



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ-UECE  
FACULDADE DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E LETRAS DE  
IGUATU-FECLI  
LICENCIATURA EM FÍSICA**

**MARCOS ANTONIO DE SOUZA SILVA**

---

**SOLUÇÃO ANALÍTICA DAS EQUAÇÕES DA CINÉTICA  
PONTUAL**

---

**IGUATU-CE  
2014**

Marcos Antonio de Souza Silva

## **SOLUÇÃO ANALÍTICA DAS EQUAÇÕES DA CINÉTICA PONTUAL**

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura Plena em Física da Faculdade de Educação, Ciências e Letras de Iguatu - FECLI como requisito parcial para obtenção do Título de Licenciado em Física.

Orientadora: Prof(a). Dr(a). Lázara Silveira Castrillo

Iguatu-CE  
Agosto de 2014

S586s

Silva, Marcos Antonio de Souza.

Solução Analítica das Equações da Cinética Pontual. / Marcos Antonio de Souza Silva. [Orientado por] Dr(a). Lázara Silveira Castrillo – Iguatu: 2014.

39 p.

Monografia (Graduação) – Universidade Estadual do Ceará, Coordenação do Curso de Licenciatura Plena em Física, Iguatu, 2014.

1. Reator 2. Cinética Pontual 3. Reatividade

I. Castrillo, Lázara Silveira (Orient.) II. Universidade Estadual do Ceará – UECE – Graduação (Licenciatura) em Física  
III. Título

CDD: 531.113

MARCOS ANTONIO DE SOUZA SILVA

SOLUÇÃO ANALÍTICA DAS EQUAÇÕES DA CINÉTICA PONTUAL

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura Plena em Física da Faculdade de Educação, Ciência e Letras de Iguatu - FECLI como requisito parcial para obtenção do Título de Licenciado em Física.

Aprovada em 8 de agosto de 2014

BANCA EXAMINADORA

*L. Silveira*

---

Orientadora: Prof(a). Dr(a). Lázara Silveira Castrillo  
Universidade Estadual do Ceará - UECE

*Célio Rodrigues Muniz*

---

Prof. Dr. Célio Rodrigues Muniz  
Universidade Estadual do Ceará - UECE

*Leonardo Tavares de Oliveira*

---

Prof. Ms. Leonardo Tavares de Oliveira  
Universidade Estadual do Ceará - UECE

A Deus senhor que conduz meus passos.  
A toda minha família, pelo seu apoio,  
incentivo e especialmente a minha esposa Graça  
Moura de Souza, por toda sua compreensão,  
companheirismo e seu amor.

# *Agradecimentos*

A Deus, por ter me guiado em toda essa trajetória e nunca me permitindo fraquejar diante das dificuldades, cansaço e momentos difíceis, por isso toda honra e glória é dele.

A minha família, pelo amor, carinho, apoio e paciência, e em especial a minha mãe, Dulcimar David de Souza e meu pai, José Gomes da Silva pelo companheirismo durante mais essa grande realização.

A minha querida esposa Graça Moura de Souza, pelo seu amor, a sua compreensão, seu companheirismo, as palavras motivadoras e todo seu apoio que foram fundamental para a realização desse trabalho.

A todos os meus professores que ao longo do curso contribuíram com ensinamentos e lições, que mim possibilitaram chegar até aqui.

A minha orientadora, Prof(a). Dr(a). Lázara Silveira Castrillo, por estar sempre disposta a ajudar-me nos momentos em que eu mais precisava, pelo seu comprometimento com esse trabalho e seus conselhos valiosos para que essa pesquisa pudesse ser realizada.

Aos meus amigos e colegas de curso que sem dúvida vieram todos a contribuir na minha formação compartilhando momentos felizes e de dificuldades.

“A dúvida é o princípio da sabedoria.”

(Aristóteles)

# *Resumo*

Durante a operação de um reator nuclear, seja ele crítico ou subcrítico, é fundamental conhecermos os parâmetros do núcleo do reator, principalmente a variação da potência nuclear. Um dos cálculos mais importantes da Física de Reatores é a determinação da relação funcional entre a reatividade inserida e a potência gerada. Conhecida a forma da reatividade, é possível determinar a variação temporal da potência do reator. Um método largamente utilizado para tal finalidade é a solução das equações da cinética pontual, as quais fornecem resultados bastante satisfatórios em curtos intervalos de tempo. No caso particular de inserção de reatividade constante, as equações da cinética pontual possuem uma solução analítica exata. Apesar de a cinética pontual fornecer solução analítica exata para o caso em que a reatividade é constante, isso não vem a ocorrer em outros casos como, por exemplo, o caso em que a reatividade inserida varia linearmente com o tempo, sendo necessárias algumas simplificações para obter soluções aproximadas, o que pode levar a perda de informações ou mesmo da realidade física do problema. Este trabalho tem como objetivo verificar uma dessas soluções a partir de aproximações feitas na equação de difusão de nêutrons, para as equações da cinética pontual, assim como analisar graficamente os resultados encontrados.

**Palavras-chaves:** Reator, Cinética Pontual, Reatividade.



# *Abstract*

During the operation of a nuclear reactor, when it critical or subcritical, it is important we know the parameter settings of the reactor core, especially the variation of the nuclear power. One of the most important reactor physics calculations is to determine the functional relation between reactive power generated and inserted. Made known reactivity, it is possible to determine the temporal variation of the reactor power. A common method used for this purpose is the solution of the point kinetics equations, which provide very satisfactory results in short time intervals. In the special case of constant reactivity, the point kinetics equations have an exact solution. Although the point kinetics provides accurate analytical solution for the case where the reactivity is constant, it does not occur in other cases such as that one where the inserted reactivity varies linearly with time, some approximations are needed to obtain solutions of the problem. This work aims to determine a solution, from approximations made in the neutron diffusion equation, to the point kinetics equations as well as graphically analyze the results.

**Keywords:** Reactor, Kinetics Equations Spot, Reactivity.

## *Lista de Figuras*

- 1 *Reação nuclear de fissão de urânio por nêutrons térmicos autossustentada.* . . p. 18
- 2 *Determinação gráfica das raízes da equação da reatividade para  $Th^{232}$*  . . . p. 32
- 3 *Determinação gráfica das raízes da equação da reatividade para  $U^{233}$*  . . . . p. 33
- 4 *Determinação gráfica das raízes da equação da reatividade para  $U^{235}$*  . . . . p. 35

# *Sumário*

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	p. 10
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTOS TEÓRICOS</b>	p. 12
2.1	Interação do Nêutron com a matéria . . . . .	p. 12
2.2	Fissão Nuclear . . . . .	p. 15
2.3	Ciclo de Nêutrons e Fator de Multiplicação . . . . .	p. 15
2.4	Reatividade . . . . .	p. 19
<b>3</b>	<b>EQUAÇÕES DA CINÉTICA PONTUAL</b>	p. 20
3.1	Equação geral da difusão de nêutrons . . . . .	p. 20
3.2	A equação de difusão de nêutrons monoenergéticos com nêutrons atrasados . . . . .	p. 22
3.3	Obtenção das equações da cinética pontual . . . . .	p. 24
3.4	Solução analítica . . . . .	p. 28
<b>4</b>	<b>Resultados</b>	p. 31
4.1	Resultados obtidos . . . . .	p. 31
<b>5</b>	<b>Considerações Finais</b>	p. 37
	<b>Referências Bibliográficas</b>	p. 38

# *1 Introdução*

O constante crescimento da demanda mundial por energia e os esforços para garantir o seu suprimento, juntamente com o aquecimento global, têm impulsionado o desenvolvimento da indústria e da pesquisa na área nuclear no Brasil e no mundo. Um dos principais enfoques da pesquisa na área nuclear é o estudo da evolução da população de nêutrons em sistemas nucleares, o que é um grande desafio tanto da física quanto da matemática e constitui um problema crucial no estudo e na análise de reatores nucleares. Nesse contexto, são de extrema importância a determinação e o acompanhamento do comportamento dessa população de nêutrons no período da criticalidade do reator.

De acordo com a literatura (DUDERSTADT; HAMILTON, 1976), para que um reator opere em nível de potência constante, a taxa de produção de nêutrons via reações de fissão deve ser igual à taxa de perda por absorções e fugas. Qualquer desvio desta condição implicará que a população neutrônica não se manterá constante, mudando com o tempo, e, portanto, também o fará o nível de potência do reator. Isto pode acontecer por uma série de fatores. Por exemplo, quando se deseja ligar ou desligar o reator, ou quando se deseja mudar o nível de potência em que o reator está funcionando, o que é muito frequente nas usinas geradoras de eletricidade; nesse caso a potência do reator variará ao longo do tempo e, conseqüentemente, a densidade e o fluxo de nêutrons. Ao estudo do comportamento de um reator cuja densidade e o fluxo variam com o tempo chama-se de cinética de reator.

Deve-se reconhecer que as mudanças no comportamento da população neutrônica, muitas vezes, não estão sob o controle do operador do reator. Em alguns casos, isso dependerá da composição do núcleo, que dependerá de outras variáveis que não estão diretamente acessíveis ao controle, como por exemplo a temperatura do combustível. Entretanto, essas variáveis dependem, por sua vez, do nível de potência do reator e, conseqüentemente, do fluxo de nêutrons. O estudo dessas causas intrínsecas do comportamento da população de nêutrons é chamado de dinâmica do reator nuclear (ALMARIO, 1984).

Dentro da teoria de difusão dos nêutrons, as equações que governam a dinâmica temporal e espacial da população de nêutrons são chamadas de equações da cinética.

As equações da cinética da teoria da difusão dividem-se em: equações da cinética pontual e equações da cinética espacial. As equações da cinética pontual envolvem exclusivamente a variação da amplitude do fluxo com o tempo, ou seja, assumem total separabilidade no tempo e no espaço, na qual a forma espacial do fluxo é conhecida, o que torna essas equações exclusivamente dependentes do tempo. O modelo da cinética pontual ainda tem um papel relevante em física de reatores na medida em que pode ser utilizado, para uma previsão de tempo quase real da potência do reator, o que permite um controle em tempo útil e de intervenção na planta, a fim de evitar a ocorrência de acidentes graves (HENRY, 1975). Quando as equações da cinética pontual têm coeficientes constantes, soluções analíticas são facilmente estabelecidas (GLASSTONE; EDLUND, 1966), mas elas tornam-se complicadas quando os coeficientes variam com o tempo.

Este trabalho tem como objetivo verificar uma solução, a partir de aproximações feitas na equação da difusão de nêutrons, para as equações da cinética pontual assim como analisar graficamente os resultados encontrados.

Para a solução das equações da cinética consideram-se seis grupos de precursores de nêutrons atrasados e assume-se a reatividade como uma função arbitrária do tempo.

A proposta deste trabalho é obter as raízes da equação da reatividade para os nêutrons de fissão  $Th^{232}$ ,  $U^{233}$  e  $U^{235}$ , assim como analisar graficamente o comportamento da reatividade para os elementos citados acima.

Dentro desse contexto o desenvolvimento de métodos que possam prever a população neutrônica no núcleo do reator com eficiente precisão e confiabilidade, soluções analíticas são necessárias. A motivação por trás do desenvolvimento de métodos analíticos para resolver as equações de física nuclear não é apenas o desafio de desenvolver um conjunto de equações diferenciais acopladas, mas também uma necessidade real para verificar o desempenho e avaliar a segurança de reatores de potência, tanto dos que já estão em funcionamento quanto daqueles projetados para o futuro.

## 2 *FUNDAMENTOS TEÓRICOS*

### 2.1 Interação do Nêutron com a matéria

---

Pelo fato de não possuírem carga elétrica, nêutrons não interagem com a matéria através da força coulombiana. Como consequência, a presença de elétrons atômicos não altera a trajetória ou a energia cinética de nêutrons que incidem em um meio material. Esta característica faz com que os nêutrons sejam bastante penetrantes. A única maneira pela qual nêutrons perdem energia cinética ao atravessarem um meio material é através de fenômenos decorrentes de interações com núcleos atômicos. A classificação destes fenômenos pode ser feita através da seguinte formulação geral simplificada (BARROSO, 2009).



onde  $n$  é o nêutron incidente,  $X$  é o núcleo - alvo,  $Y$  é um núcleo - produto e  $g$  é um sub-produto de interação. Dependendo da natureza de  $g$ , o fenômeno será:

a) espalhamento elástico ( $g$  é um nêutron e a energia cinética total do sistema nêutron incidente + núcleo - alvo se conserva);

b) espalhamento inelástico ( $g$  é um nêutron, a energia cinética total do sistema nêutron incidente + núcleo - alvo não se conserva e o núcleo - alvo é elevado a estados excitados);

c) captura ( $g$  é uma ou mais partículas carregadas pesadas : partículas  $\alpha$ , prótons, dêuterons, etc.);

d) captura radiativa ( $g$  é um raio - gama );

e) emissão de nêutrons ( $g$  é dois ou mais nêutrons);

f) fissão ( $g$  é um núcleo atômico mais dois ou três nêutrons).

Para um determinado tipo de núcleo-alvo, as probabilidades relativas de ocorrência

destes fenômenos mudam drasticamente com a energia cinética  $E$  dos nêutrons incidentes, classificados como muito rápidos ( $15\text{MeV} < E \leq 50\text{MeV}$ ), rápidos ( $0,1\text{MeV} < E \leq 15\text{MeV}$ ), intermediários ( $1\text{keV} < E \leq 100\text{keV}$ ), epitérmicos ( $1\text{eV} \leq E \leq 1\text{keV}$ ) e térmicos ( $E < 1\text{eV}$ ). Entretanto, para efeito de uma descrição geral dos fenômenos mencionados no parágrafo anterior, será adotada uma classificação bastante simplificada referente aos nêutrons, considerando-se como rápidos ou lentos os nêutrons cuja energia cinética é respectivamente maior ou menor que  $0,5\text{eV}$ .

Na interação de nêutrons lentos com núcleos atômicos, predominam os fenômenos de espalhamento elástico, captura radiativa e captura. A perda de energia cinética por intermédio do espalhamento elástico faz com que os nêutrons entrem em equilíbrio térmico com o meio material, possibilitando que outro fenômeno (por exemplo, captura, caso a reação nuclear correspondente seja exotérmica) venha então a ocorrer. Estas reações são de grande relevância na detecção de nêutrons, pois os produtos designados por  $g$  na formulação geral (2.1) podem ser detectados diretamente. Para um grande número de materiais, o fenômeno de captura radiativa é aquele que apresenta maior probabilidade de ocorrência, constituindo a base da construção de blindagens para nêutrons lentos.

A probabilidade de ocorrência dos fenômenos de captura radiativa diminui muito quando se trata da interação de nêutrons rápidos com núcleos atômicos, predominando os fenômenos de espalhamento elástico e espalhamento inelástico. No espalhamento elástico de nêutrons rápidos, parcela considerável da energia cinética inicial dos nêutrons é transferida aos núcleos-alvo, os quais podem ser detectados como núcleos de recuo. No espalhamento inelástico de nêutrons rápidos, parte da energia cinética inicial dos nêutrons é consumida para levar o núcleo-alvo a um de seus estados excitados. A desexcitação do núcleo-alvo ocorre por emissão de um raio-gama. O fenômeno de espalhamento inelástico é de grande importância na construção de blindagens para nêutrons rápidos.

Caso especial constitui a interação de nêutrons muito rápidos ( $15\text{MeV} < E \leq 50\text{MeV}$ ) com núcleos intermediários e pesados, na qual o fenômeno predominante é a emissão de dois nêutrons através da reação  $(n, 2n)$ . Outros fenômenos decorrentes deste tipo de interação, embora menos prováveis, são espalhamento inelástico e espalhamento elástico.

Para nêutrons com uma energia cinética bem definida (monoenergéticos) incidindo em um núcleo atômico conhecido, a probabilidade de ocorrência correspondente a cada um dos fenômenos mencionados é uma constante. Esta probabilidade é denominada seção de choque  $\sigma$  (também usualmente designada como seção de choque microscópica), possui dimensão de área, sendo medida em unidades de barn ( $1\text{b} = 10^{-24}\text{cm}^2$ ).

A grandeza denominada seção de choque macroscópica  $\Sigma$  resulta da multiplicação da seção de choque  $\sigma$  pelo número  $N$  de núcleos atômicos por unidade de volume ( $cm^3$ ):

$$\Sigma = N \cdot \sigma \quad (2.2)$$

sendo que  $\Sigma$  possui a dimensão de  $cm^{-1}$ . A seção de choque macroscópica total resulta da soma das seções de choque correspondentes a cada um dos fenômenos mencionados ( espalhamento elástico -  $\Sigma_{ee}$  , espalhamento inelástico -  $\Sigma_{ei}$  , captura-  $\Sigma_c$  , captura radiativa -  $\Sigma_{cr}$  , emissão de nêutrons -  $\Sigma_{en}$  , fissão -  $\Sigma_f$  ) :

$$\Sigma_t = \Sigma_{ee} + \Sigma_{ei} + \Sigma_c + \Sigma_{cr} + \Sigma_{en} + \Sigma_f \quad (2.3)$$

e deste modo  $\Sigma_t$  fornece a probabilidade , por unidade de comprimento atravessado , de qualquer um destes fenômenos venha a ocorrer.

Um feixe paralelo monoenergético de nêutrons exibe uma atenuação exponencial característica ao atravessar um meio material. A análise apresentada a seguir supõe um feixe paralelo de geometria estreita na qual qualquer nêutron defletido, ainda que por um ângulo pequeno, é considerado removido do feixe. Uma vez que o número de nêutrons removidos do feixe em uma espessura  $x$  do meio material é proporcional à intensidade  $I(x)$  naquela espessura, à seção de choque macroscópica total  $\Sigma_t$  do meio material e à espessura incremental  $dx$ , a variação de intensidade do feixe em  $dx$  pode ser escrita como

$$dI(x) = -I(x) \cdot \Sigma_t dx \quad (2.4)$$

A integração da expressão (2.4) fornece o resultado

$$I(x) = I_0 e^{-\Sigma_t x} \quad (2.5)$$

onde  $I_0$  é a intensidade inicial do feixe paralelo monoenergético incidente.

O caminho livre médio  $\lambda$  é definido como a distância média percorrida por um nêutron no meio material antes de interagir com o núcleo atômico. O valor desta grandeza pode ser calculado como

$$\lambda = \frac{\int_0^{\infty} x e^{-\Sigma_t x} dx}{\int_0^{\infty} e^{-\Sigma_t x} dx} = \frac{1}{\Sigma_t} \quad (2.6)$$



para nêutrons lentos que incidem em materiais sólidos,  $\lambda$  é da ordem de 1 cm, enquanto para nêutrons rápidos  $\lambda$  perfaz geralmente dezenas de cm.

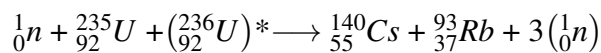
## 2.2 Fissão Nuclear

---

Dentre as reações que ocorrem no núcleo de um reator nuclear, a principal responsável pela autossustentabilidade do sistema é a fissão nuclear.

Na fissão nuclear, um nêutron incidente é absorvido pelo núcleo pesado, formando um núcleo composto excitado a uma energia acima da energia crítica necessária para que ocorra a fissão, e por isso o núcleo é dividido em dois grandes fragmentos. Além disso, alguns nêutrons são emitidos nesse processo, bem como uma quantidade de energia em forma de radiação gama (BARROSO, 2009).

Um exemplo típico de uma reação de fissão é mostrado a seguir:



A energia gama liberada, mais a energia cinética dos nêutrons liberados e dos produtos de fissão podem ser aproveitadas, e no caso dos reatores nucleares de fissão em cadeia, os nêutrons liberados são aproveitados para manter a cadeia autossustentada.

## 2.3 Ciclo de Nêutrons e Fator de Multiplicação

---

Para que um reator nuclear possa operar em regime autossustentável, ou seja, a reação de fissão em cadeia é autossustentada, é preciso que exatamente um nêutron seja produzido por fissão, que poderá então induzir uma nova fissão. Isso quer dizer que uma fissão precisa levar a outra e neste caso o número de fissões por unidade de tempo será constante (LAMARSH, 1966).

Entretanto, há variáveis que podem interferir na população de nêutrons no núcleo do reator. As interações do nêutron com a matéria podem ocorrer logo após sua geração na fissão, podendo o nêutron ser absorvido por algum dos materiais presentes no sistema, ou ainda escapar do núcleo sem interagir.

Resumidamente, pode-se dizer que a população de nêutrons no núcleo de um sistema de fissão em cadeia se comporta da seguinte forma:

Acumulação = produção - absorção - escape

Quando a acumulação de nêutrons é nula, ou seja, a população de nêutrons é estável, diz-se que o reator está crítico. Essa condição pode acontecer a qualquer taxa de fissão, ou nível de potência, desde que a produção e perda de nêutrons sejam iguais.

O sistema é considerado supercrítico quando a produção de nêutrons é maior que a perda, sendo que neste caso há um aumento na potência e subcrítico na situação oposta, quando há diminuição da potência.

A relação entre a produção e a perda de nêutrons é chamada de fator de multiplicação. Esse fator descreve a tendência em que se encontra a população de nêutrons, que é dado por

$$k = \frac{\text{produção de nêutrons}}{\text{perda de nêutrons}}. \quad (2.7)$$

Onde as perdas consideradas são tanto devido às absorções quanto ao escape. Com isso, o valor de  $k$  descreverá o estado do reator como

$k = 1$  - Reator Crítico

$k < 1$  - Reator Subcrítico

$k > 1$  - Reator Supercrítico

Em um reator térmico, que utiliza  ${}^{235}_{92}\text{U}$  como combustível, o balanço neutrônico pode ser descrito da seguinte forma:

A partir da fissão de um núcleo de  ${}^{235}_{92}\text{U}$  ocasionada por um nêutron térmico, uma quantidade  $\nu$  de nêutrons rápidos é emitida. Uma fração  $\nu$  de nêutrons rápidos pode causar fissão ao interagir com núcleos de  ${}^{238}_{92}\text{U}$ , além de uma fração no núcleo no  ${}^{235}_{92}\text{U}$ , e por isso essa grandeza é chamada de fração de fissão rápida. Dessa forma,  $\nu \epsilon$  nêutrons difundem-se no reator, entre o combustível, moderador e materiais estruturais. Uma parcela  $L_{ft}$  desses nêutrons escapa ainda antes de ser moderada, e outra parcela  $P$  pode ser capturada pelo  ${}^{238}_{92}\text{U}$  e formar o  ${}^{239}_{92}\text{U}$ , que em seguida decairá para o  ${}^{239}_{93}\text{Np}$ , e depois para o  ${}^{239}_{94}\text{Pu}$ , e essa grandeza é chamada de probabilidade da ressonância.

Após a moderação, alguns nêutrons podem escapar do sistema, sendo essa parcela  $I_t$ . Então, dos nêutrons que são moderados e não escapam, uma fração  $f$ , chamada de fração de utilização térmica, é absorvida pelo urânio, sendo que agora temos um balanço de nêutrons equivalente a  $\eta \nu (1 - I_f) p (1 - I_t) f$ . Entretanto, nem todos os nêutrons absorvidos pelo o

urânio provocam fissões, uma vez que mesmos os nêutrons térmicos podem ser absorvidos pelo  ${}_{92}^{238}\text{U}$ , resultando no  ${}_{94}^{239}\text{Pu}$ , conforme acontece com os nêutrons rápidos. Por isso, a fração de nêutrons térmicos absorvidos pelo urânio e que causa fissão será determinada pela razão entre as seções de choque de fissão e absorção de nêutrons térmicos no urânio, ou seja,  $(\sigma_f/\sigma_a)$ . Por simplicidade, teremos o produto  $\nu(\sigma_f/\sigma_a)$  chamado de  $\eta$

Portanto, devido a essas perdas, o fator de multiplicação pode ser escrito como fator de multiplicação efetivo, e expresso como

$$k_{ef} = \eta \nu p f (1 - I_f)(1 - I_t).$$

Onde

$\eta$  - Representa o número de nêutrons produzido na fissão por nêutron térmico absorvido no Urânio.

$\varepsilon$  - Fator de fissão rápida.

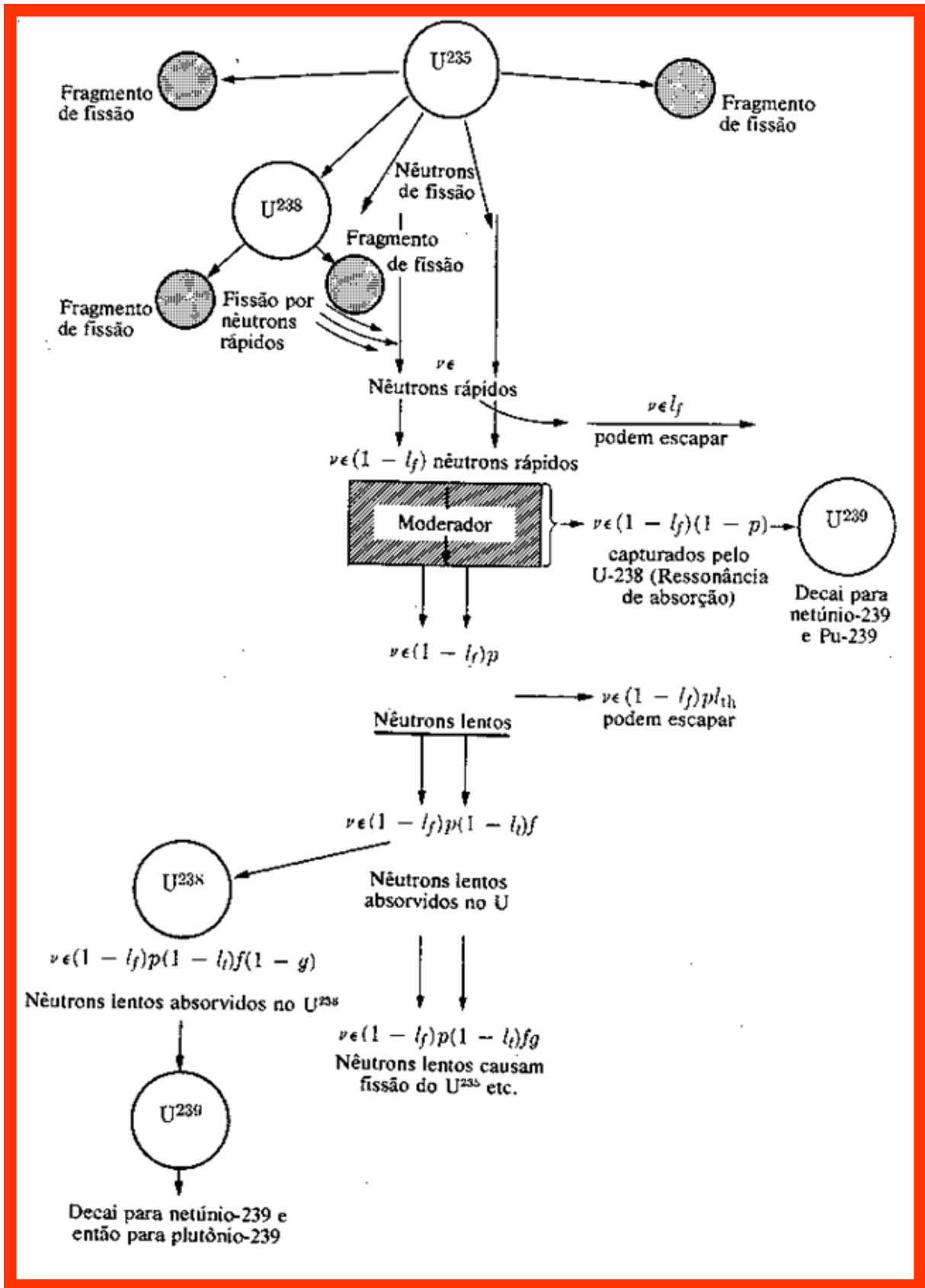
$p$  - probabilidade de ressonância.

$f$  - Utilização Térmica - Fração de nêutrons térmicos absorvidos pelo Urânio.

$I_f$  - Fração de nêutrons que escapam do reator antes de serem moderados e são perdidos.

$I_t$  - Fração de nêutrons que escapam do sistema mesmo após serem moderados e são perdidos.

Na Figura 1 é apresentado um esquema que representa um ciclo descrevendo o balanço neutrônico de uma reação em cadeia autossustentada de fissão de núcleos de Urânio.



**Figura 1:** Reação nuclear de fissão de urânio por nêutrons térmicos autossustentada. Figura obtida em (TERREMOTO, 2004).

## 2.4 Reatividade

---

O conceito de reatividade deve ser tratado com relevante cuidado, uma vez que esse é um parâmetro de suma importância no controle do reator. A reatividade descreve o desvio relativo do fator de multiplicação  $k$  de sua unidade (HETRICK, 1971). Em outras palavras, a reatividade representa o quanto diferente da unidade está o fator de multiplicação  $k$  sendo a criticalidade considerada a situação de estabilidade do fluxo de nêutrons no núcleo do reator. Essa relação é apresentada na equação abaixo :

$$\rho = \frac{k - 1}{k} \quad (2.8)$$

A reatividade ( $\rho$ ) depende de diversos fatores, como o tamanho do reator, a densidade e quantidade dos materiais contidos no sistema, assim como suas seções de choque para fissão, absorção, espalhamento, entre outros. Alguns desses fatores, como densidade e seção de choque são afetados pela alteração de outros fatores presentes no reator, como pressão e temperatura. Dessa forma, a reatividade depende também do histórico de potência do reator, ou seja, o estado de criticalidade num momento de medida depende do momento anterior (ALMARIO, 1984).

A reatividade é uma grandeza adimensional, por se tratar de um desvio relativo. É comum a utilização de algumas unidades atribuídas à reatividade, como o Dólar (\$), que equivale à reatividade de 0,0065 e o pcm, que representa uma parte por cem mil. A unidade pcm é comumente utilizada, sendo que 1pcm equivale à reatividade de  $1 \times 10^{-5}$ .

### 3 EQUAÇÕES DA CINÉTICA PONTUAL

Conforme a literatura (HENRY, 1975) , (GLASSTONE; EDLUND, 1966) e (DUDERSTADT; HAMILTON, 1976) as equações gerais que descrevem o comportamento, no tempo, dos nêutrons em um reator nuclear térmico são estabelecidas em termos da Teoria da Difusão de Nêutrons e são conhecidas como equações da cinética pontual.

No entanto, o controle do nível de potência num reator nuclear é um problema de engenharia muito importante, porém complexo. Matematicamente, este problema é, usualmente, considerado através da construção de modelos simplificados, que simulam, aproximadamente, os aspectos da realidade física (CARO, 1976).

#### 3.1 Equação geral da difusão de nêutrons

---

A equação da difusão de nêutrons na formulação de multigrupos é representada por:

$$\frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} \Phi_g(r,t) = \nabla \cdot [D_g(r) \nabla \Phi_g(r,t)] - \Sigma_{ag}(r) \Phi_g(r,t) - \Sigma_{sg}(r) \Phi_g(r,t) +$$

(3.1)

$$+ \sum_{g'=1}^G \Sigma_{sg',g}(r) \Phi_{g'}(r,t) + \chi_g \sum_{g'=1}^G v_{g'}(r) \Sigma_{fg'}(r) \Phi_{g'}(r,t) + S_s^{ext}$$

onde

$\Phi_g(r,t)$  é o fluxo escalar de nêutrons na posição  $r$  e no tempo  $t$  do grupo  $g$

$v_g$  é a velocidade dos nêutrons no grupo  $g$

$D_g(r)$  é o coeficiente de difusão na posição  $r$  do grupo  $g$

$\Sigma_{ag}(r)$  é a seção macroscópica de absorção de nêutrons do grupo  $g$  na posição  $r$

$\Sigma_{sg}(r)$  é a seção de choque macroscópica de espalhamento de nêutrons do grupo  $g$  para um grupo  $g'$ , diferente de  $g$ , na posição  $r$

$\Sigma_{sg \cdot g}(r)$  é a seção de choque macroscópica de espalhamento de nêutrons do grupo  $g'$  para o grupo  $g$  na posição  $r$

$\chi_g$  é a fração de nêutrons que aparecem no grupo  $g$

$\nu_{g'}(r)$  é o número médio de nêutrons emitidos na fissão no grupo  $g'$  e na posição  $r$

$\Sigma_{fg'}(r)$  é a seção macroscópica de fissão de nêutrons do grupo  $g'$  na posição  $r$

$S_s^{ext}$  é a fonte externa

Se considerarmos somente um grupo de energia e a ausência de fonte externa, a equação (3.1) assume a forma simplificada:

$$\frac{1}{\nu_g} \frac{\partial}{\partial t} \Phi_g(r,t) = \nabla \cdot D(r) \nabla \Phi(r,t) - \Sigma_a(r) \Phi(r,t) + \nu(r) \Sigma_f(r) \Phi(r,t) \quad (3.2)$$

$\Sigma(r,t)$  é o fluxo escalar de nêutrons na posição  $r$  e no tempo  $t$

$(\nu)$  é a velocidade dos nêutrons

$D(r)$  é o coeficiente de difusão na posição  $r$

$\Sigma_a(r)$  é a seção de choque macroscópica de absorção de nêutrons do grupo  $g$  na posição  $r$

$\nu(r)$  é o número médio de nêutrons emitidos na fissão na posição  $r$

$\Sigma_f(r)$  é a seção de choque macroscópica de fissão de nêutrons na posição  $r$

Nas equações (3.1) e (3.2), foi assumido que o aparecimento de todos os nêutrons acontece ao mesmo tempo em que as fissões ocorrem. Este fato está representado, na equação (3.1), pelo termo

$$\chi_g \sum_{g'=1}^G \nu_{g'}(r) \Sigma_{fg'}(r) \Phi_{g'}(r,t) \quad (3.3)$$

e, na equação (3.2), pelo termo

$$\nu(r) \Sigma_f(r) \Phi(r,t) \quad (3.4)$$

Estes termos representam a taxa de produção de nêutrons por fissão. Contudo, na realidade, uma pequena fração de nêutrons vem não diretamente da fissão, mas do decaimento subsequente de produtos de fissão (precursores de nêutrons atrasados).

## 3.2 A equação de difusão de nêutrons monoenergéticos com nêutrons atrasados

Se  $\nu(r)$  é o número total de nêutrons emitidos por fissão na posição  $r$  e  $\beta_i$  a fração deste total que é emitida como nêutrons atrasados pelo precursor do grupo  $i$  na posição  $r$ , então  $\beta_i(r)\nu(r)$  é o número esperado de nêutrons atrasados na posição  $r$  por precursores do grupo  $i$ .

Se definimos

$$\beta(r) = \sum_i \beta_i(r) \quad (3.5)$$

então  $[1 - \beta(r)]\nu(r)$  é o número esperado de nêutrons prontos emitidos por fissão na posição  $r$ .

Há um grande número de isótopos dos produtos de fissão que decaem por emissão de nêutrons e, assim, são membros da família de precursores de nêutrons retardados. Para o propósito de modelar seu efeito na cinética de nêutrons, é suficiente agrupá-los em seis grupos ( $C_1, C_2, \dots, C_6$ ) de acordo com suas meia vidas. Valores típicos seram apresentados nas tabelas da seção de resultados.

Em cada grupo, os precursores de nêutrons atrasados decaem exponencialmente de acordo com sua meia-vida, que determina a taxa de emissão de nêutrons atrasados.

A concentração de precursores de nêutrons atrasados no  $i$ -ésimo grupo é representada por  $c_i(r, t)$  e  $\lambda_i$  é a correspondente constante de decaimento efetiva.

Assim, a equação (3.2), considerando os nêutrons atrasados torna-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} \Phi_g(r, t) = \nabla \cdot [D(r) \nabla \Phi(r, t)] - \Sigma_a(r) \Phi(r, t) + \\ + [1 - \beta(r)] \nu(r) \Sigma_f(r) \Phi(r, t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i c_i(r, t). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Além disso, precisamos das equações que governam as concentrações de nêutrons dos precursores. Para obtermos tais equações faremos o seguinte balanço para cada grupo:



variação da concentração do precursor = produção do precursor – decaimento do precursor

Mas a produção do precursor do  $i$ -ésimo grupo é dada por  $\beta_i(r)v(r)\Sigma_f(r)\Phi(r,t)$  e o decaimento do precursor do  $i$ -ésimo grupo é dada por  $\lambda_i c_i(r,t)$ . Segue que as equações que governam as concentrações dos precursores são

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}c_1(r,t) &= \beta_1 v(r)\Sigma_f(r)\Phi(r,t) - \lambda_1 c_1(r,t); \\ \frac{\partial}{\partial t}c_2(r,t) &= \beta_2 v(r)\Sigma_f(r)\Phi(r,t) - \lambda_2 c_2(r,t); \\ &\vdots \\ \frac{\partial}{\partial t}c_6(r,t) &= \beta_6 v(r)\Sigma_f(r)\Phi(r,t) - \lambda_6 c_6(r,t); \end{aligned} \quad (3.7)$$

que pode ser escritas na forma condensada

$$\frac{\partial}{\partial t}c_i = \beta_i v(r)\Sigma_f(r)\Phi(r,t) - \lambda_i c_i(r,t) \quad i = 1, 2, \dots, 6. \quad (3.8)$$

Como o nosso objetivo é construir as equações da cinética pontual, podemos considerar o domínio homogêneo de onde  $D(r) = D$ ,  $\Sigma_a(r) = \Sigma_a$ ,  $\Sigma_f(r) = \Sigma_f$ ,  $v(r) = v$ ,  $\beta(r) = \beta$  e  $\beta_i(r) = \beta_i$ . As equações (3.6) e (3.8) tornam-se

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(r,t) = D \nabla^2 \Phi(r,t) - \Sigma_a \Phi(r,t) + [1 - \beta] v \Sigma_f \Phi(r,t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i c_i(r,t)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t} c_i = -\lambda_i c_i(r,t) + \beta_i v \Sigma_f \Phi(r,t) \quad i = 1, 2, \dots, 6. \quad (3.9)$$

Podemos considerar

$$S = [1 - \beta] v \Sigma_f \Phi(r,t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i c_i(r,t) \quad (3.10)$$

como sendo a fonte de nêutrons prontos e atrasados. No caso estacionário, teremos que

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(r,t) = \frac{\partial}{\partial t} c_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad (3.11)$$

portanto

$$c_i(r,t) = \frac{\beta_i v \Sigma_f}{\lambda_i} \Phi(r,t). \quad (3.12)$$

### 3.3 Obtenção das equações da cinética pontual

Partindo das equações (3.9), a fim de chegarmos nas equações da cinética pontual, reescreveremos tais equações como:

$$\frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} \Phi_g(r,t) = L(\beta) \Phi(r,t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i c_i(r,t) \quad (3.13)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t} c_i = -\lambda_i c_i(r,t) + \beta_i v \Sigma_f \Phi(r,t) \quad i = 1, 2, \dots, 6.$$

onde o operador diferencial de segunda ordem  $L(\beta)$  é dado por

$$L(\beta) = D\nabla^2 - \Sigma_a + (1 - \beta) v \Sigma_f \quad (3.14)$$

As condições iniciais apropriadas para o sistema (3.13), envolvem a especificação do fluxo crítico de nêutrons e concentrações dos grupos dos precursores de nêutrons atrasados no tempo  $t = 0$ . As condições de contorno para o fluxo são consideradas como de fluxo escalar zero na fronteira, isto é, condições de Dirichlet homogêneas na fronteira do reator.

De (3.13),

$$\frac{\partial}{\partial t} c_i(r,t) = 0 \implies \beta v \Sigma_f \Phi(r,t) = \sum_{i=1}^6 \lambda_i c_i(r,t) \quad (3.15)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(r,t) = 0 \implies D\nabla^2 \Phi(r,t) - \Sigma_a \Phi(r,t) + v \Sigma_f \Phi(r,t) = 0,$$

ou seja, no regime crítico de funcionamento de um reator, o sistema (3.13) reduz-se à

$$L(0\Phi) = 0 \quad (3.16)$$

isto é, a equação de Helmholtz

$$\nabla^2 \Phi + B^2 \Phi = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (3.17)$$

$$\Phi = 0 \quad \text{em } \partial\Omega$$

na qual

$$B^2 = \frac{(v\Sigma_f - \Sigma_a)}{D} \quad (3.18)$$

é chamado de "buckling" do material.

Com a introdução do comprimento de difusão de nêutrons

$$L = \sqrt{\frac{D}{\Sigma_a}}, \quad (3.19)$$

e do fator de multiplicação infinita

$$K_\infty = \frac{v\Sigma_f}{\Sigma_a}, \quad (3.20)$$

relativo ao número de nêutrons produzidos por nêutrons absorvidos, a equação (3.17) pode ser escrita na forma

$$\nabla^2 \Phi + \frac{K_\infty - 1}{L^2} \Phi = 0 \quad (3.21)$$

Como as geometrias usuais para os núcleos dos reatores (barras, cilindros, esfera) possuem simetria, a equação (3.21) pode ser resolvida por separação de variáveis.

Para obtermos as equações da cinética pontual, expandiremos  $\Phi(r,t)$  e  $c_i(r,t)$  em série de autofunções:

$$\Phi(r,t) = v \sum_{j=1}^{\infty} n_j(t) \Psi_j(r) \quad (3.22)$$

e

$$c_i(r,t) = \sum_{j=1}^{\infty} c_{i,j}(t) \Psi_j(r), \quad i = 1, 2, \dots, 6. \quad (3.23)$$

onde  $\Psi_j(r)$  satisfaz a equação (3.17).

Como em (VILHENA, 1988), consideraremos somente o primeiro termo da série,

isto é,

$$\Phi(r,t) = \nu n_1(t)\Psi_1(r) = \nu n(t)\Psi_1(r) \quad (3.24)$$

e

$$c_i(r,t) = c_{i,1}(t)\Psi_1(r) = c_i(t)\Psi_1(r), \quad i = 1, 2, \dots, 6. \quad (3.25)$$

Substituindo (3.24) e (3.25) no sistema de equações (3.9) teremos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}n(t)\Psi_1(r) - D\nu n(t)\nabla^2\Psi_1(r) + \Sigma_a\nu n(t)\Psi_1(r) &= (1 - \beta)\nu\Sigma_f n(t)\Psi_1(r) + \\ &+ \sum_{i=1}^6 \lambda_i c_i(t)\Psi_1(r) \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\frac{d}{dt}c_i(t)\Psi_1(r) = -\lambda_i c_i(t)\Psi_1(r) + \beta_i \nu \Sigma_f \nu n(t)\Psi_1(r), \quad i = 1, 2, \dots, 6. \quad (3.27)$$

Isolando  $\frac{d}{dt}n(t)\Psi_1(r)$  na equação (3.26), obteremos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}n(t)\Psi_1(r) &= (1 - \beta)\nu\Sigma_f \nu n(t)\Psi_1(r) + D\nu n(t)\nabla^2\Psi_1(r) - \\ &- \Sigma_a\nu n(t)\Psi_1(r) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i c_i(t)\Psi_1(r) \end{aligned} \quad (3.28)$$

Utilizando que  $\Psi_1(r)$  satisfaz a equação (3.27) temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}n(t)\Psi_1(r) &= (1 - \beta)\nu\Sigma_f \nu n(t)\Psi_1(r) + D\nu n(t)(-B^2\Psi_1(r)) - \\ &- \Sigma_a\nu n(t)\Psi_1(r) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i c_i(t)\Psi_1(r) \end{aligned} \quad (3.29)$$

ou ainda, colocando em evidência o termo  $n(t)\Psi_1(r)$  teremos

$$\frac{d}{dt}\Psi_1(r) = [(1 - \beta)v\Sigma_f v - \Sigma_a v]n(t)\Psi_1(r) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i c_i \Psi_1(r). \quad (3.30)$$

Assim,

$$\frac{d}{dt}n(t) = [(1 - \beta)v\Sigma_f v - \Sigma_a v]n(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i c_i. \quad (3.31)$$

Se definirmos como em (DUDERSTADT; HAMILTON, 1976),

$$l = [v\Sigma_a(1 + L^2 B^2)]^{-1} \quad (3.32)$$

como sendo o tempo médio de vida do nêutron no reator e

$$K = \frac{v\Sigma_f/\Sigma_a}{1 + L^2 B^2} = \frac{K_\infty}{1 + L^2 B^2} \quad (3.33)$$

como sendo o fator de multiplicação efetivo, então

$$\frac{d}{dt}n(t) = [(1 - \beta)\frac{K}{l} - v(B^2 D + \Sigma_a)]n(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i c_i(t) \quad (3.34)$$

ou ainda,

$$\frac{d}{dt}n(t) = \frac{(1 - \beta)K - 1}{l}n(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i c_i \quad (3.35)$$

De forma análoga, colocando  $\Psi_1(r)$  em evidência, na equação (3.27), obteremos

$$\frac{d}{dt}c_i(t)\Psi_1(r) = [-\lambda_i c_i(t) + \beta_i v\Sigma_f v n(t)]\Psi_1(r) \quad i = 1, 2, \dots, 6. \quad (3.36)$$

que pode ser escrito como

$$\frac{d}{dt}c_i(t)\Psi_1(r) = [-\lambda_i c_i(t) + \beta_i \frac{K}{l} n(t)]\Psi_1(r), \quad i = 1, 2, \dots, 6. \quad (3.37)$$

Então

$$\frac{d}{dt}c_i(t) = -\lambda_i c_i(t) + \beta_i \frac{K}{l} n(t), \quad i = 1, 2, \dots, 6. \quad (3.38)$$

Neste ponto, introduziremos duas definições:

$$\Lambda = \frac{l}{K} \quad (3.39)$$

que é o tempo médio de geração entre o nascimento de nêutrons e a subsequência absorção induzindo fissão, e

$$\rho(t) = \frac{K(t) - 1}{K(t)} \quad (3.40)$$

que é a reatividade.

Isto permite reescrever as equações (3.35) e (3.38) como

$$\frac{d}{dt}n(t) = \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda}n(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i c_i(t) \quad (3.41)$$

$$\frac{d}{dt}c_i(t) = \frac{\beta_i}{\Lambda}n(t) - \lambda_i c_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, 6. \quad (3.42)$$

que são conhecidas como equações da cinética pontual.

Esse sistema de equações diferenciais ordinárias acopladas dependentes do tempo descreve o comportamento da população de nêutrons e o decaimento dos precursores de nêutrons atrasados. Segundo (DUDERSTADT; HAMILTON, 1976), este sistema não pode ser resolvido facilmente por métodos numéricos padrões como, por exemplo, os métodos de Runge-Kutta de quarta e sexta ordens. Esta dificuldade é caracterizada pela grande diferença nas escalas dos parâmetros, ou ainda, pela incompatibilidade de escalas do problema físico com o problema matemático. De acordo com (VILHENA, 1988), este problema é do tipo Stiff (rígidos) e técnicas mais sofisticadas são necessárias para se obter uma solução numérica satisfatória.

## 3.4 Solução analítica

---

Inicialmente supondo uma forma exponencial para o fluxo de nêutrons e para as concentrações de nêutrons retardados :

$$n(t) = A_0 e^{\omega t} \quad (3.43)$$

$$C_i(t) = C_{i0} e^{\omega t} \quad (3.44)$$

Substituindo as equações (3.43) e (3.44) na equação (3.42), obtém-se

$$C_{io}\omega e^{\omega t} = -\lambda_i C_{io} e^{\omega t} + \frac{\beta_i}{\Lambda} A_o e^{\omega t} \quad (3.45)$$

Simplificando resulta

$$C_{io} = \frac{\beta_i A_o}{\Lambda(\omega + \lambda_i)} \quad (3.46)$$

justamente como se esperava, as concentrações dos precursores são proporcionais à densidade dos nêutrons.

Substituindo (3.43) , (3.44) e (3.46) na equação (3.41) obtém-se

$$A_o \omega e^{\omega t} = \left[ \frac{\rho - \beta}{\Lambda} \right] A_o e^{\omega t} + \sum_{i=1}^6 \lambda_i \frac{\beta_i A_o}{\Lambda(\omega + \lambda_i)} e^{\omega t} \quad (3.47)$$

simplificando obtém-se

$$\omega = \left[ \frac{\rho - \beta}{\Lambda} \right] + \sum_{i=1}^6 \lambda_i \frac{\beta_i}{\Lambda(\omega + \lambda_i)} \quad (3.48)$$

isto é, uma equação algébrica em  $\omega$ . Pode-se resolver graficamente, para um conjunto de valores  $\lambda_i$  ,  $\beta_i$ .

Escrevendo a equação como

$$\Lambda \omega = \rho + \sum_{i=1}^6 \left( \lambda_i \frac{\beta_i}{\omega + \lambda_i} \right) - \beta \quad (3.49)$$

$$\Lambda \omega = \rho + \sum_{i=1}^6 \left( \frac{\lambda_i \beta_i - (\omega + \lambda_i) \beta_i}{\omega + \lambda_i} \right) \quad (3.50)$$

$$\Lambda \omega = \rho - \sum_{i=1}^6 \left( \frac{\omega \beta_i}{\omega + \lambda_i} \right) \quad (3.51)$$

Mas da equação (3.39) ,

$$\Lambda = \frac{l}{K} = l(1 - \rho) \quad (3.52)$$

então

$$\omega l(1 - \rho) = \rho - \sum_{i=1}^6 \left( \frac{\omega \beta_i}{\omega + \lambda_i} \right) \quad (3.53)$$

$$\rho(1 + \omega l) = \omega l + \sum_{i=1}^6 \left( \frac{\omega \beta_i}{\omega + \lambda_i} \right) \quad (3.54)$$

Assim

$$\rho = \frac{\omega l}{(1 + \omega l)} + \frac{1}{1 + \omega l} \sum_{i=1}^6 \left( \frac{\omega \beta_i}{\omega + \lambda_i} \right) \quad (3.55)$$

Desta forma obtém-se uma equação algébrica que relaciona o parâmetro  $\omega$  com a reatividade do reator. De acordo com (ALMARIO, 1984) a equação é de sétima ordem, devido ser considerado seis grupos de nêutrons deferidos. A natureza geral das soluções da equação (3.55) pode ser compreendida facilmente mediante um gráfico de  $\omega$  em função de  $\rho$ , como será mostrado na seção de resultados.



## 4 Resultados

### 4.1 Resultados obtidos

Os valores usados para o tempo de vida média para nêutrons rápidos é de  $10^{-4}seg$  e para térmicos é de  $10^{-7}seg$ .

As características do nuclídeo fissionável  $Th^{232}$  a partir da fissão rápida será mostrada na tabela a seguir:

$Th^{232}$

Grupo	Período(seg)	$\lambda(seg.^{-1})$	Nêutrons por fissão	$\beta_i$
1	56,03	0,0124	0,00169	0,000690
2	20,75	0,0334	0,00744	0,003045
3	5,74	0,121	0,00769	0,003147
4	2,16	0,321	0,02212	0,009054
5	0,571	1,21	0,00853	0,003492
6	0,211	3,29	0,00213	0,000873

A tabela abaixo mostra os valores das raízes da equação (3.55) para  $Th^{232}$ .

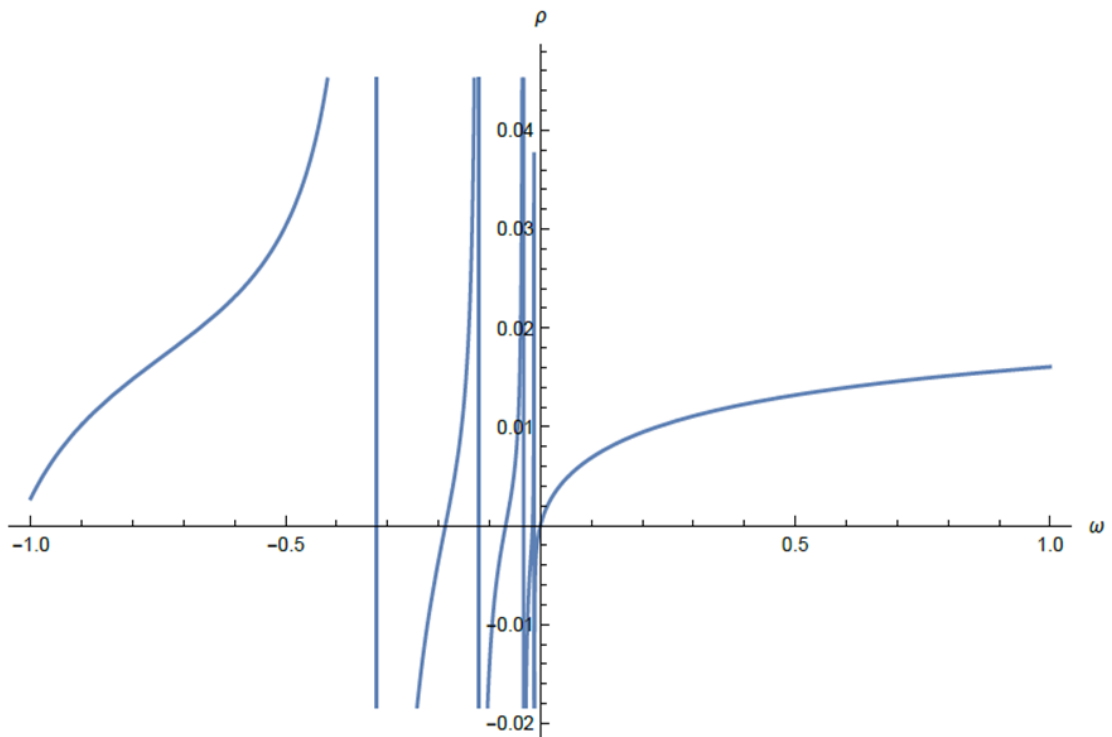
TABELA - Raízes da equação da reatividade para  $Th^{232}$

$\rho$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$	$\omega_6$	$\omega_7$
0	0.9925	-0.015	-0.0691	-0.1856	-0.03356	-0.06752	-0.06458

Análise gráfica para o  $Th^{232}$ :

O gráfico a seguir representa a função da reatividade que depende da população de nêutrons. Esta função é não linear.

Do gráfico podem ser retiradas as seguintes informações:



**Figura 2:** Determinação gráfica das raízes da equação da reatividade para  $Th^{232}$

A reatividade varia de  $-\infty < \rho < 0.016$ .

Temos que para  $\rho_0 = 0 \implies \omega_1 = 0.003528$ , implica que o reator está no estado crítico, com isso a população de nêutrons é dita estável.

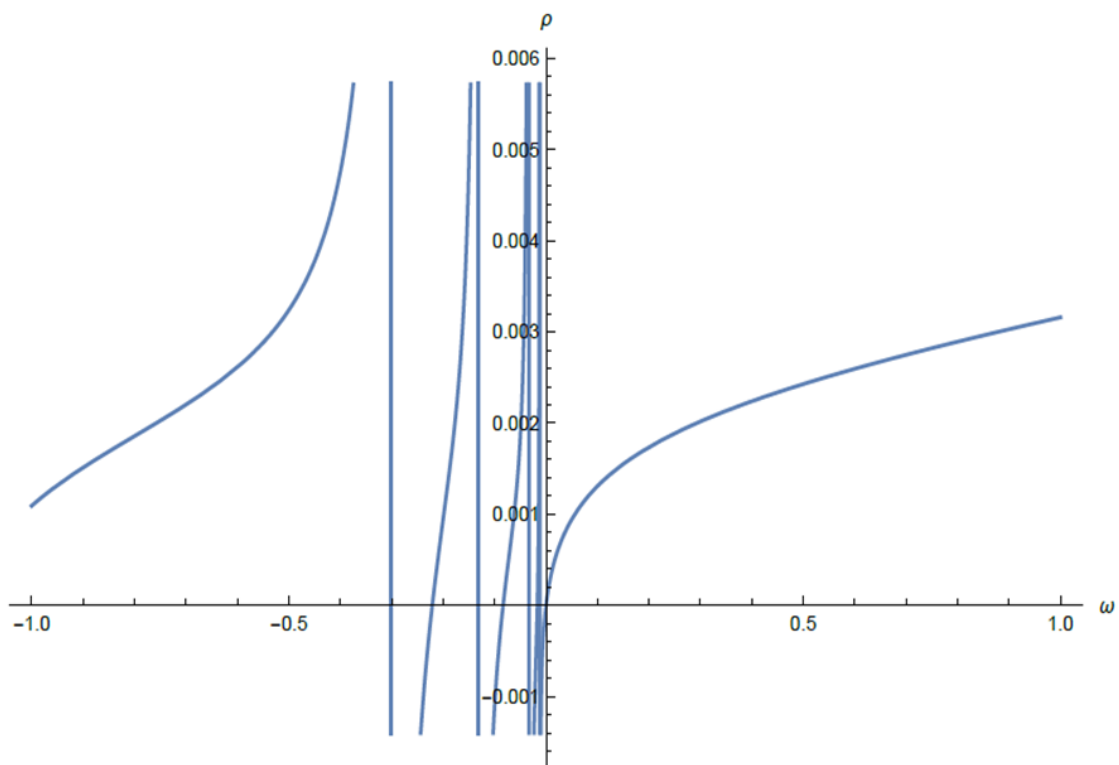
Quando  $\rho_0 \rightarrow 0.016 \implies \omega \rightarrow \infty$ , neste caso o reator está no estado supercrítico, isto é, o número de nêutrons está aumentando.

Quando  $\rho_0 \rightarrow -\infty \implies \omega_1 = -0.00115$ , com um erro relativo de 7,5%, cujo valor se aproxima a  $\lambda_1$ . Neste caso o reator é subcrítico, logo dizemos que o número de nêutrons está diminuindo.

As características do nuclídeo fissionável para  $U^{233}$  a partir da fissão rápida será mostrada na tabela a seguir:

$U^{233}$

Grupo	Período(seg)	$\lambda$ (seg. <sup>-1</sup> )	Nêutrons por fissão	$\beta_i$
1	55,11	0,0126	0,00060	0,000224
2	20,74	0,0334	0,00192	0,000712
3	5,30	0,131	0,00159	0,000590
4	2,29	0,302	0,00222	0,000824
5	0,546	1,27	0,00051	0,000190
6	0,221	3,13	0,00016	0,000060



**Figura 3:** Determinação gráfica das raízes da equação da reatividade para  $U^{233}$

A tabela abaixo mostra os valores das raízes da equação (3.55) para  $U^{233}$ .

TABELA - Raízes da equação da reatividade para  $U^{233}$ 

$\rho$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$	$\omega_6$	$\omega_7$
0	0.9882	-0.003142	-0.01212	-0.3546	-0.08393	-0.1288	-0.2168

Análise gráfica para o  $U^{233}$ :

O gráfico acima representa a função da reatividade que depende da população de nêutrons. Esta função é não linear.

Do gráfico podem ser retiradas as seguintes informações:

A reatividade varia de  $-\infty < \rho < 0.0316$

Temos que para  $\rho_0 = 0 \implies \omega_1 = 0.004259$ , implica que o reator está no estado crítico, com isso a população de nêutrons é dita estável.

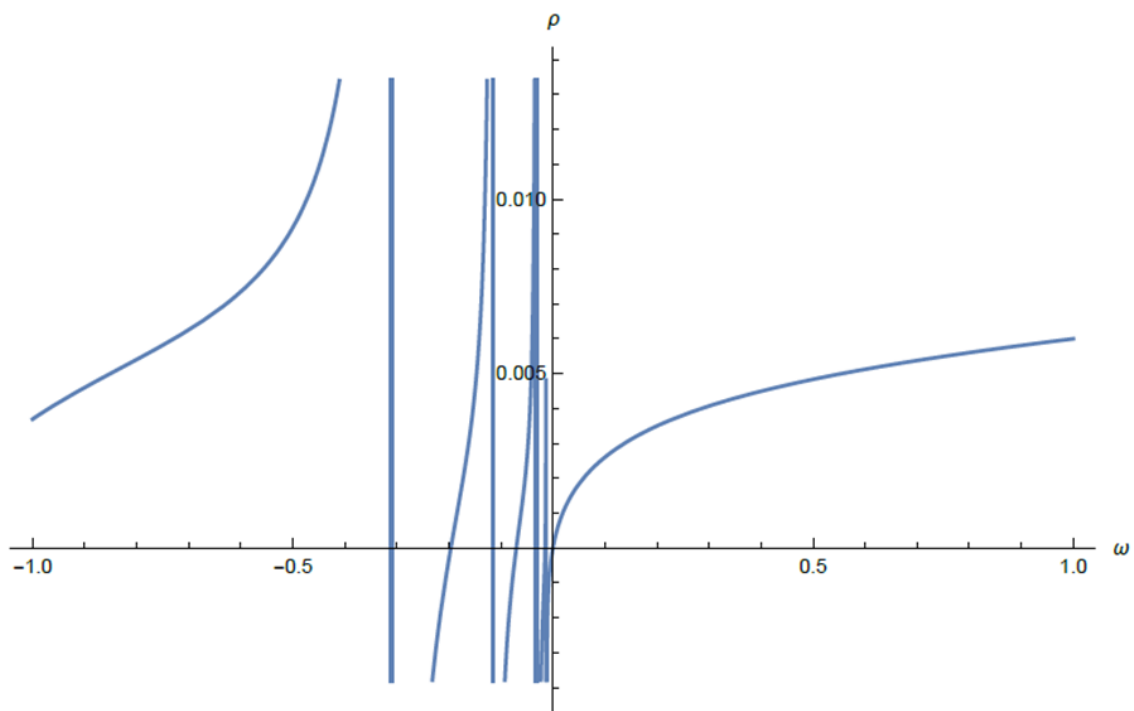
Quando  $\rho_0 \rightarrow 0.0316 \implies \omega \rightarrow \infty$ , neste caso o reator está no estado supercrítico, isto é, o número de nêutrons está aumentando.

Quando  $\rho_0 \rightarrow -\infty \implies \omega_1 = -0.01159$ , com um erro relativo de 7,5%, cujo valor se aproxima a  $\lambda_1$ . Neste caso o reator é subcrítico, logo dizemos que o número de nêutrons está diminuindo.

As características do nuclídeo fissionável para  $U^{235}$  a partir da fissão rápida será mostrada na tabela a seguir:

$U^{235}$

Grupo	Período(seg)	$\lambda$ (seg. <sup>-1</sup> )	Nêutrons por fissão	$\beta_i$
1	54,51	0,0127	0,00063	0,000243
2	21,84	0,0317	0,00351	0,001363
3	6,00	0,115	0,00310	0,001203
4	2,23	0,311	0,00672	0,002605
5	0,496	1,40	0,00211	0,000819
6	0,179	3,87	0,00043	0,000166



**Figura 4:** Determinação gráfica das raízes da equação da reatividade para  $U^{235}$

A tabela abaixo mostra os valores das raízes da equação (3.55) para  $U^{235}$ .

TABELA - Raízes da equação da reatividade para  $U^{235}$ 

$\rho$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$	$\omega_6$	$\omega_7$
0	0.99684	-0.015761	-0.01205	-0.01833	-0.0309	-0.0707	-0.03158

Análise gráfica para o  $U^{235}$ :

O gráfico acima representa a função da reatividade que depende da população de nêutrons. Esta função é não linear.

Do gráfico podem ser retiradas as seguintes informações:

A reatividade varia de  $-\infty < \rho < 0.006017$

Temos que para  $\rho_0 = 0 \implies \omega_1 = 0.0004996$ , implica que o reator está no estado crítico, com isso a população de nêutrons é dita estável.

Quando  $\rho_0 \rightarrow 0.006017 \implies \omega \rightarrow \infty$ , neste caso o reator está no estado supercrítico, isto é, o número de nêutrons está aumentando.

Quando  $\rho_0 \rightarrow -\infty \implies \omega_1 = -0.01083$ , com um erro relativo de 7,5%, cujo valor se aproxima a  $\lambda_1$ . Neste caso o reator é subcrítico, logo dizemos que o número de nêutrons está diminuindo.

## 5 *Considerações Finais*

A maneira mais simples de medida da reatividade, que pode ser executada, é através de uma pequena perturbação na composição do material do núcleo de um reator crítico, e então medir o período estável ou assintótico, resultante do transiente do reator. Usando a equação da reatividade, pode-se inferir o valor resultante da perturbação através de uma medida do período assintótico. Deve ser notado que o método do período assintótico, para todas as aplicações práticas só é válido para períodos positivos, desde que os períodos negativos são dominados pelo precursor de nêutrons diferidos com maior meia vida e conseqüentemente implica em baixa sensibilidade para reatividade negativa.

Analisando o comportamento da reatividade para os nêclídeos de fissão  $Th^{232}$ ,  $U^{233}$  e  $U^{235}$ , foi possível concluir que dentre as 7 raízes da equação (3.55), no caso de reatividade positiva, somente  $\omega_1$  será positiva, enquanto as outras seis raízes serão negativas. Portanto, caso desejamos conhecer a magnitude da reatividade positiva inserida basta que determinemos a dependência temporal da população de nêutrons e tomarmos o tempo como sendo muito grande. Assim obtemos o valor de  $\omega$  dominante, substituimos este resultado na equação (3.55) e está determinado o valor de reatividade,  $\rho$ , inserida no sistema.

## *Referências Bibliográficas*

- ALMARIO, Adalberto León. **Cinética y operación de Reactores Nucleares**. Havana: Editora Pueblo, 1984.
- BARROSO, Dalton Ellery G. **A Física dos Explosivos Nucleares**. São Paulo: Livraria da física, 2009.
- CARO, Rafael. **Física de Reactores Nucleares**. Madrid: Seccion de Publicaciones de la J.E.N., 1976.
- DUDERSTADT, James J.; HAMILTON, Louis J. **Nuclear Reactor Analysis**. New York: John Wiley and Sons, 1976.
- GLASSTONE, S.; EDLUND, M. **The Elements of Nuclear**. New York: Treory. D. Van Nostrnd, 1966.
- HENRY, Allan F. **Nuclear-Reactor Analysis**. Massachussetts: Mit Press, 1975.
- HETRICK, D. L. **Dynamics of nuclear Reactors**. Chicago ann London: The university of Chicago Press, 1971.
- LAMARSH, J. R. **Intrduction to Nuclear Reactor Theory**. Massachussetts: Addion-Wesley, 1966.
- TERREMOTO, Dr. Luí s Antonio Albiac. **Fundamentos de Tecnologia Nuclear de Reatores**. São Paulo: Instituto de Pesquisas Energtéticas e Nucleares (IPEN/CNEN-SP), 2004.
- VILHENA, M. T. **Estudo de difusão de nêutrons e calor dependente do tempo num reator nuclear a leito fluidizado. Tese de Doutorado**. Universidade Federal do Rio Grande do Sul -UFGS: Programa de Pós Graduação em Engenharia Meclânica, 1988.