



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
FACULDADE DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E LETRAS DE IGUATU
CURSO DE GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

RAFAEL SOUSA CÉSAR

**A ENERGIA DE CASIMIR DE UM CAMPO ESCALAR
NÃO MASSIVO EM d DIMENSÕES ESPACIAS E SUAS
APLICAÇÕES EM FÍSICA DE DIMENSÕES EXTRAS**

**IGUATU-CEARÁ
2017**

Rafael Sousa César

**A ENERGIA DE CASIMIR DE UM CAMPO ESCALAR NÃO MASSIVO EM d DIMENSÕES ESPACIAS
E SUAS APLICAÇÕES EM FÍSICA DE DIMENSÕES EXTRAS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura Plena em Física da Faculdade de Educação, Ciências e Letras de Iguatu - FECLI, como requisito parcial à obtenção do grau de licenciado em Física.

Orientador: Prof. Dr. Celio Rodrigues Muniz.

IGUATU-CEARÁ

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Universidade Estadual do Ceará

Sistema de Bibliotecas

C421e Cesar, Rafael Sousa.

A Energia de Casimir de um campo escalar não massivo em d dimensões espaciais e suas aplicações em Física de Dimensões Extras [recurso eletrônico] / Rafael Sousa Cesar. - 2017.

1 CD-ROM: il.; 4 ¼ pol.

CD-ROM contendo o arquivo no formato PDF do trabalho acadêmico com 29 folhas, acondicionado em caixa de DVD Slim (19 x 14 cm x 7 mm).

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) - Universidade Estadual do Ceará, Faculdade de Educação, Ciências e Letras de Iguatu, Graduação em Física, Iguatú, 2017.

Orientação: Prof. Ph.D. Celio Rodrigues Muniz.

1. Efeito Casimir. 2. Vácuo. 3. Campo Escalar. 4. Mundos Branas. I. Título.

CDD: 539

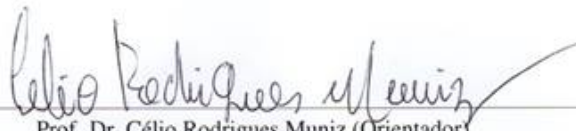
RAFAEL SOUSA CÉSAR

A ENERGIA DE CASIMIR DE UM CAMPO ESCALAR NÃO MASSIVO EM d
DIMENSÕES ESPACIAS E SUAS APLICAÇÕES EM FÍSICA DE DIMENSÕES EXTRAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Curso de Graduação em Física da Faculdade
de Educação, Ciências e Letras de Iguatu
da Universidade Estadual do Ceará, como
requisito parcial para à obtenção do grau de
Licenciada em Física.

Aprovada em: 20 de dezembro de 2017.

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Célio Rodrigues Muniz (Orientador)
Faculdade de Educação, Ciências e Letras de Iguatu - FECLI
Universidade Estadual do Ceará - UECE



Prof. Me. Leonardo Tavares de Oliveira
Faculdade de Educação, Ciências e Letras de Iguatu - FECLI
Universidade Estadual do Ceará - UECE



Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho
Universidade Federal do Ceará - UFC

Resumo

O efeito Casimir designa uma força que emerge do vazio, do nada, foi descoberto por H. Casimir em 1948, como uma manifestação evidente das flutuações da energia produzidas no estado de vácuo de um sistema quântico pela ação de condições externas, como subproduto de uma pesquisa realizada para a empresa Philips, onde trabalhou a vida inteira. Esse fenômeno é um dos aspectos mais intrigantes da física moderna. Consiste na atração entre duas placas paralelas, metálicas e descarregadas, colocadas em uma região na qual se fez vácuo e se resfriou próximo ao zero absoluto, atração essa provocada pela perturbação da energia do ponto zero que compõe o vácuo devido à presença das placas. É importante destacar que é apresentado, neste trabalho, uma formulação do conceito de vácuo ao longo da história, evidenciando por fim como o vácuo possui um estado mínimo de energia; a partir disso pode-se encontrar a energia de Casimir para uma dimensão espacial usando conceitos simples vistos em um curso de típico de graduação em Física. O cálculo é estendido para um campo escalar não massivo em d -dimensões espaciais. É feita também uma aplicação simples desse resultado para o modelo de mundos-brana da física de dimensões extras.

Palavras-chaves: Efeito Casimir. Vácuo. Campo Escalar. Mundos Branas.

Abstract

The Casimir effect designates a force that emerges from emptiness, from nothingness, was discovered by H. Casimir in 1948 as an evident manifestation of the energy fluctuations produced in the vacuum state of a quantum system by the action of external conditions as a by-product of a research conducted for Philips, where he worked his entire life. This phenomenon is one of the most intriguing aspects of modern physics. It consists of the attraction between two parallel plates, metallic and discharged, placed in a region in which a vacuum was made and cooled near absolute zero, an attraction caused by the perturbation of the energy of the zero point that makes up the vacuum due to the presence of the plates. It is important to highlight that in this work a formulation of the concept of vacuum throughout history is presented, evidencing at last how the vacuum has a minimum state of energy; from this one can find the Casimir energy for a spatial dimension using simple concepts seen in a typical undergraduate course in Physics. The calculation is extended to a non-massive scalar field in spatial d -dimensions. A simple application of this result is also done for the extra-dimensional physics worldspace model.

Keywords: Casimir Effect. Vacuum. Scalar field. Worlds Branches.

Lista de Figuras

1	<i>Representação das forças de Casimir em placas paralelas.</i>	p. 9
2	<i>Ilustração do barômetro de Torricelli.</i>	p. 13
3	<i>Experimento de Otto von Guericke para demonstrar a existência do vácuo como um perfeito vazio. (Ilustração de Ângela Farina).</i>	p. 14
4	<i>Representação do Oscilador Harmônico Simples.</i>	p. 15
5	<i>Representação de metade de um comprimento de onda ao atravessar as placas paralelas.</i>	p. 19
6	<i>Representação de um comprimento de onda ao atravessar as placas paralelas.</i>	p. 19
7	<i>Representação de um comprimento e meio de onda ao atravessar as placas paralelas.</i>	p. 20
8	<i>Energia de Casimir em função do número de dimensões espaciais d, no intervalo $0 \leq d \leq 1$ Representação de um comprimento e meio de onda ao atravessar as placas paralelas.</i>	p. 23
9	<i>Energia de Casimir em função do número de dimensões espaciais d, no intervalo $d \geq 1$ Representação de um comprimento e meio de onda ao atravessar as placas paralelas.</i>	p. 24
10	<i>Representação das branas.</i>	p. 25
11	<i>Representação das Flutuações Quânticas (regiões escuras).</i>	p. 28

Sumário

1	INTRODUÇÃO	p. 8
2	O CONCEITO DE VÁCUO AO LONGO DA HISTÓRIA	p. 11
2.1	O VÁCUO CLÁSSICO	p. 12
2.2	VÁCUO QUÂNTICO	p. 15
3	O EFEITO CASIMIR ASSOCIADO AO CAMPO ESCALAR NÃO MASSIVO.	p. 18
3.1	CAMPO ESCALAR NÃO MASSIVO EM 1+1 DIMENSÕES (UMA TEMPORAL E UMA ESPACIAL)	p. 18
3.2	CAMPO ESCALAR NÃO MASSIVO EM 1+3 DIMENSÕES	p. 22
3.3	CAMPO ESCALAR NÃO MASSIVO EM 1 + D DIMENSÕES	p. 22
4	EFEITO CASIMIR E O UNIVERSO-BRANA (FÍSICA DE DIMENSÕES EXTRAS)	p. 25
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	p. 29
	REFERÊNCIAS	p. 30

1 INTRODUÇÃO

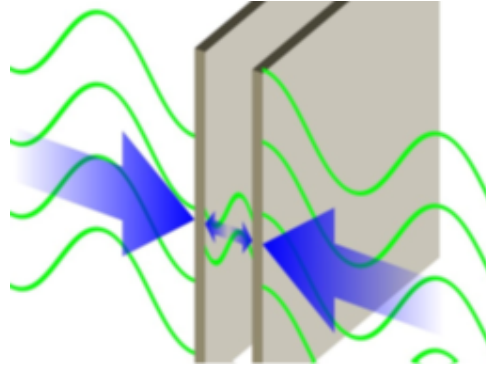
O Efeito Casimir de acordo com ELIZALDE (2009, p. 54) é a manifestação mais palpável que se conhece das flutuações de energia que se produzem no estado vazio de um sistema quântico por ação de condições externas. Este fenômeno sempre foi cercado de curiosidades porque designa uma força que emerge do vazio. Foi, primeiramente, estudado por Hendrik Casimir (1909 - 2000), físico holandês, conhecido por sua pesquisa no modelo de dois fluído condutores em 1934 e pelo efeito Casimir. Ele descobriu esse fenômeno como um subproduto da pesquisa aplicada realizada para a empresa Philips sobre a estabilidade das suspensões coloidais que foram usadas nos filmes, nas lâmpadas e em tubos de raios catódicos. Ao se aprofundar em suas pesquisas, e conversas com Niels Bohr no outono de 1947. Ele percebeu que havia descoberto algo novo e que possuía relação com a energia do ponto zero. Casimir descobriu que o resultado poderia ser efetivamente interpretado como uma variação de energia de ponto zero.

O efeito Casimir é um fenômeno relacionado à Teoria Quântica de Campos (TQC) o qual reúne fenômenos quânticos e relativísticos. Consiste na atração entre duas placas paralelas, neutras e perfeitamente condutoras no vácuo. Para uma melhor compreensão do fenômeno, idealizemos duas placas metálicas conforme a figura 1 abaixo, perfeitamente condutoras, mas eletricamente neutras e paralelas entre si. Elas são quadradas com um centímetro de lado L e estão separadas por uma distância da ordem de micrômetros, distância equivalente a espessura de folha de papel. O sistema está inserido dentro de uma câmara perfeitamente selada, na qual um vácuo perfeito foi estabelecido e foi reduzida a temperatura do ambiente para perto do zero absoluto. Disponibilizamos, assim, um aparato sensível capaz de medir forças pequeninas entre as placas.

Se as placas fossem carregadas com carga elétrica, as leis da eletrostática elementar prevêem uma força entre elas; no entanto Casimir considerou o caso em que as placas não são carregadas assim, como a força gravitacional é totalmente desprezível. Também tomou-se o cuidado de neutralizar qualquer tipo de interferência externa. Mesmo assim, uma força pode surgir de uma radiação eletromagnética "residual" que envolve as placas. A origem dessa força

não pode surgir entretanto, de radiação eletromagnética detectável. A origem desta força não é absolutamente óbvia.

Figura 1: Representação das forças de Casimir em placas paralelas.



Fonte: <https://memim.com/casimir-effect.html>.

Nessas condições, espera-se que o ponteiro do medidor não se altere. Porém, verifica-se um movimento que indica a existência de uma força atrativa entre as placas, devido à diferença de densidade de ondas eletromagnéticas dentro e fora das placas. Este é o efeito Casimir, previsto teoricamente em 1948 e comprovado experimentalmente pela primeira vez em 1958. Essa força é proporcional à área das placas e inversamente proporcional à distância entre elas elevada à quarta potência, a qual também está relacionada com uma constante de proporcionalidade sendo o produto da constante Planck pela velocidade da luz. Daí a universalidade do fenômeno. Esse comportamento a princípio não depende da natureza das placas. O presente trabalho visa o estudo do efeito Casimir como originalmente descoberto, sendo este estudo generalizado para d dimensões espaciais e para um campo escalar não massivo. Na seção 2 mostraremos as definições sobre o conceito de vácuo desde a época dos filósofos gregos da Antiguidade Clássica, os quais consideravam o vácuo como um vazio absoluto, hoje conhecido como vácuo clássico; até o moderno (vácuo quântico) explanando sobre esta definição a partir do oscilador harmônico simples, em que utilizaremos o Princípio da Incerteza para chegarmos ao conceito de energia de ponto zero ou energia do estado fundamental. Na seção seguinte, a qual discute sobre o Campo Escalar não Massivo, abordaremos sobre a sua definição; na primeira subseção utilizaremos a energia do estado fundamental realizando a soma sobre todas as possíveis frequências fazendo uso da função Zeta de Riemann para regularizarmos essa quantidade e encontramos a intensidade da Força de Casimir em uma dimensão espacial; na segunda subseção calcularemos o valor da Força de Casimir para três dimensões espaciais e na terceira subseção faremos a generalização da energia de Casimir para d dimensões espaciais, o que resulta as placas paralelas formarem blocos hiperdimensionais de dimensão espacial $d - 1$ separados por uma distância a . Por fim, será apresentado com o uso da energia de Casimir para d -dimensões uma aplicação para o

Mundo-Branas - as branas são definidas como uma generalização das partículas para dimensões superiores, no caso um sistema quadridimensional, fora o tempo. Elas podem se propagar através do espaço-tempo de acordo com as regras da mecânica quântica. Encontraremos que a densidade de energia do vácuo será relacionada à constante cosmológica proposta por Albert Einstein. Assim, com os valores numéricos das constantes que aparecem na fórmula, dependentes da função Gama (Γ) e da função zeta de Riemann (ζ), serão calculados para quatro dimensões e com isso podemos achar o valor da separação entre as branas. Por esse resultado entenderemos o conceito de universo cíclico Ecpirótico.

2 O CONCEITO DE VÁCUO AO LONGO DA HISTÓRIA

De acordo com TOKATY (1971, p 299) matematicamente, espaço é definido simplesmente como uma região tridimensional. Mas o espaço sobre o qual discutirei agora é mais que isto: ele está "repleto" de matéria e energia em numerosos estados e formas de manifestação. Além do mais, espaço (no sentido matemático do termo), matéria, energia e tempo não existem separados e independentemente, nenhum deles é sequer imaginável sem os outros.

A partir da definição de vácuo como uma das representações do espaço é que se pode entender o efeito Casimir. O vácuo por muito tempo foi associado à ausência absoluta de matéria e de energia. Isto é, imaginou-se que ao se retirar toda a matéria e tudo o mais que pode ser removido, permaneceríamos com algo que denominamos espaço, vazio, espaço vazio ou vácuo. Na maioria das vezes é atribuído-lhe o sinônimo de nada. Não nos ocorre que essa concepção possa ser um tanto ingênua e nossa terminologia imprecisa. No entanto, com o advento da Mecânica Quântica a definição de vácuo sofreu drásticas mudanças. De acordo com MATSAS (2003, p. 2) o vácuo é povoado por uma legião de partículas, denominadas virtuais, que não podem ser removidas. Além disso, elas surgem e se aniquilam aos pares tão rapidamente que sua detecção direta é impossível.

Neste capítulo veremos brevemente sobre as definições de vácuo clássico e vácuo quântico. Na primeira subseção abordaremos os conceitos históricos que vão desde a época da Antiguidade Clássica até o final do século XIX. Na segunda subseção explanaremos sobre o vácuo na sua acepção contemporânea, a partir do estudo do oscilador harmônico simples quântico.

2.1 O VÁCUO CLÁSSICO

Leucipo e Demócrito foram dois filósofos gregos que contribuíram sobre como era constituída a matéria. Conhecidos por serem os criadores do atomismo, acreditavam que tudo o que existe é formado por pequenas partículas, os átomos. Para eles o universo era o grande vazio preenchido por átomos espalhados, indestrutíveis e indivisíveis; hoje sabemos que eles podem ser separados em partículas muito menores. Eles imaginavam que a matéria não poderia ser dividida infinitamente; partindo-a várias vezes, chegaríamos ao átomo, uma partícula muito pequena e indivisível. Assim os átomos seriam sólidos, estáveis, imutáveis, indestrutíveis.

De acordo SOTO (1992, p. 96), na teoria de Leucipo, o mundo era dividido em duas partes, uma vazia (vácuo) e a outra cheia, a parte cheia era formada pelos átomos. Leucipo acreditava que nada poderia surgir do nada, mas de algo já existente, e o que já existia não poderia desaparecer de repente. Essa teoria é o que conhecemos por hoje "princípio da conservação da matéria".

O pensamento deles serviu de base para a elaboração de novas teorias sobre a constituição do universo, e do que existe nele; graças a isso esses dois pensadores ganharam o título de grandes filósofos da humanidade.

Essa ideia foi em seguida estudada na Academia de Platão 367 - 347 a.C. Os filósofos gregos da Antiguidade Clássica notavam as complexidades conceituais envolvidas nas noções fundamentais de matéria, como espaço, tempo e movimento e de modo particular as dificuldades sobre o conceito de vácuo. De acordo com PINTO; FARINA; TORT (2000, p. 3). Eles estabeleceram duas visões conceituais e opostas a respeito do vácuo. De acordo com o primeiro, o "vácuo" é o espaço vazio, isto é, totalmente sem de matéria (sinônimos). E de acordo com o segundo ponto de vista, o espaço vazio não é admissível e o "vácuo" deve ser concebido como uma espécie de meio (um "éter"). Nesse contexto, vácuo e vazio, não significam a mesma coisa. Mais tarde Aristóteles 322 a.C., segundo BOYER (1985, p. 70-71), afirmava o vácuo perfeito como algo inalcançável, porém essa ideia foi derrubada no século XVII.

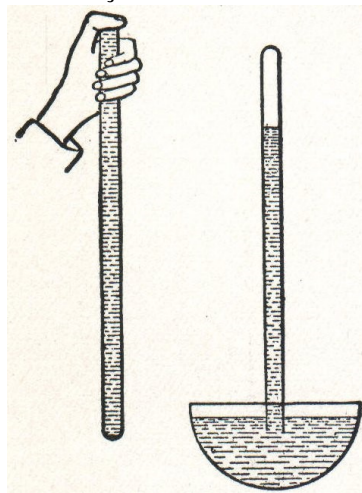
No século XVI, o filósofo e cientista francês Pierre Gassendi (1592 - 1655) apresentou uma nova ideia sobre a criação do universo atomista baseado em elementos cristãos, afirmava ser erroneo supor que as coisas fossem formadas por associação com os átomos, pois segundo sua visão o átomo não podem ser chamado de elemento fundamental das criaturas. Só os átomos compõem as coisas e o vácuo é interpretado como um estado necessário de separação dos átomos. Conforme diz ROVARIS (2007, p. 57) apesar de estar misturado com os átomos

dos corpos, o vazio, para Gassendi, não pode ser considerado parte deles, assim como os ar dentro de um pulmão de uma pessoa não pode ser considerado parte do corpo. Ele defendia o conceito de que o ser não pode ser feito ou ter vindo do não-ser.

Para René Descartes (1596 -1650), a ideia de vácuo era tão inaceitável como quanto a ideia de um átomo indivisível, ele acreditava que o universo fosse preenchido por uma substância extensa, indefinidamente divisível. Descartes declarou que o Universo é totalmente preenchido por essa substância o "éter" que seria onipresente. Assim, a rotação do Sol, através do éter, criaria ondas ou redemoinhos, explicando o movimento dos planetas, do mesmo modo que uma bateadeira. O éter também seria o meio pelo qual a luz se propaga, atravessando-o pelo espaço, desde o Sol até nós.

Com a invenção do barômetro em 1644 pelo italiano físico e matemático Evangelista Torricelli, que havia sido secretário de Galileu, essa ideia mudou. O barômetro surgiu da necessidade de resolver um problema prático. Os fabricantes de bombas hidráulicas tentavam levar água a uma altura de cerca de doze metros, porém o limite de sucção das bombas era em torno de dez metros. Em 1643, Torricelli utilizou um tubo, que ele mesmo havia criado, de aproximadamente um metro, selado no topo, preenchido com mercúrio. Torricelli usou o mercúrio, um líquido mais denso que a água, colocado verticalmente numa base toda preenchida com a substância. Primeiramente, ele encheu o tubo de vidro com mercúrio e o tampou com o dedo. Em seguida, inverteu-o e mergulhou-o na base que também continha mercúrio. A coluna era de aproximadamente 76 cm, deixando um vácuo torricelliano na parte de cima como mostra a figura a seguir. Com o barômetro Torricelli percebeu que a conforme a altura da coluna muda a pressão atmosférica varia. A descoberta do princípio do barômetro perpetuou a fama de Torricelli.

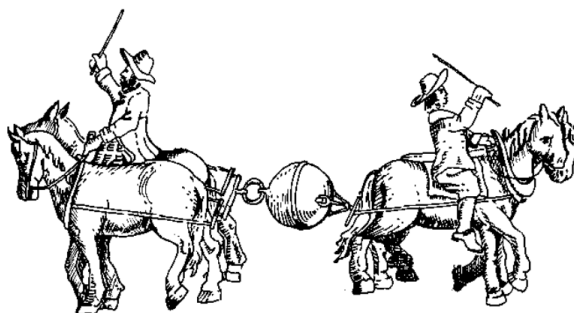
Figura 2: Ilustração do barômetro de Torricelli.



Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Evangelista.Torricelli>

Em 1657, Otto von Guericke, por meio de dois hemisférios ocos de cobre, uma bomba de ar e algumas parcas de cavalos (figura 3) conseguiu demonstrar a obtenção de uma região do espaço sem matéria. A ausência de ar no interior das esferas permitia a pressão atmosférica externa mantivesse os lados da esfera unidos ao ponto dos cavalos não conseguirem separá-los. O experimento de Guericke foi recebido como uma refutação experimental da concepção medieval aristotélica sobre o vácuo.

Figura 3: Experimento de Otto von Guericke para demonstrar a existência do vácuo como um perfeito vazio. (Ilustração de Ângela Farina).



Fonte: <http://fsicafascinante.blogspot.com.br>

A compreensão do vácuo mudou novamente no século XIX, essa mudança ocorreu devido aos estudos do físico alemão Max Planck (1858-1947), a radiação de um corpo negro, um problema teórico de suma importância na sua época. O corpo negro é um objeto hipotético que absorve toda a radiação eletromagnética emitida sobre ele. Um corpo negro ideal irradia energia na mesma taxa que a absorve, sendo essa uma das propriedades que o tornam uma fonte ideal de radiação térmica. Na natureza não existem corpos negros perfeitos, já que nenhum objeto consegue ter absorção e emissão perfeitas. A radiação térmica está intimamente ligada à estrutura do vácuo. Como afirma ZEILLINGER (2005, p. 22) essa formulação serviu de base para a criação mecânica quântica. Com a mecânica quântica surgiu o conceito de energia de ponto zero, uma energia decorrente de flutuações quânticas que não podem ser eliminadas por nenhum processo físico. Elas permanecem mesmo em uma região do espaço na qual nenhuma forma de matéria ou radiação pode ser observada.

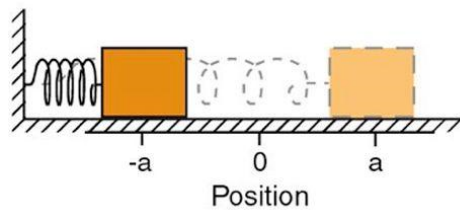
No próxima subseção mostraremos o valor da energia de ponto zero a partir da equação do oscilador harmônico simples quântico.

2.2 VÁCUO QUÂNTICO

A natureza é basicamente constituída de vibrações, e com o vácuo não é diferente, como afirma PINTO *et-al.*, (2000, p. 125). Um dos fenômenos físicos mais comuns e importantes que a natureza exhibe é a vibração. Mesmo no mundo das coisas extremamente pequenas a vibração também está presente. As moléculas e os átomos vibram sem cessar.

Na Física o modelo ideal para se estudar esse comportamento é o Oscilador Harmônico Simples (OHS). Um sistema formado por uma mola elástica com uma das suas extremidades presa a um suporte fixo e a outra a um bloco, cuja massa é bem maior do que a massa da mola. O sistema apoia-se sobre uma superfície horizontal sem atrito, de modo que a força resultante sobre o bloco seja a força da mola conforme a figura 4, já que na vertical a força de contato entre a superfície e o bloco equilibra o peso do bloco.

Figura 4: Representação do Oscilador Harmônico Simples.



Fonte: <https://www.learner.org/simple.harmonic.oscillator>

Usando os seguintes termos: massa = m , Força = $-kx$, frequência é $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, onde k é a constante da mola do oscilador harmônico, e o momento linear $p = mv$. Assim temos a Cinética do Oscilador Harmônico:

$$K(x) = \frac{1}{2}mv^2. \quad (2.1)$$

A energia Potencial Elástica do Oscilador Harmônico.

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2. \quad (2.2)$$

Ao somarmos as equações (2.1) e (2.2) chegamos na Energia do Oscilador Harmonico Simples

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2. \quad (2.3)$$

Essa equação pode assumir qualquer valor positivo e no seu estado fundamental pode ter valor nulo pelas leis da Física Clássica. Assim podemos encontrar a posição inicial e o momento

(massa e velocidade) do bloco no sistema como sendo nulos também, porém, nosso sistema está inserido no vácuo quântico e nesse caso as leis da Mecânica Clássica não são mais válidas.

Nesse caso o nosso sistema será trabalho em um espaço quântico; admitiremos p e x como os operadores quânticos. Nesse caso não podemos atribuir os valores de p e x , simultaneamente. Por exemplo, se tivermos a informação do momento não saberemos a posição. Essa improbabilidade das informações em nosso sistema é chamada de Princípio da Incerteza de Heisenberg. De acordo com Halliday (2013, p.194), por causa do princípio da incerteza, não se pode conhecer com precisão absoluta a posição ou o momento (e, portanto, a velocidade) de uma partícula. Esse fenômeno acontece pois a medição de qualquer um desses valores é alterado, e isto não é uma questão de medição, mas sim da física quântica e da natureza das partículas. Com isso encontramos os valores médios do estado fundamental:

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= 0; & \langle x \rangle &= 0 \\ \sqrt{\langle p^2 \rangle} &= \Delta p; & \sqrt{\langle x^2 \rangle} &= \Delta x. \end{aligned}$$

Princípio da Incerteza com incerteza mínima é dado por:

$$\Delta p \Delta x = \frac{\hbar}{2}.$$

onde \hbar é constante de Planck. Substituindo esses operadores na equação (2.3) temos:

$$\langle E \rangle = \frac{\Delta p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(\Delta x^2). \quad (2.4)$$

Isolando do Δp do principio com incerteza mínima e substituído na equação (2.4) temos,

$$\langle E \rangle = \frac{\hbar^2}{8m} \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2(\Delta x^2). \quad (2.5)$$

Derivando a energia do oscilador harmônico em função de Δx para encontrar a energia média mínima,

$$\frac{d \langle E \rangle}{d \langle \Delta x \rangle} = 0, \quad (2.6)$$

$$0 = -\frac{\hbar^2}{4m} \frac{1}{\Delta x} + m\omega^2 \Delta x \quad (2.7)$$

e isolando o Δx temos,

$$\Delta x^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}. \quad (2.8)$$

Colocando esses operadores na equação (2.7) na equação (2.5) por simples resolução algébrica encontramos a energia mínima do vácuo que é dada pelo valor (energia do ponto zero),

$$E_n^{(0)} = \left(\frac{1}{2}\right) \hbar\omega_n, \quad (2.9)$$

onde ω é a frequência do oscilador que depende das condições de contorno para as placas paralelas e n é o número de comprimentos de onda presentes no sistema.

Considerando que o campo eletromagnético pode ser visto como um conjunto infinito de osciladores harmônicos e cada oscilador apresenta uma energia de ponto zero dada pela equação (2.8), o vácuo desse campo terá energia representada na equação (2.9), a qual é infinita e precisa ser regularizada de forma apropriada.

$$E_0 = \sum_n \frac{1}{2} \hbar\omega_n, \quad (2.10)$$

A partir da equação podemos entender que se fosse possível isolarmos nosso sistema longe de qualquer fator externo, em um laboratório perfeito. A própria natureza do sistema apresentaria uma energia mínima e esta causaria interferência em nosso sistema. O vácuo não é vazio.

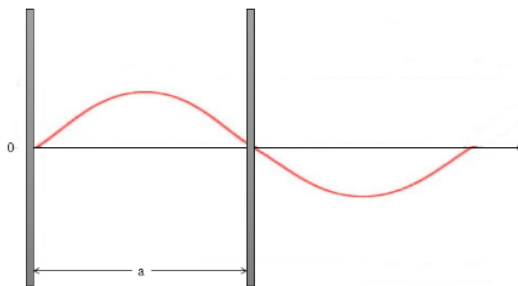
3 O EFEITO CASIMIR ASSOCIADO AO CAMPO ESCALAR NÃO MASSIVO.

O campo escalar não massivo é um campo físico que não possui massa, carga, nem spin, sendo representado apenas por um número real, ou seja, uma grandeza física escalar, como temperatura, ou a densidade de um fluido por exemplo, que é associado a cada ponto do espaço e em cada instante de tempo (por isso que é um campo, do ponto de vista matemático). A equação que descreve a dinâmica desse campo escalar é a equação das ondas, a mesma do eletromagnetismo, propagando-se no vácuo com a velocidade da luz. É o mais simples dos campos que ocorrem na natureza. Idealizamos nosso estudo do efeito Casimir por meio de um campo escalar não massivo, pois se levamos em consideração o campo eletromagnético temos que considerar a polarização da onda, o que complica a nossa compreensão do fenômeno.

3.1 CAMPO ESCALAR NÃO MASSIVO EM 1+1 DIMENSÕES (UMA TEMPORAL E UMA ESPACIAL)

Agora voltamos para o sistema das placas paralelas que estão separadas por uma distância a , dispostas ao longo do eixo x , conforme a figura 5, assumido que n representa o número de comprimentos de onda do campo escalar confinado entre as placas. Assim, para $n = 1$, obtemos a seguinte proporcionalidade:

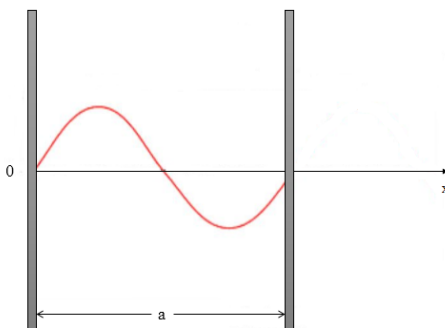
$$\frac{a}{\lambda} = \frac{1}{2} \tag{3.1}$$

Figura 5: Representação de metade de um comprimento de onda ao atravessar as placas paralelas.

Fonte:Elaborado pelo autor.

No seguinte caso, para $n = 2$, foi encontrado uma proporcionalidade de exatamente um comprimento de onda entre as placas paralelas, conforme a figura 6 apresenta. A partir dessa representação encontramos a expressão do número de comprimentos das ondas confinadas entre as placas paralelas, sobre as quais a amplitude de oscilação é zero:

$$\frac{a}{\lambda} = 1 \quad (3.2)$$

Figura 6: Representação de um comprimento de onda ao atravessar as placas paralelas.

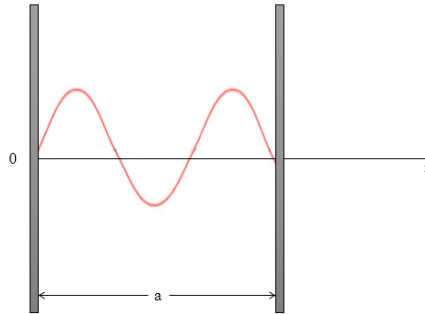
Fonte:Elaborado pelo autor.

No sistema para $n = 3$, conforme a figura 7, apresenta um comprimento de onda e meio entre as placas paralelas o que nos dá a expressão 3.3.

$$\frac{a}{\lambda} = \frac{3}{2} \quad (3.3)$$

Essa expressão mostra a proporcionalidade do número de ondas entre as placas paralelas ao se ter um comprimento e meio de ondas atravessando as placas.

Figura 7: Representação de um comprimento e meio de onda ao atravessar as placas paralelas.



Fonte:Elaborado pelo autor.

Observando esses casos encontramos uma relação geral:

$$\frac{a}{\lambda} = \frac{n}{2} \quad (3.4)$$

Ao multiplicarmos ambos os lados por 2π , chegamos a

$$2\pi \frac{a}{\lambda} = 2\pi \frac{n}{2} \quad (3.5)$$

No entanto $\frac{2\pi}{\lambda} = k$, que é o número de ondas. Assim,

$$K_n = \frac{\pi n}{a} \quad (3.6)$$

Em um espaço unidimensional, sem fronteiras, o campo ondulatório apresenta comprimentos de onda e frequências arbitrários. Entretanto, entre as placas encontram-se restrições para os mesmos, nos correspondentes números de onda,

$$\frac{2\pi}{\lambda} = k \quad (3.7)$$

e frequência angular,

$$\omega = cK, \quad (3.8)$$

onde c é a velocidade da luz. Essas restrições sobre os k_n são as chamadas condições de contorno para o campo escalar devidas à presença das placas paralelas. Em 1+1 dimensões, as duas placas condutoras e opacas, separadas por uma distância a , na verdade são pontos. Essas condições de contorno significam que somente há ondas entre as placas que satisfazem a relação

$$\omega_n = \frac{c\pi n}{a}, \quad (3.9)$$

Para $n = 1, 2, 3, \dots$

Agora basta considerar a energia do ponto zero encontrada na equação (2.8) e a do vácuo na equação (2.9) substituindo nesta o valor da frequência da expressão (3.9), entre as placas paralelas, cuja soma, como vimos é definida como a energia do vácuo não regularizada:

$$E_0 = \sum_n E_n^{(0)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \hbar \omega_n = \frac{\pi \hbar c}{2a} \sum_{n=1}^{\infty} n. \quad (3.10)$$

Assim, esse somatório em n é infinito. De acordo ELIZALDE (2009, p. 57) existem importantes métodos de soma de séries divergentes foram contruídos ao longo do tempo, e para este caso a solução pode ser representada por uma função denominada função zeta de Riemann (ζ), definida no plano complexo como sendo,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}. \quad (3.11)$$

Para o nosso caso temos $s = -1$, o que é tabelado e dado por

$$\zeta(-1) = -\left(\frac{1}{12}\right). \quad (3.12)$$

Chegando, assim, a seguinte expressão,

$$E_0^c = -\frac{\pi \hbar c}{24a}, \quad (3.13)$$

e a força de Casimir será, então

$$F^c = -\frac{\partial E_0^c}{\partial a} = -\frac{\pi \hbar c}{24a^2}. \quad (3.14)$$

Conforme afirma SOBRINHO (2001, p. 406) a origem da energia Casimir do vácuo está na soma da energia de ponto zero de um número infinito de osciladores obtidos na quantização do campo em questão. Uma outra abordagem possível consiste na redução deste número infinito de graus de liberdade a um número finito. Isso pode ser feito considerando-se o espaço, não contínuo, mas sim discreto, como se este fosse uma rede tridimensional formada por pontos que mantêm uma distância fixa entre si.

3.2 CAMPO ESCALAR NÃO MASSIVO EM 1+3 DIMENSÕES

Na energia de Casimir para o caso tridimensional, no eixo perpendicular às placas só existem quantidades finitas de comprimentos de onda entre as placas. Já no eixo paralelo são infinitas possibilidades de comprimentos de onda atravessando o espaço dentre as placas. Assim, para o cálculo da energia de Casimir em 1 + 3 dimensões espaciais temos o valor da seguinte expressão

$$E_0 = \frac{1}{2} \frac{\hbar c}{(2\pi)^2} L^2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y dk_z \sqrt{\frac{n^2 \pi^2}{a^2} + k_y^2 + k_z^2}, \quad (3.15)$$

$$E_0 = \frac{1}{2} \hbar c \frac{L^2}{(2\pi)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} (2\pi k) dk \sqrt{\frac{n^2 \pi^2}{a^2} + k^2}. \quad (3.16)$$

Resolvendo-se a integral e regularizando-se o somatório pela função zeta de Riemann, encontramos a energia de Casimir

$$E_0^C = -\frac{\hbar c \pi^2}{1440 a^3}. \quad (3.17)$$

Esse resultado, encontrado por Casimir em 1948, foi obtido por meio de outra técnica de regularização conforme *PINTO et al.*, (2000, p) e com um fator duas vezes maior dedido aos 2 estados de polarização do campo eletromagnético.

3.3 CAMPO ESCALAR NÃO MASSIVO EM 1 + D DIMENSÕES

Para a generalização para d dimensões espaciais substituímos as placas paralelas hiperblocos e resolvemos a integral da equação (3.18) e regularizamos o somatório pela função Zeta de Riemann, obtem-se,

$$E_0 = \frac{V_b}{2} \frac{\hbar c}{(2\pi)^{d-1}} b_d \Gamma(d-1) \sum_{n=1}^{\infty} d K_{\parallel} K_{\parallel}^{d-2} \left(\sqrt{\left(\frac{n\pi^2}{a}\right)^2 + K_{\parallel}^2} \right), \quad (3.18)$$

onde,

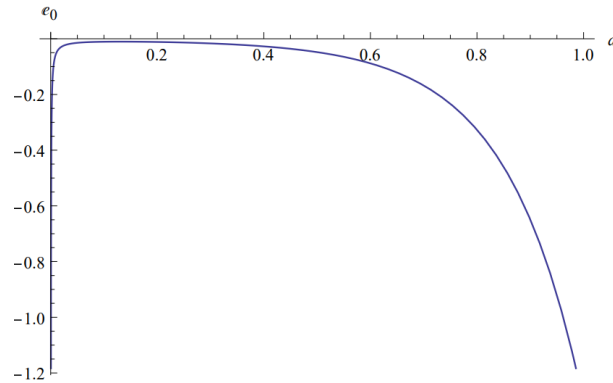
$$V_b = \frac{L^2}{(2\pi)^2} \quad e \quad b_d = \frac{2\pi^{(\frac{d-1}{2})}}{\Gamma(\frac{d-1}{2})} \quad (3.19)$$

Os operadores V_{d-1} e b_d , são respectivamente o volume dos hiperblocos e o parâmetro das hipersuperfícies esféricas gerado pelo vetor de onda k paralelo aos hiperblocos desta função não regularizada da energia de Casimir. Após os métodos de regularização da energia de Casimir tem-se a equação (3.20).

$$E^C = -\frac{L^{d-1}}{a^d} \hbar c \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) (4\pi)^{\frac{-(d+1)}{2}} \zeta(d+1). \quad (3.20)$$

Nesse sistema as placas foram substituídas por hiperblocos de volume de L^{d-1} e afastados a uma distância a . A pressão do vácuo entre as placas é, portanto, negativa.

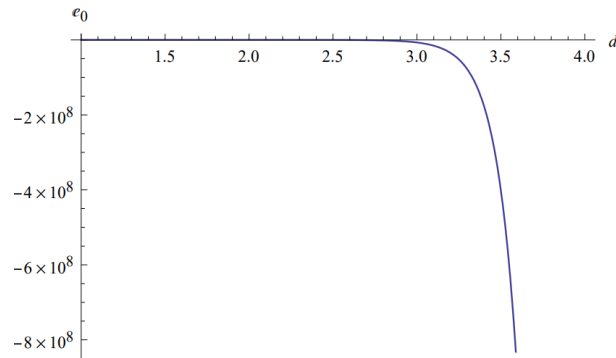
Figura 8: Energia de Casimir em função do número de dimensões espaciais d , no intervalo $0 \leq d \leq 1$. Representação de um comprimento e meio de onda ao atravessar as placas paralelas.



Fonte:Elaborado pelo autor.

O primeiro gráfico acima (figura 8) mostra que a Energia de Casimir atinge um máximo em $d \approx 0,2$, após o que diminui monotonicamente com o crescimento de d , o que é evidenciado no segundo gráfico (figura 9).

Figura 9: Energia de Casimir em função do número de dimensões espaciais d , no intervalo $d \geq 1$. Representação de um comprimento e meio de onda ao atravessar as placas paralelas.



Fonte:Elaborado pelo autor.

Para casos especiais o resultado é:

$$d = 1, \quad E = -\frac{\pi}{48} \frac{1}{a} \simeq -\frac{0.065}{a},$$

$$d = 2, \quad E = -\frac{\zeta(3)}{16\pi} \frac{L}{a^2} \simeq -\frac{0.024L}{a^2},$$

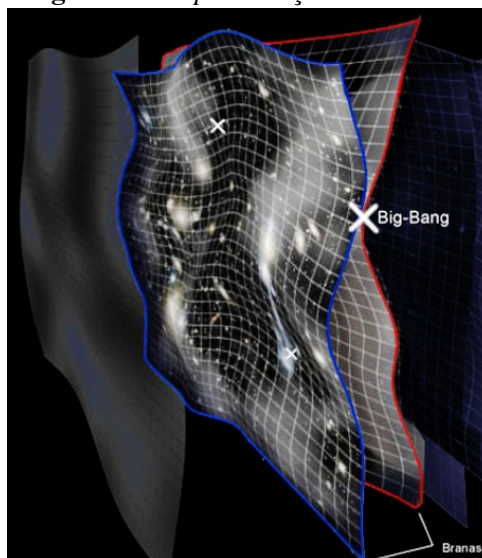
$$d = 3, \quad E = -\frac{\pi^2}{1440} \frac{L^2}{a^3} \simeq -\frac{0.0069L^2}{a^3}.$$

Nesses casos atribuímos os valores da constante de Planck e da velocidade da luz como $\hbar = c = 1$.

4 ***EFEITO CASIMIR E O UNIVERSO-BRANA (FÍSICA DE DIMENSÕES EXTRAS)***

Neste capítulo trabalharemos o resultado do efeito Casimir em d -dimensões espaciais (equação 3.22) no universo das *branas*. Conforme afirma SOUSA (2013, p 13) nos últimos anos surgiram modelos de universo nos quais se considera que o mundo em que vivemos está "imerso" em um universo com dimensões extras. Esse modelo recebe o nome de *branas* as quais podem ser definidas como uma generalização das partículas, podendo ser atribuídas características tais como gravidade, força elétrica elas possuem massa e por isso pode-se atribuir carga. As branas geralmente são podem ser consideradas como uma possível solução sobre a origem do universo. Podemos idealizar o universo constituído por duas dessas branas conforme a figura 10 abaixo, sendo que o nosso se encontra em uma delas. Elas se encontram em um sistema de quatro coordenadas espaciais e uma temporal. Se considerarmos nosso universo formado por duas branas (membranas) tridimensionais nós viveríamos em uma delas.

Figura 10: *Representação das branas.*



Fonte: <http://genkaisplash.blog137>.

Assumimos essas branas como sendo as placas do efeito Casimir. Como elas se encontram em um sistema quadridimensional, ou seja, para $d = 4$, ao aplicarmos esse valor na equação da energia de Casimir em d -dimensões e dividirmos pelo volume das branas (L^3) que se encontra na citada fórmula, chegaremos à densidade de energia do vácuo entre as placas-branas, a qual consideraremos sobre elas, essa densidade de energia está relacionada à constante cosmológica apresentada por Albert Einstein. Através desse método encontraremos o valor da separação a entre as branas, ou seja, o nosso cosmos de um outro paralelo ao nosso. Utilizando a equação (3.20) para o universo das branas.

$$E^C = -\frac{L^{d-1}}{a^d} \hbar c \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) (4\pi)^{\frac{-(d+1)}{2}} \zeta(d+1).$$

Para $d = 4$ temos,

$$E^C = -\frac{L^3}{a^4} \hbar c \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) (4\pi)^{\frac{-(5)}{2}} \zeta(5). \quad (4.1)$$

Multiplicando ambos os membros por $\frac{1}{L^3}$, encontramos a densidade de energia entre as branas. Esse valor é negativo pois as placas-branas estão sob uma força atrativa. Neste trabalho o valor da densidade de energia foi colocado em módulo, pois trabalhamos com a energia em cima das branas, supondo algum mecanismo que localiza esta energia sobre as branas:

$$\rho^C = \frac{1}{a^4} \hbar c \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) (4\pi)^{\frac{-(5)}{2}} \zeta(5). \quad (4.2)$$

Essa densidade de energia está diretamente relacionada à constante cosmológica, Λ , proposta por Albert Einstein em 1917. De acordo com OLIVEIRA (2013, p. 683) foi atribuída por Einstein como uma adição à sua teoria da relatividade geral que descreve o universo na situação quando é "estático", isto é, não se expandindo.

$$\Lambda = 8\pi \frac{G}{c^4} \rho_{vacuo}. \quad (4.3)$$

onde Λ é a constante cosmológica com valor em torno de $10^{-52} J/m^3$, G a constante gravitacional no valor de $6,67 \cdot 10^{-11} N m^2 / Kg^2$ e c velocidade da luz no vácuo no valor de $3 \cdot 10^8 m/s$; e ρ é a densidade de energia do vácuo. A constante de Planck (\hbar) é dada pelo seguinte valor de $6,62 \cdot 10^{-34} J/s$.

Assim substituindo os valor da densidade de energia do vácuo obtida pela energia

de Casimir para d -dimensões equação (3.22) na da fórmula da constante cosmológica equação (4.3), temos,

$$\Lambda = 8\pi \frac{G}{c^4} \rho^C, \quad (4.4)$$

$$\Lambda = 8\pi \frac{G}{c^4} \hbar c \frac{1}{a^4} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) (4\pi)^{\frac{-(5)}{2}} \zeta(5), \quad (4.5)$$

$$10^{-52} = 8\pi \frac{6,67 \times 10^{-11}}{(3 \times 10^8)^4} (6,62 \times 10^{-34}) \cdot (3 \times 10^8) \frac{1}{a^4} \frac{3\sqrt{\pi}}{4} (4\pi)^{\frac{-(5)}{2}} (1,0369), \quad (4.6)$$

$$a^4 \approx 10^{-16} m, \quad (4.7)$$

$$a \approx 10^{-4} m, \quad (4.8)$$

$$a \approx 0,1 mm.$$

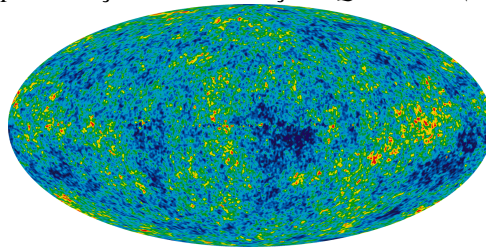
Tal resultado encontrado na distância entre branas pode ser uma solução para o entendimento sobre a origem do big-bang baseado no modelo do Universo Ecpirótico . Em 2001, Paul Steinhardt e Neil Turok apresentaram uma teoria ao qual o universo visível fora originado na colisão de branas; essa teoria é denominada de universo cíclico Ecpirótico. Esse modelo se fundamenta na ideia de que o nosso universo fora criado a partir da colisão de dois mundos tridimensionais movendo-se ao longo de uma dimensão extra escondida, conforme a representação da figura 8. Nessa colisão a energia é convertida em quarks, elétrons, fótons, que se movem ao longo das três dimensões espaciais.

Como afirma STEINHARDT (2001), a temperatura resultante é finita, a fase de explosão começa sem uma singularidade. O universo é homogêneo porque a colisão e a iniciação da fase de grande explosão ocorre quase simultaneamente em todos os lugares. A geometria energeticamente preferida para os dois mundos é plana, então sua colisão produz um universo de big bang. De acordo com as equações de Einstein, isso significa que a densidade de energia total do Universo é igual à densidade crítica.

Nesse aspecto, o big-bang não é o começo de tudo, mas um elo anterior de uma contração do universo. O universo sofre uma sequência sem fim de ciclos nos quais ele se contrai em um "big-crunch" e emerge em um big-bang de expansão. Essa teoria do big-bang é até hoje a mais aceita para descrever o começo do universo.

De acordo com MELGAR (2003, p. 204) alguns cientistas acreditam na ideia de que o big-bang é uma manifestação da colisão de branas. Dessa maneira, o big-bang está longe de ser único. Os big-bangs são somente um produto dos ciclos sem fim dentro do cosmos. Como essas branas se encontram a uma distância muito pequena, é possível que elas tenham colidido no passado causando os fenômenos conhecidos do big bang até hoje. A vantagem dos modelos de universo ecpirótico cíclico é a não produção de um multiverso, ou seja, outros universos com propriedades física únicas. Isso é importante pois, quando os efeitos das flutuações quânticas estão colocadas de modo correto no modelo inflacionário do big bang, eles não permitem que o universo alcance a uniformidade e planicidade que os cosmólogos estão tentando explicar. Em vez disso, as flutuações quânticas inflacionadas fazem com que o universo se separe em manchas (figura 11) com todas as combinações possíveis de propriedades físicas.

Figura 11: *Representação das Flutuações Quânticas (regiões escuras).*



Fonte:<http://genkaisplash.blog137>.

Em vez de fazer previsões claras, a teoria inflacionária do big bang permite qualquer resultado, de modo que as propriedades que observamos possam ser vistas como chance aleatória, resultantes do fragmento particular do multiverso em que a Terra reside. Sendo que maioria das regiões do multiverso teria propriedades muito diferentes.

5 *CONSIDERAÇÕES FINAIS*

A pesquisa feita para a elaboração do presente trabalho sobre o efeito Casimir oportunizou a compreensão apropriada de conceitos fundamentais da Física na Mecânica Quântica, tais como a formulação da energia de ponto zero, Princípio da Incerteza de Heisenberg; como também conceitos da matemática tais como função Zeta de Riemann e Função Gama.

Foi possível entender como o vácuo tem uma capacidade dinâmica em suas características. Encontramos uma energia mínima chamada de energia do ponto zero encontrada a partir da energia do oscilador harmônico simples com a utilização dos operadores de Heisenberg e da função zeta de Riemann. Por esse método concluímos que o vácuo e o vazio não são sinônimos.

Por essa energia do estado fundamental foi possível encontrar a energia de Casimir assim como sua característica quântico-relativística. Essa energia generalizada para d -dimensões espaciais necessitou de uma mudança no sistema das placas paralelas, pois foi trabalhado com hiperblocos com $d - 1$ dimensões, assim como a necessidade de regularização e o somatório pela função Zeta de Riemann para obter a referida.

Vale destacar que a formulação encontrada aplicada ao conceito das branas em física de dimensões extras quando foi importante para a compreensão da teoria do Universo Ecpirótico, pois como o valor da distancia entre as placas-branas é bastante pequeno, então podemos supor que elas já colidiram em passado causando os fenômenos conhecidos como bing-bang. Resultado intimamente correspondido aos objetivos.

REFERÊNCIAS

- BOYER, C. **The Classical Vacuum**. Scientific American, vol. 253, nº2, Agosto, 1985.
- ELIZALDE, E. **El efecto Casimir**. Investigacion Y Ciencia, Marzo, 2009.
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos da Física**. Óptica e Física Moderna. vol.4. 9ªed. Rio de Janeiro, 2013.
- MATSAS, G. E. A.; VANZELLA, D. A. T. **O Vácuo Quântico cheio de surpresas**. (artigo convidado). Scientific American Brasil, São Paulo. Agosto, 2003.
- MELGAR; B. C. **Nosso universo como uma membrana**. Revista USP, São Paulo, n.62, p. 200-205, junho/agosto 2004.
- OLIVEIRA, K. de; SARAIVA, M. F.C.; FARINA, C.; TORT, A. **O Efeito Casimir** (The Casimir Effect). Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 22, no. 1, Março, 2000
- PINTO, M. V. C.; FARINA, C.; TORT, A. **O Efeito Casimir** (The Casimir Effect). Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 22, no. 1, Março, 2000.
- PIRES, A. S. T. **Evolução da Ideias da Física**. 1ª ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2008.
- ROVARIS. T. R. **O projeto epicurista antiaristotélico de Pierre Gassendi**. 2007. 134 f. Dissertação (Mestrado em Filosofia) - Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas, Programa de Pós Graduação em Filosofia, Universidade Federal da Bahia, Salvo-BA, 2007.
- SOBRINHO, J. J. P.; TORT, A.C. **Uma Introdução aos Métodos de Cálculo da Energia de Casimir**. Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 23, no. 4, Dezembro, 2001
- SOTO, C. A. T. **O Atomismo de Leucipo e Demócrito**. Revista Química Nova. Volume 15. nº1 Rio de Janeiro, 1992.
- SOUSA, L. J. S. **Localização de campos em branas isotrópicas e anisotrópicas em seis dimensões**. 2013. 107 f. Tese (Doutorado em Física) - Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza-CE, 2013.
- STEINHARDT, P. J. **A Brief Introduction to the Ekpyrotic Universe**. Princeton University [s. n.], 2001. Disponível em <<http://www.phy.princeton.edu/steinhardt>> Acesso em 29 de novembro de 2017.
- TOKATY, G. A. **The History and Philosophy of Fluid Mechanics**, Dover Publications, New York, 1994.
- ZEILLINGER, A. **A face oculta da natureza: o mundo novo da física quântica**. 1ª edição. São Paulo: Editora Globo, 2005.