É importante salientar que os valores de frequência e amplitudade do gerador de abalo foram mantidas as mesmas nas duas tentativas.

Figura 5: *Difusão unidimensional.*



Fonte: Elaborada pelo autor

Por fim, destaca-se a importância do experimento como ferramenta lúdica para o ensino de processos difusivos, que pode ser aplicado, facilmente, em aulas de física e química.

4 DIFUSÃO RELATIVÍSTICA

4.1 EQUAÇÃO DO TELÉGRAFO

Os primeiros estudos detalhados sobre processos de difusão relativística foram realizados de forma independente por Rudberg em 1957 (RUDBERG, 1957), e Schay em 1961 (SCHAY, 1961). O interesse por tais processos aumentou na década de 1980 e 1990, quando vários autores consideraram a possibilidade de estender quantização estocástica para o quadro da Relatividade Especial. Em outras palavras, segundo esses autores, qualquer generalização relativística da EDC com coeficientes constantes deve ser de pelo menos segunda ordem no tempo. Porém, o problema é que a equação sugerida continua com o termo de primeira ordem na variável temporal e de segunda ordem nas variáveis espaciais - a chamada equação do telégrafo (ET). Seu nome advém do fato dela apresentar as mesmas características da equação que descreve sinais eletromagnéticos num condutor (REITZ, 1982), podendo ser ser formalmente obtida por simples substituição na EDC do operador Laplaciano pelo d'Alambertiano e a derivada temporal pela derivada com relação ao tempo próprio τ. O operador D'Alambertiano é definido como:

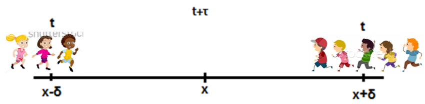
$$\Box = \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

A derivação microscópica estocástica da ET é baseada, também, em uma abordagem de caminhada aleatória para os processos de difusão. A descrição de tal fenômeno consiste em supor o movimento de uma população de caminhantes aleatórios dado por $\rho = \alpha + \beta$, na qual α são os individuos que se desloca para a direita e β os que se movem para a esquerda, todos estes em uma linha unidimensional com velocidade constante v, como ilustra a figura 6.

No entanto, a cada intervalo de tempo τ os indivíduos deslocacam-se por uma distância δ, na qual pode ser: na mesma direção e sentindo que eles estavam se movendo, com probabilidade

$$q = 1 - \lambda\tau,$$

Figura 6: *População de caminhantes aleatórios.*



Fonte: Elaborada pelo autor

ou com probabilidade de mudança na direção e sentido igual a

$$r = \lambda\tau.$$

Se tomarmos um passo de tempo a frente, implica que a densidade de número de indivíduos na posição x movendo para a direita ou esquerda, é dada por

$$\alpha(x,t+\tau) = q\alpha(x-\delta,t) + r\beta(x-\delta,t),$$

$$\beta(x,t+\tau) = r\alpha(x+\delta,t) + q\beta(x+\delta,t).$$

Fazendo a expansão em série de Taylor e substituindo q e r pelos seus respectivos valores, tem-se

$$\begin{aligned}
\alpha + \tau\frac{\partial\alpha}{\partial t} &= \alpha - \delta\frac{\partial\alpha}{\partial x} - \lambda\tau\alpha + \lambda\tau\delta\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \lambda\tau\beta - \lambda\tau\delta\frac{\partial\beta}{\partial x} + O(\tau^2) + O(\delta^2),\\
\beta + \tau\frac{\partial\beta}{\partial t} &= \beta - \delta\frac{\partial\beta}{\partial x} - \lambda\tau\beta - \lambda\tau\delta\frac{\partial\beta}{\partial x} + \lambda\tau\alpha + \lambda\tau\delta\frac{\partial\alpha}{\partial x} + O(\tau^2) + O(\delta^2).
\end{aligned}$$

Por sua vez, se dividir estas últimas equações acima por τ e tomando o limite, tal que $\dfrac{\delta}{\tau} \to v$ com $\delta, \tau \to 0$, obtém-se

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} = -v\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \lambda(\beta - \alpha), \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial t} = v\frac{\partial\beta}{\partial x} - \lambda(\beta - \alpha). \tag{4.2}$$

Com as equações (4.1) e (4.2) podemos derivar a seguinte expressão

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} + 2\lambda\frac{\partial\rho}{\partial t} = v^2\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}, \tag{4.3}$$

tal igualdade é chamada de ***equação do telégrafo***.

Apesar da ET ser uma equação de relativística que descreve processos difusivos, contudo a mesma apresenta dificuldades advindas da derivação e interpretação da ET baseadas em fenômenos estocásticos microscópicos. Assim é feito o uso de uma equação alternativa para a descrição adequada dos fenômenos de difusão relativísticos - a chamada Equação de Schroedinger Relativística Analiticamente Continuada.

4.1.1 Solução da ET

A ET, como vista anteriormente é dada por:

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}+2\lambda\frac{\partial\rho}{\partial t}=v^2\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}. \tag{4.4}$$

A solução da ET pode ser dada a partir da transformada de Fourier da Equação do Telégrafo, na qual é dada por:

$$\psi(k,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{t(-\overline{m}+\sqrt{\overline{m}^2-c^2k^2})}$$

onde $k>\frac{\overline{m}}{c}$ e $a=\overline{m}=\frac{mc^2}{\hbar}$. Com isso, a solução da ET é dada a partir da Transformada Inversa de Fourier, ou seja,

$$\psi(x,t)=\Im\,\psi(x,t)$$

Assim,

$$\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{t(-\overline{m}+\sqrt{\overline{m}^2-c^2k^2})}e^{-ikx}dk$$

logo,

$$\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{[t(-\overline{m}+\sqrt{\overline{m}^2-c^2k^2})]-ikx}dk$$

é a solução da ET para $\overline{m}=\frac{mc^2}{\hbar}$. Por outro lado, observe que

$$\sqrt{\overline{m}^2-c^2k^2}=\sqrt{\frac{m^2c^4}{\hbar^2}-c^2k^2}$$

portanto,

$$\sqrt{\overline{m}^2-c^2k^2}=\frac{mc^2}{\hbar}\left(1-\frac{\hbar^2k^2}{m^2c^2}\right)^{1/2}$$

Agora, fazendo a expansão em Série de Taylor dos termos e considerando que os termos $>\Theta(\frac{1}{c^2})\to 0$, então

$$\sqrt{\overline{m}^2-c^2k^2}=\frac{mc^2}{\hbar}\left(1-\frac{1\hbar^2k^2}{2m^2c^2}\right)$$

então, segue que

$$\sqrt{\overline{m}^2-c^2k^2}=\frac{mc^2}{\hbar}-\frac{\hbar k^2}{2m}$$

logo,

$$t(-\overline{m}+\sqrt{\overline{m}^2-c^2k^2})=t-\frac{mc^2}{\hbar}+\frac{mc^2}{\hbar}-\frac{\hbar k^2}{2m}$$

assim,

$$t(-\overline{m}+\sqrt{\overline{m}^2-c^2k^2})=-\frac{\hbar k^2}{2m}.t$$

substituindo em

$$\psi(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{[t(-\overline{m}+\sqrt{\overline{m}^2-c^2k^2})]-ikx}dk$$

tem-se que

$$\psi(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int e^{\frac{-\hbar k^2 t}{2m}-ikx}dk$$

para resolver a integral acima, devemos completar os quadrados de $\frac{\hbar k^2 t}{2m}-ikx$, isto é,

$$-\frac{\hbar k^2 t}{2m}+kxi=-\sqrt{\frac{\hbar t}{2m}}k+\sqrt{\frac{2m}{\hbar t}}\frac{xi}{2}^2-\frac{mx^2}{2\hbar t}.$$

Seja $u=\sqrt{\frac{\hbar t}{2m}}k$, então $du=\sqrt{\frac{\hbar t}{2m}}dk$, com isso,

$$\psi(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int e^{-\sqrt{\frac{\hbar t}{2m}}k+\sqrt{\frac{2m}{\hbar t}}\frac{xi}{2}^2-\frac{mx^2}{2\hbar t}}dk$$

tem-se que,

$$\psi(x,t)=\frac{1}{2\psi\sqrt{\frac{\hbar t}{2m}}}e^{-mx^2/2\hbar t}$$

ou seja,

$$\psi(x,t)=\frac{\sqrt{\pi}}{\frac{4\pi^2\hbar t}{2m}}e^{\frac{x^2}{2\hbar t/m}}$$

Finalmente, obtem-se:

$$p(x,t)=\frac{e^{\frac{-x^2}{2\hbar/m}}}{\sqrt{2\pi\hbar t/m}} \tag{4.5}$$

que é solução da Equação do Telégrafo.

4.2 EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER RELATIVÍSTICA ANALITICAMENTE CONTINUADA

A equação de difusão relativística tem a pretensão de resolver os problemas da difusão em altas energias. Muitas foram as tentativas de propor um modelo para solucionar esses problemas, por exemplo a ET que apresenta dificuldades em sua derivação estocástica e interpretação. No entanto, tais propostas não foram suficientes. Porém, Baeumer em 2010 (BAEUMER, 2010) publicou em seu artigo uma conexão da equação de difusão com a Mecânica Quântica, ou seja, uma equação alternativa com o intuito de descrever de forma adequada os fenômenos de difusão relativísticos, sustentando que a lei matemática que descreve corretamente os processos de difusão relativístico é a chamada doravante de Equação de Schrödinger Relativística Analiticamente Continuada (ESRAC).

A dedução da ESRAC é construída, inicialmente, pelo operador energia cinética relativística de uma partícula massiva livre descrita na mecânica quântica, dada por

$$K = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} - mc^2. \tag{4.6}$$

Identificando p^2 com $-\Delta$ e K com $i\frac{\partial}{\partial t}$, e tomando $c = \hbar = 1$ na equação (4.6) tem-se

$$i\frac{\partial}{\partial t} = \sqrt{m^2 - \Delta} - m.$$

Por fim, se aplica a rotação de Wick, $t \to -i\tau$, para qual determina-se a expressão

$$i\frac{\partial \rho(x;\tau)}{\partial \tau} = (m - \sqrt{m^2c^4 - \Delta c^2})\rho(x;\tau). \tag{4.7}$$

A última equação obtida acima é a chamada de ESRAC, e parece descrever a difusão em altas energias melhor que a ET, sem ambiguidades, uma vez que o processo estocástico associado a ela não apresente frentes de ondas singulares que surgem nesta última.

A solução da ESRAC, que não demonstraremos aqui devido ao grau de complexidade, é dada por

$$P(\sigma) = Cd\int k^{(d-1)}\exp[\sigma(m - \sqrt{m^2 + k^2z})]dk. \tag{4.8}$$

5 RELATIVIDADE E TEORIA DE HORAVA-LIFSHITZ

Para discutir uma teoria de gravitação quântica, faz-se necessário, primeiramente, discutir aspectos da Teoria da Relatividade de Einstein.

5.1 A TEORIA DA RELATIVIDADE RESTRITA

A Teoria da Relatividade Restrista (TRR) surge a partir da incompatibilidade do eletromagnetismo de Maxwell frente às transformações de Galileu. A TRR foi publicada em 1905 por Einstein e é baseada em dois postulados, que seguem:

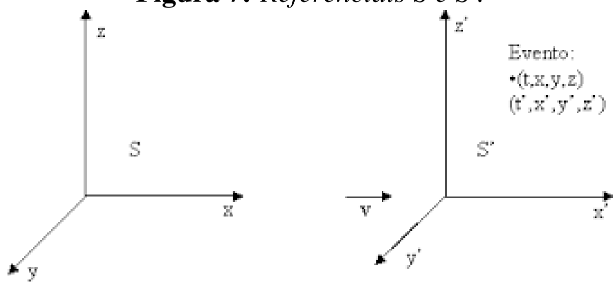
1. As leis físicas são as mesmas para todos os obervadores em qualquer referencial inercial.
2. A velocidade da luz no vácuo é constante para todos os observadores.

A TRR substitui a ideia da indepedência de espaço e tempo proposta por Sir Isaac Newton. Desta forma, na TRR tempo e espaço possuem as mesmas caracteristicas. O espaço-tempo na TRR é um objeto diferenciável quadrimensional, destas, três dimensões são espaciais e uma é temporal. Hendrik Lorentz (1853-1928) foi um físico Holandês que concentrou os seus estudos na Física do eletromagnetismo. Lorentz mostrou que as conhecidas equações de Maxwell não eram coerentes com a então conhecida Física Newtoniana. A Física de Newton era consolidada a partir das transformações de Galileu, porém as mesmas não tornavam as equações de Maxwell invariantes. Deste modo, Lorentz demonstrou transformações que tornam as equações de Maxwell invariantes, tais transformações ficaram conhecidas como transformações de Lorentz. As transformações de Galileu são aplicáveis em um universo de baixa energia, ou seja, de grandes distâncias. Assim, as transformações de Lorentz substituem as transformações de Galileu para um regime de altas velocidades. Para encontrar as transformações de Lorentz podemos utilizar uma das soluções das suas equações, ou seja, a equação de propagação de uma onda eletromagnética no vácuo. Para o caso unidimensional temos a seguinte equação de propagação de uma onda eletromagnética:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial^2 x} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \rho}{\partial^2 t} = 0 \tag{5.1}$$

Considere um referencial S' se movendo com velocidade v ao longo do eixo x, com os eixos y' e z' paralelos ao y e z, e x' coincidindo com x.

Figura 7: *Referênciais S e S'.*



Fonte: http://www.if.ufrgs.br/ thaisa/cosmologia/relrest.html

Fazendo-se uma transformação linear das coordenadas x,t para um referencial x',t' se movendo com velocidade v, temos:

$$x' = \alpha x - \beta t, \tag{5.2}$$

$$t' = \gamma x + \delta t. \tag{5.3}$$

Agora, iremos encontrar os fatores α, β, γ e δ, de tal forma que a equação da onda seja invariante para o novo referencial que se desloca com velocidade v. Resolvendo a equação da onda para os termos α, β, γ e δ, obtemos o que segue

$$\alpha^2 - \frac{\beta^2}{c^2} = 1 \tag{5.4}$$

deste modo,

$$\frac{c^2\gamma}{\beta} = 1 \tag{5.5}$$

logo,

$$\alpha = \delta \tag{5.6}$$

substituindo nas equações (5.2) e (5.3), obtemos:

$$x' = \alpha\left(x + \frac{\beta}{\alpha}t\right) \tag{5.7}$$

e

$$t' = \alpha\left(\frac{\beta}{c^2\alpha}x + t\right) \tag{5.8}$$

se compararmos com as transformações de Galileu, que seguem

$$x' = x - vt \tag{5.9}$$

e

$$t' = t \tag{5.10}$$

obervamos que

$$\frac{\beta}{\alpha} = -v, \tag{5.11}$$

assim

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{5.12}$$

Agora, substituindo α na transformação linear, encontramos a conhecida transformação de Lorentz, que são:

$$x' = \gamma(x - vt) \tag{5.13}$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \tag{5.14}$$

onde γ é o fator de Lorentz e é dado por:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{5.15}$$

5.2 TEORIA DE HORAVA-LIFSHITZ

Em 1915 Albert Einstein publicou a Teoria da Relatividade Geral (TRG), que leva em consideração aspectos previstos em sua TRR, porém incluindo-se a gravitação e referenciais acelerados. A correspondência entre tempo e espaço ainda continuam descrevendo vários fenômenos da natureza, pois a gravidade é entendendida como uma deformação do espaço-tempo devido a presença de energia e matéria. Apesar da TRG ser uma teoria bem consolidada e amplamente utilizada no meio científico, possui algumas limitações. Ao passarmos para escalas de altíssimas energias, a TRG torna-se ineficiente para descrever alguns fenômenos. Esta incapacidade pode ser fruto da ausência de uma teoria de gravitação quântica. A tentativa de concretizar uma teoria de gravitação quântica não é algo recente, vários esforços já foram feitos, porém nenhuma teoria conseguiu ainda ser completamente eficiente.

Com a necessidade de se analisar o comportamento de certos fenômenos da então recente Mecânica Quântica, E. Lifshitz (1915 - 1985) desenvolveu uma teoria que promovia a ruptura da simetria de Lorentz. Porém, como a mecânica quântica ainda estava em construção (não que ela esteja finalizada), Lifshitz não dispunha de tantas ferramentas para sustentar sua teoria. Sendo assim, apesar de sua pesquisa ser bastante inovadora, foi tratada como impossível pelos físicos da época, o que tornou sua ideia esquecida e sem aplicações por várias décadas.

Petr Horava, físico teórico, com o intuito de analisar equações que governem processos em altas energias, incluindo-se a difusão, resgatou no ano de 2009 as ideias propostas por Lifshitz. A teoria de Horava, que se inspira em uma ideia semelhante introduzida por E. Lifshitz na década de quarenta do século XX para explicar certos fenômenos em matéria condensada, basicamente sacrifica a invariância por difeomorfismos e a simetria de Lorentz local (HORAVA, 2009a, 2009b, 2009c). Sendo assim, Horava deu continuidade aos estudos de Lifshitz, batizando assim sua teoria como a conhecemos hoje: Teoria de Horava-Lifshitz.

A teoria de Horava-Lifshitz é uma recente proposta de quantização da gravidade em altas energias. Assim, a mesma é aplicada em escalas de curtas distâncias, ou seja, em um universo de energias muito elevadas. Com isso, utiliza-se a escala correspondente ao comprimento de Planck, dado por

$$l_P = \sqrt{\hbar G/c^3} \approx 10^{-35} m, \tag{5.16}$$

ou mesmo além, algumas teorias fundamentais que unificam a gravidade com a Mecânica Quântica exigem a quebra da simetria de Lorentz. Com efeito, se existe um comprimento fundamental na natureza expresso em função das constantes universais, as quais são invariantes relativísticos, então esse próprio comprimento também o é, de modo que a simetria de Lorentz nessa escala de distâncias deve perder a sua validade. E uma pergunta natural que se coloca é sobre qual lei de difusão prevalece nesse regime, uma vez que aí devemos ter um tipo de comportamento não-relativístico novamente.

Essa ideia de quantização de gravidade quebra a simetria de Lorentz do espaço-tempo nas escalas de velocidades associadas ao comprimento de Planck, deste modo espaço e tempo agora tem características distintas. A partir disto, introduz e/ou modifica termos nas equações que governam diversos processos físicos, incluindo-se a equação da difusão. Uma dessas alterações foi estudada em (HORAVA, 2009c). Além disso, a teoria de Horava implica na quebra de conceitos fundamentais da teoria da relatividade de Einstein (1879-1955), a saber, a invariância por transformação geral de coordenadas do espaço-tempo, retornando assim as ideias de gravidade proposta por Newton (1643-1727). A rejeição destes princípios fundamentais da relatividade geral garante a renormalizabilidade da nova teoria em escalas muito pequenas de distâncias (limite ultravioleta), com aquelas simetrias emergindo acidentalmente no regime infravermelho (VISSER, 2008).

A quebra de simetria de Lorentz na Teoria de Horava-Lifshitz pode ser dada de forma explícita, ou seja,

$$x^i \to bx^i$$

e

$$t \to b^z t$$

onde z é o expoente crítico. Percebemos que, para o caso em que $z = 1$, temos a equivalência entre e espaço e tempo. Porém, quando $z \neq 1$, a simetria de Lorentz é quebrada. Agora, as equações não são invariantes pelo reescalonamento acima. Devido a este fato, a Teoria de Horava-Lifshitz torna-se renormalizável. Este caracteristica a torna uma teoria de gravitação quântica bastante útil, pois elimina os incovenientes infinitos que aparecem em alguns casos em cálculos na Teoria Quântica de Campos.

6 CÁLCULO DA DIMENSÃO ESPECTRAL

Interpreta-se Dimensão Espectral (d_s) como a medida de dimensão efetiva na qual a dinâmica da partícula realmente acontece. Podemos dizer que o conceito de dimensão espectral é semelhante ao conceito de dimensão fractal. Uma característica importante da dimensão espectral é o fato de ser especialmente útil para caracterizar teorias de gravidade quântica, na qual a Teoria de Horava-Lifshitz está contemplada. A dimensão espectral (d_s) é definida por:

$$d_s = -2\frac{d\ln P(\sigma)}{d\ln(\sigma)} \tag{6.1}$$

onde,

$$P(\sigma) = Cd\int k^{(d-1)}\exp[\sigma(m-\sqrt{m^2+k^2z})]dk.$$

Entretanto,

$$d_s = -2\frac{d}{d\log\sigma}(\log P(\sigma)) \tag{6.2}$$

$$d_s = -2\frac{1}{P(\sigma)}\frac{dP(\sigma)}{d\log(\sigma)} \tag{6.3}$$

$$d_s = -2\frac{1}{P(\sigma)}\frac{dP(\sigma)}{\frac{1}{\sigma}d(\sigma)} \tag{6.4}$$

então,

$$d_s = -\frac{2\sigma}{P(\sigma)}\frac{dP(\sigma)}{d\sigma} \tag{6.5}$$

Agora, utilizaremos o expoente crítico z na ET, quebrando simetria de Lorentz. O cálculo da dimensão espectral d_s também será feita.

A Equação de Difusão Relativística é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\rho(x,\tau;x',\tau';\sigma) = \left(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} + \Delta\right)\rho(x,\tau;x',\tau';\sigma)$$

onde o parâmetro σ funciona como o tempo próprio e τ como o tempo relativístico. Fazendo $z \neq 1$, de modo a quebrar explicitamente a simetria de Lorentz, como prescreve a Teoria de Horava-Lifshitz em altas energias, temos

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\rho(x,\tau;x',\tau';\sigma) = \left(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} + (-1)^{z+1}\Delta^z\right)\rho(x,\tau;x',\tau;\sigma) \tag{6.6}$$

A solução da Equação é dada por

$$\rho(x,\tau;x',\tau';\sigma) = \int \frac{d\omega d^D K}{(2\pi)^{D+1}} e^{i\omega(\tau-\tau')+ix.(x-x')} e^{-\sigma(\omega^2+|k|^{2z})}.$$

Para $x = x'$ e $\tau = \tau'$, têm-se

$$P(\sigma) = \rho(x',\tau';x',\tau';\sigma) = \int \frac{d\omega d^D K}{(2\pi)^{D+1}} e^{-\sigma(\omega^2+|k|^{2z})} = \frac{C}{\sigma^{(1+D/z)/2}}.$$

Pela equação abaixo

$$d_s = -2\frac{d(\ln P(\sigma))}{d\ln\sigma}.$$

Finalmente, obtemos a dimensão espectral do espaço-tempo

$$d_s = 1 + \frac{D}{z}.$$

Para $D = z$, temos que $d_s = 2$. Ou seja, a dimensão efetiva do espaço-tempo em altas energias é reduzida para 2, qualquer que seja a dimensão original D, o que é compatível com outras teorias de Gravidade Quântica (CARLIP, 2015). Considerando agora $z = 1$, isto é, restaurando-se a simetria de Lorentz obtemos $d_s = 4$.

7 CONCLUSÃO

O desenvolvimento do presente trabalho oportunizou a compreensão apropriada para a equação de difusão nos casos não relativístico e relativístico. A EDC foi estudada a partir da primeira lei de Fick da Difusão e da Equação da Continuidade, estabelecendo uma estreita conexão entre processos microscópicos e macroscópicos. É importante destacar que a solução da equação também foi investigada e devidamente entendida, a qual se estrutura em uma distribuição normal.

Destaca-se a prática experimental realizada neste trabalho como ferramenta de auxílio pedagógico para aulas que contemplem assuntos relacionados à Física Moderna e Contemporânea, notadamente tópicos relacionados a Difusão. Deste modo, diante das diversas dificuldades encontradas no que diz respeito ao ensino de Física no ensino médio, é sábido que a experimentação é uma alternativa bastante útil para tornar o processo de ensino-aprendizagem de ciências mais dinâmica e eficaz. Por fim, deixamos um experimento que mostra na prática como funciona os processos difusivos.

Usando princípios da relatividade, mais precisamente o manuseio das transformações de Lorentz aplicadas à forma clássica da equação de difusão, estudamos duas propostas para sua extensão relativística, visto que, não existe um consenso sobre qual lei matemática governa os processos difusivos em altas energias. Desse modo, pudemos mostrar duas equações - a ET e a ESRAC - que são devidamente concordantes com a relatividade de Einstein, e que podem ser generalizadas para a Teoria de Horava-Lifshitz, que por sua vez procura compatibilizar uma teoria de gravidade geométrica com a Mecânica Quântica. Discutimos, neste trabalho, importantes aspectos relacionados à TRR e TRG e quais suas limitações perante processos de altas energias, próximas à escala de Planck.

Vimos que o preço que se paga para se ter uma teoria de gravidade quântica, no caso da Teoria de Horava-Lifshitz, é a quebra da simetria de Lorentz, onde espaço e tempo deixam de ser equivalentes. No fenômeno da difusão essa quebra de simetria aconteceu de forma explicita na ET, de forma a adicionarmos um expoente crítico dinâmico z. Quando $z = D$ e $z = 1$, encontramos que a dimensão efetiva do espaço-tempo (dimensão espectral) é $d_s = 2$

e $d_s = 4$, respectivamente. No primeiro caso, em altas energias, com a simetria de Lorentz quebrada explicitamente, a dimensão efetiva do espaço-tempo é igual a 2, o que é compatível com outras teorias de gravidade quântica. No segundo caso, com $z = 1$, a simetria de Lorentz é restaurada, e a dimensão efetiva do espaço-tempo passa a ser a que nós conhecemos, igual a 4, ou seja, três dimensões espaciais e uma temporal.

REFERÊNCIAS

[1] ARAÚJO, Mauro Sérgio Teixeira de. ABIB, Maria Lúcia Vital Santos. **Atividades experimentais no ensino de física: diferentes enfoques, diferentes finalidades.** Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 25, n.2, jun, 2003.

[2] CARLIP, Steve., **On Effective Spacetime Dimension in the Horava-Lifshitz Gravity**, Physics Letters B 747, 536 (2015).

[3] HERRMANN, Joachim **J. Diffusion in the special theory of relativity**, arXiv:0903.0751v1 [math-ph].

[4] HORAVA, Petr. **Quantum gravity at a Lifshitz point.** Physical Review D 79, 084008 (2009a).

[5] HORAVA, Petr. **Membranes at Quantum Criticality.** Journal of High Energy Physics 03, 020 (2009b).

[6] HORAVA, Petr. **Spectral Dimension of the Universe in Quantum Gravity at a Lifshitz Point.** Physical Review Letters 102, 161301 (2009c).

[7] MAHAJAN, Vijay., **Models for Innovation Diffusion**, Editora Sage Publications, Inc, 1985.

[8] NUSSENZVEIG, Herch Moysés. **Curso de Física Básica 1: Mecânica**, 4. ed, Editora Edgard Blücher, 2002.

[9] OKUBO, A. e LEVIN, Simon. **Diffusion and Ecological Problems: Modern Perspectives**, Editora Springer, 2. ed, 2010.

[10] ORLANDO, Marcos Tadeu D'Azeredo.**Violação da Simetria de Lorentz**, Revista Brasileira de Ensino de Física, 29, n.1, 57-62, (2007)

[11] ROSITO, João. **O ensino de Ciências e a experimentação**. In: MORAES, R. **Construtivismo e Ensino de Ciências: Reflexões Epistemológicas e Metodológicas**. 2 ed. Porto Alegre: Editora EDIPUCRS, p.195-208, 2003.

[8] GAZZINELLI, Ramayana. **Teoria da Relatividade Especial**, 2. ed, Editora Edgard Blücher, 2009.

[12] RUDBERG, Elias. **On the Theory of Relativistic Diffusion**, Editora Almqvist Wiksells, Stockholm, (1957).

[13] SALVADEGO, Wanda Naves Cocco. **Busca de informação: saber profissional, atividade experimental, leitura positiva, relação com o saber**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - UEL, Londrina, 2008.

[14] SÍLVIO, Roberto de Azevedo Salinas, **Introdução à Física Estatística**; Ed. Edusp.(1997).

[15] SCHAY, Géza., Ph.D. thesis, Princeton University, 1961, **available through university Microlms**, Ann Arbor.

[16] STACEY, Weston. **Nuclear Reactor Physics**, Editora Wiley-VCH, 2a.Edição, 2007.

[17] VISSER, Matt. **Status of Horava gravity**. Journal of Physics,314, 012002 (2011).

[18] WEISS, Tanner., **Cellular Biophysics**. Vol. 1: Transport; Vol. 2: Electrical Properties, MIT Press, Cambridge, MA, 1996.