



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ**  
**FACULDADE DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E LETRAS DE IGUATU**  
**CURSO DE GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

**ANTONIO PATRÍCIO DE OLIVEIRA RAMOS**

**CÁLCULO DA PRECESSÃO DAS ÓRBITAS DE MERCÚRIO E DA ESTRELA S14 A  
PARTIR DO VETOR DE LAPLACE-RUNGE-LENZ NUM CONTEXTO DE  
APROXIMAÇÃO PÓS-NEWTONIANA**

**IGUATU – CEARÁ**

**2021**

ANTONIO PATRÍCIO DE OLIVEIRA RAMOS

CÁLCULO DA PRECESSÃO DAS ÓRBITAS DE MERCÚRIO E DA ESTRELA S14 A  
PARTIR DO VETOR DE LAPLACE-RUNGE-LENZ NUM CONTEXTO DE  
APROXIMAÇÃO PÓS-NEWTONIANA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Física da Faculdade de Educação, Ciências e Letras de Iguatu da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciado em Física.

Orientador: Prof. Dr. Celio Rodrigues Muniz

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Estadual do Ceará  
Sistema de Bibliotecas

Ramos, Antonio Patricio de Oliveira.

Cálculo da precessão das órbitas de Mercúrio e da estrela S14 a partir do vetor de Laplace-Runge-Lenz num contexto de aproximação pós-newtoniana [recurso eletrônico] / Antonio Patricio de Oliveira Ramos. - 2021.

61 f. : il.

Trabalho de conclusão de curso (GRADUAÇÃO) - Universidade Estadual do Ceará, Faculdade de Educação, Ciências e Letras de Iguatu, Curso de Física, Iguatu, 2021.

Orientação: Prof. Pós-Dr. Celio Rodrigues Muniz.

1. Vetor de Laplace-Runge-Lenz. 2. Aproximação pós-newtoniana. 3. Precessão de Órbitas. I. Título.

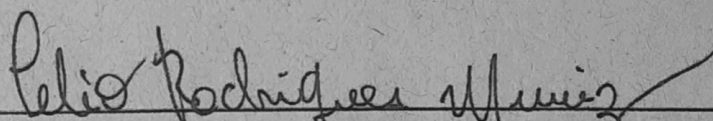
ANTONIO PATRÍCIO DE OLIVEIRA RAMOS

CÁLCULO DA PRECESSÃO DAS ÓRBITAS DE MERCÚRIO E DA ESTRELA S14 A  
PARTIR DO VETOR DE LAPLACE-RUNGE-LENZ NUM CONTEXTO DE  
APROXIMAÇÃO PÓS-NEWTONIANA

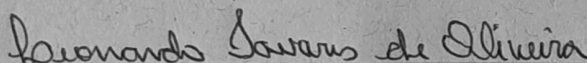
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado  
ao Curso de Graduação em Física da Faculdade  
de Educação, Ciências e Letras de Iguatu da  
Universidade Estadual do Ceará, como requisito  
parcial à obtenção do grau de Licenciado em  
Física.

Aprovado em: 03/03/2021

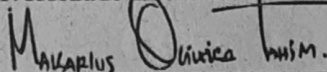
BANCA EXAMINADORA



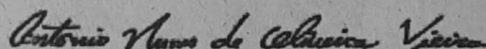
Prof. Dr. Celio Rodrigues Muniz (Orientador)  
Faculdade de Educação, Ciências e Letras de Iguatu - FECLI  
Universidade Estadual do Ceará - UECE



Prof. Me. Leonardo Tavares de Oliveira  
Faculdade de Educação, Ciências e Letras de Iguatu - FECLI  
Universidade Estadual do Ceará - UECE



Prof. Dr. Makarius Oliveira Tahim  
Faculdade de Educação, Ciências e Letras do Sertão Central - FECLESC  
Universidade Estadual do Ceará - UECE



Prof. Me. Antonio Nunes de Oliveira Vieira  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - Campus  
Cedro - IFCE

A todos aqueles que na busca do saber, encontram refugio.

## **AGRADECIMENTOS**

A todas as pessoas do passado e do presente que de uma forma ou outra, lutaram e contribuíram para que eu pudesse ter o privilégio de estudar, me capacitar e poder seguir o caminho que desejo.

Aos meus pais, Valderiza Patrício e João Elder, que sempre me apoiaram e trabalharam duro para me proporcionar uma ótima educação.

Ao meu professor e orientador, Celio Rodrigues Muniz, que sempre estava pronto para sanar qualquer dúvida e a todo momento disposto a novas ideias.

A Leonardo Tavares, amigo e professor, que não importasse a hora sempre estava a postos para ajudar.

Aos meus colegas e amigos, Naiagry Paula, Alana Carolina, Thayana Magna, Francisco Gomes, Emanuel Herycles, Tayane Oceti, Durval Araújo, Regilania Nascimento e André Alisson, que sempre me auxiliaram no que fosse necessário durante a minha trajetória acadêmica.

Ao CNPq e CAPES que contribuíram fortemente para minha permanência no curso, assim como, a construção deste e outros trabalhos.

"Prefiro uma gota de sabedoria a toneladas de riqueza"

(Anaxágoras)

## RESUMO

Realizamos nesse trabalho o cálculo da precessão do planeta Mercúrio e a estrela S14 devido a influência dos efeitos previstos pela Teoria da Relatividade Geral (TRG) em uma aproximação de campo fraco, também chamada de aproximação pós-newtoniana, um conceito que é fundamental no entendimento da dinâmica de corpos sob a influência de forças centrais, em especial a gravitacional que é responsável pela atração mútua de todos os objetos do cosmos. Para esse fim, calculamos uma expressão que fornece a velocidade de precessão do vetor de Laplace-Runge-Lenz (LRL), uma constante de movimento adicional do problema de Kepler, que se localiza na direção do semieixo maior da órbita. Aplicamos essa expressão ao caso de Mercúrio, o planeta mais próximo do sol e que mais sofre precessão devido a efeitos relativísticos; e a estrela S14, que faz parte dos corpos que orbitam em torno do buraco negro super massivo no centro da Via Láctea, chamado de Sagittarius A\*. Para o problema de Mercúrio calculamos 40,5 segundos de arco por século, um resultado bem próximo dos 43" observado e calculado quando empregamos a Teoria da Relatividade Geral. Já para a estrela S14, calculamos 227 segundos de arco por século, um resultado bastante interessante, mas que infelizmente ainda não podemos comparar com outros. Ao fim, concluímos que o vetor de LRL demonstrou ser uma ótima ferramenta alternativa para o cálculo aproximado da precessão de corpos devido a influência da TRG.

**Palavras-chave:** Vetor de Laplace-Runge-Lenz. Aproximação pós-newtoniana. Precessão de Órbitas.



## ABSTRACT

In this work we calculated the precession of the planet Mercury and the star S14 due to the influence of the effects predicted by the Theory of General Relativity (TRG) in a weak-field approximation, also called post-Newtonian approximation, a concept that is fundamental in understanding the dynamics of bodies under the influence of central forces, in particular the gravitational one that is responsible for the mutual attraction of all objects in the cosmos. To this end, we calculate an expression that provides the precession velocity of the Laplace-Runge-Lenz (LRL) vector, an additional constant of motion of Kepler's problem, which lies in the direction of the semi-major axis of the orbit. We apply this expression to the case of Mercury, the closest planet to the sun and which suffers the most precession due to relativistic effects; and the star S14, which is part of the bodies orbiting around the supermassive black hole at the center of the Milky Way, called Sagittarius A\*. For the Mercury problem we calculated 40.5 arcseconds per century, a result very close to the 43'' observed and calculated when we employ the Theory of General Relativity. For the star S14, we calculated 227 arc seconds per century, a very interesting result, but unfortunately we cannot compare it with others yet. In the end, we conclude that the LRL vector proved to be a great alternative tool for the approximate calculation of the precession of bodies due to the influence of the TRG.

**Keywords:** Laplace-Runge-Lenz Vector. Post-Newtonian Approximation. Orbit Precession.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

<b>Figura 1</b> – Uma força central atrativa agindo sobre um corpo de massa $m$ (para fins de clareza, a seta da força está representada um pouco deslocada).	13
<b>Figura 2</b> – Movimento planar de uma partícula $m$ sobre a influência de uma força central. . . . .	16
<b>Figura 3</b> – Movimento de uma partícula $m$ em coordenadas polares (novamente descolamos um pouco o vetor $F$ , agora representado como $f(r)\hat{r}$ ). . . .	17
<b>Figura 4</b> – Representação da área varrida pelo vetor $r$ entre os pontos $P$ e $Q$ . . . .	18
<b>Figura 5</b> – Representação da área varrida pelo vetor $r$ em três pontos diferentes de uma órbita elíptica. . . . .	19
<b>Figura 6</b> – Gráfico de $V(r)_{\text{efet}}$ para um particular valor de $L$ . . . . .	26
<b>Figura 7</b> – Movimento de uma partícula com energia mecânica $E_1$ , confinada a dois pontos de retorno que podem ser representados por círculos. . . .	27
<b>Figura 8</b> – Todas as possíveis órbitas para uma partícula sob a influência de uma força gravitacional. . . . .	33
<b>Figura 9</b> – Representação de uma elipse com algumas de suas propriedades. . . . .	33
<b>Figura 10</b> – Johannes Kepler. . . . .	36
<b>Figura 11</b> – Órbitas elípticas degeneradas. . . . .	39
<b>Figura 12</b> – Representação do vetor de LRL em diferentes pontos da trajetória. . .	44
<b>Figura 13</b> – Representação do ângulo $\varphi$ durante a trajetória. . . . .	44
<b>Figura 14</b> – Representação da precessão de uma órbita. . . . .	46
<b>Figura 15</b> – Órbitas das estrelas mais próxima de Sagittarius A*. . . . .	51

## SUMÁRIO

1	<b>INTRODUÇÃO</b>	11
2	<b>FORÇAS CENTRAIS</b>	13
2.1	Forças centrais são conservativas	14
2.2	Conservação do momento angular	15
2.3	Lei das Áreas	18
2.4	Conservação da energia	20
2.5	Equações de movimento	21
2.6	Energia potencial efetiva	25
2.7	O problema de Kepler	28
2.8	As leis de Kepler do movimento planetário	36
3	<b>O VETOR DE LAPLACE-RUNGE-LENZ</b>	38
3.1	Origem histórica	39
3.2	Dedução	41
3.3	Discussão do vetor de LRL	42
4	<b>CÁLCULO DA PRECESSÃO DE ÓRBITAS A PARTIR DO VETOR DE LRL</b>	46
4.1	Aplicação ao caso de Mercúrio	48
4.2	Aplicação ao caso da estrela S14	50
5	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	54
	<b>REFERÊNCIAS</b>	55
	<b>APÊNDICE A – Demonstração da Equação da Elipse em Coordenadas Cartesianas</b>	57
	<b>APÊNDICE B – Demonstração da Equação da Elipse em Coordenadas Polares</b>	58
	<b>APÊNDICE C – Demonstração da Média Temporal de <math>\cos \theta</math></b>	60
	<b>APÊNDICE D – Demonstração da Média Temporal de <math>\cos^2 \theta</math></b>	61

## 1 INTRODUÇÃO

Na Física, um dos caminhos mais procurados quando se deseja estudar determinado sistema é aproximá-lo a uma situação ideal, visto que, ela proporciona uma visão geral das principais características do problema sem que tenhamos que nos debruçar na sua total complexidade. Um tipo de força que é bastante utilizado nessas situações ideais são as chamadas forças centrais. A sua principal característica se baseia no fato de que ela depende apenas da distância do objeto ao centro do corpo responsável pela força. A aplicabilidade das forças centrais está presente em diversas situações. Segundo (THORNTON; MARION, 2011), a sua importância é notória no estudo do movimento de corpos celestes – planetas, luas, cometas, estrelas duplas, etc. – e determinadas interações nucleares de dois corpos, como o espalhamento de partículas alfa.

A famosa Lei da Gravitação Universal de Newton, responsável pela interação mútua entre todos os corpos do cosmo, está entre as forças centrais mais conhecidas e estudadas. Mas que não possui soluções clássicas exatas para interações que envolvam mais de dois corpos. Segundo (YAMADA, 2014), esse tipo de situação é classificado como não integrável, visto que, não existem métodos analíticos que descrevam por completo as trajetórias dos corpos.

O problema da gravitação envolvendo dois corpos ou mais comumente chamado de problema de Kepler para situações planetárias, que possui soluções exatas, será o nosso foco no estudo. Nessa situação ideal, as órbitas dos planetas são fechadas e limitadas, bem como descritas pelas três leis de Kepler que descrevem o movimento de todos os planetas do sistema solar.

Em uma situação real, na qual os planetas sofrem influências gravitacionais dos demais corpos do sistema solar, e entre si, as suas órbitas deixam de serem fechadas e passam a rotacionar em torno do seu semieixo maior, um movimento chamado de precessão. Existe também uma influência prevista pela Relatividade Geral na precessão dos planetas, e que por muito tempo foi uma incógnita para os astrônomos. Com destaque para Mercúrio, o planeta mais próximo do Sol e que mais precessa com o tempo.

No problema de Kepler, existe um vetor constante durante toda a trajetória, pouco conhecido, chamado de Vetor de Laplace-Runge-Lenz (LRL) que localiza-se na direção do semieixo maior, apontando do apocentro ao pericentro em qualquer local da órbita. Que em um contexto de perturbação, pode ser utilizado para calcular a velocidade de precessão da órbita do planeta, visto que, ele rotacionará junto a órbita.

Nosso objetivo nesse trabalho é perturbar o problema de Kepler, adicionando à força

central gravitacional um termo que provem de uma aproximação de campo fraco da Relatividade Geral ou também muitas vezes chamado de aproximação pós-newtoniana. O que nos possibilitará calcular a velocidade de precessão da órbita causada pela Relatividade geral sem que tenhamos que debruçar sob a sua complexa matemática.

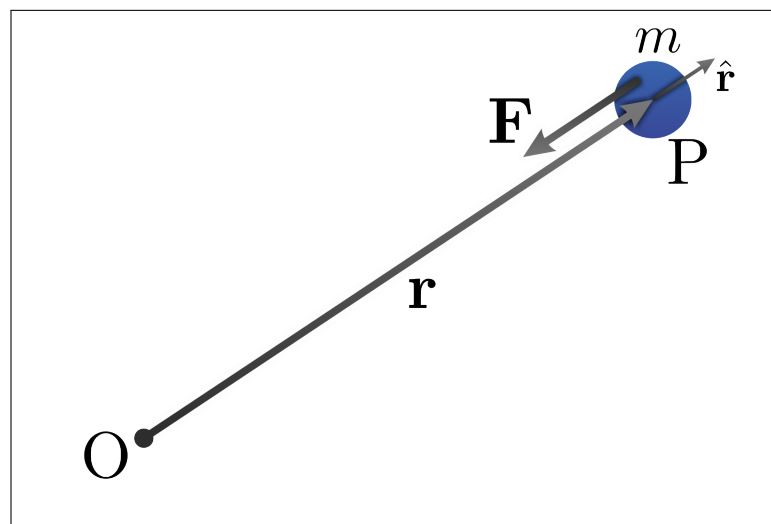
Esse trabalho está dividido da seguinte maneira: na seção 2 abordamos o que são forças centrais e suas principais características; na seção 3 discutimos de uma maneira relativamente profunda o vetor de LRL, sua origem histórica e aplicabilidade no cálculo da precessão de órbitas; na seção 4 aplicamos o vetor de LRL para o problema de Mercúrio e para a estrela S14; e por fim, na seção 5 expomos nossas considerações finais.

## 2 FORÇAS CENTRAIS

Nesta seção, discutiremos o movimento de dois corpos que exercem uma força, um sobre o outro, conservativa e central, que não estão sujeitos a outras forças externas. Existem alguns sistemas com essa característica na natureza como: duas estrelas de um sistema binário, um planeta orbitando o Sol, a Lua orbitando a Terra, dois átomos de uma molécula diatômica (TAYLOR, 2005), entre outros. Na realidade essas situações são bem mais complicadas, com a interferência de outros corpos e incógnitas, mas mesmo assim consiste em uma ótima aproximação para analisarmos e entendermos como esses objetos se comportam.

Inicialmente estudaremos o movimento de uma única partícula de massa  $m$  sujeita a uma força central conservativa cujo objeto responsável por esse campo central é tão massivo<sup>1</sup> que pode ser considerado como o centro fixo da origem de um conveniente sistema de coordenadas para a análise do movimento.

**Figura 1 – Uma força central atrativa agindo sobre um corpo de massa  $m$  (para fins de clareza, a seta da força está representada um pouco deslocada).**



Fonte: Elaborado pelo autor.

Definimos uma força como central aquela que está dirigida segundo a linha OP que liga P a um ponto O (o corpo massivo) fixo, chamado de centro de força (veja a Figura 1). Vale ressaltar que além de atrativa ela também pode ser repulsiva. A magnitude da força  $\mathbf{F}$  depende apenas da distância  $|\mathbf{r}| = |\overrightarrow{OP}|$  ao centro de força (demonstraremos isso na subseção 2.1).

<sup>1</sup> O corpo ser muito massivo nos permite ignorar a força que  $m$  exerce sobre ele.

Portanto, uma força central deve possuir a forma matemática

$$\mathbf{F} = f(r)\hat{\mathbf{r}}. \quad (2.1)$$

Na qual  $\hat{\mathbf{r}}$  é um vetor unitário na direção radial que aponta para fora da origem. O aspecto de  $f(r)$  depende da situação física que estamos analisando, veja a Tabela 1.

**Tabela 1 – Os dois principais exemplos de forças centrais.**

Exemplos de Forças Centrais	Nome das Forças
$\mathbf{F} = \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}}_{f(r)} \hat{\mathbf{r}}$	Lei de Coulomb
$\mathbf{F} = -\underbrace{G \frac{m_1 m_2}{r^2}}_{f(r)} \hat{\mathbf{r}}$	Lei da Gravitação Universal de Newton

Fonte: Elaborado pelo autor.

A lei de Coulomb e a Lei da Gravitação Universal de Newton são os dois principais exemplos de forças centrais. Como o leitor já deve ter percebido, existem mais exemplos e aqui trabalharemos bastante com a Lei da Gravitação Universal de Newton.

A partir de agora, e até o final dessa seção, discutiremos diversas implicações subjacentes a uma força central que nos auxiliará posteriormente na análise do movimento de corpos celestes.

## 2.1 Forças centrais são conservativas

Como comentado brevemente acima, forças centrais são conservativas. O que implica que existe uma energia potencial  $V(r)$  associada a tais forças. Mas isso só é possível, de acordo com (GRIFFITHS, 1999), se o rotacional de  $\mathbf{F}$  for nulo, ou seja,

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{F} = -\nabla V. \quad (2.2)$$

Utilizando um sistema cartesiano de coordenadas demonstraremos o lado esquerdo da afirmação acima da seguinte maneira:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times f(r)\hat{\mathbf{r}} = \nabla \times f(r)\frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (2.3)$$

$$\nabla \times f(r) \frac{\mathbf{r}}{r} = \nabla \times f(r) \frac{(x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}})}{r} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x\frac{f(r)}{r} & y\frac{f(r)}{r} & z\frac{f(r)}{r} \end{vmatrix}. \quad (2.4)$$

Para a componente  $\hat{\mathbf{i}}$  encontramos que

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( z \frac{f(r)}{r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( y \frac{f(r)}{r} \right) \right] \hat{\mathbf{i}} &= \left[ z \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{f(r)}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{f(r)}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial z} \right] \hat{\mathbf{i}} \\ &= \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{f(r)}{r} \right) \left\{ z \frac{\partial r}{\partial y} - y \frac{\partial r}{\partial z} \right\} \right] \hat{\mathbf{i}}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Utilizando que  $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ , obtemos

$$\begin{aligned} &\left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{f(r)}{r} \right) \left\{ z \frac{\partial (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}{\partial y} - y \frac{\partial (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}{\partial z} \right\} \right] \hat{\mathbf{i}} \\ &= \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{f(r)}{r} \right) \left\{ \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} (zy - zy) \right\} \right] \hat{\mathbf{i}} = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

E similarmente para as demais componentes, encontramos

$$\left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{f(r)}{r} \right) \left\{ \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} (zx - zx) \right\} \right] \hat{\mathbf{j}} = 0, \quad (2.7)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{f(r)}{r} \right) \left\{ \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} (xy - xy) \right\} \right] \hat{\mathbf{k}} = 0. \quad (2.8)$$

Portanto, provamos que

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0. \quad (2.9)$$

A equação (2.9) implica, como já afirmamos acima, que uma força central depende apenas da distância  $\mathbf{r}$  ao centro de força; ela não depende explicitamente do tempo ou outras descrições da posição. Mas cuidado, a recíproca não é verdadeira, ou seja, nem toda força conservativa é central (SOUZA, 2006).

## 2.2 Conservação do momento angular

Segundo (FRENCH, 1987), outra grande particularidade de uma força central é que o torque produzido por ela é nulo. Fato que é evidente a partir da definição de torque

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times f(r)\hat{\mathbf{r}} = 0, \quad (2.10)$$

pois o produto vetorial de dois vetores paralelos é sempre nulo.



Por outro lado,

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}. \quad (2.11)$$

Na qual,

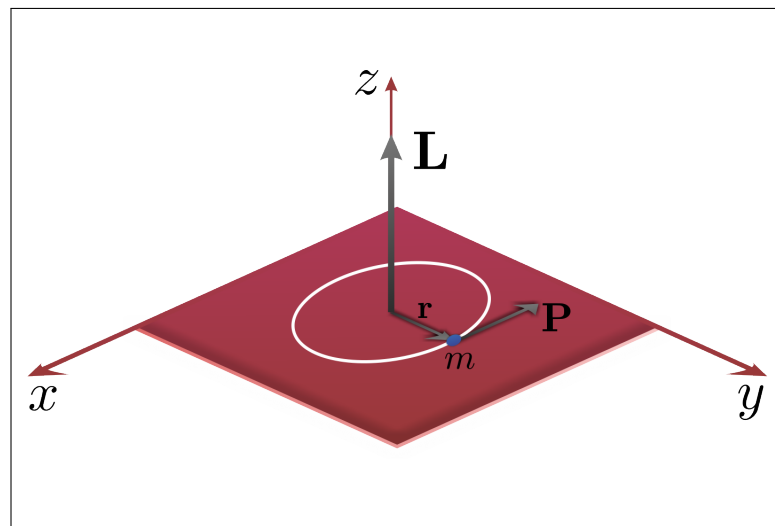
$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}), \quad (2.12)$$

é o momento angular da partícula. Portanto, concluímos que

$$\boldsymbol{\tau} = 0 \Rightarrow \frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \mathbf{L} = \text{cte}. \quad (2.13)$$

Esse resultado é expressivo, ele nos mostra que o movimento da partícula está confinado em um único plano, perpendicular a  $\mathbf{L}$ , no qual se encontram  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{p}$  (veja a Figura 2). Podemos ir mais além e inferir que esse resultado é o mesmo caso estivéssemos analisando o centro de massa de dois corpos, ou seja, se levássemos em consideração a força que  $m$  exerce sobre o corpo massivo na origem do nosso sistema (TAYLOR, 2005).

**Figura 2 – Movimento planar de uma partícula  $m$  sobre a influência de uma força central.**



Fonte: Elaborado pelo autor.

Com a partícula confinada em um plano, seu movimento será bidimensional, o que facilita a análise do problema, já que agora podemos utilizar coordenadas polares  $(r, \theta)$  ao invés de cartesianas. Segundo (SOUZA, 2006), nesse sistema o vetor posição, a velocidade e a

aceleração da partícula são escritas da seguinte maneira em termos dos vetores unitários  $\hat{\mathbf{r}}$  e  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ :

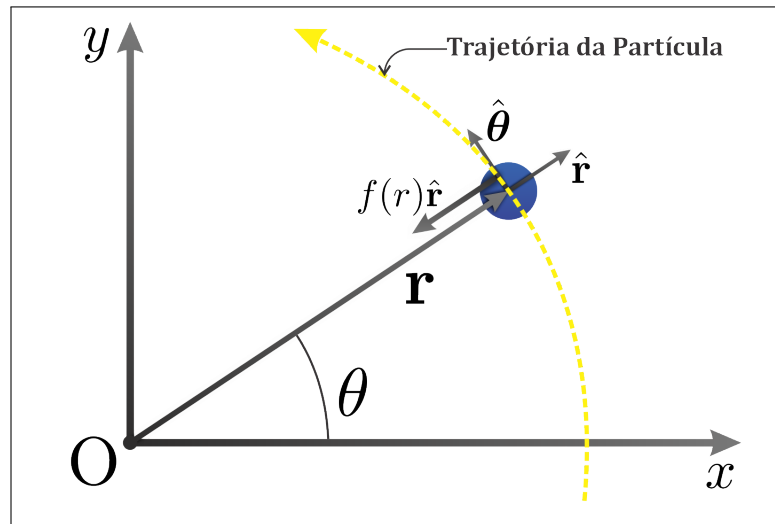
$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}, \quad (2.14)$$

$$\mathbf{v} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad (2.15)$$

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{r}} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\boldsymbol{\theta}}. \quad (2.16)$$

Qualquer ponto da trajetória fica agora univocamente determinado pelo par de coordenadas  $(r, \theta)$ , veja a Figura 3.

**Figura 3 – Movimento de uma partícula  $m$  em coordenadas polares (novamente descolamos um pouco o vetor  $\mathbf{F}$ , agora representado como  $f(r)\hat{\mathbf{r}}$ ).**



Fonte: Elaborado pelo autor.

Utilizando as equações (2.14) e (2.15) podemos agora reescrever a equação (2.12) da seguinte maneira

$$\mathbf{L} = r\hat{\mathbf{r}} \times m(\dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}), \quad (2.17)$$

$$\mathbf{L} = m(r\hat{\mathbf{r}} \times \dot{r}\hat{\mathbf{r}}) + m(r\hat{\mathbf{r}} \times r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}), \quad (2.18)$$

$$\mathbf{L} = mr^2\dot{\theta}\hat{\mathbf{z}}, \quad (2.19)$$

na qual  $\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}}$ .

Portanto, o módulo do momento angular da partícula em coordenadas polares é dado por

$$L = mr^2\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}. \quad (2.20)$$

Como já sabemos, equação (2.13),  $L$  é uma constante de movimento, o que implica que  $L = mr^2\dot{\theta}$  também se conserva ao longo de toda a trajetória da partícula. Observe que  $\dot{\theta}$

varia com o inverso do quadrado da distância da partícula ao centro de força e que se  $L = 0$  os únicos movimentos possíveis são retilíneos com as retas suportes passando, necessariamente, pelo centro de força (SOUZA, 2006), visto que,  $\dot{\theta} = 0$  implicaria em um ângulo constante.

### 2.3 Lei das Áreas

Continuemos nossa “trajetória” das implicações de uma força central, agora analisando uma particularidade bastante elegante e de fácil demonstração. Veremos que o momento angular constante faz com que o vetor posição  $\mathbf{r}$  da partícula percorra áreas iguais em intervalos de tempos iguais.

Considere que a nossa partícula  $m$  partiu do repouso e neste momento está localizada a uma determinada distância  $\mathbf{r}(\theta)$ , veja a Figura 4. Acompanhemos o movimento de  $m$  de forma mais precisa quando ela passa entre os pontos  $P$  e  $Q$  em um intervalo de tempo  $dt$ , enquanto que  $Q$  está à distância  $\mathbf{r}(\theta + d\theta)$  do centro de força. A área  $dA$  varrida pelo vetor  $\mathbf{r}$  no intervalo de tempo  $dt$ , assumindo que  $ds$  é muito pequeno, é igual a área do triângulo  $OPQ$ , ou seja,

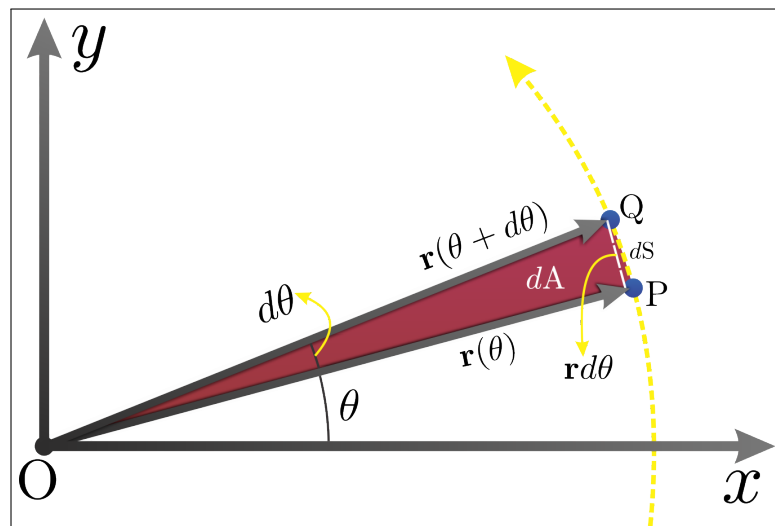
$$dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta \quad (2.21)$$

e dividindo ambos os lados por  $dt$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \dot{\theta}. \quad (2.22)$$

Substituindo  $\dot{\theta}$  pelo o que encontramos na equação (2.20), ficamos com

**Figura 4 – Representação da área varrida pelo vetor  $\mathbf{r}$  entre os pontos  $P$  e  $Q$ .**



Fonte: Elaborado pelo autor.

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} = \text{cte.} \quad (2.23)$$

Isso porque como já sabemos  $\mathbf{L}$  é constante.

Observe que  $\frac{dA}{dt}$  representa uma taxa, em outras palavras, fornece como a área varia com o tempo, o que implica que se a órbita de  $m$  for elíptica (como é o caso dos movimentos planetários), essa taxa permanecerá constante apenas se  $m$  deslocar-se mais rapidamente quanto mais próximo estiver do centro de força.

Talvez a explicação acima não o convenceu por completo, portanto, deixemos mais claro. Já que  $\mathbf{L}$  é constante, então para os dois pontos de retorno de uma trajetória elíptica teremos

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1 = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{p}_2, \quad (2.24)$$

$$m(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1) = m(\mathbf{r}_2 \times \mathbf{v}_2), \quad (2.25)$$

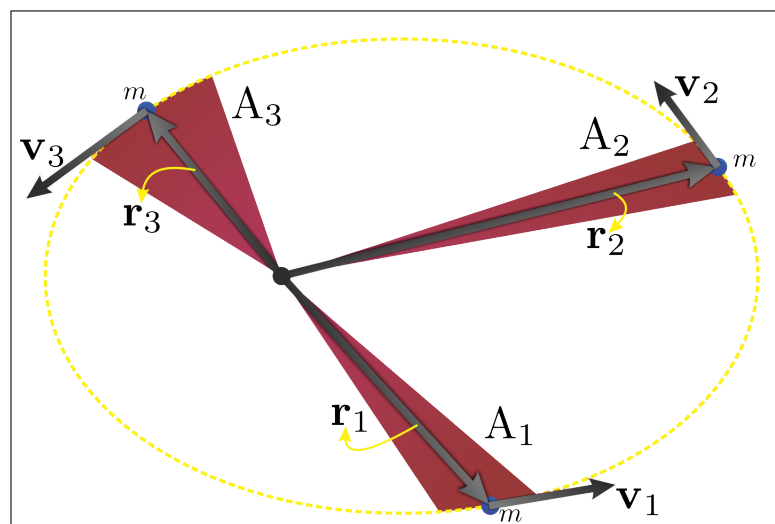
$$|\mathbf{r}_1||\mathbf{v}_1|\sin 90^\circ = |\mathbf{r}_2||\mathbf{v}_2|\sin 90^\circ, \quad (2.26)$$

pois  $\mathbf{v}$  é a velocidade tangencial da partícula, o que implica que o ângulo formado entre ele e  $\mathbf{r}$  são  $90^\circ$  nesses locais. Portanto,

$$r_1 v_1 = r_2 v_2. \quad (2.27)$$

Para que a equação (2.27) seja verdade é necessário que quando  $r_1$  aumente,  $v_1$  diminua, veja a Figura 5 e pense um pouco a respeito.

**Figura 5 – Representação da área varrida pelo vetor  $\mathbf{r}$  em três pontos diferentes de uma órbita elíptica.**



Fonte: Elaborado pelo autor.

Dessa forma temos então que

$$A_1 = A_2 = A_3. \quad (2.28)$$

Que como já comentamos é um resultado elegantíssimo. Mas cuidado, é importante manter em mente que  $A$  permanece constante para a órbita de um dado objeto, mas é diferente para objetos diferentes (TAYLOR, 2005).

O leitor provavelmente já conhece esse resultado como a Segunda Lei de Kepler que foi quem empiricamente a comprovou para o movimento planetário e a publicou no ano de 1609. Mas, novamente muito cuidado, é importante notar que a conservação de  $A$  não está limitada a uma força que decai com o inverso do quadrado da distância (o caso dos movimentos planetários), mas é um resultado geral para o movimento de corpos sob a influência de forças centrais (THORNTON; MARION, 2011).

## 2.4 Conservação da energia

Como não estamos considerando a força que  $m$  exerce sobre o corpo massivo, responsável pelo centro de força, e conseqüentemente não trabalhando com centro de massa, a conservação do momento linear não acrescenta em nada na descrição do movimento da partícula (THORNTON; MARION, 2011). Portanto, a última constante de movimento que nos resta analisar é a energia. Como enfatizamos no começo dessa seção, a nossa partícula  $m$  não está sujeita a nenhuma força externa ou meio dissipativo, além do fato de que uma força central é conservativa. Desta forma, a soma da energia cinética com a energia potencial nos fornece a energia mecânica total do sistema, ou seja,

$$E = K + V = \text{cte}. \quad (2.29)$$

“Em geral, para diferentes movimentos da partícula, associados a diferentes condições iniciais, o valor de  $E$  é diferente”. (SOUZA, 2006).

Utilizando a definição de energia cinética e a equação (2.15) podemos reescrever a energia mecânica da partícula da seguinte maneira

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(r), \quad (2.30)$$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + V(r), \quad (2.31)$$

na qual utilizamos que  $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$ . E substituindo  $\dot{\theta}$  pela equação (2.20), ficamos com

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2 \left( \frac{L^2}{m^2 r^4} \right) + V(r), \quad (2.32)$$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r), \quad (2.33)$$

$$E = \frac{1}{2} \left( m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{mr^2} \right) + V(r) = \text{cte.} \quad (2.34)$$

Observe que para calcular a energia mecânica da partícula não necessitamos de  $\dot{\theta}$ .

## 2.5 Equações de movimento

Similar a muitos problemas de física que o leitor já deve ter tido contato da mecânica clássica, se quisermos uma descrição completa da evolução do movimento de uma partícula, devemos trabalhar com o princípio fundamental da dinâmica (NUSSENZVEIG, 2002), ou seja, a Segunda Lei de Newton. Portanto, para uma partícula de massa  $m$  sob a influência de uma ou mais forças, temos que

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}. \quad (2.35)$$

Substituindo  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{a}$  pelas equações (2.1) e (2.16), respectivamente, ficamos com

$$f(r)\hat{\mathbf{r}} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{r}} + m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad (2.36)$$

e, igualando os coeficientes das componentes  $\hat{\mathbf{r}}$  e  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ , temos que

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = f(r), \quad (2.37)$$

$$m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0. \quad (2.38)$$

Vamos analisar cuidadosamente a equação (2.37). Ela pode ser reorganizada da seguinte maneira:

$$m\ddot{r} = f(r) + mr\dot{\theta}^2, \quad (2.39)$$

substituindo  $\dot{\theta}$  pela equação (2.20), teremos que

$$m\ddot{r} = f(r) + \frac{L^2}{mr^3}. \quad (2.40)$$

Observe que interessante, o lado esquerdo da equação (2.40) é uma força (massa  $\times$  aceleração), o que indica que o lado direito da equação também deve ser uma força. E de fato é! A segunda equação do lado direito tem dimensão de força:

$$\frac{[\text{Quilograma}]^2[\text{Metro}]^2[\text{Metro}]^2}{[\text{Segundo}]^2[\text{Quilograma}][\text{Metro}]^3} = \frac{[\text{Quilograma}][\text{Metro}]}{[\text{Segundo}]^2} = [\text{Newton}].$$

Mas apesar de possuir dimensão de força essa expressão é uma pseudo força<sup>2</sup> e mais comumente chamada de força centrífuga<sup>3</sup>. Essa força surge do fato de que estamos trabalhando com um referencial em rotação, que, portanto, não é inercial, deixando os cálculos mais simples e intuitivos.

O leitor deve tomar cuidado para não confundir força centrífuga com força centrípeta, que ao contrário da centrífuga é uma força real que atua sobre corpos que descrevem uma trajetória curvilínea.

Portanto, de acordo com as equações (2.39) e (2.40), até o momento temos que

$$f(r)_{\text{cent}} = m r \dot{\theta}^2 = \frac{L^2}{m r^3}, \quad (2.41)$$

e, dessa forma, a equação (2.40) torna-se

$$m \ddot{r} = f(r) + f(r)_{\text{cent}}. \quad (2.42)$$

A soma das duas forças no lado direito da equação acima recebe o nome de força efetiva. Assim ficamos com

$$m \ddot{r} = f(r)_{\text{efet}}. \quad (2.43)$$

Mas por que efetiva? A razão para o nome é que apenas a componente radial contribui efetivamente para o movimento de uma partícula sobre a influência de forças centrais (por isso começamos analisando a equação (2.37) e não a (2.38)). Note também que a equação (2.43) pode ser tratada como uma equação em apenas uma dimensão. Como enfatiza (SOUZA, 2006), devido à simetria esférica do problema, que acarreta a conservação do momento angular, o movimento radial da partícula pode ser descrito qualitativamente de um modo bastante análogo ao modo como discutimos movimentos unidimensionais.

Como vimos na seção 2.1, para toda força central conservativa está associada uma energia potencial  $V(r)$ , o que implica que para nossa força efetiva na equação (2.43) deve existir uma energia potencial efetiva  $V(r)_{\text{efet}}$  associada. Podemos encontrar essa energia utilizando a relação trabalho e energia potencial, ou seja

$$\Delta V(r)_{\text{efet}} = -W_{\text{efet}} = - \int_r^{r_s} f(r)_{\text{efet}} dr, \quad (2.44)$$

$$V(r)_{s_{\text{efet}}} - V(r)_{r_{\text{efet}}} = - \int_r^{r_s} f(r)_{\text{efet}} dr. \quad (2.45)$$

<sup>2</sup> Outros nomes encontrados na literatura são força fictícia, força inercial, ou ainda força d'Alembert.

<sup>3</sup> Talvez o leitor a conheça, em módulo, como  $F_{\text{cent}} = m \omega^2 r$ , onde  $\omega$  é a velocidade angular.

Para facilitar a análise vamos assumir que  $r_s \rightarrow \infty$  implicando que  $V(r)_{s\text{efet}} \rightarrow 0$ . E denotando  $V(r)_{r\text{efet}}$  simplesmente como  $V(r)_{\text{efet}}$ , ficamos com

$$V(r)_{\text{efet}} = \int_r^{r_s} f(r)_{\text{efet}} dr = \int_r^{r_s} \left( f(r) + \frac{L^2}{mr^3} \right) dr, \quad (2.46)$$

$$V(r)_{\text{efet}} = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}. \quad (2.47)$$

Como era de se esperar o resultado é a soma de uma energia potencial real (devido a uma força real) mais uma pseudo energia potencial centrífuga (devido a força centrífuga) comumente chamada de barreira centrífuga, visto que, ela funciona como uma resistência à aproximação da partícula do centro de força. Observe que se  $L = 0$  essa resistência desaparece, mas enquanto  $L \neq 0$  ela impede a partícula de passar pela origem (SOUZA, 2006). A não ser que  $V(r)$  possua um termo que vença essa “barreira”.

Ocorrida toda essa análise, vamos agora voltar nossa atenção para a equação (2.34). Na qual se  $V(r)$  é especificado, ela descreve completamente o sistema e a sua integração fornece a solução geral em termos dos parâmetros  $E$  e  $L$  (THORNTON; MARION, 2011). Portanto, resolvendo a equação (2.34) para  $\dot{r}$ , temos que

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} \left( E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2} \right)}, \quad (2.48)$$

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left( E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2} \right)}}. \quad (2.49)$$

Se integramos a equação acima obteremos uma solução da forma  $t = t(r)$  ou  $r = r(t)$ , caso invertêssemos o resultado. No entanto, como estamos trabalhando com coordenadas polares, vamos analisar o caminho percorrido pela partícula em termos de  $r$  e  $\theta$ . Observe que

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta}, \quad (2.50)$$

$$d\theta = \frac{\dot{\theta}}{\dot{r}} dr. \quad (2.51)$$

Substituindo  $\dot{\theta}$  e  $\dot{r}$  pelas equações (2.20) e (2.48), respectivamente, obtemos

$$d\theta = \frac{L}{mr^2} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left( E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2} \right)}}, \quad (2.52)$$

e integrando

$$\theta = \int_{r_0}^r \frac{L}{mr^2} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left( E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2} \right)}} + \theta_0. \quad (2.53)$$



Observe com atenção essa equação. Perceba que a constância de  $L$  nos garante que  $\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$  nunca mudará o seu sinal e, portanto,  $\theta$  irá aumentar ou diminuir monotonicamente com o tempo.

Porém, embora tenhamos reduzido o problema a uma integral, uma solução concreta só é possível para formas específicas da força central (THORNTON; MARION, 2011). Vamos supor, por exemplo, que a nossa força central depende de alguma potência da distância, ou seja,

$$f(r) = Cr^n, \quad (2.54)$$

onde  $C$  é uma constante.

Perceba que para  $n = 1$  a força corresponde ao famoso oscilador harmônico e para  $n = -2$  temos a lei do inverso do quadrado da distância, que como vimos no início dessa seção, é responsável pela Lei da Gravitação e Lei de Coulomb. No geral, para  $n = 1, -2$  e  $-3$  as soluções são expressas em termos de funções circulares<sup>4</sup>. Para outros valores de  $n$ , sejam eles inteiros ou racionais, as soluções são geralmente expressas em termos de integrais elípticas (ARYA, 1998), que geralmente exigem a utilização de métodos numéricos.

Para situações na qual a órbita da partícula é conhecida, mas a forma da força central não, uma equação de movimento bastante útil pode ser derivada da equação (2.37). Rearranjando os termos

$$f(r) = m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2. \quad (2.55)$$

Fazendo a substituição de variável

$$r = \frac{1}{u}, \quad (2.56)$$

e analisando como ficará agora  $\dot{\theta}$  em função de  $u$  e  $\dot{r}$  em função de  $\theta$ , teremos que

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2} = \frac{L}{m}u^2. \quad (2.57)$$

E, fazendo primeiramente o cálculo para  $\dot{r}$

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{u} \right) = \frac{d}{du} \left( \frac{1}{u} \right) \frac{du}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{dt} = -\frac{1}{L} \frac{du}{dt} \\ &= -\frac{1}{m} \frac{du}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\frac{L}{m} \frac{du}{d\theta}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

<sup>4</sup> Mais conhecidas como funções trigonométricas: seno, cosseno e tangente.

Finalmente,

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dr}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left( -\frac{L}{m} \frac{du}{d\theta} \right) = -\frac{L}{m} \frac{d^2u}{dt d\theta} = -\frac{L}{m} \frac{d\theta}{dt} \frac{d^2u}{d\theta^2} \\ &= -\frac{L^2}{m^2} u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2}.\end{aligned}\quad (2.59)$$

Substituindo o que encontramos na equação (2.55), ficamos com

$$f\left(\frac{1}{u}\right) = m \left( -\frac{L^2}{m^2} u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2} \right) - m \frac{1}{u} \left( \frac{L^2}{m^2} u^4 \right), \quad (2.60)$$

$$f\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{L^2}{m} u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2} - \frac{L^2}{m} u^3, \quad (2.61)$$

rearranjando os termos,

$$-\frac{L^2}{m} u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2} = f\left(\frac{1}{u}\right) + \frac{L^2}{m} u^3, \quad (2.62)$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -u - \frac{m}{L^2 u^2} f\left(\frac{1}{u}\right). \quad (2.63)$$

Portanto, como queríamos, se a órbita da partícula é especificada em coordenadas polares  $(r, \theta)$ , a equação (2.63) pode ser resolvida para encontrarmos a forma da força central  $f(r)$ . Note que uma situação inversa também é possível, ou seja, se conhecemos a força central responsável pelo movimento, a equação (2.63) pode ser resolvida para  $u(\theta)$  e conseqüentemente para  $r(\theta)$ .

## 2.6 Energia potencial efetiva

Já encontramos na seção anterior uma expressão para a energia potencial efetiva de uma partícula sob a influência de um campo central. Vamos agora fazer uma discussão mais detalhada dessa energia e analisar como se comportará a partícula para diferentes valores de energia. Lembre-se que na subseção 2.4 encontramos que

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r), \quad (2.64)$$

e na subseção anterior que

$$V(r)_{\text{efet}} = v(r) + \frac{L^2}{2mr^2}. \quad (2.65)$$

Portanto, substituindo a equação (2.65) na (2.64), teremos

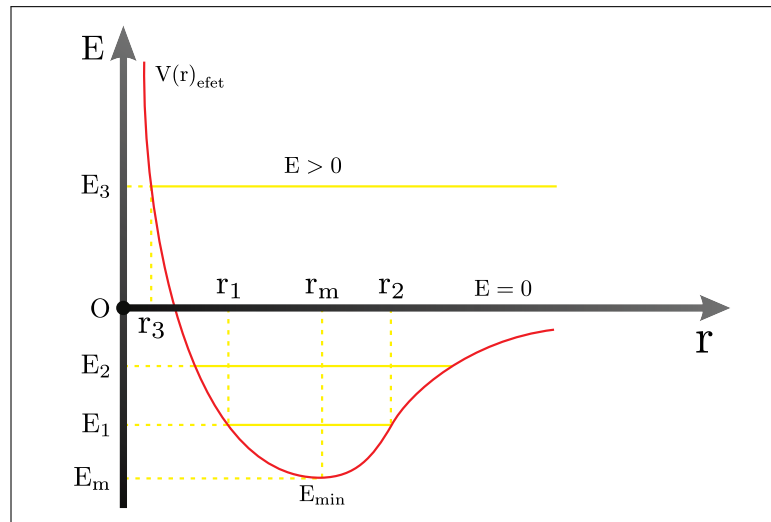
$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + V(r)_{\text{efet}}, \quad (2.66)$$

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 = E - V(r)_{\text{efet}}. \quad (2.67)$$

Observe que quando  $E = V(r)_{\text{efet}}$  a energia cinética da componente radial da partícula é nula. Esses locais são chamados pontos de retorno, pois neles o movimento radial da partícula inverte o sentido (SOUZA, 2006). Mas muito cuidado, não estamos dizendo que a velocidade da partícula é nula nesses pontos, lembre-se que  $L \neq 0 \Rightarrow \dot{\theta} \neq 0$ , ou seja, a partícula continua orbitando em torno do centro de força nos pontos de retorno. Note que  $E < V(r)_{\text{efet}}$  é classicamente proibido, uma vez que isso implicaria velocidades imaginárias. Dessa forma, podemos inferir que só ocorrerá movimento se para uma dada energia mecânica, a condição  $E \geq V(r)_{\text{efet}}$  for satisfeita.

Uma maneira mais fácil de observar o que está acontecendo é plotarmos o gráfico de  $V(r)_{\text{efet}}$  em função de  $r$  para um determinado momento angular  $L$  (veja a Figura 6).

**Figura 6 – Gráfico de  $V(r)_{\text{efet}}$  para um particular valor de  $L$ .**



Fonte: Elaborado pelo autor.

Sob o domínio dessa energia potencial as órbitas da partícula podem ser limitadas ou ilimitadas<sup>5</sup> de acordo com a sua energia mecânica. Se a energia da partícula é igual a  $E_m$ , temos a comentada condição  $E = V(r)_{\text{efet}}$  e conseqüentemente nenhum movimento radial. Dessa forma, só resta à partícula mover-se em um círculo de raio  $r_0$  (ARYA, 1998). Já se a energia da partícula for  $E_3$ , maior do que zero, o seu movimento é ilimitado com um único ponto de retorno  $r_3$ . Para energias como representado por  $E_1$  e  $E_2$  a órbita da partícula é limitada com movimentos possíveis que variam de uma distância mínima a uma distância máxima do centro de força, em  $E_1$  simbolizados por  $r_1$  e  $r_2$ . Esses locais são chamados de Pericentro e Apocentro. Um ponto da trajetória de distância mínima é o Pericentro e de máxima, Apocentro. “A velocidade angular

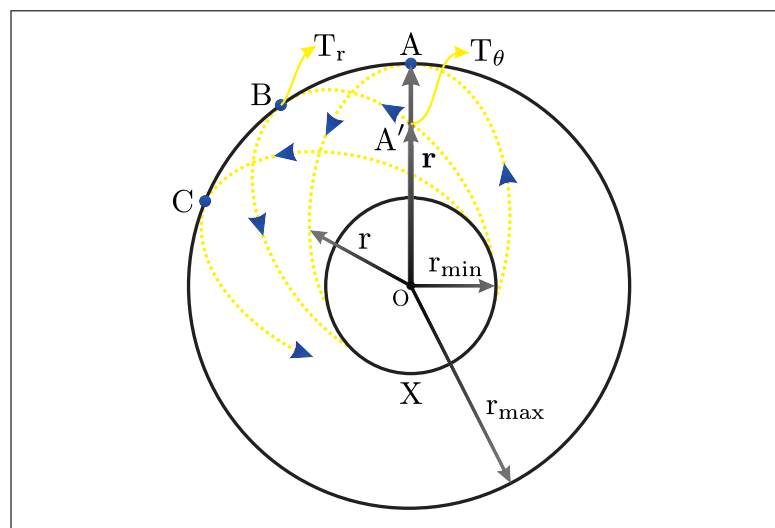
<sup>5</sup> Em órbitas limitadas a partícula tem seu movimento delimitado a dois pontos de retorno, por exemplo, órbitas circulares e elípticas. Já em órbitas ilimitadas a partícula não tem seu movimento limitado a dois pontos de retorno, por exemplo, órbitas parabólicas e hiperbólicas.

máxima ocorre no Pericentro e a mínima, no Apocentro”. (SOUZA, 2006).

A Figura 7 mostra o movimento orbital de uma partícula com energia mecânica  $E_1$ . Como sabemos, uma partícula com essa energia possui dois pontos de retorno. Observe que esses dois pontos podem ser representados por círculos, um interno para o Pericentro e um externo para o Apocentro.

Um período radial  $T_r$  é definido como o tempo que a partícula leva para partir do Apocentro, passar pelo Pericentro, e então retornar ao Apocentro (ou o inverso), representado na Figura 7 pelo tempo que a partícula gasta para ir do ponto A ao B. Além disso, a órbita da partícula é de tal forma que ela é sempre tangente aos dois círculos nos pontos de retorno (ARYA, 1998), veja os pontos A e X. Isso surge do fato de que, como já sabemos, nos pontos de retorno a velocidade radial da partícula é nula, enquanto que devido a conservação do momento angular sua velocidade angular é diferente de zero.

**Figura 7 – Movimento de uma partícula com energia mecânica  $E_1$ , confinada a dois pontos de retorno que podem ser representados por círculos.**



Fonte: Elaborado pelo autor.

Um período angular<sup>6</sup>  $T_\theta$  é definido como o tempo que o vetor radial  $\mathbf{r}$  (não confunda com o vetor posição da partícula) leva para executar uma revolução de  $2\pi$ , representado na Figura 7 pelas posições OA e OA'. Note que para o nosso caso o período angular é executado primeiro do que o período radial.

A característica da órbita da partícula depende fortemente dos períodos radial e angular. Se a razão entre os períodos  $\frac{T_r}{T_\theta}$  é igual a um número inteiro, a partícula sempre retorna

<sup>6</sup> Outros nomes encontrados na literatura é período característico ou período de revolução.

ao mesmo ponto inicial. Para situações como essa dizemos que a partícula possui órbita limitada e fechada. Observe que para o potencial da Figura 6 e o nível de energia mecânica  $E_1$  a órbita da partícula é limitada, mas não é fechada. Com efeito, a razão  $\frac{T_r}{T_\theta}$  depende da força central e dos valores de  $E$  e  $L$  (ARYA, 1998). Além disso, existe o denominado teorema de Bertrand<sup>7</sup> que afirma que as únicas forças centrais que resultam em movimentos orbitais limitados e fechados são  $\mathbf{F} = -\left(\frac{k}{r^2}\right)\hat{\mathbf{r}}$  e  $\mathbf{F} = -kr\hat{\mathbf{r}}$ , com  $k > 0$ . Em outras palavras, ou é a força inversamente proporcional ao quadrado da distância ou é a Lei de Hook.

Para a situação que discutimos na Figura 7, na qual evidentemente  $T_r$  é um pouco maior do que  $T_\theta$ , o vetor radial  $\mathbf{r}$  rotaciona mais do que  $2\pi$  para que um período radial seja executado. Ou seja, levará um número consideravelmente grande de revoluções para que a partícula retorne para o exato ponto do qual partiu (ARYA, 1998). Tal movimento orbital é muitas vezes denominado movimento precessivo e dizemos que a órbita da partícula precessa com o tempo.

## 2.7 O problema de Kepler

Vamos analisar agora com maiores detalhes as possíveis órbitas produzidas pela força gravitacional. Como sabemos, ela possui a seguinte forma

$$\mathbf{F} = -\frac{k}{r^2}\hat{\mathbf{r}}, \quad (2.68)$$

ou

$$f(r) = -\frac{k}{r^2}. \quad (2.69)$$

Na qual  $k = GMm$ , com  $G$  sendo a constante gravitacional,  $M$  a massa do Sol e  $m$  a massa do planeta. Por questão de simplicidade vamos continuar ignorando a força gravitacional que o planeta exerce sobre o Sol, com este fixo na origem do nosso sistema de coordenadas.

A energia potencial gravitacional associada é

$$\Delta V(r) = -W, \quad (2.70)$$

$$V(r_s) - V(r) = -\int_r^{r_s} f(r)dr, \quad (2.71)$$

$$V(r_s) - V(r) = \int_r^{r_s} \frac{k}{r^2}dr. \quad (2.72)$$

<sup>7</sup> Teorizado pela primeira vez em 1873 pelo Francês Joseph Louis François Bertrand (1822-1900).

Fazendo  $r_s \rightarrow \infty$ , teremos que  $V(r_s) \rightarrow 0$ . Assim,

$$V(r) = - \int_r^{r_s} \frac{k}{r^2} dr = -k \left[ -\frac{1}{r_s} + \frac{1}{r} \right], \quad (2.73)$$

$$V(r) = -\frac{k}{r}. \quad (2.74)$$

Queremos calcular as possíveis órbitas de uma maneira que tenhamos  $r(\theta)$ , e como conhecemos a forma da força central podemos utilizar a equação (2.63). Existem diversas maneiras de solucionar essa equação. Aqui, seguiremos a metodologia encontrada no livro do (ARYA, 1998).

Escrevendo a nossa força gravitacional em termos de  $u$ , teremos

$$f(r) = -\frac{k}{r^2} = f\left(\frac{1}{u}\right) = -ku^2. \quad (2.75)$$

Substituindo na equação (2.63), ficamos com

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -u + \frac{m}{L^2u^2}ku^2, \quad (2.76)$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{mk}{L^2}. \quad (2.77)$$

Essa é uma equação diferencial linear de segunda ordem não homogênea, cuja solução geral é da forma

$$u_g = u_h + u_p. \quad (2.78)$$

Na qual  $u_h$  é a solução da equação homogênea associada e  $u_p$  é a solução particular.

A parte homogênea da equação (2.77) é

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = 0. \quad (2.79)$$

Essa é uma equação do tipo oscilador harmônico simples, com  $\omega = 1$ , cuja solução é da forma

$$u_h = B \cos(\theta + \phi), \quad (2.80)$$

na qual  $B$  e  $\phi$  são constantes.

Como o termo que deixa a equação (2.77) não homogênea é uma constante, evidentemente a solução particular é

$$u_p = \frac{mk}{L^2}. \quad (2.81)$$

Portanto, a solução geral é

$$u_g = B \cos(\theta + \phi) + \frac{mk}{L^2}, \quad (2.82)$$

ou também,

$$u_g = \frac{1}{r} = \frac{mk}{L^2} + B \cos(\theta + \phi). \quad (2.83)$$

Nesta equação  $\phi$  determina a orientação da órbita e pode ser tomada como zero (ARYA, 1998). E, intencionalmente rearranjando os termos da equação (2.83)

$$1 = \left( \frac{mk}{L^2} + B \cos(\theta) \right) r, \quad (2.84)$$

$$r = \frac{L^2}{mk} \left[ \frac{1}{1 + \frac{BL^2}{mk} \cos(\theta)} \right]. \quad (2.85)$$

Observe que essa é a equação de uma seção cônica (elipse, parábola ou hipérbole), que fica mais fácil de visualizar quando comparamos com a equação geral de uma seção cônica. Segundo (ARYA, 1998), da geometria plana temos que

$$r = r_0 \frac{1 + \varepsilon}{1 + \varepsilon \cos(\theta)}, \quad (2.86)$$

na qual  $\varepsilon$  é a excentricidade da órbita e  $r_0$  o raio do caso de uma órbita circular, como veremos em breve. Analisando as equações (2.85) e (2.86) podemos observar que

$$\varepsilon = \frac{BL^2}{mk}, \quad (2.87)$$

e

$$r_0 = \frac{L^2}{mk} \left( \frac{1}{1 + \varepsilon} \right), \quad k < 0. \quad (2.88)$$

Os pontos de retorno (caso exista mais de um) que correspondem aos valores máximo e mínimo de  $r$  podem ser encontrados substituindo os valores máximo e mínimo de  $\cos(\theta)$  nas equações (2.85) e (2.86). Ou seja,  $r$  será mínimo quando  $\theta = 0$ , o que implica  $\cos(\theta) = 1$ , visto que  $r \propto \frac{1}{\cos(\theta)}$ . Assim,

$$r_{\min} = r_0 \frac{1 + \varepsilon}{1 + \varepsilon} = \frac{L^2}{mk} \left( \frac{1}{1 + \varepsilon} \right). \quad (2.89)$$

E  $r$  será máximo quando  $\theta = \pi$ , que implica  $\cos(\theta) = -1$ , ou seja,

$$r_{\max} = r_0 \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} = \left[ \frac{L^2}{mk} \left( \frac{1}{1 + \varepsilon} \right) \right] \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} = \frac{L^2}{mk} \left( \frac{1}{1 - \varepsilon} \right). \quad (2.90)$$

A forma da órbita da partícula é determinada pela excentricidade  $\varepsilon$ , equação (2.87), porém até o momento não temos nenhuma informação a respeito da constante  $B$ . Como já

sabemos o nível de energia mecânica que a partícula possui é crucial na determinação da órbita e de alguma maneira deve estar relacionada com a excentricidade. Dessa forma, esperamos que a energia ela esteja embutida em  $B$ .

Uma maneira elegante de encontrarmos o valor de  $B$  é analisarmos a energia mecânica da partícula nos pontos de retorno quando a velocidade radial é nula. Para uma partícula com energia  $E$ , das equações (2.33) e (2.47) temos que

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V(r)_{\text{efet}}, \quad (2.91)$$

$$E = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r). \quad (2.92)$$

Utilizando o que encontramos na equação (2.74), ficamos com

$$E = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}, \quad (2.93)$$

e rearranjando os termos

$$\frac{L^2}{2m} \left( \frac{1}{r^2} \right) - k \left( \frac{1}{r} \right) - E = 0. \quad (2.94)$$

Observe que essa é uma equação de segundo grau para  $\frac{1}{r}$ , na qual suas duas raízes são os pontos de retorno da partícula, visto que, esses locais são os únicos nos quais  $r$  satisfaz a equação (2.93).

Fazendo a mudança de variável  $\chi = \frac{1}{r}$ , teremos que

$$\frac{L^2}{2m}\chi^2 - k\chi - E = 0, \quad (2.95)$$

cuja solução é

$$\chi = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4 \left( \frac{L^2}{2m} \right) (-E)}}{2 \left( \frac{L^2}{2m} \right)}, \quad (2.96)$$

$$\chi_1 = \left( k + \sqrt{k^2 + \frac{2EL^2}{m}} \right) \frac{m}{L^2}, \quad (2.97)$$

$$\chi_1 = \frac{mk}{L^2} + \frac{m}{L^2} \sqrt{k^2 + \frac{2EL^2}{m}}, \quad (2.98)$$

$$\chi_1 = \frac{mk}{L^2} + \sqrt{\frac{m^2}{L^4} \left( k^2 + \frac{2EL^2}{m} \right)}, \quad (2.99)$$

$$\chi_1 = \frac{mk}{L^2} + \sqrt{\left( \frac{mk}{L^2} \right)^2 + \frac{2mE}{L^2}}. \quad (2.100)$$



Retornando para  $\frac{1}{r}$

$$\frac{1}{r_1} = \frac{mk}{L^2} + \sqrt{\left(\frac{mk}{L^2}\right)^2 + \frac{2mE}{L^2}}. \quad (2.101)$$

Não é necessário demonstrar que para  $\frac{1}{r_2}$ , teremos

$$\frac{1}{r_2} = \frac{mk}{L^2} - \sqrt{\left(\frac{mk}{L^2}\right)^2 + \frac{2mE}{L^2}}. \quad (2.102)$$

É evidente que a equação (2.101) nos fornece o valor máximo de  $r$ , enquanto que a equação (2.102) nos fornece o valor mínimo. Seguindo esse raciocínio, vamos comparar a equação (2.101) com o valor máximo que  $r$  pode assumir na equação (2.83). Como sabemos, isso ocorrerá quando  $\cos(\theta) = 1$ . Assim, ficamos com

$$\frac{1}{r_1} = \frac{mk}{L^2} + B, \quad (2.103)$$

e substituindo a equação (2.101) em (2.103), obtemos

$$\frac{mk}{L^2} + B = \frac{mk}{L^2} + \sqrt{\left(\frac{mk}{L^2}\right)^2 + \frac{2mE}{L^2}}, \quad (2.104)$$

$$B = \sqrt{\left(\frac{mk}{L^2}\right)^2 + \frac{2mE}{L^2}}. \quad (2.105)$$

Como esperávamos,  $B$  depende da energia mecânica da partícula e conseqüentemente a excentricidade. Dessa forma, substituindo a equação (2.105) em (2.87), teremos

$$\varepsilon = \frac{L^2}{mk} \sqrt{\frac{m^2 k^2}{L^4} + \frac{2mE}{L^2}}, \quad (2.106)$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{L^4}{m^2 k^2} \left( \frac{m^2 k^2}{L^4} + \frac{2mE}{L^2} \right)}, \quad (2.107)$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}}. \quad (2.108)$$

Portanto, chegamos a uma expressão que nos fornece a excentricidade da órbita em termos da energia mecânica. Na equação (2.108) diferentes valores de energia produzem diferentes órbitas (veja a Tabela 2 e Figura 8).

Dentre todas as órbitas possíveis sob a influência de uma força gravitacional os movimentos planetários ocorrem em órbitas elípticas, nas quais para todo ponto da trajetória a soma da sua distância a dois pontos fixos  $F$  e  $F'$  (chamados de focos) é constante. Ou seja,

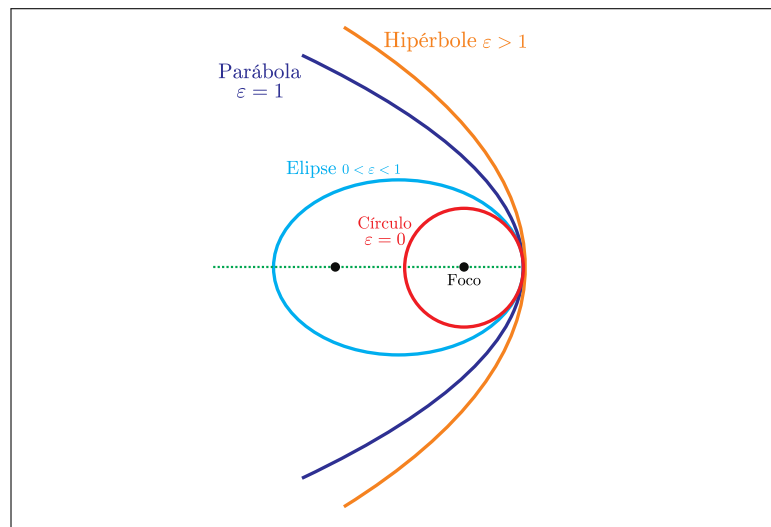
$$FP + PF' = 2a. \quad (2.109)$$

**Tabela 2 – Forma da órbita executada pela partícula de acordo com a excentricidade e energia.**

$E_m < E < 0$	$0 < \varepsilon < 1$	Elipse
$E = E_m$	$\varepsilon = 0$	Círculo
$E = 0$	$\varepsilon = 1$	Parábola
$E > 0$	$\varepsilon > 1$	Hipérbole
$E < E_m$	$\varepsilon < 0$	Classicamente Proibido

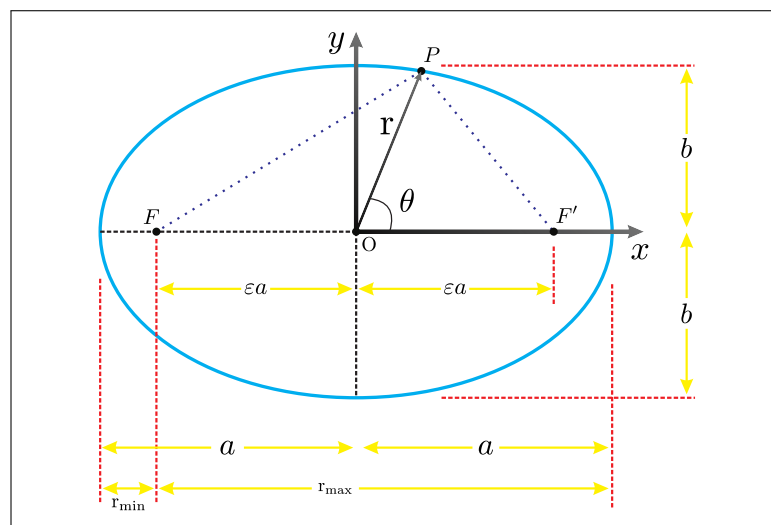
Fonte: Elaborado pelo autor.

**Figura 8 – Todas as possíveis órbitas para uma partícula sob a influência de uma força gravitacional.**



Fonte: Elaborado pelo autor.

**Figura 9 – Representação de uma elipse com algumas de suas propriedades.**



Fonte: Elaborado pelo autor.

Utilizando a Figura 9 podemos a partir da equação (2.109) obter a equação da elipse em coordenadas cartesianas e uma relação importante entre os semieixos maiores e menores,  $a$  e  $b$  respectivamente. Assim, a equação (2.109) se torna

$$\sqrt{(x+a\varepsilon)^2+y^2}+\sqrt{(x-a\varepsilon)^2+y^2}=2a. \quad (2.110)$$

Após alguns passos algébricos (demonstração completa no apêndice A), obtemos

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-\varepsilon^2)}=1. \quad (2.111)$$

Portanto, como queríamos chegamos à equação da elipse em coordenadas cartesianas. A relação entre os semieixos surge naturalmente quando fazemos  $x=0$ , ou seja,

$$y^2=a^2(1-\varepsilon^2), \quad (2.112)$$

$$y=\pm a\sqrt{1-\varepsilon^2}, \quad (2.113)$$

$$y=\pm b, \quad (2.114)$$

onde o deslocamento na vertical  $a\sqrt{1-\varepsilon^2}$  é igual ao semieixo menor  $b$ . Portanto, podemos reescrever a equação (2.111) como

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \quad (2.115)$$

Com essas informações podemos obter também a equação da elipse em coordenadas polares. Por conveniência futura vamos posicionar a origem do nosso sistema de coordenadas no foco do lado direito. Assim, a equação (2.111) fica

$$\frac{(x+a\varepsilon)^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-\varepsilon^2)}=1, \quad (2.116)$$

$$\left(\frac{x+a\varepsilon}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{a\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)^2=1. \quad (2.117)$$

Fazendo a mudança

$$\begin{cases} x=r\cos(\theta) \\ y=r\sin(\theta) \end{cases} \quad (2.118)$$

obtemos a expressão

$$\left(\frac{r\cos(\theta)+a\varepsilon}{a}\right)^2+\left(\frac{r\sin(\theta)}{a\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)^2=1. \quad (2.119)$$

E, novamente após alguns passos algébricos (demonstração completa no apêndice B), chegamos a expressão

$$r=\frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos(\theta)}. \quad (2.120)$$

Portanto, mais uma vez como queríamos, chegamos à equação da elipse em coordenadas polares.

Podemos ir mais além e encontrar uma expressão que relaciona os semieixos com a energia da partícula. Para uma situação na qual a partícula se encontra em um dos pontos de retorno a equação (2.109) se torna

$$2a = r_{\min} + r_{\max}, \quad (2.121)$$

substituindo as equações (2.89) e (2.90) em (2.121), ficamos com

$$2a = \frac{L^2}{mk} \left( \frac{1}{1+\varepsilon} \right) + \frac{L^2}{mk} \left( \frac{1}{1-\varepsilon} \right), \quad (2.122)$$

$$2a = \frac{L^2}{mk} \left( \frac{1}{1+\varepsilon} + \frac{1}{1-\varepsilon} \right), \quad (2.123)$$

$$2a = \frac{L^2}{mk} \left( \frac{1-\varepsilon+1+\varepsilon}{(1+\varepsilon)(1-\varepsilon)} \right), \quad (2.124)$$

$$2a = \frac{L^2}{mk} \left( \frac{2}{1-\varepsilon^2} \right). \quad (2.125)$$

Substituindo  $\varepsilon$  pela equação (2.108), obtemos

$$2a = \frac{2L^2}{mk} \left( \frac{1}{1 - 1 - \frac{2EL^2}{mk^2}} \right), \quad (2.126)$$

$$2a = \frac{2L^2}{mk} \left( -\frac{mk^2}{2EL^2} \right), \quad (2.127)$$

$$2a = -\frac{k}{E}. \quad (2.128)$$

Essa equação é bastante interessante, visto que, nos mostra que os semieixos da órbita elíptica da partícula são independentes do momento angular  $L$ .

Outra razão interessante é que

$$\frac{r_{\max}}{r_{\min}} = \frac{\frac{L^2}{mk} \left( \frac{1}{1-\varepsilon} \right)}{\frac{L^2}{mk} \left( \frac{1}{1+\varepsilon} \right)}, \quad (2.129)$$

$$\frac{r_{\max}}{r_{\min}} = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}. \quad (2.130)$$

Ou seja, o formato da elipse depende de  $\varepsilon$ , mas não de  $r_0$  que pode ser visto apenas como um fator de escala (ARYA, 1998).

## 2.8 As leis de Kepler do movimento planetário

O astrônomo e matemático alemão Johannes Kepler publicou no começo do século XVII três leis que descreviam o movimento dos planetas em torno do Sol. As duas primeiras foram publicadas em 1609 e a terceira em 1619. Suas leis estabelecem que:

- I. As órbitas de todos os planetas são elípticas com o Sol em um dos focos.
- II. O raio vetor que liga o planeta ao Sol varre áreas iguais em intervalos de tempos iguais.
- III. O quadrado do período de revolução de um planeta é proporcional ao cubo do semieixo maior de sua órbita.

**Figura 10 – Johannes Kepler.**



Fonte: <https://bityli.com/IObjV>

A primeira lei já foi discutida na subseção anterior quando mostramos as possíveis órbitas para a força gravitacional e comentamos que dentre elas, as dos planetas são elípticas. A segunda lei foi discutida na subseção 2.3, onde demonstramos que ela surge do fato de que o momento angular é conservado. Para não deixar nenhum leitor desapontado vamos demonstrar também a terceira lei, que pode facilmente ser deduzida a partir da equação (2.23), ou seja,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}, \quad (2.131)$$

$$dA = \frac{L}{2m} dt. \quad (2.132)$$

Como queremos encontrar uma relação entre o período e o semieixo maior, vamos integrar o lado esquerdo da equação (2.132) de 0 a  $A$ , já que a área da elipse depende do semieixo maior, e o lado direito de 0 a  $T$ , onde este é o período de revolução de uma órbita elíptica. Assim,

ficamos com

$$\int_0^A dA = \frac{L}{2m} \int_0^T dt. \quad (2.133)$$

$$A = \frac{L}{2m} T. \quad (2.134)$$

Utilizando que a área da elipse é igual a  $\pi ab$

$$\pi ab = \frac{L}{2m} T, \quad (2.135)$$

e que, pela equação (2.114),  $b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}$ , obtemos

$$\pi a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2} = \frac{L}{2m} T. \quad (2.136)$$

Da equação (2.125) podemos obter uma expressão para  $(1 - \varepsilon^2)$ , ou seja,

$$a = \frac{L^2}{mk} \left( \frac{1}{1 - \varepsilon^2} \right), \quad (2.137)$$

$$1 - \varepsilon^2 = \frac{L^2}{mka}. \quad (2.138)$$

Substituindo esse resultado na equação (2.136), obtemos

$$\pi a^2 \sqrt{\frac{L^2}{mka}} = \frac{L}{2m} T, \quad (2.139)$$

$$\pi^2 a^4 \left( \frac{L^2}{mka} \right) = \frac{L^2}{4m^2} T^2, \quad (2.140)$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 m}{k} a^3. \quad (2.141)$$

Fica assim demonstrado a terceira e última lei de Kepler. Mas, observe que Kepler enunciou sua lei para todos os planetas do sistema solar, enquanto que a equação (2.141) está especificada para uma determinada partícula de massa  $m$ . Então, a melhor maneira de expressar a equação (2.141) é utilizando o valor de  $k$ . Ou seja,

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3. \quad (2.142)$$

Que é mais geral e a mesma para todos os planetas do sistema solar.

### 3 O VETOR DE LAPLACE-RUNGE-LENZ

As simetrias e princípios de invariância desempenham um papel muito importante na Física (HAZEWINKEL, 1984). Suas leis básicas, os enunciados mais fundamentais que podemos fazer sobre a natureza, estão sedimentados na simetria (LEDERMAN; HILL, 2004).

Dizemos que um sistema físico possui simetria se podemos fazer uma mudança no sistema de tal forma que, após a mudança, o sistema permanece o mesmo que era antes. Chamamos a mudança que realizamos no sistema de operação simétrica ou uma transformação de simetria. Se o sistema permanece o mesmo quando efetuamos uma transformação nele, dizemos que o sistema é invariante perante a transformação (LEDERMAN; HILL, 2004).

A importância da utilização de sistemas simétricos se torna mais evidente quando tomamos conhecimento do famoso teorema da matemática Emmy Noether, que relaciona diretamente simetrias contínuas e constantes de movimento. A título de exemplo, quando estudamos simetrias na mecânica clássica aprendemos que o teorema nos mostra que invariância sob translações implica conservação do momento linear, invariância sob rotações implica conservação do momento angular e que invariância sob translações no tempo implica conservação da energia (DOMINGO, 2017).

Outro fato importante é que as simetrias de um sistema também estão diretamente relacionadas as chamadas degenerescências presentes no sistema. Na mecânica clássica, dizemos que um problema possui degenerescência quando duas ou mais órbitas diferentes possuem a mesma energia mecânica (SOUZA, 2006). Por exemplo, duas órbitas elípticas no problema de Kepler que são exatamente iguais, mas diferem pelo fato de estarem em planos diferentes, são ditas degeneradas pois possuem a mesma energia mecânica.

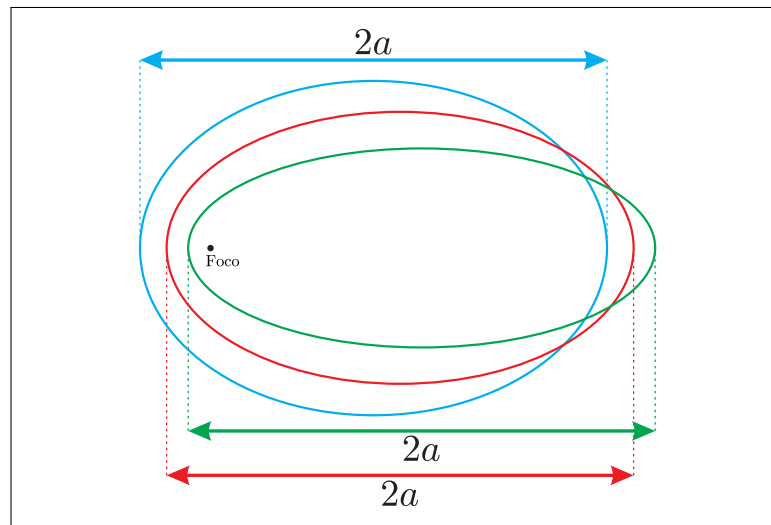
A equação (2.128), porém, evidencia uma degenerescência adicional no problema de Kepler, que servirá de argumento para futuras discussões (Veja a Figura 11). Ela nos mostra que mesmo órbitas elípticas diferentes, mas que possuem o mesmo valor do semieixo maior, possuem a mesma energia mecânica (também possuem o mesmo período, equação (2.142)).

Não obstante a tudo isso o problema de Kepler possui também uma constante de movimento adicional, pouco estudada nos cursos de mecânica clássica, chamada vetor de Laplace-Runge-Lenz (LRL), definido como

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - mk\hat{\mathbf{r}}. \quad (3.1)$$

Observe que diferente do momento angular as três componentes do vetor de LRL não podem ser independentes. Segundo (SOUZA, 2006), é possível mostrar que num sistema com  $n$  graus de

**Figura 11 – Órbitas elípticas degeneradas.**



Fonte: <https://> Elaborado pelo autor.

liberdade, existe  $2n$  constantes de movimento independentes. Pois bem, o problema de Kepler possui 3 graus de liberdade o que implica no máximo 6 constantes de movimento independentes. Já conhecemos 4, a energia e as 3 componentes do momento angular, o que deixa o vetor de LRL limitado a possuir no máximo 2 componentes independentes. Como veremos nas subseções seguintes, de fato as três componentes dessa nova constante de movimento não são independentes.

Outro questionamento muito importante que surge é qual a simetria por trás da existência do vetor de LRL. O teorema de Noether nos garante que a conservação do momento angular está atrelada a simetria esférica (ou invariância sob rotações) do problema de Kepler e que a conservação da energia está atrelada a invariância sob translações no tempo. Entretanto, até aqui temos apenas indícios do que está atrelado a existência do vetor de LRL, como a degenerescência que a equação (2.128) evidencia.

Nas subseções seguintes discutiremos as origens históricas desse vetor, suas principais características e importância para o problema de Kepler.

### 3.1 Origem histórica

A história por trás da descoberta do vetor de Laplace-Runge-Lenz é bastante interessante. Primeiro pelo fato de que nenhum dos autores atrelados a seu nome o deduziram pela primeira vez. Apesar disso, Wilhelm Lenz foi o primeiro a popularizar a utilização do vetor em 1924 ao calcular os níveis de energia no problema de Kepler perturbado no contexto da



antiga mecânica quântica (ALEMI, 2009), chamando a nova constante de pouco conhecida e o referenciando a um livro de análise vetorial de Carl Runge de 1919. Em seu livro, Runge demonstra que se a força central que age sob uma partícula variar com o inverso do quadrado da distância da partícula ao centro de força o vetor  $\mathbf{A}$  será uma constante de movimento (SOUZA, 2006). Interessante notar que segundo (GOLDSTEIN, 1980), em seu livro Runge não proclama nenhuma originalidade na descoberta do vetor.

Em um artigo de 1926, Wolfgang Pauli utilizou o vetor de LRL para calcular os níveis de energia do átomo de Hidrogênio sem a utilização da equação de Schrödinger (ALEMI, 2009). Segundo (GOLDSTEIN, 1980), Pauli referenciou o vetor como “anteriormente utilizado por Lenz” e que apesar disso o vetor foi chamado em trabalhos subsequentes de física como o vetor de Runge-Lenz.

Apenas anos mais tarde o nome de Pierre-Simon Laplace passou também a fazer parte do nome do vetor  $\mathbf{A}$ . No volume I de seu livro “*Traité de mécanique celeste*” de 1799, Laplace não apenas descobriu a nova constante, mas foi mais além e demonstrou sua relação com o momento angular e a energia mecânica da partícula (ALEMI, 2009), como veremos na subseção (3.3).

Ao realizar um estudo extensivo sobre a história do vetor de LRL e com a ajuda de alguns de seus leitores, Goldstein em um artigo de 1975 afirma que William Rowan Hamilton após o desenvolvimento dos quatérnios também deduziu a nova constante do problema de Kepler. Em suas palavras

Hamilton havia inventado os quatérnios em 1843, e nos anos seguintes esteve ocupado desenvolvendo sua nova teoria e a aplicando a vários problemas de matemática e física. Em julho de 1845, ele enviou um artigo a Royal Irish Academy intitulado “Aplicações de quatérnios a algumas questões dinâmicas”, no decorrer das quais ele derivou uma nova constante de movimento no problema de Kepler, uma constante que ele em seguida a chamaria de vetor de excentricidade. (GOLDSTEIN, 1980).

Goldstein também descobriu, ao analisar um trabalho histórico de Otto Volk, que a descoberta do vetor  $\mathbf{A}$  era quase um século mais antiga do que a de Laplace. O feito era de Jakob Hermann, um discípulo dos Bernoullis, que em 1710 utilizando as novas técnicas do cálculo desenvolvidas por Leibniz, publicou um artigo em uma revista Italiana pouco conhecida (*Giornale de Letterati D'Italia*), na qual efetuou uma integração direta da equação de órbita de uma partícula. Segundo (GOLDSTEIN, 1980), a magnitude do vetor  $\mathbf{A}$  aparecia como uma constante de integração no processo. Hermann ainda reconhecera a relação existente entre o vetor e a excentricidade das seções cônicas. No mesmo ano, Hermann enviou uma carta com

seu resultado a Johann I. Bernoulli que imediatamente o generalizou, permitindo orientações arbitrárias para a órbita (SOUZA, 2006). A carta enviada por Hermann e a resposta de Johann podem ser encontradas em *Histoires et Memoires de l'Academie Royale des Sciences* (1710), (1712), nas páginas 102-103 e 519-523, respectivamente.

Podemos concluir que um nome mais justo para o vetor  $\mathbf{A}$ , e que o próprio Goldstein sugere, seria o vetor de Hermann-Bernoulli-Laplace. Mas, apesar disso, vamos continuar com o nome vetor de Laplace-Runge-Lenz para evitar qualquer tipo de confusão com a literatura atual.

### 3.2 Dedução

Vamos deduzir o vetor de LRL utilizando a metodologia encontrada no livro (GOLDS-TEIN, 1980). Partindo da Segunda Lei de Newton

$$\dot{\mathbf{p}} = f(r) \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (3.2)$$

Calculando o produto vetorial de  $\dot{\mathbf{p}}$  com  $\mathbf{L}$ , teremos que

$$\dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{L} = f(r) \frac{\mathbf{r}}{r} \times \mathbf{L} = f(r) \frac{\mathbf{r}}{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{p}), \quad (3.3)$$

$$\dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{L} = m \frac{f(r)}{r} [\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})]. \quad (3.4)$$

Utilizando a identidade  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ , ficamos com

$$\dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{L} = m \frac{f(r)}{r} [\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) - \dot{\mathbf{r}}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})], \quad (3.5)$$

$$\dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{L} = m \frac{f(r)}{r} [\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) - r^2 \dot{\mathbf{r}}]. \quad (3.6)$$

Vamos simplificar um pouco a equação (3.6). Observe que

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}. \quad (3.7)$$

Como o produto escalar é comutativo

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 2\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}, \quad (3.8)$$

$$\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} r^2, \quad (3.9)$$

$$\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{2} (\dot{r}r + r\dot{r}) = r\dot{r}. \quad (3.10)$$

Substituindo esse resultado na equação (3.6), obtemos

$$\dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{L} = m \frac{f(r)}{r} [r\dot{r}\mathbf{r} - r^2\dot{\mathbf{r}}], \quad (3.11)$$

$$\dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{L} = mf(r)r^2 \left[ \frac{\dot{r}}{r^2} \mathbf{r} - \frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} \right]. \quad (3.12)$$

Como  $\mathbf{L}$  é uma constante de movimento

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = -mf(r)r^2 \left[ \frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} - \frac{\dot{r}}{r^2} \mathbf{r} \right]. \quad (3.13)$$

Observe que temos uma derivada de quociente implícita no lado direito da equação (3.13), ou seja,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = -mf(r)r^2 \left[ \frac{r^2 \dot{\mathbf{r}} - r \dot{r} \mathbf{r}}{r^3} \right], \quad (3.14)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = -mf(r)r^2 \left[ \frac{r \dot{\mathbf{r}} - \dot{r} \mathbf{r}}{r^2} \right], \quad (3.15)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = -mf(r)r^2 \frac{d}{dt} \left[ \frac{\mathbf{r}}{r} \right]. \quad (3.16)$$

Finalmente utilizando a equação (2.69) para especificar a força central, temos que

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = m \frac{k}{r^2} r^2 \frac{d}{dt} \left[ \frac{\mathbf{r}}{r} \right], \quad (3.17)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \frac{d}{dt} \left( mk \frac{\mathbf{r}}{r} \right), \quad (3.18)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \mathbf{p} \times \mathbf{L} - mk \frac{\mathbf{r}}{r} \right) = 0. \quad (3.19)$$

O que implica que a expressão dentro da derivada, que é um vetor, se conserva ao longo de toda a trajetória da partícula. E, como já sabemos, recebe o nome de vetor de Laplace-Runge-Lenz.

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - mk \frac{\mathbf{r}}{r}} \quad (3.20)$$

### 3.3 Discussão do vetor de LRL

Uma das vantagens de se trabalhar com o vetor de LRL é que ele permite encontrarmos a equação da órbita de forma bem mais simples do que a metodologia usual que utilizamos na subseção (2.7). Mas, primeiro vamos demonstrar a equação (3.19), ou seja, que realmente o vetor de LRL é uma constante de movimento no problema de Kepler. Para tal, vamos verificar se sua derivada em relação ao tempo é realmente zero. Assim,

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \mathbf{p} \times \mathbf{L} - mk \frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - mk \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}, \quad (3.21)$$

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \mathbf{L} + \mathbf{p} \times \frac{d\mathbf{L}}{dt} - mk \dot{\theta} \hat{\theta}. \quad (3.22)$$

Utilizando as equações (2.69) e (3.2), ficamos com

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = -\frac{k}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{L} - mk \dot{\theta} \hat{\theta}, \quad (3.23)$$

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = -\frac{kL}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{z}} - mk \dot{\theta} \hat{\theta}, \quad (3.24)$$

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{kL}{r^2} \hat{\theta} - mk \dot{\theta} \hat{\theta}. \quad (3.25)$$

Utilizando a equação (2.20), obtemos

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{k}{r^2}(mr^2\dot{\theta})\hat{\theta} - mk\dot{\theta}\hat{\theta}, \quad (3.26)$$

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = mk\dot{\theta}\hat{\theta} - mk\dot{\theta}\hat{\theta} = 0. \quad (3.27)$$

Como queríamos demonstrar.

Outro fato interessante que podemos verificar é a localização do vetor de LRL. Podemos começar calculando o seu produto escalar com o momento angular, ou seja,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{L} = (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) \cdot \mathbf{L} - mk\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{L}. \quad (3.28)$$

Utilizando a identidade  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ , ficamos com

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{p} \cdot (\mathbf{L} \times \mathbf{L}) - \frac{mk}{r}\mathbf{r} \cdot \mathbf{L}, \quad (3.29)$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{L} = -\frac{mk}{r}\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}), \quad (3.30)$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{L} = -\frac{mk}{r}(\mathbf{r} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{p} = 0. \quad (3.31)$$

Que nos mostra que  $\mathbf{A}$  é perpendicular a  $\mathbf{L}$ , ou seja, está no mesmo plano que  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{p}$ . E, como  $\mathbf{p} \times \mathbf{L}$  é perpendicular a qualquer ponto da trajetória e  $mk\hat{\mathbf{r}}$  aponta na mesma direção que  $\mathbf{r}$ , podemos facilmente observar (Figura 12) que o vetor de LRL sempre aponta do apocentro ao pericentro em qualquer local da órbita. Segundo (GOLDSTEIN, 1980), essa ortogonalidade também é um indício que de uma das componentes de  $\mathbf{A}$  depende de  $\mathbf{L}$ , restando para o vetor de LRL apenas no máximo duas componentes independentes.

Como já comentamos, podemos utilizar o vetor de LRL para encontrar a equação da órbita da partícula. Com esse intuito, calculamos o seu produto escalar com  $\mathbf{r}$  (veja a Figura 13), ou seja,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = (\mathbf{p} \times \mathbf{L} - mk\hat{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{r}. \quad (3.32)$$

Novamente utilizando a comutatividade do produto escalar, teremos que

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - mk(\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{r}}), \quad (3.33)$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \cdot \mathbf{L} - mkr, \quad (3.34)$$

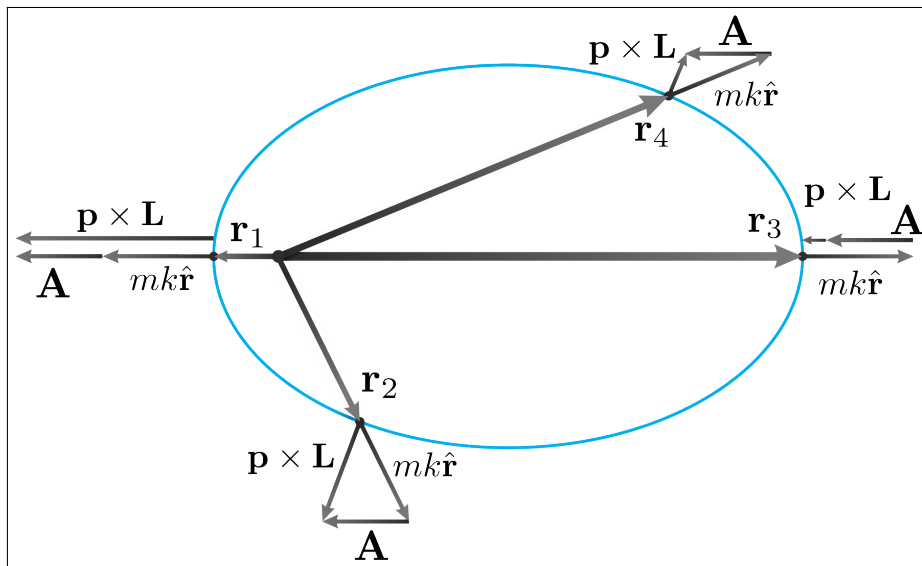
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L} - mkr, \quad (3.35)$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = L^2 - mkr. \quad (3.36)$$

Observe que

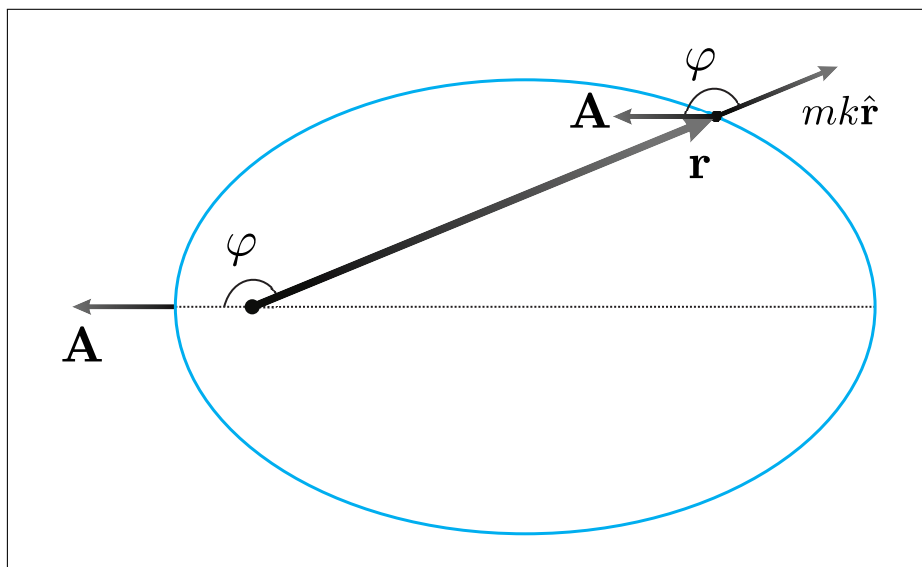
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = Arcos \varphi. \quad (3.37)$$

**Figura 12 – Representação do vetor de LRL em diferentes pontos da trajetória.**



Fonte: Elaborado pelo autor.

**Figura 13 – Representação do ângulo  $\varphi$  durante a trajetória.**



Fonte: Elaborado pelo autor.

Substituindo a equação (3.37) em (3.36), obtemos

$$\text{Arcos } \varphi = L^2 - mkr, \quad (3.38)$$

$$r = \frac{L^2}{A \cos \varphi + mk}, \quad (3.39)$$

$$r = \frac{L^2}{mk} \left( \frac{1}{1 + \frac{A}{mk} \cos \varphi} \right). \quad (3.40)$$

Note que essa é a mesma equação da órbita encontrada na subseção (2.7), equação (2.85). Porém, deduzida de uma maneira bem mais simples, sem a utilização de nenhuma equação diferencial.

Comparando as duas equações, e utilizando a equação (2.108), podemos claramente observar que

$$\varepsilon = \frac{A}{mk}, \quad (3.41)$$

$$A = mk\varepsilon. \quad (3.42)$$

Ou seja, o módulo do vetor de LRL está intrinsecamente relacionado a excentricidade da órbita. Provavelmente seja esse o motivo de Hamilton ter chamado essa constante de vetor de excentricidade.

Sem mais dramas vamos revelar se o vetor de LRL possui uma ou duas componentes independentes. Se utilizarmos o valor da excentricidade obtido da equação (2.108) na (3.42), teremos que

$$\frac{A}{mk} = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}}, \quad (3.43)$$

$$A^2 = m^2k^2 + 2mEL^2. \quad (3.44)$$

O que nos mostra mais uma relação existente, dessa vez com a energia. Portanto, confirmando que no problema de Kepler existe apenas cinco constantes de movimento independentes (GOLDSTEIN, 1980).

Outro questionamento que permanece é a origem do vetor de LRL, e além disso, por que não existe uma constante semelhante para qualquer tipo de força central. Segundo (GOLDSTEIN, 1980),

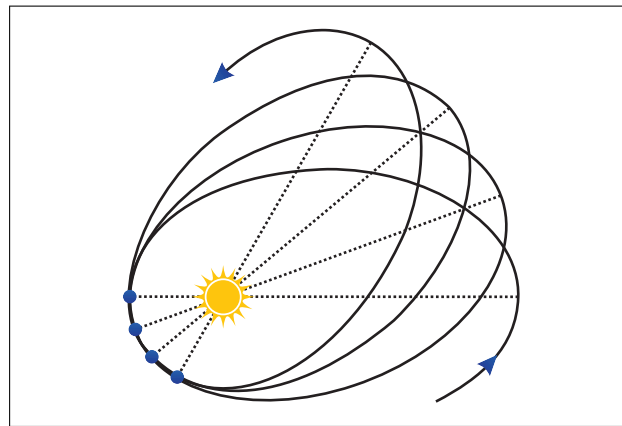
A resposta parece ser que tais quantidades conservadas podem de fato ser construídas, mas que em geral são funções bastante peculiares do movimento, isto é, conduzem à equação da órbita dado  $r$  como uma função de  $\theta$ . Vimos que, em geral, as órbitas para o movimento da força central não são fechadas. É uma propriedade das órbitas não fechadas que a curva acabará por passar por qualquer ponto arbitrário  $(r, \theta)$  que se encontra entre os limites dos pontos de retorno de  $r$ . Intuitivamente, isso pode ser visto da natureza não fechada da órbita; como  $\theta$  percorre um ciclo completo, a partícula nunca deve refazer sua trajetória em qualquer órbita anterior. Assim, a equação da órbita é tal que  $r$  é uma função de múltiplos valores de  $\theta$ ; na verdade, é uma função de infinitos valores de  $\theta$ . A quantidade conservada adicional correspondente a  $L$  e  $E$  definindo a órbita deve, da mesma forma, envolver uma função de infinitos valores do movimento da partícula. Somente quando as órbitas são fechadas, ou no geral quando o movimento é degenerado, como no problema de Kepler, podemos esperar que a quantidade conservada adicional seja uma simples função algébrica de  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{p}$ , assim como o vetor de Laplace-Runge-Lenz. (GOLDSTEIN, 1980).

Mas e o que podemos afirmar a respeito da Lei de Hook? Afinal, o teorema de Bertrand garante que as órbitas produzidas pela Lei de Hook também são fechadas. Sem delongas, de fato existe uma constante adicional para a Lei de Hook, mas não um vetor como no problema de Kepler, e sim um tensor de Rank 2 (veja a seção 9-7 no livro (GOLDSTEIN, 1980)).

#### 4 CÁLCULO DA PRECESSÃO DE ÓRBITAS A PARTIR DO VETOR DE LRL

No problema de Kepler as órbitas são fechadas apenas nos casos que envolvem dois corpos. Se introduzirmos outros corpos no problema as órbitas deixaram de ser fechadas. Esse é o caso dos movimentos planetários. A Terra, por exemplo, sofre uma pequena precessão (um desvio na sua trajetória) devido a influência dos outros planetas do sistema solar (veja a figura 12). A precessão total sofrida por um planeta é a soma das precessões causadas pela influência de cada um dos corpos externos. Inclusive, como veremos na subseção seguinte, a relatividade geral também contribui na precessão de um planeta, visto que, ela adiciona um termo a mais para a força gravitacional.

**Figura 14 – Representação da precessão de uma órbita.**



Fonte: Elaborado pelo autor.

Na mecânica clássica, medir a velocidade de precessão basicamente é calcular a velocidade angular de giro do semieixo maior da órbita. Como o vetor de LRL localiza-se na mesma direção do semieixo maior, calcular a velocidade angular do vetor de LRL é calcular a velocidade de precessão da órbita (SOUZA, 2006).

Bem, já sabemos que o vetor de LRL é uma constante de movimento adicional do problema de Kepler e conseqüentemente possui velocidade angular nula. Porém, em uma situação de perturbação da órbita o vetor de LRL deixa de ser uma constante de movimento e passa a girar junto com a órbita, nos possibilitando obter a velocidade com a qual a órbita está precessionando calculando a velocidade angular do vetor de LRL.

Nosso objetivo daqui em diante é perturbar a órbita da partícula com uma força do tipo  $\frac{\gamma}{r^4}$  que nos leva a um contexto relativístico de aproximação pós Newtoniana. E, que como veremos a seguir pode ser muito útil no cálculo da precessão de determinados corpos sem a

utilização do arcabouço matemático da Relatividade Geral.

Portanto, a velocidade de rotação do vetor de LRL é dada por<sup>1</sup>

$$\left\langle \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right\rangle = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A}. \quad (4.1)$$

Como trabalharemos com um problema de perturbação é necessário que tomemos a média temporal na equação acima, na qual,  $\boldsymbol{\Omega}$  nos fornece a velocidade média de precessão da órbita perturbada (SOUZA, 2006). Dessa forma, derivando o vetor  $\mathbf{A}$  em relação ao tempo teremos

$$\left\langle \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \mathbf{L} + \mathbf{p} \times \frac{d\mathbf{L}}{dt} - mk \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} \right\rangle. \quad (4.2)$$

Como  $\mathbf{L}$  é constante,  $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0$ . Utilizando que  $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{res}}$ , e definindo  $\mathbf{F}_{\text{res}} = \left( -\frac{k}{r^2} + g(r) \right) \hat{\mathbf{r}}$ , onde  $g(r)$  será a força perturbativa, obtemos

$$\left\langle \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right\rangle = \left\langle \left( -\frac{k}{r^2} + g(r) \right) \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{L} - mk \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} \right\rangle, \quad (4.3)$$

$$\left\langle \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right\rangle = \left\langle -\frac{k}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{L} + g(r) \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{L} - mk \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} \right\rangle. \quad (4.4)$$

Utilizando o resultado do processo matemático já realizado da equação (3.23) até (3.27), ficamos apenas com

$$\left\langle \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right\rangle = \langle g(r) \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{L} \rangle. \quad (4.5)$$

Escrevendo  $\hat{\mathbf{r}}$  em coordenadas polares, obtemos

$$\left\langle \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right\rangle = \langle g(r) [\cos \theta \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \hat{\mathbf{j}}] \times \mathbf{L} \rangle, \quad (4.6)$$

$$\left\langle \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right\rangle = \langle g(r) \cos \theta \rangle \hat{\mathbf{i}} \times \mathbf{L} + \langle g(r) \sin \theta \rangle \hat{\mathbf{j}} \times \mathbf{L}. \quad (4.7)$$

Segundo (CUNHA, 2017), devido a simetria esférica presente no problema de Kepler, podemos assumir que sempre teremos que

$$\langle g(r) \sin \theta \rangle = 0. \quad (4.8)$$

E,

$$\langle g(r) \cos \theta \rangle \neq 0. \quad (4.9)$$

Portanto, ficamos com

$$\left\langle \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right\rangle = \langle g(r) \cos \theta \rangle \hat{\mathbf{i}} \times \mathbf{L}. \quad (4.10)$$

<sup>1</sup> Provavelmente o leitor conhece essa equação na forma  $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}$ , na qual  $\boldsymbol{\omega}$  é a velocidade angular.



Utilizando a equação (3.42) na forma vetorial, obtemos

$$\left\langle \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right\rangle = -\frac{\langle g(r) \cos \theta \rangle}{mk\epsilon} \mathbf{A} \times \mathbf{L}. \quad (4.11)$$

Empregando a identidade  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$ ,

$$\left\langle \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right\rangle = \frac{\langle g(r) \cos \theta \rangle}{mk\epsilon} \mathbf{L} \times \mathbf{A}. \quad (4.12)$$

E comparando com a equação (4.1), temos que a velocidade da precessão causada pela força perturbativa é dada por

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{\langle g(r) \cos \theta \rangle}{mk\epsilon} \mathbf{L}. \quad (4.13)$$

Podemos agora aplicar a equação (4.13) para diversos problemas, entre os quais apresentaremos dois. O problema da precessão de Mercúrio e da estrela S14 que órbita o buraco negro central da via Láctea, chamado de Sagittarius A\*.

#### 4.1 Aplicação ao caso de Mercúrio

A precessão de Mercúrio já foi motivo de muito alvoroço no meio acadêmico, principalmente na metade do século XIX, uma vez que, ela colocava em dúvida a veracidade de uma das teorias mais bem estabelecidas da época, a Lei da Gravitação de Newton.

O astrônomo e matemático Francês Urbain Jean Joseph Le Verrier (1811-1877), foi quem mais se envolveu com o caso de Mercúrio. Após demonstrar matematicamente que as pequenas discrepâncias entre a órbita observada de Urano e a prevista pela Lei da gravitação eram devidas a existência de um outro planeta (encontrado 4 meses depois e chamado de Netuno) (MIRANDA, 2019), Le Verrier ganhou muita credibilidade e confiança para desvendar também o mistério por trás da órbita de Mercúrio, segundo (BAUM; SHEEHAN, 1997)

As coisas ficaram muito diferentes após a descoberta de Netuno. Le Verrier era um homem distinto, o diretor talentoso do observatório de Paris. A lei de Newton também era suprema. A engenhosidade dos matemáticos era superior a todos os obstáculos. Embora alguns problemas tenham cedido com dificuldade, todos cederam, como fizera o movimento de Urano, às fórmulas gravitacionais. Não havia razão para acreditar que o avanço excessivo do periélio de Mercúrio seria uma exceção. Por mais intratável que parecesse[...] (BAUM; SHEEHAN, 1997).

Nenhuma das explicações desenvolvidas na época obtiveram total comprovação (entre elas a existência de um planeta escondido, Vulcano). Foi somente em 1916, com a Teoria da Relatividade Geral de Einstein que a diferença de 43 segundos de arco por século entre o observado e calculado foi realmente solucionado.

Vamos agora portanto utilizar a equação (4.13) e calcular a precessão sofrida por Mercúrio devido a Relatividade Geral, como já mencionamos, em um contexto de aproximação pós Newtoniano.

Como a excentricidade de Mercúrio é muito pequena e sua órbita é quase circular, expandiremos a perturbação  $g(r)$  até primeira ordem, ou seja

$$g(r) \cong g(r_0) + g'(r_0)(r - r_0). \quad (4.14)$$

Utilizando a equação da elipse em coordenadas polares, equação (2.120). E fazendo  $a \cong r_0$  (novamente, devido a órbita ser aproximadamente circular), obtemos

$$r = \frac{r_0(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \theta}. \quad (4.15)$$

Como  $\varepsilon^2 \cong 0$  para a excentricidade de Mercúrio, ficamos com

$$r = \frac{r_0}{1 + \varepsilon \cos \theta}. \quad (4.16)$$

Utilizando que  $(1 + \varepsilon \cos \theta)^{-1} \cong (1 - \varepsilon \cos \theta)$ , e isolando  $(r - r_0)$ , teremos

$$r = r_0(1 - \varepsilon \cos \theta), \quad (4.17)$$

$$r - r_0 = -r_0 \varepsilon \cos \theta. \quad (4.18)$$

Substituindo a equação (4.18) na (4.14), obtemos

$$g(r) \cong g(r_0) - g'(r_0)r_0 \varepsilon \cos \theta. \quad (4.19)$$

E agora, substituindo a equação (4.19) na (4.13), finalmente temos que

$$\Omega = \frac{\langle g(r_0) \cos \theta - g'(r_0)r_0 \varepsilon \cos^2 \theta \rangle}{mk\varepsilon} \mathbf{L}, \quad (4.20)$$

$$\Omega = \frac{g(r_0) \langle \cos \theta \rangle - g'(r_0)r_0 \varepsilon \langle \cos^2 \theta \rangle}{mk\varepsilon} \mathbf{L}. \quad (4.21)$$

Utilizando que a média temporal de  $\cos \theta$  e  $\cos^2 \theta$  são  $-\varepsilon$  e  $\frac{1}{2}$  (demonstração nos apêndices C e D), respectivamente, ficamos com

$$\Omega = \frac{-\varepsilon g(r_0) - \frac{1}{2} \varepsilon r_0 g'(r_0)}{mk\varepsilon} \mathbf{L}, \quad (4.22)$$

$$\Omega = -\frac{1}{mk} \left( g(r_0) + \frac{r_0 g'(r_0)}{2} \right) \mathbf{L}. \quad (4.23)$$

A modificação na força gravitacional requerido pela relatividade geral introduz uma pequena componente proveniente da métrica de Schwarzschild que, como já sabemos, varia com  $\frac{\gamma}{r^4}$ , onde

$\gamma = -\frac{3GML^2}{mc^2}$  (THORNTON; MARION, 2011). Dessa forma, podemos reescrever a equação (4.23) como

$$\Omega = -\frac{1}{mk} \left( -\frac{3GML^2}{mc^2 r_0^4} + \frac{12GML^2}{2mc^2 r_0^4} \right) \mathbf{L}, \quad (4.24)$$

$$\Omega = -\frac{1}{mk} \left( \frac{3GML^2}{mc^2 r_0^4} \right) \mathbf{L}. \quad (4.25)$$

Utilizando que  $k = GMm$  e  $\mathbf{L} = mr^2 \dot{\theta} \hat{\mathbf{z}}$ ,

$$\Omega = -\frac{1}{GMm^2} \left( \frac{3GMm^2 r_0^4 \dot{\theta}^2}{mc^2 r_0^4} \right) mr^2 \dot{\theta} \hat{\mathbf{z}}, \quad (4.26)$$

$$\Omega = -\frac{3r_0^2 \dot{\theta}^2}{c^2} \dot{\theta} \hat{\mathbf{z}}. \quad (4.27)$$

Na qual utilizamos que  $r \cong r_0$ . E usando que  $\dot{\theta} = \frac{2\pi}{T_0}$  e  $\dot{\theta}^2 = \frac{GM}{r_0^3}$ ,

$$\Omega = -\frac{6\pi GM}{r_0 T_0 c^2} \hat{\mathbf{z}}. \quad (4.28)$$

Utilizando dados astronômicos de Mercúrio disponíveis no livro (THORNTON; MARION, 2011), calculamos que

$$\Omega = -\frac{6 \cdot \pi \cdot 6,67 \times 10^{-11} \cdot 1,98 \times 10^{30}}{5,79 \times 10^{10} \cdot 7,69 \times 10^6 \cdot (3,0 \times 10^8)^2} \hat{\mathbf{z}}, \quad (4.29)$$

$$\Omega = -6,2 \times 10^{-14} \hat{\mathbf{z}} \frac{\text{rad}}{\text{s}}. \quad (4.30)$$

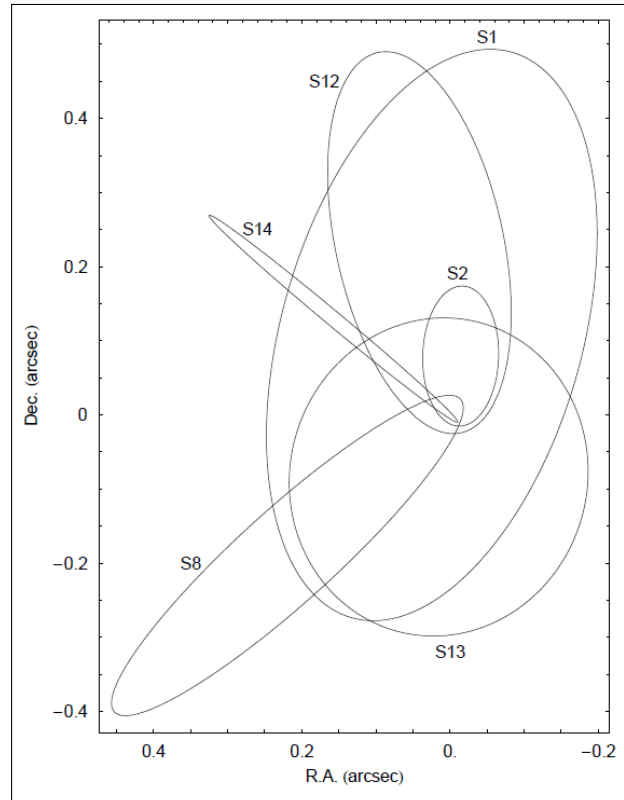
O que implica, após uma simples conversão, em 40,5 segundos de arco por século. Um resultado muito próximo dos 43 segundos de arco por século observado e calculado quando se utiliza a Relatividade Geral.

## 4.2 Aplicação ao caso da estrela S14

A estrela S14 é uma das várias estrelas que orbitam as redondezas de uma enorme fonte de rádio no centro da Via Láctea. Nos últimos anos, a existência de um enorme buraco negro com massa de aproximadamente 4 milhões de vezes a massa do Sol correspondendo a essa fonte de rádio, Sagittarius A\*, tem se tornado cada vez mais estabelecido (BOZZA; MANCINI, 2005).

Descoberto em 1974 por Bruce Balick e Robert L. Brown (GOSS; BROWN; LO, 2003), o seu estudo tem representado um grande avanço no entendimento de como é e funciona o centro das galáxias do Universo, assim como, a compreensão e comprovação de alguns efeitos relativísticos.

**Figura 15 – Órbitas das estrelas mais próximas de Sagittarius A\*.**



Fonte: BOZZA.

Como, segundos dados de (Eisenhauer), a excentricidade da estrela S14,  $\varepsilon = 0.93$ , é muito grande, não podemos realizar a mesma expansão que fizemos para o caso de Mercúrio. Devemos realizar um cálculo direto. Assim, a média temporal de  $g(r) \cos \theta$  fica

$$\langle g(r) \cos \theta \rangle = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} g(r) \cos \theta dt, \quad (4.31)$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} g(r) \cos \theta \frac{d\theta}{\dot{\theta}}, \quad (4.32)$$

$$= \frac{m}{TL} \int_0^{2\pi} g(r) r^2 \cos \theta d\theta. \quad (4.33)$$

$$(4.34)$$

Onde utilizamos que  $\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$ . E, novamente aplicando o valor de  $g(r)$ , ficamos com

$$\langle g(r) \cos \theta \rangle = \frac{m}{TL} \int_0^{2\pi} \left( -\frac{3GML^2}{mc^2 r^4} \right) r^2 \cos \theta d\theta, \quad (4.35)$$

$$= -\frac{3GML}{Tc^2} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{r^2} d\theta. \quad (4.36)$$

Utilizando a equação (2.120), obtemos

$$\langle g(r) \cos \theta \rangle = -\frac{3GML}{Tc^2} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta (1 + \varepsilon \cos \theta)^2}{a^2(1 - \varepsilon^2)^2} d\theta, \quad (4.37)$$

$$= -\frac{3GML}{a^2c^2T(1 - \varepsilon^2)^2} \int_0^{2\pi} (\cos \theta + 2\varepsilon \cos^2 \theta + \varepsilon^2 \cos^3 \theta) d\theta, \quad (4.38)$$

$$= -\frac{3GML}{a^2c^2T(1 - \varepsilon^2)^2} (2\varepsilon\pi), \quad (4.39)$$

$$= -\frac{6\pi\varepsilon GML}{a^2c^2T(1 - \varepsilon^2)^2}. \quad (4.40)$$

Substituindo a equação (4.40) na (4.13),

$$\Omega = -\frac{6\pi GML}{mk\Gamma a^2c^2(1 - \varepsilon^2)^2} \mathbf{L}, \quad (4.41)$$

$$\Omega = -\frac{6\pi GMmr^2\dot{\theta}}{GMm^2a^2c^2T(1 - \varepsilon^2)^2} mr^2\dot{\theta}\hat{\mathbf{z}}, \quad (4.42)$$

$$\Omega = -\frac{6\pi r^4\dot{\theta}^2}{a^2c^2T(1 - \varepsilon^2)^2}\hat{\mathbf{z}}. \quad (4.43)$$

E, mais uma vez utilizando que  $\dot{\theta}^2 = \frac{GM}{r^3}$ ,

$$\Omega = -\frac{6\pi GMr}{a^2c^2T(1 - \varepsilon^2)^2}\hat{\mathbf{z}}. \quad (4.44)$$

Novamente usando a equação (2.120), finalmente obtemos

$$\Omega = -\frac{6\pi GM}{a^2c^2T(1 - \varepsilon^2)^2} \left( \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \theta} \right) \hat{\mathbf{z}}, \quad (4.45)$$

$$\Omega = -\frac{6\pi GM}{Tac^2(1 - \varepsilon^2)(1 + \varepsilon \cos \theta)} \hat{\mathbf{z}}, \quad (4.46)$$

$$\Omega = -\frac{6\pi GM}{Tac^2(1 + \varepsilon \cos \theta - \varepsilon^2 - \varepsilon^3 \cos \theta)} \hat{\mathbf{z}}. \quad (4.47)$$

Podemos facilmente eliminar a função cosseno multiplicando e dividindo pela excentricidade, uma vez que, a excentricidade elevada a um expoente suficientemente grande aproxima-se muito de zero. Dessa forma, ficamos apenas com

$$\Omega = -\frac{6\pi GM}{Tac^2} \hat{\mathbf{z}}. \quad (4.48)$$

Utilizando dados astronômicos da estrela S14 retirados de (EISENHAUER; GENZEL; AL., 2005)<sup>2</sup>, chegamos ao seguinte valor

$$\Omega = -\frac{6\pi \cdot 6,67 \times 10^{-11} \cdot 1,98 \times 10^{30} \cdot 4,0 \times 10^6}{1,198 \times 10^9 \cdot 2,64 \times 10^{14} (3,0 \times 10^8)^2} \hat{\mathbf{z}}, \quad (4.49)$$

$$\Omega = -3,5 \times 10^{-13} \hat{\mathbf{z}} \frac{\text{rad}}{\text{s}}. \quad (4.50)$$

<sup>2</sup> O semieixo maior da estrela S14 é fornecido em arco por segundo. O seu valor em metros foi calculado aproximando o semieixo maior ao comprimento de um arco, uma vez que, o ângulo é muito pequeno.

O que implica, mais uma vez com uma simples transformação, em 227 segundos de arco por século. Um resultado interessante, visto que, ele é quase seis vezes maior do que a velocidade de precessão que calculamos para Mercúrio. O que era esperado, uma vez que a massa sol é muito pequena em relação a de Sargitário A\*. Outro fato interessante é que esse resultado implica que a estrela S14 levará 1587 anos para retornar a um mesmo determinado ponto da trajetória.

Infelizmente ainda não podemos comparar esse resultado com de outros autores. Até o momento da finalização desse trabalho não encontramos na literatura nenhum cálculo da precessão da estrela S14.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O vetor de Laplace-Runge-Lenz demonstrou ser uma excelente ferramenta alternativa no cálculo da precessão de órbitas em uma aproximação de campo fraco da Relatividade Geral. O que indica a sua potencialidade de ser empregado em contextos diferentes dos abordados nesse trabalho.

Podemos concluir que a sua utilização como primeira aproximação de um determinado problema que envolva dois corpos é bastante útil, visto que, empregamos apenas uma matemática acessível a qualquer aluno de graduação.

Gostaríamos de enfatizar que no problema da estrela S14, apesar do fato de que ela está orbitando um corpo extremamente massivo, o que poderia prejudicar a aproximação de campo fraco que realizamos, a sua velocidade de translação em torno do buraco negro é muito pequena em comparação com a velocidade da luz, o que contribui para a nossa análise.

Por fim, consideramos que o resultado obtido para o problema de Mercúrio demonstrou sua relevância, visto que, aproxima-se muito do calculado quando se utiliza a Relatividade Geral.

## REFERÊNCIAS

- ALEMI, A. Laplace-runge-lenz vector. p. 1–11, 2009. Disponível em: <<https://www.alexalemi.com/publications/laplace.pdf>>. Acesso em: 26 ago. 2020.
- ARYA, A. P. **Introduction to Classical Mechanics**. 2. ed. Pearson: Prentice-Hall, 1998.
- BAUM, R.; SHEEHAN, W. **In Search of planet Vulcan**. [S.l.]: Plenum Press, 1997.
- BOZZA, V.; MANCINI, L. Gravitational lensing of stars in the central arcsecond of our galaxy. 2005. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/astro-ph/0503664v1>>. Acesso em: 21 dez. 2020.
- CUNHA, R. F. F. da. **A gravitação e a precessão de Mercúrio: um texto para professores do ensino médio**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Física) — Universidade de Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017. 132 f. Disponível em: <[https://www.if.ufrj.br/~pef/producao\\_academica/dissertacoes/2017\\_Ricardo\\_Cunha/dissertacao\\_Ricardo\\_Cunha.pdf](https://www.if.ufrj.br/~pef/producao_academica/dissertacoes/2017_Ricardo_Cunha/dissertacao_Ricardo_Cunha.pdf)>. Acesso em: 17 abr. 2020.
- DOMINGO, S. E. **Laplace-Runge-Lenz Vector**. Dissertação (Graduação em Física) — University of Barcelona, Barcelona, 2017. 40 f. Disponível em: <[https://www.researchgate.net/publication/313694442\\_Degree\\_Thesis\\_Laplace-Runge-Lenz\\_vector](https://www.researchgate.net/publication/313694442_Degree_Thesis_Laplace-Runge-Lenz_vector)>. Acesso em: 07 mai. 2020.
- EISENHAUER, F.; GENZEL, R.; AL. et. Sinfoni in the galactic center: Young stars and infrared flares in the central light-month. **The Astrophysical Journal**, n. 628, p. 246–259, 2005. Disponível em: <<https://iopscience.iop.org/article/10.1086/430667>>. Acesso em: 18 dez. 2020.
- FRENCH, A. P. **Introduction to Classical Mechanics**. 1. ed. Oxfordshire: Routledge, 1987.
- GOLDSTEIN, H. **Classical Mechanics**. 2. ed. San Francisco: Addison-Wesley, 1980.
- GOSS, W. M.; BROWN, R. L.; LO, K. Y. The discovery of sgr a\*. **Astronomische Nachrichten**, v. 324, n. 1, p. 1–8, 2003. Disponível em: <[arXiv:astro-ph/0305074](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0305074)>. Acesso em: 18 dez. 2020.
- GRIFFITHS, D. **Introduction to Electrodynamics**. 3. ed. New Jersey: Prentice-Hall, 1999.
- HAZEWINKEL, M. Symmetry in physics and system theory. an introduction to past, present and future possibilities. **IEEE**, v. 23, 1984. Disponível em: <[https://www.researchgate.net/publication/224682185\\_Symmetry\\_in\\_physics\\_and\\_system\\_theory\\_An\\_introduction\\_to\\_past\\_present\\_and\\_future\\_possibilities](https://www.researchgate.net/publication/224682185_Symmetry_in_physics_and_system_theory_An_introduction_to_past_present_and_future_possibilities)>. Acesso em: 18 set. 2020.
- LEDERMAN, L. M.; HILL, C. T. **Symmetry and the beautiful universe**. New York: Prometheus Books, 2004.
- MIRANDA, O. D. Avanço do periÉlio de mercÚrio – o primeiro sucesso da teoria da relatividade geral de einstein. **Conexões, ciência e tecnologia**, v. 13, n. 2, p. 7–20, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.21439/conexoes.v13i2.1670>>. Acesso em: 21 jul. 2020.
- NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica: Mecânica**. São Paulo: Edgard Blucher, 2002.
- SOUZA, C. F. de. O vetor de laplace-runge-lenz no problema de kepler. **Caderno de Física da UEFS**, v. 04, n. 02, p. 115–159, 2006.
- TAYLOR, J. R. **Classical Mechanics**. New york: University Science Books, 2005.



THORNTON, S. T.; MARION, J. B. **Dinâmica Clássica de Partículas e Sistemas**. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

YAMADA, K. **Post-newtonian equilibrium solutions to the three-body problem in general relativity**. Tese (Doutorado em Ciências) — Universidade de Hirosaki, Hirosaki, 2014. 109 f. Disponível em: <[https://hirosaki.repo.nii.ac.jp/?action=repository\\_action\\_common\\_download&item\\_id=4363&item\\_no=1&attribute\\_id=20&file\\_no=3](https://hirosaki.repo.nii.ac.jp/?action=repository_action_common_download&item_id=4363&item_no=1&attribute_id=20&file_no=3)>. Acesso em: 4 out. 2020.

APÊNDICE A – Demonstração da Equação da Elipse em Coordenadas Cartesianas

Partindo da equação (2.117) temos que

$$FP + PF' = 2a,$$

$$\sqrt{(x+a\varepsilon)^2 + y^2} + \sqrt{(x-a\varepsilon)^2 + y^2} = 2a,$$

$$\sqrt{(x+a\varepsilon)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-a\varepsilon)^2 + y^2},$$

$$(x+a\varepsilon)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-a\varepsilon)^2 + y^2} + (x-a\varepsilon)^2 + y^2,$$

$$x^2 + 2xa\varepsilon + a^2\varepsilon^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-a\varepsilon)^2 + y^2} + x^2 - 2xa\varepsilon + a^2\varepsilon^2,$$

$$4xa\varepsilon = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-a\varepsilon)^2 + y^2},$$

$$a\sqrt{(x-a\varepsilon)^2 + y^2} = a^2 - xa\varepsilon,$$

$$a^2(x-a\varepsilon)^2 + a^2y^2 = a^4 - 2xa^3\varepsilon + x^2a^2\varepsilon^2,$$

$$a^2(x^2 - 2xa\varepsilon + a^2\varepsilon^2) + a^2y^2 = a^4 - 2xa^3\varepsilon + x^2a^2\varepsilon^2,$$

$$a^2x^2 - 2xa^3\varepsilon + a^4\varepsilon^2 + a^2y^2 = a^4 - 2xa^3\varepsilon + x^2a^2\varepsilon^2,$$

$$x^2a^2(1 - \varepsilon^2) + a^2y^2 = a^4(1 - \varepsilon^2),$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - \varepsilon^2)} = 1.$$

Utilizando que  $a\sqrt{1 - \varepsilon^2} = b$ , obtemos

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}.$$

APÊNDICE B – Demonstração da Equação da Elipse em Coordenadas Polares

Partindo da equação (2.119), temos que

$$\left(\frac{r \cos \theta + a\varepsilon}{a}\right)^2 + \left(\frac{r \sin \theta}{a\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)^2 = 1,$$

$$\frac{r^2 + \cos^2 \theta + 2a\varepsilon r \cos \theta + a^2\varepsilon^2}{a^2} + \frac{r^2 \sin^2 \theta}{a^2(1-\varepsilon^2)} = 1,$$

$$r^2 + \cos^2 \theta + 2a\varepsilon r \cos \theta + a^2\varepsilon^2 + \frac{r^2 \sin^2 \theta}{1-\varepsilon^2} = a^2,$$

$$r^2 \left(\frac{\sin^2 \theta}{1-\varepsilon^2} + \cos^2 \theta\right) + 2a\varepsilon r \cos \theta + a^2\varepsilon^2 - a^2 = 0,$$

$$r^2 \left(\frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta - \varepsilon^2 \cos^2 \theta}{1-\varepsilon^2}\right) + 2a\varepsilon r \cos \theta - a^2(1-\varepsilon^2) = 0,$$

$$r^2 \left(\frac{1-\varepsilon^2 \cos^2 \theta}{1-\varepsilon^2}\right) + 2a\varepsilon r \cos \theta - a^2(1-\varepsilon^2) = 0.$$

Essa é uma equação de segundo grau, cuja solução é dada por

$$r = \frac{-2a\varepsilon r \cos \theta \pm \sqrt{4a^2\varepsilon^2 \cos^2 \theta - 4\left(\frac{1-\varepsilon^2 \cos^2 \theta}{1-\varepsilon^2}\right)(-a^2(1-\varepsilon^2))}}{2\left(\frac{1-\varepsilon^2 \cos^2 \theta}{1-\varepsilon^2}\right)}.$$

Escolhendo a solução positiva,

$$r = \frac{-2a\varepsilon r \cos \theta + \sqrt{4a^2\varepsilon^2 \cos^2 \theta + a^2\frac{(4-4\varepsilon^2 \cos^2 \theta)(1-\varepsilon^2)}{1-\varepsilon^2}}}{\frac{2-2\varepsilon^2 \cos^2 \theta}{1-\varepsilon^2}},$$

$$r = \frac{-2a\varepsilon r \cos \theta + \sqrt{4a^2\varepsilon^2 \cos^2 \theta + 4a^2 - 4a^2\varepsilon^2 \cos^2 \theta}}{\frac{2-2\varepsilon^2 \cos^2 \theta}{1-\varepsilon^2}},$$

$$r = (-2a\varepsilon r \cos \theta + 2a) \left(\frac{1-\varepsilon^2}{2-2\varepsilon^2 \cos^2 \theta}\right),$$

$$r = 2a(1-\varepsilon \cos \theta) \left(\frac{1-\varepsilon^2}{2(1-\varepsilon^2 \cos^2 \theta)}\right),$$

$$r = \frac{a(1 - \varepsilon \cos \theta)(1 - \varepsilon^2)}{(1 + \varepsilon \cos \theta)(1 - \varepsilon \cos \theta)},$$

$$\boxed{r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \theta}}.$$

APÊNDICE C – Demonstração da Média Temporal de  $\cos \theta$ .

Pela definição de média temporal de uma função, temos que

$$\langle \cos \theta \rangle = \frac{1}{T_0} \int_0^{2\pi} \cos \theta dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{2\pi} \cos \theta \frac{d\theta}{\dot{\theta}},$$

$$\langle \cos \theta \rangle = \frac{m}{LT_0} \int_0^{2\pi} r^2 \cos \theta d\theta.$$

Utilizando a equação (4.17),

$$\langle \cos \theta \rangle = \frac{m}{LT_0} \int_0^{2\pi} r_0^2 (1 - \varepsilon \cos \theta)^2 \cos \theta d\theta,$$

$$\langle \cos \theta \rangle = \frac{1}{\theta_0 T_0} \left[ \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta - 2\varepsilon \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta + \varepsilon^2 \int_0^{2\pi} \cos^3 \theta d\theta \right],$$

$$\langle \cos \theta \rangle = \frac{1}{2\pi} \left[ -2\varepsilon \left( \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos 2\theta d\theta \right) \right],$$

$$\langle \cos \theta \rangle = \frac{1}{2\pi} (-2\varepsilon\pi) = -\varepsilon.$$

APÊNDICE D – Demonstração da Média Temporal de  $\cos^2 \theta$ .

Novamente pela definição de média temporal de uma função, temos que

$$\langle \cos^2 \theta \rangle = \frac{1}{T_0} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \frac{d\theta}{\dot{\theta}},$$

$$\langle \cos^2 \theta \rangle = \frac{m}{LT_0} \int_0^{2\pi} r^2 \cos^2 \theta d\theta = \frac{m}{LT_0} \int_0^{2\pi} r_0^2 (1 - \varepsilon \cos \theta)^2 \cos^2 \theta d\theta,$$

$$\langle \cos^2 \theta \rangle = \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta - 2\varepsilon \int_0^{2\pi} \cos^3 \theta d\theta + \varepsilon^2 \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta d\theta \right],$$

$$\langle \cos^2 \theta \rangle = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(2\theta) d\theta \right],$$

$$\langle \cos^2 \theta \rangle = \frac{1}{2\pi} (\pi) = \frac{1}{2}.$$