



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
FACULDADE DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E LETRAS DE IGUATU
CURSO DE GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ALANA CAROLINA LIMA DOS SANTOS

ELETROMAGNETISMO CLÁSSICO: FORMALISMOS, SIMETRIAS E EXTENSÃO
NA ELETRODINÂMICA MAXWELL-CARROLL-FIELD-JACKIW

IGUATU – CEARÁ

2021

ALANA CAROLINA LIMA DOS SANTOS

ELETROMAGNETISMO CLÁSSICO: FORMALISMOS, SIMETRIAS E EXTENSÃO NA
ELETRODINÂMICA MAXWELL-CARROLL-FIELD-JACKIW

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Física do Faculdade de Educação, Ciências e Letras de Iguatu da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciada em Física.

Orientador: Prof. Dr. Celio Rodrigues Muniz

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Estadual do Ceará
Sistema de Bibliotecas

Santos, Alana Carolina Lima dos.

Eletromagnetismo clássico: formalismos, simetrias e extensão na eletrodinâmica Maxwell-Carroll-Field-Jackiw [recurso eletrônico] / Alana Carolina Lima dos Santos. - 2021.

43 f. : il.

Trabalho de conclusão de curso (GRADUAÇÃO) - Universidade Estadual do Ceará, Faculdade de Educação, Ciências e Letras de Iguatu, Curso de Física, Iguatu, 2021.

Orientação: Prof. Pós-Dr. Celio Rodrigues Muniz.

1. Eletromagnetismo Clássico. 2. Extensões.
3. Eletrodinâmica Carroll-Field-Jackiw. I.
Título.

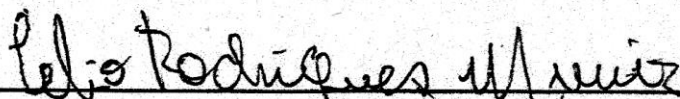
ALANA CAROLINA LIMA DOS SANTOS

ELETROMAGNETISMO CLÁSSICO: FORMALISMOS, SIMETRIAS E EXTENSÃO NA
ELETRODINÂMICA MAXWELL-CARROLL-FIELD-JACKIW

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Curso de Graduação em Física da Faculdade
de Educação, Ciências e Letras de Iguatu da
Universidade Estadual do Ceará, como requisito
parcial à obtenção do grau de Licenciada em
Física.

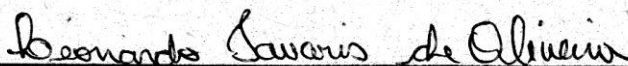
Aprovada em: 11/02/2021

BANCA EXAMINADORA



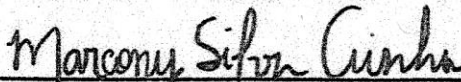
Prof. Dr. Celio Rodrigues Muniz (Orientador)

Faculdade de Educação, Ciências e Letras de Iguatu - FECLI
Universidade Estadual do Ceará – UECE



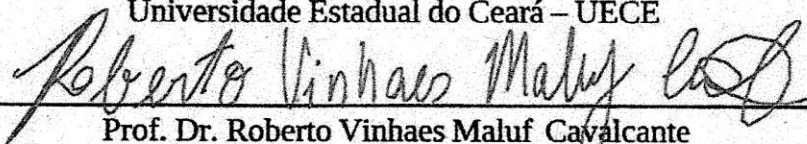
Prof. Me. Leonardo Tavares de Oliveira

Faculdade de Educação, Ciências e Letras de Iguatu - FECLI
Universidade Estadual do Ceará – UECE



Prof. Dr. Marcony Silva Cunha

Centro de Ciências e Tecnologia - CCT
Universidade Estadual do Ceará – UECE



Prof. Dr. Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante

Universidade Federal do Ceará - UFC

Aos meus professores, em particular, meu orientador, Celio Rodrigues Muniz. Aos meus amigos e familiares. Verdadeiros ombros de gigantes.

AGRADECIMENTOS

A Deus, meu amparo e proteção, por ter colocado pessoas incríveis em meu caminho e me concedido a honra de estudar o quão maravilhosa e complexa é a natureza.

Aos meus pais, José Humberto dos Santos e Sirlene Lima dos Santos, pelos inúmeros esforços e apoio incondicional, que palavras não conseguem descrever, para que eu realizasse meu sonho. Eu os amo profundamente.

Aos meus irmãos, Ana Aretusa Lima dos Santos e José Hugo Lima dos Santos, bem como a todos os meus familiares, por serem minha base e inspiração.

Ao meu orientador, professor e amigo, Celio Rodrigues Muniz, pela paciência, incentivo, suporte e, principalmente, por compartilhar seus inúmeros conhecimentos. O tenho como uma referência singular.

A todos os professores que passaram em minha vida e dedicaram parte do seu tempo a nobre missão de ensinar. Em especial, aos professores Leonardo Tavares de Oliveira, Fernando Martins de Paiva e todos os demais que compõem o corpo docente da FECLI-UECE.

Aos meus amigos, Antônio Patrício de Oliveira Ramos, Naiagry Paula de Fraga e Ana Elenice Morais Silva por literalmente terem me acolhido neste período. Não há como explicar o quanto foi importante. O que posso afirmar é que serei eternamente grata por tamanho gesto de carinho. A todos que compõem o curso de Licenciatura em Física da FECLI-UECE, em especial aos meus grandes amigos, Francisco Gomes, Thamires Ivna, Emanuel Hericlys, André Aleson, Durval Mendonça, Cícero Moezio e Thaiana Magna.

Ao grupo de estudos em Física Teórica da FECLI-UECE, vulgo Zenitão, pelas discussões acaloradas que contribuíram para esse trabalho e minha formação como um todo.

A Universidade Estadual do Ceará e Capes pelos financiamentos aos projetos de Bolsas que foram fundamentais para minha permanência no meio acadêmico.

A todos meus entes queridos de Cedro, em particular, do Sítio Canudos e ainda aos que tive o privilégio de conhecer no distrito José de Alencar.

Aos meus estimados amigos: Jordanna Hellen, Angélica Freires, Andreia Freires, Ângela Freires, Hilton Campina, Elias Vieira, Cleber Feitosa, Keli Gomes, Helinaide Sales, Raissa Morais, Kildary Primo, Samuel Tomaz, Beatriz Rodrigues, Ellen Chagas e Larissa Tavares.

De modo geral, a todos que contribuíram direta e indiretamente.

"O animal satisfeito dorme".

(Guimarães Rosa)

RESUMO

O Eletromagnetismo Clássico, responsável por uma verdadeira revolução no cotidiano da humanidade, constitui uma das principais interações da escala macroscópica. Observado desde a Antiguidade é extensamente estudado nos cursos de graduação de Licenciatura e Bacharelado em Física. Entretanto, seus desenvolvimentos recentes, presentes nas extensões que abarcam perspectivas da Física Contemporânea, pouco são explorados, quando o são. Nesse sentido, com o intuito de possibilitar minimamente o contato de futuros professores e pesquisadores da área com esses desdobramentos, são abordados os formalismos: Integral, Diferencial, Relativístico e Lagrangeano do Eletromagnetismo Clássico e, em seguida, suas simetrias, externas e internas: Translação, Rotação, Paridade, Temporal, Conjugação de Carga e Gauge. E, por fim, é apresentado o modelo de Carroll, Field e Jackiw - uma extensão da Eletrodinâmica Clássica. Em particular, como ficam reescritas as equações de Maxwell, a propagação dos campos elétrico e magnético no vácuo e o fenômeno da Birrefringência, onde identifica-se uma consideravelmente pequena diferença entre as velocidades previstas para as cores azul, amarelo e vermelho do espectro visível da onda eletromagnética. Ressalta-se ainda a consequência de considerar apenas a componente temporal do vetor campo de fundo, presente no modelo, bem como, o restritivo *bound* recentemente encontrado para teorias que violam a simetria de Lorentz.

Palavras-chave: Eletromagnetismo Clássico. Extensões. Eletrodinâmica Carroll-Field-Jackiw.

ABSTRACT

Classical Electromagnetism, responsible for a true revolution in the daily life of humanity, is one of the main interactions on the macroscopic scale. Observed since antiquity, it is extensively studied in graduation courses in Physics. However, your recent developments, present in the extensions that encompass perspectives of Contemporary Physics, are insufficiently explored, when they are. In this sense, to minimally make possible the contact of future teachers and researchers in the field with these developments, the formalisms: Integral, Differential, Relativistic and Lagrangian of Classical Electromagnetism are introduced and, posteriorly, your symmetries, external and internal: Translation, Rotation, Parity, Temporal, Charge Conjugation and Gauge. And finally, the Carroll, Field and Jackiw model - an extension of Classical Electrodynamics. It is presented, in particular, how Maxwell's equations are rewritten, the propagation of electric and magnetic fields in a vacuum and the phenomenon of Birefringence, where it identifies there is a considerably small difference between the predicted velocity for the blue, yellow and red colors of the visible spectrum of the electromagnetic wave. The consequence of considering only the temporal component of the background field vector, present in the model, is also highlighted, as well as the restrictive bound recently found for theories that violate Lorentz symmetry.

Keywords: Classical Electromagnetism. Extensions. Carroll-Field-Jackiw Electrodynamics.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	ELETROMAGNETISMO CLÁSSICO	12
2.1	Formalismo diferencial e integral	12
2.2	Eletrodinâmica relativística	14
2.3	Formalismo lagrangeano	19
2.4	Simetrias	21
3	ESTENDENDO A ELETRODINÂMICA: O MODELO DE CARROLL- FIELD-JACKIW	27
3.1	Reescrita das equações de Maxwell	28
3.2	Propagação dos campos no vácuo	29
3.3	Birrefringência	30
4	RESULTADOS	34
5	CONCLUSÃO	35
	REFERÊNCIAS	37
	APÊNDICE A – ALGUMAS EXTENSÕES DO ELETROMAGNETISMO CLÁSSICO	41

1 INTRODUÇÃO

Existem na natureza quatro forças fundamentais, sendo elas, em ordem crescente de intensidade: a interação gravitacional, interação nuclear fraca, interação eletromagnética e a interação nuclear forte. Em particular, “[...] as forças que atuam na escala macroscópica, responsáveis pela estrutura da matéria e pela quase totalidade dos fenômenos físicos e químicos que intervêm em nossa vida diária, são de natureza eletromagnética” (NUSSENZVEIG, 1997, p. 1).

Historicamente, há indícios de que os fenômenos elétricos e magnéticos são conhecidos desde a Antiguidade. Como exemplo, os relacionados à "carruagem do Sul" utilizada na China, no século XXVII a.C., à pedra de magnésia e ao âmbar, na Grécia, por volta do século VI a.C. (TONIDANDEL; ARAUJO; BOAVENTURA, 2018). Por um longo período esses fenômenos, até então inexplicados, aguçaram a imaginação humana. Contudo, apenas no século XVI, receberam um estudo sistemático pelo médico William Gilbert ao descobrir que a capacidade de atrair corpos pequenos não era exclusiva ao âmbar (NUSSENZVEIG, 1997), o que impulsionou a criação de máquinas eletrostáticas e, no século XVIII, o armazenamento de energia na conhecida como garrafa de Leyden (SILVA; PIMENTEL, 2008).

Por sua vez, Charles François Du Fay, entre 1733-1734, através de seus experimentos verificou que existiam dois tipos de virtudes elétricas (eletricidade vítrea e resinosa), o que Benjamin Franklin, em 1751, passou a identificar como uma única eletricidade, com carga positiva e negativa (BASSALO, 2007). Stephen Gray, constatou ainda que certos materiais permitiam transferências de cargas, a medida que outros apresentavam uma maior resistência, os chamados condutores e isolantes, respectivamente (NUSSENZVEIG, 1997).

Um avanço extremamente significativo foi dado em 1820, quando Oersted descobriu que uma corrente elétrica é capaz de interagir à distância com a agulha magnética de uma bússola. Posteriormente, Ampère constatou que cargas elétricas em movimento são as responsáveis por produzir fenômenos magnéticos e, por fim, em 1831, Faraday revelou que um magneto em movimento podia gerar uma corrente elétrica. Em outras palavras, um campo magnético pode gerar um campo elétrico e um campo elétrico pode gerar um campo magnético (GRIFFITHS, 2010).

Uma série de contribuições como as mencionadas anteriormente formaram o nosso entendimento do Eletromagnetismo Clássico. Todavia, ressaltamos que a sua história é complexa e que pontuamos apenas alguns fatores marcantes. Para um leitor interessado em um maior

aprofundamento recomendamos as obras citadas.

No entanto, após o seu desenvolvimento surgiram diversas teorias que o estendem, a fim de abarcar outros aspectos, condizentes com a Física Contemporânea. Por exemplo, a Eletrodinâmica de Áxion (WILCZEK, 1987) que, assim como a Eletrodinâmica Maxwell-Carroll-Field-Jackiw (CARROLL; FIELD; JACKIW, 1990) a qual abordaremos neste trabalho, altera apenas as equações com fonte do Eletromagnetismo Clássico. O leitor pode encontrar uma boa parte dessas extensões e suas fontes listadas no apêndice A. Com o intuito de abordar o conceito de uma teoria efetiva e, conseqüentemente, esclarecer que essas extensões não tornam a Eletrodinâmica Clássica “errada”, trazemos um excelente comparativo desenvolvido por Ferrari (2019, p. 7):

[...] podemos imaginar um peixinho que vive dentro de um tanque de água [...]. Para a maior parte das suas observações e experimentos, ele poderá usar a hidrodinâmica para explicar o que acontece ao seu redor. Se ele for versado em física e química, contudo, saberá que a realidade é mais complexa que isso: a verdade é que a água é feita de moléculas, que são entidades discretas, e que obedecem a uma física bastante diferente, a mecânica quântica [...]. A física mais fundamental, que descreve as moléculas, pode ser bastante diferente da hidrodinâmica, contudo, essa física tem que se aproximar, quando observamos nas escalas de comprimento do peixinho, à hidrodinâmica que ele usa no seu dia-a-dia: qualquer efeito residual que possa existir do caráter discreto da água tem que ser muito pequeno, indetectável na maioria dos experimentos, exceto talvez naqueles de maior precisão.

Essas formulações permitem ainda um pequeno vislumbre de como deve se comportar a chamada teoria final, definitiva ou sobre tudo, que tende a unificar a Física em escalas de energia muito elevadas, próximas a da escala de Planck (10^{19} GeV). Greene (1999, p. 8) explica que “com esses termos grandiosos, quer-se significar a teoria física mais profunda possível — que alimenta todas as outras e que não requer nem permite nenhuma base explicativa ainda mais profunda”.

Tendo em vista que essas extensões muitas vezes, por diversos fatores, sequer são mencionadas na graduação dos cursos de Licenciatura e Bacharelado em Física e concordando com o que afirma Siqueira (2012, p. 21),

A educação é uma forma de construção de uma sociedade e, por isso, sua melhoria torna-se importante dentro de qualquer comunidade e país. Mudanças nos valores, trajetórias e comportamentos na sociedade são fontes de demandas em termos educacionais. Nesse sentido, a escola, enquanto espaço formal de educação, assume um papel importante na formação do indivíduo, pois é o local em que se supõe que haja a transmissão do conhecimento, da cultura desenvolvida pela humanidade, contribuindo para a formação básica de qualquer cidadão. Assim, a escola e, particularmente, os professores são solicitados a rever suas práticas, visando modificar aquilo que normalmente fazem, devido às mudanças sociais, econômicas, políticas e tecnológicas.

Consideramos, assim, fundamental que futuros professores e pesquisadores de Física tenham conhecimento e, inclusive, domínio dos desdobramentos recentes que a área tem adquirido. Permitir que esse público entre em contato com essas novas teorias se torna tão importante quanto inserir o estudo de Física Moderna no Ensino Médio, proposta fortemente defendida nos últimos anos (PEREIRA; OSTERMANN, 2009; OSTERMANN; MOREIRA, 2000; OSTERMANN, 2000; BROCKINGTON; PIETROCOLA, 2005; SOUSA, 2009; DOMINGUINI, 2012; SILVA; ARENGHI; LINO, 2013). Nessa questão, tomamos emprestado o argumento de Ostermann e Moreira (2001, p. 146) em relação ao ensino de Física Moderna no Ensino Médio: “Com isso, cabe questionar: como queremos atualizar o currículo de Física das escolas de Nível Médio se não viabilizamos a atualização da própria formação inicial do professor?”. Por outro lado, entendemos que abarcar as diversas extensões dos diferentes ramos que compõem a Física – tendo em mente desafios como carga horária, formação, dentre outros – não é uma questão trivial.

Nesse sentido, com o intuito de abordar uma dessas extensões a fim de exemplificar o tratamento das novas abordagens e viabilizar minimamente essa inserção, cientes ainda da relevância do Eletromagnetismo Clássico e seus atuais desdobramentos, tanto para a Física quanto para a sociedade, este trabalho visa justamente reunir seus principais conceitos, dentro dos diferentes formalismos, suas simetrias e, em particular, sua extensão na eletrodinâmica Maxwell-Carroll-Field-Jackiw.

O trabalho está organizado da seguinte forma - na seção 2, apresentamos uma abordagem geral da Eletrodinâmica Clássica, perpassando por seus formalismos e simetrias. Na seção 3, a fim de exemplificar uma extensão, abordamos a Eletrodinâmica Maxwell-Carroll-Field-Jackiw em seus principais aspectos, leia-se: a reescrita das equações de Maxwell, a propagação dos campos elétrico e magnético no vácuo e o fenômeno da Birrefringência.

2 ELETROMAGNETISMO CLÁSSICO

Numa observação futura da história da humanidade – digamos, daqui a dez mil anos – haverá pouca dúvida que o evento mais significativo do século dezenove será considerado a descoberta de Maxwell das leis da eletrodinâmica. A Guerra Civil Americana empalidecerá em provincial insignificância em comparação com este importante evento científico da mesma década.

Richard Feynman - Lectures on Physics.

A seguir, abordaremos uma visão panorâmica do Eletromagnetismo Clássico. Necessariamente, suas equações nos diferentes formalismos (Diferencial, Integral, Relativístico e Lagrangeano) e suas simetrias (Translação, Rotação, Paridade, Temporal, Conjugação de Carga e Gauge).

2.1 Formalismo diferencial e integral

A eletrodinâmica visa descrever a interação entre partículas que contêm cargas elétricas. Essa comunicação entre as cargas ocorre devido à existência de campos elétricos (\mathbf{E}) e magnéticos (\mathbf{B}). A dinâmica desses campos é descrita através de equações de movimento. No Eletromagnetismo Clássico, como visto anteriormente, seus conceitos foram construídos com a contribuição de diversos personagens; as referidas equações são as famosas equações de Maxwell, que seguem abaixo na forma integral (para o vácuo), no Sistema Internacional de unidades (SI)

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad (2.1)$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \hat{n} dA = 0, \quad (2.2)$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot \hat{n} dA, \quad (2.3)$$

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \iint_S \mathbf{J} \cdot \hat{n} dA + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{E} \cdot \hat{n} dA. \quad (2.4)$$

A Lei de Karl Friedrich Gauss, primeira equação de Maxwell, afirma que: “o fluxo elétrico total através de uma superfície fechada é igual à carga total envolvida por essa superfície” (SADIKU, 1999, p. 124), sendo uma alternativa à Lei de Coulomb para sistemas com alta simetria.

Analogamente à equação (2.1), a segunda equação de Maxwell, conhecida como Lei de Gauss para o magnetismo, expressa o fluxo do campo magnético gerado por uma *carga magnética* no interior de uma superfície fechada. Todavia, a existência de monopolos magnéticos

ainda não foi confirmada. Sendo assim, a princípio, não existem cargas magnéticas isoladas implicando, física e matematicamente, a nulidade da integral na expressão (2.2) (MACHADO, 2006).

A Lei da indução de Faraday, terceira equação de Maxwell, evidencia que a variação temporal do fluxo do campo magnético provoca o surgimento de um campo elétrico. Essa relação é fruto dos experimentos realizados por Faraday, Lenz e Henry, em meados de 1830 (BASSALO, 2007).

Por fim, a quarta equação de Maxwell, nomeada como equação Ampère-Maxwell - uma discussão histórica em relação a esse termo o leitor pode encontrar em (CHAIB; ASSIS, 2007) - mostra que tanto uma corrente elétrica, quanto variações temporais de um campo elétrico são capazes de produzir um campo magnético (VIANA, 2010).

Reescrevendo a equação (2.1) em termos da densidade volumétrica de carga (ρ) e utilizando o Teorema da Divergência, segue

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{E} \, dV = \iiint_V \frac{\rho}{\epsilon_0} \, dV. \quad (2.5)$$

O que implica,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (2.6)$$

De modo análogo, podemos aplicar o Teorema da Divergência na equação (2.2), obtendo

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{B} \, dV = 0. \quad (2.7)$$

Resultando em,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.8)$$

Por outro lado, reescrevendo a equação (2.3) através do Teorema de Stokes, obtemos

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot \hat{n} dA = -\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot \hat{n} dA. \quad (2.9)$$

Portanto,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (2.10)$$

Finalmente, podemos aplicar o Teorema de Stokes na equação (2.4), tal que

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{B} \cdot \hat{n} dA = \mu_0 \iint_S \mathbf{J} \cdot \hat{n} dA + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{E} \cdot \hat{n} dA. \quad (2.11)$$

Logo,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (2.12)$$

As equações (2.6), (2.8), (2.10) e (2.12) formam o conjunto das equações de Maxwell na forma diferencial (pontual). A partir das equações (2.8) e (2.10), podemos ainda escrever um potencial vetor \mathbf{A} e um potencial escalar V , tais que

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (2.13)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (2.14)$$

Substituindo a equação (2.14) na expressão (2.6)

$$\nabla^2 V + \frac{1}{c} \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{A})}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (2.15)$$

que traduz-se na nova equação de Poisson para o caso eletrostático (MACHADO, 2006). Analogamente, utilizando a expressão (2.12), (2.13) e (2.14) obtemos a reescrita da equação de Ampère-Maxwell

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left[\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right] = -\mu_0 \mathbf{J} ; c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}. \quad (2.16)$$

2.2 Eletrodinâmica relativística

Antes de falarmos propriamente sobre a formulação relativística do Eletromagnetismo Clássico, cabe mencionar alguns aspectos cruciais da Teoria da Relatividade Restrita, com o intuito de compreendermos esse novo formalismo. A base dessa Teoria reside em dois postulados:

- "As leis dos fenômenos físicos são as mesmas em todos os sistemas de referências inerciais [...]"(THORNTON; MARION, 2011, p. 487);

- "A velocidade da luz (em espaço livre) é uma constante universal, independente de qualquer movimento relativo da fonte e do observador." (THORNTON; MARION, 2011, p. 487)

Por sua vez, as Transformações de Lorentz que relacionam as descrições Físicas de um referencial em repouso (x, y, z) com um referencial que se desloca em relação ao mesmo (x', y', z') , a uma velocidade constante \mathbf{v} paralela aos eixos x e x' , são

$$x = \gamma(x' + vt'); \quad y = y'; \quad z = z' \quad \text{e} \quad t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right), \quad (2.17)$$

onde,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.18)$$

A partir da equação (2.17), encontramos as famosas contração espacial e dilatação temporal, respectivamente (GAZZINELLI, 2005)

$$\Delta L' = \frac{\Delta L}{\gamma} \quad \text{e} \quad \Delta t = \gamma \Delta t'. \quad (2.19)$$

Uma importante descrição que se conserva ao mudarmos de um referencial para outro (leia-se, aplicar as Transformações de Lorentz) é a métrica, que representa a "distância" entre dois eventos no espaço-tempo quadridimensional

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad (2.20)$$

ou,

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu; \quad \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Por fim, definiremos os quadri vetores posição, velocidade e momento

$$x^\mu = (ct, \mathbf{x}); \quad v^\mu = \gamma(c, \mathbf{v}) \quad \text{e} \quad P^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{P}\right), \quad (2.22)$$

onde $E = \gamma mc^2$ é a energia de uma partícula livre com massa de repouso m e $\mathbf{P} = \gamma m\mathbf{v}$, o seu momento. Todavia, tomando $c \rightarrow \infty$ ou $\gamma \rightarrow 1$ retornarmos a Mecânica Newtoniana. Relembramos que a Relatividade Restrita é uma teoria efetiva que estende a Mecânica Newtoniana e, portanto, deve retornar a essa descrição em um caso particular, como visto na introdução.

Assim sendo, uma das incríveis características do Eletromagnetismo Clássico é a sua compatibilidade com a Relatividade Restrita. Em outras palavras, as equações de Maxwell apresentadas anteriormente podem ser utilizadas em qualquer referencial inercial, uma vez que são invariantes perante uma Transformação de Lorentz. Nesse sentido, apresentaremos seu formalismo que fornece um tratamento equivalente entre coordenadas temporal e espacial, sua formulação *covariante*, que torna evidente seu caráter relativístico (GAZZINELLI, 2005). Lembrando a equação da continuidade, na qual

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (2.23)$$

que garante a conservação da carga, onde ρ é a densidade de carga e \mathbf{J} a densidade de corrente, vamos inicialmente definir o quadridivergente de um quadrivetor qualquer \mathbf{N} (JACKSON, 1998).

$$\partial_\alpha \partial^\alpha = \partial^\alpha \partial_\alpha = \frac{\partial N^0}{\partial x^0} + \nabla \cdot \mathbf{N} \quad (2.24)$$

Comparando as equações (2.23) e (2.24), podemos garantir que \mathbf{J} é um quadrivetor, dado por:

$$J^\mu = (c\rho, \mathbf{J}). \quad (2.25)$$

Outro modo de enxergar \mathbf{J} como um quadrivetor é lembrando que $\mathbf{J} = \rho\mathbf{v}$, em que \mathbf{v} (a velocidade), é um quadrivetor (GRIFFITHS, 2010). Por sua vez, a equação da continuidade pode ser reescrita como

$$\frac{\partial J^\mu}{\partial x^\mu} = 0. \quad (2.26)$$

Por outro lado, podemos definir o potencial vetor \mathbf{A} , como um quadrivetor dado por:

$$A^\mu = \left(\frac{V}{c}, \mathbf{A} \right), \quad (2.27)$$

Uma forma de percebermos que \mathbf{A} pode ser definido como um quadrivetor é considerando o *gauge puro*. Como veremos posteriormente, ao definirmos

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda \quad \text{e} \quad V' = V - \frac{1}{c} \frac{\partial\Lambda}{\partial t}; \quad (2.28)$$

Λ é uma função escalar qualquer, não alteramos o Campo Magnético e o Campo Elétrico, respectivamente. O gauge puro consiste em tomarmos \mathbf{A} e V como sendo nulos

$$V' = -\frac{1}{c} \frac{\partial\Lambda}{\partial t} \quad \text{e} \quad \mathbf{A}' = \nabla\Lambda \quad (2.29)$$

Logo, a junção de V' e \mathbf{A}' forma o quadrigradiente de Λ . Mas, a junção de V' e \mathbf{A}' é igual a $A^{\mu'}$. Portanto, $A^{\mu'}$ é necessariamente um quadrivetor.

Empregamos, como usual, a convenção soma de Einstein - índices repetidos devem ser somados de 0 a 3. Tendo em vista que, quadrivetores se transformam do *mesmo* modo que o tempo e as coordenadas espaciais mudam, através das Transformações de Lorentz, de um referencial inercial para outro, temos que

$$\rho = \gamma \left(\rho' + \frac{v}{c^2} J'_x \right), \quad (2.30)$$

$$J_x = \gamma (J'_x + v\rho'), \quad J_y = J'_y \quad \text{e} \quad J_z = J'_z, \quad (2.31)$$

$$V = \gamma \left(V' + \frac{v}{c^2} A'_x \right), \quad (2.32)$$

$$A_x = \gamma (A'_x + v\rho'), \quad A_y = A'_y \quad \text{e} \quad A_z = A'_z. \quad (2.33)$$

As equações (2.30) – (2.33) representam as transformações das densidades de correntes/carga e dos potenciais, respectivamente. É interessante notar que, exatamente por termos em um referencial apenas densidade de corrente e em outro densidade de carga e de corrente, no primeiro podemos ter apenas campo magnético e no segundo campo elétrico e magnético. Portanto, “leis que antes pareciam arbitrárias e sem relação entre si adquirem uma espécie de coerência e inevitabilidade quando abordadas a partir do ponto de vista da relatividade” (GRIFFITHS, 2010, p. 364). Interpretamos a partir de então o campo elétrico e o campo magnético como desdobramentos de um mesmo ente físico, o **Campo Eletromagnético**.

Visto que, dada a equação (2.27), onde definimos um quadrivetor potencial, e definindo ainda

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu}, \quad (2.34)$$

podemos construir o chamado **Tensor do Campo Eletromagnético** (antissimétrico), que engloba os campos em uma única descrição, onde (JACKSON, 1998)

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-E_x}{c} & \frac{-E_y}{c} & \frac{-E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

Tomando $\frac{\mathbf{E}}{c} \rightarrow \mathbf{B}$ e $\mathbf{B} \rightarrow \frac{-\mathbf{E}}{c}$, obtemos o **Tensor Dual**, também antissimétrico

$$\tilde{F}^{\rho\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & \frac{E_z}{c} & \frac{-E_y}{c} \\ B_y & \frac{-E_z}{c} & 0 & \frac{E_x}{c} \\ B_z & \frac{E_y}{c} & \frac{-E_x}{c} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

De modo que,

$$\tilde{F}_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\rho\sigma\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (2.37)$$

Reescrevendo agora as equações de Maxwell no formalismo Covariante, temos que (OTA, 2020)

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu, \quad (2.38)$$

$$\partial^\alpha F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\alpha} + \partial^\nu F^{\alpha\mu} = 0; \text{ (Identidade de Bianchi)}. \quad (2.39)$$

Onde $\alpha \neq \mu \neq \nu$ são quaisquer três dos inteiros 0, 1, 2, 3. Posteriormente, no Formalismo Lagrangeano, identificaremos que a equação (2.38) corresponde às duas equações de Maxwell com fonte. Nesse momento, convidamos gentilmente o leitor a fazer essa verificação. Em caso de dúvidas, o cálculo no próximo Formalismo ou as obras citadas poderão ajudar.

Na equação (2.39), ao fixarmos qualquer um dos índices como zero, encontraremos a terceira equação de Maxwell. Por exemplo, para $\alpha = 0$, podemos encontrar

$$\partial^0 F^{23} + \partial^2 F^{30} + \partial^3 F^{02} = -\frac{\partial B_x}{c\partial t} - \frac{\partial E_z}{c\partial y} + \frac{\partial E_y}{c\partial z} = 0, \quad (2.40)$$

$$\partial^0 F^{13} + \partial^1 F^{30} + \partial^3 F^{01} = -\frac{\partial B_y}{c\partial t} - \frac{\partial E_z}{c\partial x} + \frac{\partial E_x}{c\partial z} = 0, \quad (2.41)$$

$$\partial^0 F^{12} + \partial^1 F^{20} + \partial^2 F^{01} = -\frac{\partial B_z}{c\partial t} - \frac{\partial E_y}{c\partial x} + \frac{\partial E_x}{c\partial y} = 0. \quad (2.42)$$

Assim,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (2.43)$$

Tomando agora $\alpha \neq \mu \neq \nu \neq 0$, encontramos, por exemplo

$$\partial^1 F^{23} + \partial^2 F^{31} + \partial^3 F^{12} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0. \quad (2.44)$$

Portanto,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.45)$$

Como constatamos, a equação (2.39) reúne as equações de Maxwell sem fonte.

2.3 Formalismo lagrangeano

A Formulação Lagrangeana, de modo geral, é um método alternativo de descrever as equações de movimento de um determinado sistema baseado em sua energia. A partir de um importante princípio, conhecido como **princípio da mínima ação** –

De todos os caminhos possíveis no quais um sistema dinâmico pode se mover de um ponto a outro em um intervalo de tempo específico (consistente com quaisquer restrições), o caminho real seguido é aquele que minimiza a integral de tempo da diferença entre as energias cinéticas e potenciais (THORNTON; MARION, 2011, p. 203).

– podemos obter as **equações de Euler-Lagrange** que fornecem as equações de movimento de uma partícula

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0; \quad L = T - U. \quad (2.46)$$

No qual, L é a função Lagrangeana, T a energia cinética, U a energia potencial, q_i a coordenada generalizada e \dot{q}_i a velocidade generalizada. Essa é a descrição para corpos ou cargas pontuais. Para corpos contínuos ou campos, trocamos a Lagrangeana L pela densidade de Lagrangeana \mathcal{L} , t por x^σ , a coordenada generalizada q_i (partícula) por uma função contínua A_λ (campo) e, consequentemente, \dot{q}_i por $\partial_\sigma A_\lambda$, tal que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\lambda} - \partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma A_\lambda)} = 0; \quad L = \iiint_V \mathcal{L} d^3r \quad e \quad \partial_\sigma \equiv \frac{\partial}{\partial x^\sigma}. \quad (2.47)$$

Maiores detalhes relacionados a passagem da descrição discreta para a contínua, o leitor pode encontrar em (LEMOS, 2007). Para o campo eletromagnético em especial, temos que:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + j_{\mu}A^{\mu}. \quad (2.48)$$

Essa definição é baseada nas simetrias que impomos ao nosso modelo, no caso, o Eletromagnetismo Clássico. Finalmente, substituindo (2.48) em (2.47) e após algumas operações, podemos reescrever as quatro equações de Maxwell em função de $F^{\mu\nu}$ e $\tilde{F}^{\mu\nu}$, de modo que

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\mu}} = \mu_0 J^{\nu}; \quad J^{\nu} = (c\rho, \mathbf{J}). \quad (2.49)$$

Tomando $\nu = 0, 1, 2$ e 3 , respectivamente, encontramos

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (2.50)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 J_x + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}, \quad (2.51)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 J_y + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}, \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \mu_0 J_z + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}. \quad (2.53)$$

Reunindo as equações (2.50) - (2.53) obtemos as expressões (2.6) e (2.12). Portanto, a equação (2.49) reúne as equações de Maxwell com fonte. Por outro lado,

$$\frac{\partial \tilde{F}^{\mu\nu}}{\partial x^{\mu}} = 0. \quad (2.54)$$

Atribuindo, novamente, $\nu = 0, 1, 2$ e 3 , respectivamente

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0, \quad (2.55)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}, \quad (2.56)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}, \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}. \quad (2.58)$$

Reunindo as equações (2.55) - (2.58) obtemos as equações (2.8) e (2.10). Assim, (2.54) sintetiza as equações de Maxwell sem fonte.

2.4 Simetrias

Por que devemos nos preocupar com simetria? Em primeiro lugar, a simetria é fascinante para a mente humana, e todos gostam de objetos ou padrões que são de alguma maneira simétricos. É um fato interessante que a natureza muitas vezes exhibe certos tipos de simetria em objetos que encontramos no mundo a nossa volta. [...] Mas o nosso principal interesse aqui não é com o fato que os objetos da natureza são frequentemente simétricos. Preferivelmente, desejamos examinar algumas das simetrias mais notáveis do universo – as simetrias que existem nas próprias leis básicas que governam o funcionamento do mundo físico.

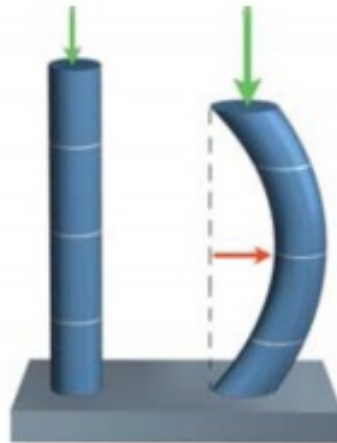
Richard Feynman - Lectures on Physics.

De modo geral, o conceito de simetria, em Física, significa realizar uma determinada transformação no sistema considerado e sua descrição permanecer igual (LEDERMAN; HILL, 2004). Ainda, segundo os autores, “simetria controla a física de modo extremamente profundo e isto é a lição mais importante do século XX.” (LEDERMAN; HILL, 2000, p. 348). As simetrias podem ser classificadas entre externas e internas. Basicamente, uma simetria externa está associada a transformações em coordenadas (Temporal, Paridade, Translação, Rotação, Lorentz, dentre outras). Enquanto, simetrias internas envolvem transformações em campos (Gauge).

Um importante Teorema, conhecido como Teorema de Noether (em homenagem à sua criadora, Emmy Noether), estabelece que a cada simetria contínua temos associado a ela uma grandeza conservada. Em outras palavras, “[...] sempre que a lagrangeana de um sistema for invariante sob transformação de uma coordenada, uma quantidade física é conservada” (SANTANA, 2013, p. 8). O leitor pode encontrar uma demonstração em (LEMOS, 2007). Em contrapartida, o Teorema CPT, afirma que ao aplicar as transformações Conjugação de Carga (C), Paridade (P) e Temporal (T) as leis da Física permanecem as mesmas (SCHWINGER, 1951). Sendo assim, não seria possível a violação simultânea das simetrias CPT.

Por sua vez, a violação ou quebra espontânea de uma simetria ocorre quando um sistema possui uma determinada simetria prevista pelas leis Físicas e, devido a algum mecanismo físico, ela deixa de existir. Por exemplo, ao pressionarmos um graveto contra o solo (Figura 1), inicialmente, há uma simetria rotacional, em outras palavras, a partir de um ponto situado em qualquer uma das infinitas direções em torno do graveto, ele parecerá o mesmo. Mas, após o

Figura 1 – Quebra de Simetria Espacial



Fonte: Silva (2010)

pressionarmos contra o solo, ele não aparentará ser o mesmo nas diversas direções, portanto, a simetria foi espontaneamente quebrada (BELICH *et al.*, 2007).

Em particular, o Eletromagnetismo Clássico possui as seguintes simetrias:

- Translação e Rotação

Como as demais leis Físicas, as equações de Maxwell são invariantes perante uma translação e rotação no sistema de referência (FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS, 2008).

- Paridade (P)

A Transformação de Paridade equivale a realizar uma reflexão. Em outras palavras, substituir x , y e z por $-x$, $-y$ e $-z$, respectivamente. Desse modo, levando em consideração que ρ é um escalar, \mathbf{J} e \mathbf{E} são vetores polares e \mathbf{B} um vetor axial (pseudovetor) – as definições desses termos o leitor pode encontrar em (MENON, 2009; MARTINS, 1988) – nas equações (2.6), (2.8), (2.10) e (2.12), obtemos

$$\rho(\mathbf{r}, t) \rightarrow \rho(-\mathbf{r}, t); \quad \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \rightarrow -\mathbf{J}(-\mathbf{r}, t), \quad (2.59)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rightarrow -\mathbf{E}(-\mathbf{r}, t); \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \mathbf{B}(-\mathbf{r}, t), \quad (2.60)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}; \\ -\nabla \cdot \mathbf{B} = 0; \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \\ -\nabla \times \mathbf{B} = -\mu_0 \mathbf{J} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{array} \right. \quad (2.61)$$

Portanto, as equações acima são invariantes perante uma Transformação de Paridade, o que concede a Simetria de Paridade ao Eletromagnetismo Clássico.

- Temporal (T)

Uma reversão temporal está associada à mudança no sinal na variável t . Como, por definição, a corrente tem o sinal alterado perante uma inversão temporal, consequentemente, \mathbf{J} e \mathbf{B} também terão. Assim, nas equações (2.6), (2.8), (2.10) e (2.12), encontramos

$$\rho(\mathbf{r}, t) \rightarrow \rho(\mathbf{r}, -t), \quad \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \rightarrow -\mathbf{J}(\mathbf{r}, -t), \quad (2.62)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}, -t); \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \rightarrow -\mathbf{B}(\mathbf{r}, -t), \quad (2.63)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}; \\ -\nabla \cdot \mathbf{B} = 0; \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \\ -\nabla \times \mathbf{B} = -\mu_0 \mathbf{J} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{array} \right. \quad (2.64)$$

Portanto, as equações acima são invariantes perante uma reversão temporal, o que concede a Simetria Temporal ao Eletromagnetismo Clássico.

- Conjugação de carga (C)

Uma reversão de carga significa trocar o sinal da carga elétrica - consequentemente, ρ e \mathbf{E} terão os sinais trocados - como também, inverter o sentido da corrente elétrica - portanto, novamente \mathbf{J} e \mathbf{B} terão os sinais trocados. Logo, nas equações (2.6), (2.8), (2.10) e (2.12), temos

$$\rho(\mathbf{r}, t) \rightarrow -\rho(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \rightarrow -\mathbf{J}(\mathbf{r}, t); \quad (2.65)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rightarrow -\mathbf{E}(\mathbf{r}, t); \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \rightarrow -\mathbf{B}(\mathbf{r}, t), \quad (2.66)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}; \\ -\nabla \cdot \mathbf{B} = 0; \\ -\nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \\ -\nabla \times \mathbf{B} = -\mu_0 \mathbf{J} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{array} \right. \quad (2.67)$$

Portanto, as equações acima são invariantes perante uma reversão de carga, o que concede a Simetria de Conjugação de Carga ao Eletromagnetismo Clássico.

- Gauge (Calibre)

Em especial, uma importante simetria interna do Eletromagnetismo Clássico surge ao simplificarmos as equações (2.15) e (2.16) considerando

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Lambda; \quad (2.68)$$

Λ é uma função escalar qualquer. Assim

$$\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \nabla \Lambda = \mathbf{B}; \quad \nabla \times \nabla \Lambda = 0. \quad (2.69)$$

Sendo assim, o Campo Magnético é invariante perante a transformação (2.68). Em relação ao Campo Elétrico, temos

$$\mathbf{E}' = -\nabla V' - \frac{1}{c} \frac{\partial (\mathbf{A} + \nabla \Lambda)}{\partial t}, \quad (2.70)$$

$$\mathbf{E}' = -\nabla \left(V' + \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (2.71)$$

Definindo,

$$V' = V - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t}, \quad (2.72)$$

segue que,

$$\mathbf{E}' = -\nabla V - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{E}. \quad (2.73)$$

Deste modo, o Campo Elétrico é invariante perante as transformações (2.68) e (2.72). Essas equações formam as chamadas **Transformações de Gauge** sob as quais o Eletromagnetismo Clássico é invariante (Simetria de Gauge ou Calibre) (MACHADO, 2006). Como mencionamos anteriormente, através do Teorema de Noether, a simetria contínua de Calibre deve implicar em uma grandeza conservada. Essa grandeza é justamente a carga elétrica.

Ao tomarmos Transformações de Calibre convenientes, podemos simplificar as relações anteriores. O **Calibre de Coulomb** consiste em considerar \mathbf{A} , tal que

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (2.74)$$

Substituindo nas equações (2.15) e (2.16)

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (2.75)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \mu_0 \epsilon_0 \nabla \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right) = -\mu_0 \mathbf{J}. \quad (2.76)$$

A equação (2.75) é conhecida (equação de Poisson) e possui como solução

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV. \quad (2.77)$$

Como podemos perceber, essa escolha simplifica a solução do potencial escalar V , mas não produz o mesmo efeito para o potencial vetor \mathbf{A} (GRIFFITHS, 2010). Por sua vez, o **Calibre de Lorentz** baseia-se em tomarmos

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}. \quad (2.78)$$

Novamente, substituindo nas equações (2.15) e (2.16)

$$\nabla^2 V - \frac{1}{c^3} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (2.79)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^3} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}. \quad (2.80)$$

Assim sendo, há um “equilíbrio” desejado entre as soluções do potencial vetor e do potencial escalar (GRIFFITHS, 2010).

3 ESTENDENDO A ELETRODINÂMICA: O MODELO DE CARROLL-FIELD-JACKIW

Temos, em nossas mentes, uma tendência a aceitar a simetria como uma espécie de perfeição. De fato ela parece-se com a velha idéia dos Gregos que os círculos eram perfeitos, e foi bem horrível acreditar que as órbitas planetárias não eram círculos, mas somente quase círculos. [...] O problema do ponto de vista dos círculos é que se eles fossem círculos perfeitos não haveria nada para explicar, isso é claramente simples. Mas como eles são somente quase círculos, há muito para explicar, e o resultado mostrou ser um grande problema dinâmico, e agora o nosso problema é explicar porquê eles são quase simétricos olhando as forças da maré e assim por diante.

Richard Feynman - Lectures on Physics.

Em 1990, Sean Carroll, George Field e Roman Jackiw em seu artigo intitulado: “Limits on a Lorentz- and Parity-Violating Modification of Electrodynamics” apresentaram uma extensão da Eletrodinâmica Clássica que possui a seguinte Lagrangeana (CARROLL; FIELD; JACKIW, 1990; FERRARI, 2019)

$$\mathcal{L}_{MCFJ} = \mathcal{L}_{EC} + \mathcal{L}_{CS}, \quad (3.1)$$

$$\mathcal{L}_{MCFJ} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + j_{\mu}A^{\mu} - \frac{1}{2}P^{\mu}A^{\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}; \quad \tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}. \quad (3.2)$$

Passamos a adotar neste momento as chamadas unidades naturais onde $c = 1$. Sendo assim, a Eletrodinâmica que passaremos a chamar de MCFJ trata-se da Eletrodinâmica Clássica acrescida de um termo do tipo Chern-Simons, que possui aplicações, por exemplo, no fenômeno da Supercondutividade e no Efeito Hall em duas dimensões espaciais. Por esse termo ser quadridimensional, para manter a coerência surge a necessidade de incluir um vetor constante (*background* ou campo de fundo) P^{μ} na equação (3.2), que passa a definir uma direção privilegiada no espaço, violando assim a Simetria de Lorentz. Esse é um dos principais aspectos dessa Eletrodinâmica, uma vez que a violação da Simetria de Lorentz é cogitada como uma fronteira para uma nova Física, na qual poderia ser possível a Gravitação Quântica (FERRARI, 2019). A Eletrodinâmica MCFJ viola ainda a Simetria de Paridade, bem como a Simetria CPT (Carga, Paridade e Tempo) o que a caracteriza como CPT ímpar e esse fato é significativo na Violação da Simetria de Lorentz.

3.1 Reescrita das equações de Maxwell

Manipulando a equação (3.2), temos que

$$\mathcal{L}_{MCFJ} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \tilde{j}_\mu A^\mu; \text{ com } \tilde{j}_\mu = j_\mu + P^\nu \tilde{F}_{\mu\nu}. \quad (3.3)$$

Portanto, podemos reescrever convenientemente as equações de Maxwell em termos do quadri-vetor densidade de corrente efetivo, \tilde{j}_μ , tal que

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = \tilde{j}^\nu, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \tilde{F}^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = 0. \quad (3.5)$$

Logo, as equações sem fonte são inalteradas. Sendo assim,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (3.7)$$

Portanto, a eletrodinâmica possui a simetria de Gauge (Calibre) descrita anteriormente. Quanto as equações com fonte, tomando $v = 0$ na equação (3.4)

$$\frac{\partial F^{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial F^{10}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{20}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{30}}{\partial x^3} = j^0 + P_0 \tilde{F}^{00} + P_1 \tilde{F}^{01} + P_2 \tilde{F}^{02} + P_3 \tilde{F}^{03}, \quad (3.8)$$

e lembrando da definição do Tensor Campo Eletromagnético na expressão (2.34), encontramos

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho - \mathbf{P} \cdot \mathbf{B}. \quad (3.9)$$

Onde identificamos a forte consequência na qual o acoplamento do Campo de Fundo ou vetor constante ao Campo Magnético também pode gerar Campo Elétrico. Ao realizarmos a sutil passagem de $\mathbf{P} \cdot \mathbf{B}$ para o outro membro, nos deparamos com outra interpretação: cargas elétricas também são fontes para o campo magnético. Quanto a segunda interpretação cabe a ressalva que nessa Eletrodinâmica também não é prevista a existência de monopolos magnéticos, como podemos perceber na segunda equação de Maxwell.

Analogamente, tomando, individualmente, $v = 1, 2$ e 3 , encontramos, respectivamente

$$\frac{F^{01}}{\partial x^0} + \frac{F^{11}}{\partial x^1} + \frac{F^{21}}{\partial x^2} + \frac{F^{31}}{\partial x^3} = j^1 + P_0 \tilde{F}^{10} + P_1 \tilde{F}^{11} + P_2 \tilde{F}^{12} + P_3 \tilde{F}^{13}, \quad (3.10)$$

$$\frac{F^{02}}{\partial x^0} + \frac{F^{12}}{\partial x^1} + \frac{F^{22}}{\partial x^2} + \frac{F^{32}}{\partial x^3} = j^2 + P_0 \tilde{F}^{20} + P_1 \tilde{F}^{21} + P_2 \tilde{F}^{22} + P_3 \tilde{F}^{23}, \quad (3.11)$$

$$\frac{F^{03}}{\partial x^0} + \frac{F^{13}}{\partial x^1} + \frac{F^{23}}{\partial x^2} + \frac{F^{33}}{\partial x^3} = j^3 + P_0 \tilde{F}^{30} + P_1 \tilde{F}^{31} + P_2 \tilde{F}^{32} + P_3 \tilde{F}^{33}. \quad (3.12)$$

Utilizando a definição do Tensor Campo Eletromagnético na expressão (2.35) e (2.36) e reunindo as equações (3.10) - (3.12), obtemos

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - P_0 \mathbf{B} + \mathbf{P} \times \mathbf{E}. \quad (3.13)$$

Simetricamente, obtemos que o acoplamento do Campo de Fundo ao Campo Elétrico pode gerar Campo Magnético. A inclusão das componentes do vetor campo de fundo P^μ nas equações (3.9) e (3.13) também implica na violação da Simetria de Paridade. Uma forma de retornar a Eletrodinâmica Clássica é tomar o vetor Campo de Fundo P^μ como sendo desprezível. É notório que ao fazer isso nas equações acima, adquirimos as quatro equações de Maxwell inalteradas.

3.2 Propagação dos campos no vácuo

Tomando o rotacional na equação (3.7), segue

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\partial(\nabla \times \mathbf{B})}{\partial t}. \quad (3.14)$$

Utilizando as equações (3.9) e (3.13) para o vácuo ($\rho = \mathbf{J} = 0$), temos

$$\square \mathbf{E} = P_0 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \frac{(\mathbf{P} \times \mathbf{E})}{\partial t} + \nabla(\mathbf{P} \cdot \mathbf{B}); \quad \square \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right). \quad (3.15)$$

Como P^μ é constante,

$$\square \mathbf{E} = P_0 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{P} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \nabla(\mathbf{P} \cdot \mathbf{B}). \quad (3.16)$$

Tomando $P^\mu = 0$, retornamos a Eletrodinâmica Clássica, na qual $\square \mathbf{E} = 0$, que descreve a oscilação do campo elétrico na onda eletromagnética. Analogamente, tomando o rotacional na equação (3.13), novamente para o vácuo ($\rho = \mathbf{j} = 0$), segue

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} = \frac{\partial(\nabla \times \mathbf{E})}{\partial t} - P_0 \nabla \times \mathbf{B} + \nabla \times (\mathbf{P} \times \mathbf{E}). \quad (3.17)$$

Utilizando as equações (3.6) e (3.7),

$$\square \mathbf{B} = -P_0 \nabla \times \mathbf{B} + \nabla \times (\mathbf{P} \times \mathbf{E}). \quad (3.18)$$

Novamente, tomando $P^\mu = 0$ obtemos a Eletrodinâmica Clássica, onde $\square \mathbf{B} = 0$.

3.3 Birrefringência

A Birrefringência é a propriedade óptica de um determinado meio que apresenta dois modos de propagação para o fóton e, conseqüentemente, dois índices de refração, para diferentes direções de polarização. Carlin *et al.* (2005, p. 349), explicam que:

Quando a luz se propaga em um meio opticamente isotrópico, as propriedades ópticas são as mesmas em todas as direções, isto é, existe um único índice de refração. Entretanto, quando uma frente de onda de luz incide em um meio anisotrópico, independente do estado inicial de polarização, a direção de oscilação do seu campo elétrico pode ser decomposta em duas componentes conhecidas como raio extraordinário (paralelo à direção do eixo óptico do meio) e raio ordinário (perpendicular à direção do eixo óptico do meio), os quais viajam com velocidades de propagação diferentes. Isso significa que existem dois índices de refração distintos: [...] relacionados com os raios extraordinário e ordinário, respectivamente [...] e o meio é chamado de birrefringente.

A seguir veremos como essa característica é encontrada *no vácuo* na Eletrodinâmica MCFJ. Substituindo a equação (3.2) em (2.47) e após algumas manipulações, encontramos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\lambda} = J^\lambda + \frac{1}{4} \varepsilon_{\mu\alpha\beta}^\lambda P^\mu F^{\alpha\beta}. \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma A_\lambda)} = -\frac{1}{4} \left[\frac{\partial(\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha)}{\partial(\partial_\sigma A_\lambda)} F_{\alpha\beta} + F^{\alpha\beta} \frac{\partial(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)}{\partial(\partial_\sigma A_\lambda)} + \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} P^\mu A^\nu \frac{\partial(\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha)}{\partial(\partial_\sigma A_\lambda)} \right]. \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma A_\lambda)} = -F^{\sigma\lambda} - \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu}{}^{\sigma\lambda} P^\mu A^\nu. \quad (3.21)$$

Assim,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\lambda} - \partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma A_\lambda)} = J_\lambda + \frac{1}{4} \varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} P^\mu F^{\alpha\beta} + \partial^\sigma F_{\sigma\lambda} + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\sigma\lambda} P^\mu \partial^\sigma A^\nu = 0. \quad (3.22)$$

Como queremos investigar o fenômeno da Birrefringência no vácuo, $J_\lambda = 0$. Observando que

$$\frac{1}{4} \varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} P^\mu F^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} P^\mu \partial^\alpha A^\beta, \quad (3.23)$$

segue,

$$\frac{1}{2} \varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} P^\mu \partial^\alpha A^\beta + \partial^\sigma F_{\sigma\lambda} + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\sigma\lambda} P^\mu \partial^\sigma A^\nu = 0. \quad (3.24)$$

$$\frac{1}{2} \varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} P^\mu \partial^\alpha A^\beta + \partial^\sigma F_{\sigma\lambda} + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\alpha\beta\lambda} P^\mu \partial^\beta A^\alpha = 0. \quad (3.25)$$

$$\frac{1}{2} \varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} P^\mu F^{\alpha\beta} + \partial^\sigma F_{\sigma\lambda} = 0. \quad (3.26)$$

$$\frac{1}{2} \varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} P^\mu F^{\alpha\beta} + \partial^\sigma (\partial_\sigma A_\lambda - \partial_\lambda A_\sigma) = 0. \quad (3.27)$$

Tomando o Gauge de Lorentz ($\partial^\sigma A_\sigma = 0$) e lembrando que $\partial^\sigma \partial_\sigma = \square$, temos

$$\square A_\lambda + \frac{1}{2} \varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} P^\mu F^{\alpha\beta} = 0. \quad (3.28)$$

$$\square A_\lambda + \varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} P^\mu \partial^\alpha A^\beta = 0. \quad (3.29)$$

$$(\square \eta_{\lambda\beta} + \varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} P^\mu \partial^\alpha) A^\beta = 0. \quad (3.30)$$

Considerando uma onda plana do tipo

$$A^\beta = A_0^\beta e^{(-ik^\mu \cdot x_\mu)}; \quad \partial^\alpha \equiv -ik^\alpha \quad \text{e} \quad \square = \partial_\mu \partial^\mu \equiv -ik^\mu (-ik_\mu) = -k^2. \quad (3.31)$$

E definindo a matriz $M_{\lambda\beta}$

$$M_{\lambda\beta} = (\square \eta_{\lambda\beta} + \varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} P^\mu \partial^\alpha), \quad (3.32)$$

obtemos que

$$M_{\lambda\beta} = -k^2 \eta_{\lambda\beta} - i \varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} P^\mu k^\alpha. \quad (3.33)$$

De modo que

$$M_{\lambda\beta} = \begin{pmatrix} -k^2 & i(P_3 k_2 - P_2 k_3) & i(P_1 k_3 - P_3 k_1) & i(P_2 k_1 - P_1 k_2) \\ i(P_2 k_3 - P_3 k_2) & k^2 & i(P_0 k_3 - P_3 k_0) & i(P_2 k_0 - P_0 k_2) \\ i(P_3 k_1 - P_1 k_3) & i(P_3 k_0 - P_0 k_3) & k^2 & i(P_0 k_1 - P_1 k_0) \\ i(P_1 k_2 - P_2 k_1) & i(P_0 k_2 - P_2 k_0) & i(P_1 k_0 - P_0 k_1) & k^2 \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

Para que a equação (3.30) seja satisfeita onde $A^\beta \neq 0$ temos que $\det M_{\lambda\beta} = 0$. O que implica

$$-k^4 + \mathbf{P}^2 k_0^2 - 2P_0 k_0 (\mathbf{P} \cdot \mathbf{k}) + P_0^2 \mathbf{k}^2 - (P_1 k_3 - P_3 k_1)^2 - (P_2 k_3 - P_3 k_2)^2 - (P_1 k_1 - P_2 k_2)^2 = 0. \quad (3.35)$$

$$-k^4 + \mathbf{P}^2 k_0^2 - 2P_0 k_0 (\mathbf{P} \cdot \mathbf{k}) + P_0^2 \mathbf{k}^2 - (\mathbf{P} \times \mathbf{K})^2 = 0. \quad (3.36)$$

$$-k^4 + \mathbf{P}^2 k_0^2 - 2P_0 k_0 (\mathbf{P} \cdot \mathbf{k}) + (\mathbf{P} \cdot \mathbf{k})^2 + (P_0^2 - \mathbf{P}^2) k^2 = 0. \quad (3.37)$$

$$-k^4 - k_0^2 (P_0^2 - \mathbf{P}^2) + (P_0 k_0 - (\mathbf{P} \cdot \mathbf{K}))^2 + (P_0^2 - \mathbf{P}^2) \mathbf{k}^2 = 0. \quad (3.38)$$

Finalmente,

$$(k^\alpha k_\alpha)^2 + (P^\beta P_\beta) (k^\alpha k_\alpha) = (P^\alpha k_\alpha)^2. \quad (3.39)$$

A expressão acima representa a **Relação de Dispersão** da Eletrodinâmica MCFJ. Considerando um referencial inercial que está na mesma direção do campo de fundo sendo influenciado apenas pela componente temporal de P^μ , em outras palavras, $P^\mu = (P_0, 0)$ e considerando que $k^\mu = (\omega, \mathbf{k})$, na equação (3.39), temos

$$\omega^2 - k^2 = \pm P_0 k. \quad (3.40)$$

Assim,

$$v = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{2k \pm P_0}{2\omega} = \left(1 \pm \frac{P_0}{2k}\right) \left(1 \pm \frac{P_0}{k}\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.41)$$

Considerando os termos de terceira ordem na expansão, identificamos duas velocidades de grupo ao fóton

$$v = \frac{\partial \omega}{\partial k} = 1 + \frac{1}{8} \left(\frac{P_0^2}{k^2} \mp \frac{P_0^3}{k^3} \right). \quad (3.42)$$

Desse modo, a diferença entre as duas velocidades possíveis, é dada por

$$\Delta v = \frac{P_0^3}{4k^3}, \quad (3.43)$$

o que demonstra que o fóton possui dois modos de propagação no vácuo, conferindo-lhe dois índices de refração, como foi mencionado no início da subseção. Portanto, o vácuo passa a ser anisotrópico - o que é coerente com a inserção de um campo de fundo constante no espaço. Diferente da Eletrodinâmica Clássica, que prevê esse fenômeno apenas para meios materiais.

4 RESULTADOS

Na equação (3.43), através da análise dimensional, podemos retornar ao sistema SI, onde encontramos uma diferença entre as velocidades dada por:

$$\Delta v = \frac{cP_0^3}{4k^3} ; k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (4.1)$$

Assim, essa diferença para os comprimentos de onda: azul, amarelo e vermelho, em função do *bound* terrestre para P_0 ($5 \times 10^{-13} \text{cm}^{-1}$) fornecido em (CARROLL; FIELD; JACKIW, 1990), seria

Quadro 1 – Diferença de Velocidades

Cor	Comprimento de Onda (nm)	$\Delta v \left(\frac{m}{s} \right)$
Azul	450 - 495	$3,44 \times 10^{-45} - 4,60 \times 10^{-45}$
Amarelo	570 - 590	$7,00 \times 10^{-45} - 7,74 \times 10^{-45}$
Vermelho	620 - 750	$9,00 \times 10^{-45} - 1,60 \times 10^{-44}$

Fonte: Elaborado pela autora.

Evidentemente, os valores encontrados demonstram uma variação ínfima entre as duas velocidades para a faixa do espectro visível na onda eletromagnética. Carroll, Field e Jackiw (1990) encontraram um limite notadamente ainda mais restritivo para o cenário cosmológico ($1,7 \times 10^{-42} h_0 \text{ GeV}$; h_0 é a constante de Hubble em unidades de $100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$).

Realmente esperamos que P^μ seja “muito pequeno”, pois do contrário sentiríamos a sua influência nos diferentes aspectos apresentados em nossas aplicações clássicas cotidianas. E, de fato, a análise desse modelo em diferentes cenários (astrofísicos e cosmológicos) - como em Polarização CMB e Birrefringência Astrofísica – tem encontrado limites notadamente restritos (KOSTELECKÝ; RUSSELL, 2020). Garantindo que se P^μ existir, possui um valor praticamente desprezível em nossa eletrodinâmica usual.

Por sua vez, como vimos, a inclusão do termo de Chern-Simons na Lagrangeana do Eletromagnetismo Clássico, modifica, dentre outros pontos, as duas equações de Maxwell com fonte e, conseqüentemente, a propagação dos campos elétrico e magnético no vácuo e torna o vácuo birrefringente, portanto, com dois modos de propagação para o fóton e dois índices de refração. Mas, as equações sem fonte são preservadas, assim como, a simetria de Gauge.

5 CONCLUSÃO

Aqui é válido ressaltar alguns pontos sobre o modelo abordado. A inclusão de um campo de fundo com intuito de violar a simetria de Lorentz *não* torna a física dependente do referencial. Para isso, definamos os conceitos de transformação passiva e ativa. Em uma rotação, por exemplo, uma transformação passiva consiste em rotacionarmos o sistema, mas o ponto (ou partícula) permanecer fixo. Por outro lado, em uma transformação ativa, o sistema permanece fixo e o ponto (ou partícula) é rotacionado, sob o mesmo ângulo em sentido contrário. Um campo de fundo constante viola a invariância da transformação ativa, mas preserva a invariância da transformação passiva e, portanto, as leis físicas continuam independentes do referencial. Uma discussão mais detalhada é traçada em (FERRARI, 2019; BELICH *et al.*, 2007).

Posteriormente, esse modelo proposto por Carroll, Field e Jackiw se tornou um caso particular da descrição mais geral em que uma eletrodinâmica pode violar a Simetria de Lorentz (COLLADAY; KOSTELECKÝ, 1997; COLLADAY; KOSTELECKÝ, 1998).

Santos *et al.* (2020), apresentaram recentemente uma aplicação desse modelo ao encontrarem uma Diferença de Energia por Violação de Paridade (DEVP). Essa DEVP, da ordem de 10^{-12} eV para o cenário terrestre, levou os autores a propor uma possível contribuição da Interação Eletromagnética, em particular nesse modelo, para a Bioquiralidade Molecular.

Em Kostelecký e Russell (2020), encontramos um levantamento de resultados experimentais relacionados aos parâmetros que violam a simetria de Lorentz, inclusive os *bounds* para o *background* presente nesta descrição. Ressaltamos uma considerável discrepância entre os valores obtidos de cenários terrestres aos identificados em cenários astrofísicos e cosmológicos. Gomes e Malta (2016) explicam que essa divergência pode estar atrelada às imprecisões nos modelos que descrevem a propagação da luz nos meios astrofísicos e cosmológicos.

Adam e Klinkhamer (2001) apontam que ao considerar apenas a componente temporal de P^μ , como fizemos na seção anterior, a causalidade é violada. O que implicaria na impossibilidade de uma quantização consistente da teoria. Fato que não ocorre ao considerarmos apenas sua componente espacial. Análises de causalidade, estabilidade e unitariedade, o leitor pode encontrar em (SCARPELLI *et al.*, 2003; ADAM; KLINKHAMER, 2003). Por sua vez, Albert *et al.* (2020), através de experimentos no observatório HAWC, estabeleceram o restritivo limite de $2,2 \times 10^{31}$ eV (consideravelmente maior que a energia na escala de Planck), para que ocorra a quebra da Simetria de Lorentz, principal característica da extensão apresentada.

Por fim, relembramos que ao abordar a Eletrodinâmica MCFJ, visamos conceder

uma compreensão geral de como e quais razões levam as extensões das leis Físicas serem construídas, inclusive introduzindo formalismos utilizados como base para esses tratamentos, como o Lagrangeano e o Relativístico (Covariante). Por outro lado, salientamos os efeitos do modelo em questão, como a anisotropia (birrefringência) do vácuo e a conseqüente diferença de velocidades para uma mesma frequência da onda eletromagnética, particularmente pequena no espectro visível.

REFERÊNCIAS

- ADAM, C.; KLINKHAMER, F. R. Causality and cpt violation from an abelian chern–simons-like term. **Nuclear Physics B**, v. 607, p. 247–267, 2001. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/hep-ph/0101087>>. Acesso em: 21 abr. 2020.
- ADAM, C.; KLINKHAMER, F. R. Photon decay in a cpt-violating extension of quantum electrodynamics. **Nuclear Physics B**, v. 657, p. 214–228, 2003. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/hep-th/0212028>>. Acesso em: 15 fev. 2021.
- ALBERT, A. *et al.* Constraints on lorentz invariance violation from hawc observations of gamma rays above 100 tev. **Physical Review Letters**, v. 124, p. 131101, 2020. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1911.08070>>. Acesso em: 21 abr. 2020.
- BASSALO, J. M. F. **Eletrodinâmica Clássica**. São Paulo: Livraria da Física, 2007.
- BELICH, H.; COSTA-SOARES, T.; SANTOS, M. A.; ORLANDO, M. T. D. Violação da simetria de lorentz. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 29, n. 1, p. 57–64, 2007. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172007000100011&lng=en&nrm=iso>. Acesso em: 15 abr. 2020.
- BROCKINGTON, G.; PIETROCOLA, M. Serão as regras da transposição didática aplicáveis aos conceitos de física moderna? **Investigações em Ensino de Ciências**, v. 10, n. 3, p. 387–404, 2005. Disponível em: <<https://www.if.ufrgs.br/cref/ojs/index.php/ienci/article/view/512/309>>. Acesso em: 10 abr. 2020.
- CARLIN, N.; SZANTO, E. M.; SEALE, W. A.; JORGE, F. O.; SOUZA, F. A.; BECHTOLD, I. H.; GASQUES, L. R. Birrefringência em placas de onda e atividade óptica de uma solução de açúcar. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 27, n. 3, p. 349–355, 2005. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172005000300008&lng=en&nrm=iso>. Acesso em: 05 abr. 2020.
- CARROLL, S. M.; FIELD, G. B.; JACKIW, R. Limits on a lorentz- and parity-violating modification of electrodynamics. **Physical Review D**, v. 41, n. 4, p. 1231–1240, 1990.
- CHAIB, J. P. M. C.; ASSIS, A. K. T. Distorção da obra eletromagnética de ampère nos livros didáticos. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 29, n. 1, p. 65–70, 2007. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172007000100012&lng=en&nrm=iso>. Acesso em: 05 mar. 2020.
- COLLADAY, D.; KOSTELECKÝ, V. A. Cpt violation and the standard model. **Physical Review D**, v. 55, p. 6760–6774, 1997. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/hep-ph/9703464>>. Acesso em: 20 mar. 2020.
- COLLADAY, D.; KOSTELECKÝ, V. A. Lorentz-violating extension of the standard model. **Physical Review D**, v. 58, p. 116002, 1998. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/hep-ph/9809521>>. Acesso em: 19 mar. 2020.
- DOMINGUINI, L. Física moderna no ensino médio: com a palavra os autores dos livros didáticos do pnem. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 34, n. 2, p. 2502, 2012. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172012000200013&lng=en&nrm=iso>. Acesso em: 02 abr. 2020.

FERRARI, A. F. A busca por violações da simetria de lorentz: testando os princípios da relatividade restrita na escala de planck. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 41, n. 4, p. e20190092, 2019. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172019000400414&lng=en&nrm=iso>. Acesso em: 10 jan. 2020.

FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. **Lições de Física de Feynman**. Porto Alegre: Bookman, 2008.

GAZZINELLI, R. **Teoria da Relatividade Especial**. 1. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2005.

GOMES, Y.; MALTA, P. Laboratory-based limits on the carroll-field-jackiw lorentz-violating electrodynamics. **Physical Review D**, v. 94, p. 025031, 2016. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1604.01102>>. Acesso em: 03 abr. 2020.

GREENE, B. R. **O Universo Elegante: Supercordas, Dimensões Ocultas e a Busca da Teoria Definitiva**. São Paulo: Companhia das Letras, 1999.

GRIFFITHS, D. **Eletrodinâmica**. 3. ed. São Paulo: Pearson, 2010.

JACKSON, J. D. **Classical Electrodynamics**. New York: John Wiley Sons, 1998.

KOSTELECKÝ, A.; RUSSELL, N. Data tables for lorentz and cpt violation. arXiv: 0801.0287v14 [hep-ph], p. 1–129, 2020. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/0801.0287>>. Acesso em: 23 mar. 2020.

LEDERMAN, L. M.; HILL, C. T. Teaching symmetry in the introductory physics curriculum. **The Physics Teacher**, v. 38, p. 348–353, 2000. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/physics/0001061>>. Acesso em: 18 abr. 2020.

LEDERMAN, L. M.; HILL, C. T. **Symmetry and the beautiful universe**. New York: Prometheus Books, 2004.

LEMOS, N. A. **Mecânica analítica**. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

MACHADO, K. D. **Teoria do eletromagnetismo**. Paraná: UEPG, 2006.

MARTINS, R. A. Contribuição do conhecimento histórico ao ensino do eletromagnetismo. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 5, p. 49–57, 1988. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/fisica/article/view/10074>>. Acesso em: 13 fev. 2021.

MENON, M. Sobre as origens das definições dos produtos escalar e vetorial. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 31, p. 2305, 2009. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172009000200006&lng=en&nrm=iso>. Acesso em: 13 fev. 2021.

NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica: Eletromagnetismo**. São Paulo: Edgard Blucher, 1997.

OSTERMANN, F. **Tópicos de Física Contemporânea em Escolas de Nível Médio e na Formação de Professores de Física**. Tese (Doutorado em Ciências) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2000. 440 f. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/10183/149956>>. Acesso em: 22 abr. 2020.

OSTERMANN, F.; MOREIRA, M. A. Uma revisão bibliográfica sobre a área de pesquisa “física moderna e contemporânea no ensino médio”. **Investigações em Ensino de Ciências**, v. 5, n. 1, p. 23–48, 2000. Disponível em: <<https://www.if.ufrgs.br/cref/ojs/index.php/ienci/article/view/600/390>>. Acesso em: 15 fev. 2020.

OSTERMANN, F.; MOREIRA, M. A. Atualização do currículo de física na escola de nível médio: um estudo dessa problemática na perspectiva de uma experiência em sala de aula e da formação inicial de professores. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 18, n. 2, p. 135–151, 2001. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/fisica/article/view/6676>>. Acesso em: 20 jan. 2020.

OTA, M. I. N. Eletromagnetismo e relatividade: continuidade formal –ruptura conceitual. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 5, n. 10, p. 27–42, 2020. Disponível em: <<https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/220>>. Acesso em: 16 fev. 2021.

PEREIRA, A. P.; OSTERMANN, F. Sobre o ensino de física moderna e contemporânea: Uma revisão da produção acadêmica recente. **Investigações em Ensino de Ciências**, v. 14, n. 3, p. 393–420, 2009. Disponível em: <<https://www.if.ufrgs.br/cref/ojs/index.php/ienci/article/view/349>>. Acesso em: 27 jan. 2020.

SADIKU, M. N. O. **Elements of Electromagnetics**. São Paulo: Bookman, 1999.

SANTANA, C. V. H. B. **Simetria de invariância de escala discreta, log-periodicidade e singularidades em tempo finito**. Dissertação (Mestrado em Física) — Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2013. 56 f. Disponível em: <<https://repositorio.ufrn.br/handle/123456789/16641>>. Acesso em: 17 abr. 2020.

SANTOS, A. C. L. *et al.* Contributions of a modified electrodynamics to the molecular biochirality. **Chirality**, v. 32, p. 1186–1190, 2020. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1911.09507>>. Acesso em: 20 dez. 2020.

SCARPELLI, A. P. B.; BELICH, H.; BOLDO, J. L.; HELAYËL-NETO, J. A. Aspects of causality and unitarity and comments on vortexlike configurations in an abelian model with a lorentz-breaking term. **Phys. Rev. D**, v. 67, p. 085021, 2003. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/hep-th/0204232>>. Acesso em: 15 fev. 2021.

SCHWINGER, J. The theory of quantized fields. i. **Physical Review**, v. 82, n. 6, p. 914–927, 1951.

SILVA, C. C.; PIMENTEL, A. C. Uma análise da história da eletricidade presente em livros didáticos : O caso de benjamin franklin. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 25, n. 1, p. 141–159, 2008. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/fisica/article/view/2175-7941.2008v25n1p141>>. Acesso em: 10 mar. 2020.

SILVA, J. R. N.; ARENGHI, L. E. B.; LINO, A. Porque inserir física moderna e contemporânea no ensino médio? uma revisão das justificativas dos trabalhos acadêmicos. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, v. 6, n. 1, p. 69–83, 2013. Disponível em: <<https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/1170>>. Acesso em: 02 abr. 2020.

SILVA, M. R. O. **Alguns resultados exatos a Temperatura Finita da Eletrodinâmica CPT-par do Modelo Padrão Estendido**. Dissertação (Mestrado em Física) — Universidade Federal do Maranhão, São Luis, 2010. 59 f. Disponível em: <<http://tedebc.ufma.br:8080/jspui/handle/tede/721>>. Acesso em: 10 abr. 2020.

SIQUEIRA, M. R. P. **Professores de física em contexto de inovação curricular: saberes docentes e superação de obstáculos didáticos no ensino de física moderna e contemporânea**. Tese (Doutorado em Educação) — Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012. 202 f. Disponível em: <<https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-04102012-133540/pt-br.php>>. Acesso em: 26 jan. 2020.

SOUSA, W. B. **Física das radiações: uma proposta para o Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências) — Universidade de São Paulo, São Paulo, 2009. 247 f. Disponível em: <<https://teses.usp.br/teses/disponiveis/81/81131/tde-17092012-141621/pt-br.php>>. Acesso em: 12 abr. 2020.

THORNTON, S. T.; MARION, J. B. **Dinâmica Clássica de Partículas e Sistemas**. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

TONIDANDEL, D. A. V.; ARAUJO, A. E. A.; BOAVENTURA, W. C. História da eletricidade e do magnetismo: da antiguidade à idade média. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 40, n. 4, p. e4602, 2018. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172018000400702&lng=en&nrm=iso>. Acesso em: 18 abr. 2020.

VIANA, D. R. **Algumas contribuições ao estudo do modelo padrão estendido: radiação cpt-par confinada a guias de ondas**. Dissertação (Mestrado em Ciência) — Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2010. 52 f. Disponível em: <<https://www.locus.ufv.br/handle/123456789/4246>>. Acesso em: 05 abr. 2020.

WILCZEK, F. Two applications of axion electrodynamics. **Physical Review Letters**, v. 58, n. 18, p. 1799–1802, 1987.

APÊNDICE A – ALGUMAS EXTENSÕES DO ELETROMAGNETISMO CLÁSSICO

- **Eletrodinâmica de Podolsky;**

PODOLSKY, B. A generalized electrodynamics part i—non-quantum. **Physical Review**, v. 62, n. 1-2, p. 68–71, 1942.

- **Eletrodinâmica Maxwell-Proca;**

PROCA, A. Sur la théorie ondulatoire des électrons positifs et négatifs. **Journal de Physique et le Radium, EDP Sciences**, v. 7, n. 8, p. 347–353, 1936.

- **Eletrodinâmica Não Linear de Heisenberg-Euler;**

HEISENBERG, W.; EULER, H. Folgerungen aus der Diracschen Theorie des Positrons. **Zeitschrift für Physik**, v. 98, p. 714–732, 1936.

- **Eletrodinâmica Não Linear de Born-Infeld;**

BORN, M.; INFELD, L. Foundations of the new field theory. **Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, The Royal Society, v. 144, p. 425–451, 1934.

- **Eletrodinâmica de Maxwell-Higgs;**

VEGA, H. J.; SCHAPOSNIK, F. A. Electrically Charged Vortices in NonAbelian Gauge Theories with Chern-Simons Term. **Physical Review Letters**, v. 56, p. 2564-2566, 1986.

- **Eletrodinâmica de Chern-Simons-Higgs;**

JACKIW, R.; WEINBERG, E. J. Self-dual Chern-Simons Vortices. **Physical Review Letters**, v. 64, p. 2234-2237, 1990.

- **Eletrodinâmica Clássica com a Inclusão de Monopolos Magnéticos;**

DIRAC, P. A. M. Quantised singularities in the electromagnetic field. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A**, v. 133, n. 821, p. 60–72, 1931.

- **Eletrodinâmica Escalar de Pauli-Weisskopf;**

PAULI, W.; WEISSKOPF, V.F. On Quantization of the Scalar Relativistic Wave Equation.

(In German). **Helvetica Physica Acta**, v.7, p. 709-731, 1934.

- **Eletrodinâmica de Lee-Wick;**

LEE, T. D.; WICK, G. C. Finite theory of quantum electrodynamics. **Physical Review D**, v. 2, p. 1033–1048, 1970.

- **Eletrodinâmica de Kalb-Ramond;**

KALB, M.; RAMOND, P. Classical direct interstring action. **Physical Review D**, v. 9, p. 2273-2284, 1974.

- **Eletrodinâmica de Maxwell-Chern-Simons-Higgs;**

PAUL, S. K.; KHARE, A. Charged Vortices in an Abelian Higgs Model with Chern-Simons Term. **Physics Letters B**, v. 174, p.420-422, 1986.

- **Eletrodinâmica de Weber;**

ASSIS, A. T. K. **Eletrodinamica de Weber: Teoria, Aplicações e Exercícios**. São Paulo: Editora Unicamp, 1995.

- **Eletrodinâmica com Violação da Simetria de Lorentz (caso mais geral);**

COLLADAY, D.; KOSTELECKÝ, V. A. Lorentz-violating extension of the standard model. **Physical Review D**, v. 58, p. 116002, 1998.

- **Eletrodinâmica Bumblebee;**

KOSTELECKÝ, V. A.; LEHNERT, R. Stability, causality, and Lorentz and CPT violation. **Physical Review D**, v. 63, p. 065008, 2001.

- **Eletrodinâmica de Myers-Pospelov;**

MYERS, R. C.; POSPELOV, M. Ultraviolet modifications of dispersion relations in effective field theory. **Physical Review Letters**, v. 90, p. 211601, 2003.

- **Eletrodinâmica Logarítmica e Exponencial;**

GAETE, P.; HELAYEL-NETO, J. Finite field-energy and interparticle potential in logarithmic electrodynamics. **The European Physical Journal C**, v. 74, p. 2816, 2014.

GAETE, P.; HELAYEL-NETO, J. Remarks on nonlinear electrodynamics. **The European Physical Journal C**, v. 74, p. 3182, 2014.

- **Eletrodinâmica Não-Linear de Bardeen com Monopólos Magnéticos;**

AYON-BEATO, E.; GARCIA, A. The Bardeen model as a nonlinear magnetic monopole. **Physics Letters B**, v. 493, p. 149-152, 2000.

- **Eletrodinâmica Não-Linear de Bronnikov;**

Bronnikov, K. A. Regular magnetic black holes and monopoles from nonlinear electrodynamics. **Physical Review D**, v. 63, p. 044005, 2001.

- **Eletrodinâmica Não-Linear de Halilsoy-Gurtug-Mazharimousavi;**

HALILSOY, M.; GURTUG, O. MAZHARIMOUSAVI, S. H. Modified Rindler acceleration as a nonlinear electromagnetic effect. **Astroparticle Physics**, v. 68, p. 1-6, 2015.

- **Eletrodinâmica Não-Linear de Kruglov;**

KRUGLOV, S. I. A model of nonlinear electrodynamics. **Annals of Physics**, v. 353, p.299-306, 2015.

- **Eletrodinâmica Não-Linear de Gitman-Shabad;**

GITMAN, D. M.; SHABAD, A. E. A note on “Electron self-energy in logarithmic electrodynamics” by P. Gaete and J. Helayël-Neto. **The European Physical Journal C**, v. 74, p. 3186, 2014.

- **Eletrodinâmica para o Grafeno de Jackiw–Pi;**

JACKIW, R.; PI, S. -Y. Chiral gauge theory for graphene. **Physical Review Letters**, v.98, p. 266402, 2007.

- **Eletrodinâmica Quântica (QED);**

FEYNMAN, R. P. Space-time approach to quantum electrodynamics. **Physical Review**, v. 76, p. 769-789, 1949.

FEYNMAN, R. P. The theory of positrons. **Physical Review**, v. 76, p. 749-759, 1949.