



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ  
FACULDADE DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E LETRAS DE IGUATU  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA**

**FRANCISCO LUCAS CAVALCANTE BARRETO**

---

**GEOMETRIA DIFERENCIAL DE CURVAS APLICADA A  
DINÂMICA DE PARTÍCULAS**

---

**IGUATU-CE  
2015**

Francisco Lucas Cavalcante Barreto

**GEOMETRIA DIFERENCIAL DE CURVAS APLICADA A DINÂMICA DE PARTÍCULAS**

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura Plena em Física da Faculdade de Educação, Ciências e Letras de Iguatu - FECLI como requisito parcial para obtenção do Título de Licenciado em Física.

Orientador: Prof. Me. Leonardo Tavares de Oliveira

Iguatu-CE  
Abril de 2015



Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Estadual do Ceará  
Sistema de Bibliotecas

B273g

Barreto, Francisco Lucas Cavalcante.

Geometria Diferencial de Curvas Aplicada a Dinâmica de Partículas / Francisco Lucas Cavalcante Barreto. [Orientado por] Leonardo Tavares de Oliveira. – Iguatu, 2015.

48 p.

Monografia (Graduação) – Universidade Estadual do Ceará, Coordenação do Curso de Licenciatura Plena em Física, Iguatu, 2015.

1. Dinâmica 2. Geometria Diferencial 3. Aplicações da Geometria a Física

I. Oliveira, Leonardo Tavares de (Orient.) II. Universidade Estadual do Ceará – UECE – Graduação (Licenciatura) em Física  
III. Título

CDD: 531.163

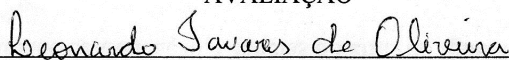
FRANCISCO LUCAS CAVALCANTE BARRETO

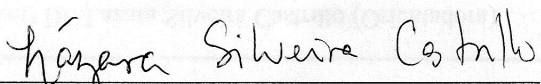
GEOMETRIA DIFERENCIAL DE CURVAS APLICADA À DINÂMICA DE  
PARTÍCULAS

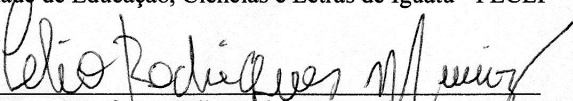
Monografia submetida à coordenação do curso de licenciatura em Física da Universidade Estadual do Ceará – Faculdade de Educação, Ciências e Letras do Iguatu. Como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Física.

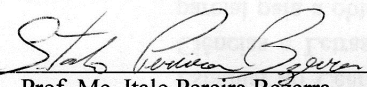
Aprovado em 30/04/15

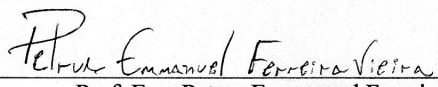
AVALIAÇÃO

  
Prof. Ms. Leonardo Tavares de Oliveira (Orientadora)  
Universidade Estadual do Ceará – UECE  
Faculdade de Educação, Ciências e Letras de Iguatu – FECLI

  
Prof.ª Dr. Lázara Silveira Castrillo  
Universidade Estadual do Ceará – UECE  
Faculdade de Educação, Ciências e Letras de Iguatu - FECLI

  
Prof. Dr. Célio Rodrigues Muniz  
Universidade Estadual do Ceará – UECE  
Faculdade de Educação, Ciências e Letras de Iguatu - FECLI

  
Prof. Me. Italo Pereira Bezerra  
Universidade Estadual do Ceará – UECE  
Faculdade de Educação, Ciências e Letras de Iguatu – FECLI

  
Prof. Esp. Petrus Emmanuel Ferreira Vieira  
Universidade Estadual do Ceará – UECE  
Faculdade de Educação, Ciências e Letras de Iguatu - FECLI

# *Resumo*

O domínio matemático, inclusive a geometria diferencial de curvas, é essencial para uma compreensão adequada dos conceitos e teorias físicas. Essa disciplina tem se mostrado muito útil em diversas aplicações que se estendem desde a mecânica clássica à física contemporânea, permitindo equacionar de forma mais simples problemas um tanto complicados usando a metodologia tradicional. Nesse trabalho será apresentado inicialmente uma abordagem a respeito da dinâmica, a evolução histórica do conceito de força e alguns tipos de forças. Sendo em seguida demonstrado as propriedades básicas da geometria diferencial de curvas, tais como torção e curvatura. Além disso, será descrito as relações entre aplicações envolvendo dinâmica de partículas e a geometria diferencial.

**Palavras-chaves:** Dinâmica, Geometria diferencial, Aplicações da geometria a física.

# *Abstract*

The mathematical domain, including the differential geometry of plane curves, and a paragraph essential proper understanding of the concepts and physical theories. This discipline has proven very useful in various applications that extends from classical mechanics to modern physics, allowing equate so simplest problems hum so complicated using traditional methodology. In this work will be presented initially an approach to respect the dynamics, the historical evolution of the force concept and some Types of forces. Being in next shown as basic properties of differential geometry of plane curves, Such As torsion and bending. After that step describe relations between dynamic applications involving particles ea differential geometry.

**Keywords:** Dynamics, differential geometry, Geometry of the physical applications.

## *Lista de Figuras*

1	<i>Aristóteles</i> . . . . .	p. 13
2	<i>Antiperistasis</i> . . . . .	p. 14
3	<i>Experimento de Leibniz</i> . . . . .	p. 17
4	<i>Isaac Newton</i> . . . . .	p. 18
5	<i>Hélice</i> . . . . .	p. 31
6	<i>Reparametrização</i> . . . . .	p. 33



# *Sumário*

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	p. 10
<b>2</b>	<b>Dinâmica</b>	p. 12
2.1	A Evolução do Conceito de Força na Mecânica . . . . .	p. 12
2.2	Isaac Newton . . . . .	p. 18
2.3	As Leis de Newton . . . . .	p. 19
2.3.1	Lei da Inércia . . . . .	p. 19
2.3.2	Princípio Fundamental da Dinâmica . . . . .	p. 20
2.3.3	Lei da Ação e Reação . . . . .	p. 23
2.4	Alguns Tipos de Força . . . . .	p. 25
2.4.1	Forças que Dependem da Velocidade . . . . .	p. 26
2.4.2	Força Central . . . . .	p. 27
2.4.3	Força Eletromagnética . . . . .	p. 27
<b>3</b>	<b>Elementos da Geometria Diferencial de Curvas</b>	p. 29
3.1	Curvas Parametrizadas . . . . .	p. 29
3.2	Curvatura e Torção . . . . .	p. 35
3.3	Fórmulas de Frenet . . . . .	p. 39
<b>4</b>	<b>Aplicações à Dinâmica</b>	p. 41
4.1	Relação Entre as Grandezas Dinâmicas e a Curvatura . . . . .	p. 41
4.2	Relação Entre as Grandezas Dinâmica e a Torção . . . . .	p. 43
4.3	Forças que Produzem Somente Trajetórias Planas . . . . .	p. 44

4.3.1	Força Independente da Velocidade . . . . .	p.44
<b>5</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>p.48</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>p.49</b>

# *1 Introdução*

A matemática é a principal ferramenta no desenvolvimento e entendimento das teorias físicas. No entanto, mesmo assim há alguns artifícios que podem facilitar a compreensão dessas teorias que quase não são abordados nos livros básicos de graduação. Desse modo, esses artifícios se tornam desconhecido por parte dos graduandos. Um exemplo é a relação entre a geometria diferencial de curvas e a física, cujo o conhecimento a respeito da mesma facilita a concepção de diversos problemas e teorias físicas que vão desde a física clássica à contemporânea.

A geometria diferencial de curvas no espaço tridimensional, por se só é uma disciplina encantadora devido ao seu belo aparato matemático, entretanto, sua importância é mais ampla, visto que o seu estudo de forma aprofundada está sendo de grande importância para o desenvolvimento da física teórica contemporânea como no estudo do desenvolvimento de partículas elementares, além de suas outras extensões à física.

Este trabalho trata de uma revisão bibliográfica e devido a vastidão de aplicações da geometria diferencial, nos restringiremos ao estudo dessa disciplina na mecânica do espaço tridimensional. Procuramos estabelecer aqui um equilíbrio entre os aspectos históricos, conceituais e formais e perante o nosso foco de estudo temos como objetivo principal evidenciar as relações entre a geometria diferencial de curvas e conceitos físicos de dinâmica de partículas. E em sua especificidade, realizar uma abordagem histórica e conceitual da dinâmica, mostrar algumas características da geometria diferencial de curvas e aplicar este conhecimento matemático à dinâmica de uma partícula.

Inicialmente iremos realizar uma revisão da dinâmica, que será útil para o entendimento dos capítulos que se seguem, onde abordaremos o processo evolutivo do conceito de força até a formulação proposta por Isaac Newton, assim como demonstraremos também neste capítulo alguns tipos de forças encontradas na natureza.

No capítulo seguinte, iremos realizar uma abordagem da geometria diferencial de curvas no espaço tridimensional, sobretudo alguns conceitos essenciais para o desenvolvimento

---

do trabalho, tais como: reparametrização, curvatura, torção e triedro de Serret-Frenet. A partir de então, não se torna viável estender o assunto tratado ao nível médio, uma vez que a matemática aqui utilizada não faz parte da realidade do cotidiano desse aluno.

Para finalizar iremos estabelecer relações entre a dinâmica newtoniana e alguns conceitos geométricos abordados no capítulo anterior. Além disso, iremos equacionar de forma relativamente simples problemas que seriam um tanto obscuros caso fosse empregado o formalismo convencional.

## 2 *Dinâmica*

Dinâmica é o ramo da física que estuda as causas do movimento. Seus princípios básicos foram desenvolvidos ao longo de séculos até serem concretizados por Galileu Galilei e Isaac Newton, ao formalizarem conceitualmente e matematicamente o termo "força", que é a ação responsável por afetar o estado de movimento dos corpos, e ao elaborarem leis e princípios que regem as causas do movimento.

### 2.1 A Evolução do Conceito de Força na Mecânica

---

A evolução do conceito de força foi um processo lento, construído gradativamente e amplamente discutido ao longo de quase toda a história da ciência, pelos europeus e árabes, tendo início na Grécia e antiga estendendo-se durante toda a Idade Média, sendo necessário mais de dois mil anos de discussões, aprimoramentos e formação de conceitos até que Isaac Newton a definiu de forma correta.

Os primeiros a tentarem explicar esse conceito físico foram os gregos, sobretudo Heráclito (576-480 a.C.). Ele pregava que por trás de todo equilíbrio existe uma batalha entre tensões ou "forças" opostas. Já seu sucessor, Empédocles (492-432 a.C.) afirmava que todos os fenômenos, inclusive o movimento, ocorre pela ação de duas forças básicas a "força amor" (atração) que aproxima os corpos e a "força ódio" que os afastam. Empédocles foi o primeiro a propor uma explicação entre as causas do movimento através das forças.

Para Platão (428-347 a.C.), a realidade física era composta de movimento porque a natureza tinha uma alma viva e imortal. As particularidades dos seres deveriam advir de forças oriundas dessa alma imortal. Mas, ao tentar explicar o movimento dos corpos ele não usou essa teoria e sim o argumento que corpos de mesma natureza tendem a permanecerem juntos; terra é atraída pela terra, ar é atraído pelo ar (PIRES, 2008).

Entretanto, foi Aristóteles (384-332 a.C.) que de fato elaborou uma teoria concreta para explicar as causas dos movimentos, sendo aceita como verdadeira por mais de mil anos. A

física proposta por ele é marcada por possuir uma base filosófica muito profunda além de estar ligada diretamente às observações do cotidiano, como o fato de não poder haver movimento sem força e que força e velocidade são proporcionais. Deve então existir sempre um agente motor para a manutenção de um movimento; além disso o meio desempenha um importante papel. Para ressaltar a importância do meio ele escreveu:

*"Vemos um mesmo corpo se movendo mais rápido do que outro por duas razões, ou porque existe uma diferença do meio em que eles se movem ou porque, sendo as outras coisas iguais, os corpos em movimento diferem um do outro devido aos seus pesos".* (ARISTÓTELES, apud PIRES, 2008, p. 40).



**Figura 1:** *Aristóteles*

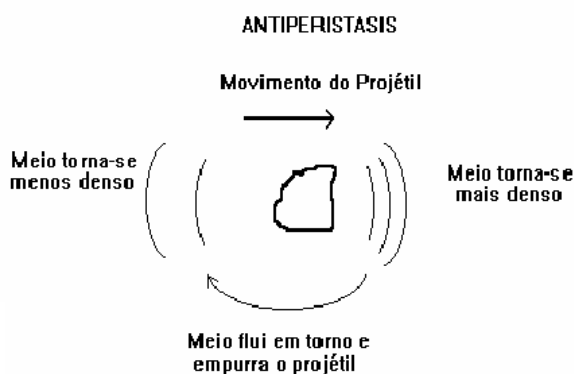
Para Aristóteles existiam dois tipos de força a *Physis*, a força responsável pelo movimento natural e a "força" que seria aquela que puxa ou empurra causando o movimento de um outro objeto. Segundo a sua teoria dos movimentos naturais, os corpos tendem a voltar para seu lugar de origem, que poderiam ser a terra, água, ar ou fogo, por isso que a pedra cai e a fumaça sobe. Esse movimento seria proporcional ao seu "peso", logo, uma pedra mais pesada cai mais rápido que uma mais leve pois, uma tem mais terra do que a outra, então há uma tendência maior a voltar para seu lugar de origem.

Através de suas observações ele propõe a "lei de força" para movimentos violentos ou forçados, no qual afirma que só é possível haver um movimento se existir uma força, argumento aceitável para a época, afinal se deixamos de empurrar um objeto ele pára. A velocidade de um objeto seria, portanto, proporcional a força  $F$  aplicada sobre ele e inversamente proporcional a resistência  $R$  do meio. Segundo sua teoria, não existiria movimento no vazio, ele descarta a existência do vácuo, já que isso implicaria em uma velocidade infinita.

Matematicamente, essa "lei dos movimentos" pode ser expressa como

$$v \sim \frac{F}{R}.$$

É importante ressaltar que Aristóteles não deu uma interpretação matemática para essa lei. Mas, como explicar o movimento violento de um projétil? Para Aristóteles a continuidade do movimento depois da perda de contato é dada pela seguinte explicação: quando se locomove, o corpo passa a ocupar um espaço em que antes havia ar. Esse ar se movimenta em torno do corpo e preenche o espaço vazio deixado pelo mesmo. Esse movimento o ar empurra o corpo para frente, esse movimento foi denominado como antiperistasis (PEDUZZI, 2008).



**Figura 2:** *Antiperistasis*

Ele explicou também como se dá o movimento e o retorno ao solo de um projétil lançado violentamente por um canhão. Na subida o movimento seria em linha reta na mesma direção do lançamento, formando uma trajetória diagonal. O retorno do objeto ao solo se dá através de seu movimento natural na menor distância que o separa da Terra, ou seja, após o objeto alcançar certa altura ele cai verticalmente em direção ao solo (PEDUZZI, 2008).

O primeiro a discordar do movimento de Aristóteles foi o astrônomo Hiparco de Nicéia (190-120 a.C.), ele explica o movimento pós-arremesso de uma maneira consideravelmente diferente daquele elaborada por Aristóteles e seus seguidores. No caso de uma pedra lançada verticalmente para cima a força impressa é responsável pelo movimento ascendente. Enquanto a força projetora for maior que a tendência natural de queda do objeto ele sobe, porém, cada vez mais lento. Quando a força impressa para cima se torna menor que a tendência natural de descida do objeto ele começa a cair. Outro ponto relevante é que a força impressa seria uma característica intrínseca do objeto e não do meio como proposto por Aristóteles.

Outra importante crítica à teoria de Aristóteles foi feita por Filoponos de Alexandria (490-570), no século VI, ao não aceitar a teoria antiperistasis como causa do movimento violento do lançamento de objetos. Para ele o ar é facilmente movido e deveria se deslocar na direção da força impressa ou ser disperso e não retrair o seu curso ocupando o espaço antes preenchido pelo corpo em deslocamento. Ele acredita que o movimento pós-contato deve-se à explicação proposta por Hiparco, à teoria da força impressa, e acrescenta que a velocidade da partícula em movimento deve ser proporcional à força impressa menos a resistência do movimento (EVORA, 2000). Matematicamente, temos

$$v \sim (F - R).$$

Filoponos também questionou Aristóteles a afirmar que a velocidade de queda dos objetos não depende do seu "peso", e sim da altura de onde estão caindo. Tal afirmação, foi elaborada por meio de observações feitas de experimentos de queda livre, sendo, historicamente o primeiro relato de experimento de queda livre. Acredita-se que suas ideias tenham tido forte influência sobre os demais críticos de Aristóteles, inclusive na Idade Média.

A teoria da força impressa retorna com o filósofo árabe Avicena (980-1037 d.C.). A força adquirida pelo corpo após ser lançado é para ele semelhante ao calor fornecido à água depois que ela é exposta ao fogo. Afirma ainda; que essa força é consumida pelo meio em que o objeto se locomove, logo seria impossível existir o vazio ou vácuo, pois ele não acreditava em um movimento infinito. Ele explica o movimento da seguinte forma: inicialmente o corpo se movimenta em linha reta na direção em que foi lançado, até a força ser totalmente consumida pelo meio e parar momentaneamente deslocando-se para baixo sobre a ação do movimento natural.

As ideias de Filoponos são abordadas novamente no século XIV pelo filósofo Francisco de Marchia e possivelmente influenciou o francês Jean Buridan (1300-1358 d.C.) na elaboração da teoria do impetus. Buridan usa o caso do pião que ao girar não muda de posição para questionar a antiperistasis, já que, de acordo com esta, para haver o movimento seria necessário o ar preencher o lugar do objeto.

Buridan conclui que existe algo impresso em um movimento que ficou conhecida como força motriz ("virtus motiva"), sendo isso melhor do que recorrer a afirmação que o ar continua a mover o objeto. Portanto, um motor ao mover um projétil móvel, imprime um "impetus" ou força motriz, na direção em que o motor move o objeto e quanto maior a velocidade maior o "impetus" imposto.

De acordo com a teoria do "impetus" no momento que em um corpo é lançado



ele adquire um "impetus" que reduz com o tempo devido às ações externas, que podem ser a resistência do ar ou o contato da superfície em que está ocorrendo o movimento. Segundo Peduzzi (2008) o impetus de Buridan possui algumas características específicas, que são:

- Ele só é dissipado por meio de ações externas, o que acarreta na não existência do vácuo, uma vez que isso leva a um movimento perpétuo.
- Aplica-se ao movimento circular, que no caso do pião cessa o movimento devido o contato com a superfície.
- É proporcional a velocidade e a quantidade da matéria do corpo.

Essas ideias foram usadas por Alberto da Saxônia (1316-1390), um seguidor das ideias de Buridan, para explicar o lançamento horizontal e oblíquo. Para isso separou o movimento em três etapas

- Primeiro o objeto se movimenta em linha reta na direção que foi lançada, porque, o impetus sobrepõe a tendência natural dos corpos caírem.
- Depois com a continuidade movimento, o impetus reduz com o tempo, devido a resistência do ar e ao movimento natural de queda. O que acarreta em um desvio do movimento inicial tornando-se curvilíneo.
- Por fim, ao ser completamente consumido o impetus, o objeto em movimento cai verticalmente para baixo.

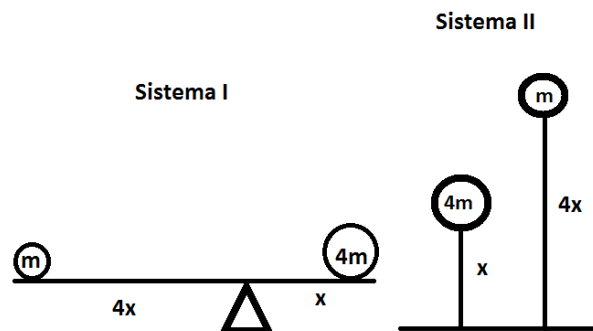
Essa teoria foi defendida por outros importantes estudiosos como Leonardo da Vinci (1452-1519), pintor, escultor, arquiteto e engenheiro e o físico italiano Giambattista Benedetti (1530-1590). Ele foi de fundamental importância para toda a revolução científica que ocorreu no século XVII não somente pelas críticas à teoria de Aristóteles, mas também pela abordagem filosófica e lógica por trás de seus argumentos.

As ideias de Aristóteles voltam a ser rigidamente criticada em 1632 por Galileu Galilei (1564-1642), sobretudo em seu livro intitulado *Diálogos Sobre os Dois Principais Sistemas do Mundo*. Além de questionar a queda natural dos corpos, afirma que a velocidade de uma partícula é máxima no vácuo, assumindo a ideia de vácuo, e introduz o conceito de inércia que mais tarde viria a ser aperfeiçoada por Newton e proposta como lei.

O conceito de força veio de fato a ser elaborado de forma mais semelhante a usual por René Descartes (1596-1650) e seus seguidores, os quais defendiam que a mesma seria

dada pelo produto da massa de um corpo por sua velocidade,  $m \cdot v$ , enquanto Gottfried Leibniz (1646-1716) defendia que a melhor representação para força seria  $m \cdot v^2$ , conhecida como "força viva" de um corpo.

Leibniz utilizou o conceito de equilíbrio estático de uma balança para defender suas ideias, corpos com massas inversamente proporcionais à distância que os separam estão em equilíbrio. Ao girar tal sistema Leibniz conclui que uma massa de  $4m$ , a uma altura  $x$  é equivalente a uma massa  $m$  a uma altura de  $4x$  (RAMOS, PONCZEK, 2011).



**Figura 3:** Experimento de Leibniz

De acordo com a teoria de Galileu as velocidades dos corpos não dependem de seus pesos, e sim da altura de onde caem. Essa relação é dada pela fórmula de Torricelli

$$v^2 = kh,$$

onde  $v$  é a velocidade final da queda,  $h$  altura que o objeto caiu e  $k$  uma constante de proporcionalidade. Com isso,

$$v_1^2 = kx \text{ e } v_2^2 = k(4x).$$

Concluimos portanto que  $v_2 = 2v_1$ . Segundo Leibniz, os corpos deveriam ter a mesma força ao chegar ao solo, supondo que a força seria  $F = mv^2$ , logo a força sobre o primeiro e segundo corpo pode ser

$$F_1 = 4mkx \text{ e } F_2 = mk4x.$$

Então,  $F_1 = F_2$ , ou seja, ele estaria certo e Descartes estaria errado.

Sabe-se hoje que ambos estavam equivocados, a grandeza defendida por Leibniz é o dobro do que conhecemos como energia cinética e a grandeza defendida por Descartes é conhecida hoje como momento linear de uma partícula, porém, ambas as teorias têm uma íntima relação com a teoria newtoniana, e consequentemente com a definição de força dada

por Newton. Podemos então afirmar que a definição de força proposta por Newton foi fruto do amadurecimento de ideais elaboradas ao longo de milênios.

## 2.2 Isaac Newton

---

Isaac Newton nasceu no natal de 1642 conforme o calendário da Inglaterra <sup>1</sup> em uma casa senhorial de Woolsthorpe, perto de Grantham, no Lincolnshire. Oriundo de uma família de fazendeiros era filho póstumo, seu pai morrera três meses antes de seu nascimento. A partir dos dois anos de idade foi criado pelos seus avós, após o novo casamento da sua mãe, tendo uma infância muito triste, uma vez que, não recebeu qualquer tipo de afeto de seus parentes.



**Figura 4:** *Isaac Newton*

Tornou-se um homem rico e poderoso, presidente da casa da moeda, da Royal Society e armado cavaleiro (Sir) pela rainha Ana Stuart em 1705. Viveu até os 84 anos, morrendo em Londres, no final do inverno na madrugada do domingo 19 de março de 1727, uma morte prolongada e sofrida devido a problemas renais, sendo velado e sepultado na Abadia de Westminster.

Não foi o poder ou a riqueza que consagrou Isaac Newton e sim a sua passagem no Trinity College de Cambridge, onde estudou e alguns anos mais tarde lecionou. No Trinity estudou inicialmente a filosofia de Aristóteles, pois tinha como objetivo fazer uma licenciatura em advocacia; entretanto, ao estudar posteriormente a obra prima de Descartes *La Géométrie* e a *Mecânica da Astronomia Copernicana* de Galileu e o *Sistema da Mecânica Astronômica de Kepler*, Newton começa a fervilhar de ideias e muda seu foco para a ciência.

A genialidade surgiu quando uma praga assolou a Inglaterra e fechou a Universidade no Verão de 1665, implicando o seu retorno à fazenda da sua mãe em Lincolnshire.

---

<sup>1</sup>Nesse período o calendário inglês estava dez dias atrasados em relação ao calendário do resto do mundo, além do início do ano ser considerado no dia 25 de março (GLEICK, 2004).

Durante dois anos (1665-1667) conhecidos como "os anos admiráveis" começou a apresentar trabalhos revolucionários nas áreas da matemática, física e astronomia.

Na matemática ele elaborou o cálculo infinitesimal sendo um dos maiores colaboradores do cálculo diferencial e integral. Na astronomia criou o telescópio refletor e formulou a lei da gravitação universal. Na física dedicou-se a óptica, cujas primeiras ideias foram sobre a teoria corpuscular da luz e a explicação da decomposição das cores ao atravessar um prisma, denominando-a de teoria das cores, e a publicou em seu livro *Opticks*.

Mas de fato a sua grande contribuição na física foi apresentada junta a outros trabalhos em sua mais célebre obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (Princípios Matemáticos da Filosofia Natural)*, onde ele apresentou pela primeira vez a formulação das leis do movimento que regem a Mecânica Clássica, conhecidas hoje como as três leis de Newton.

## 2.3 As Leis de Newton

---

O estado de movimento dos corpos podem ser compreendidos por meio de três leis conhecidas como leis de Newton ou leis do movimento. Elas tratam basicamente de uma análise entre forças e variações do movimento, que governam a mecânica e serão evidenciadas a seguir.

### 2.3.1 Lei da Inércia

A lei da inércia, conhecida como primeira lei de Newton, foi fruto do princípio da inércia proposta por Galileu Galilei, amplamente discutida e explicada em seu livro "*Diálogos Sobre os Dois Principais Sistemas do Mundo*", através do diálogo entre os personagens Simplicio e Salviati (MOYSÉS, 2013).

Galileu introduz este princípio discutindo como seria o movimento de uma esfera perfeita e lisa levemente impulsionada em diferentes situações, desde planos inclinados com atritos a superfícies extremamente polidas sem nenhum auge ou declive. Ele concluiu deste último caso que, não existindo nada que induza a aceleração ou desaceleração, ou seja, sem inclinação, declive, atrito, resistência do ar, e supondo um plano infinito, a esfera deverá se locomover com velocidade constante e em linha reta infinitamente.

Esse é o princípio da inércia proposto por Galileu que foi analisado, estudado, aprimorado e reformulado por Isaac Newton como uma lei, a lei da inércia. "Para ele, a inércia era um tipo de força que era inerente (ínsita) à matéria e latente tão logo quanto nenhuma

outra força aplicada sobre um corpo tentasse alterar seu estado de movimento" (PIRES, 2008, p. 195). Assim, ela seria portanto, uma espécie de resistência que os corpos possuem de mudar seu estado inicial de movimento. Essa lei pode ser enunciada como

*"Todo corpo permanece em seu estado de repouso ou de movimento retilíneo uniforme, a menos que seja compelido a mudar seu estado devido a ação de forças aplicadas sobre ele".*

Um dos principais questionamento para essa lei era para quais situações ela é válida? Isto é bastante relevante, já que, ela é válida apenas para casos especiais, os chamados referenciais inerciais.

Para explicar esse tipo de referencial, suponha que exista um observador para quem nenhuma interação externa o afete, ou seja, esteja isolado do resto do mundo. Tal observador é denominador de observado inercial e o referencial que o mesmo adota é chamado de referencial inercial (ALONSO, FINN, 2002). Logo, esses referenciais estarão em estado de repouso ou de movimento retilíneo uniforme, caso contrário apresentará interações devidas a forças externas, conseqüentemente uma aceleração, confrontando a primeira lei de Newton. Logo, referencial inercial pode ser interpretado também como sendo os referenciais onde é válido a lei da inércia.

Então, de acordo com essa lei, diversos observadores podem estar em movimento, um em relação ao outro, com velocidades constantes, implicando que para cada referencial inercial pode existir infinitos referenciais.

### **2.3.2 Princípio Fundamental da Dinâmica**

Uma consequência direta da primeira lei de Newton é que qualquer variação na velocidade de um corpo deve estar relacionada com a ação de uma força, ou seja, qualquer aceleração deve estar ligada à ação de uma força. Experimentos usando molas e conceitos básicos da gravitação mostram que essa relação é de proporcionalidade (MOYSÉS, 2013).

Sabemos que para aplicarmos uma mesma aceleração em corpos diferentes precisamos de forças distintas e é necessário, por exemplo, aplicarmos uma força muito maior em um carro para acelerá-lo a um valor qualquer, do que aquela que aplicamos a uma motocicleta para deixá-la com a mesma aceleração do carro. Portanto, concluímos que a aceleração é inversamente proporcional a inércia do corpo.

É possível verificar ainda através de experimentos que ao dobrarmos a força sobre

um objeto dobramos a aceleração deste, desse modo podemos afirmar matematicamente que:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m},$$

onde  $\mathbf{a}$  é a aceleração do corpo,  $\mathbf{F}$  é a força atuante sobre o corpo e  $m$  a massa do mesmo que também é denominada coeficiente de inércia, cujo é a medida da quantidade da matéria.

Desse modo deduzimos a forma mais comum de representar a segunda lei de Newton, lei de força para objetos com aceleração constante ou instantânea

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}, \quad (2.1)$$

sendo a unidade de força no S.I. (Sistema Internacional de Unidades) é o  $N$ (newton) que equivale a força aplicada para empregarmos uma aceleração de  $1m/s^2$  a um corpo de  $1kg$ .

Essa lei é a base para a compreensão da dinâmica de um corpo e foi intitulada por Isaac Newton como o Princípio Fundamental da Dinâmica. Uma das conclusões que ela nos permite é que se  $\mathbf{a}$  é um vetor,  $m$  é uma escalar  $\mathbf{F}$  será, também, um vetor.

Podemos agora inferir que em um sistema onde  $n$  forças atuando sobre uma mesma partícula, a força  $\mathbf{F}$  que atua sobre a partícula será a soma vetorial de todas as forças que age sobre a mesma. Esse fato é conhecido como princípio de superposições de forças. Logo, a expressão (2.1) nos permite entender o movimento da partícula de forma superficial, ela nos mostra o movimento a partir da resultante de todas as forças que atuam sobre o corpo, sendo inviável utilizá-la quando evidenciamos todas as forças que agem sobre uma partícula e quando queremos avaliar apenas algumas dessas forças.

Por outro lado, a formulação de Isaac Newton para esta lei teve início com a definição da quantidade de movimento, também conhecida como momento linear ou simplesmente momento. A definição dada por ele a essa grandeza física nos leva a seguinte conclusão:

*o momento de uma partícula ou corpo é dado como o produto de duas grandezas físicas a saber, massa  $m$  e velocidade  $v$ .*

Representamos na literatura momento por  $\mathbf{p}$ , na qual possui três componentes, definidas ao longo dos eixos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  por

$$p_x = mv_x, \quad p_y = mv_y \quad e \quad p_z = mv_z,$$

ou seja,

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}. \quad (2.2)$$

Vemos que o momento é uma grandeza vetorial que tem a mesma direção da velocidade. Sendo assim é muito importante, pois ajuda a caracterizar o estado de uma partícula.

Em sistemas de massa não variáveis, temos através da derivação de ambos os lados da equação (2.2)

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (2.3)$$

Para casos com a massa invariável temos

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}.$$

A equação (2.3) trata-se do Princípio Fundamental da Dinâmica da forma que o mesmo foi proposto por Newton. Ela dá o significado concreto e geral de força, ou seja, a variação temporal da quantidade de movimento de uma partícula é denominada como força. Vejamos um exemplo desta lei.

**Exemplo 2.1** *Considere uma partícula em movimento e sujeito a uma força de resistência. Determine o deslocamento e a velocidade horizontal em um meio em que a força de resistência é proporcional a velocidade. Iremos representar a força de resistência como*

$$\mathbf{F} = -km\mathbf{v}.$$

*Sendo  $k$  uma constante de proporcionalidade.*

*Pela segunda lei de Newton, temos que*

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

*Então,*

$$\begin{aligned} -kmv &= m \frac{dv}{dt} \Rightarrow -kv = \frac{dv}{dt}, \\ -kdt &= \frac{dv}{v}. \end{aligned}$$

*Integrando*

$$-k \int dt = \int \frac{dv}{v} \Rightarrow -kt + c_1 = \ln v.$$

Para um tempo  $t_0 = 0$  teremos  $v = v_0$  e  $\ln v_0 = c_1$ , agora

$$\ln v = -kt + \ln v_0 \Rightarrow \ln \frac{v}{v_0} = -kt,$$

$$\frac{v}{v_0} = e^{-kt} \Rightarrow v = v_0 e^{-kt}.$$

Mas, sabemos  $\frac{dx}{dt} = v = v_0 e^{-kt}$  logo,

$$dx = v_0 e^{-kt} dt.$$

Integrando temos

$$\int dx = v_0 \int e^{-kt} dt,$$

$$x_t = -\frac{v_0 e^{-kt}}{k} + c_2.$$

Assumindo a seguinte condição  $x_0 = 0$  teremos

$$x_0 = -\frac{v_0}{k} e^0 + c_2 \Rightarrow c_2 = \frac{v_0}{k}.$$

Portanto,

$$x(t) = -\frac{v_0 e^{-kt}}{k} + \frac{v_0}{k} = \frac{v_0}{k} (1 - e^{-kt}).$$

### 2.3.3 Lei da Ação e Reação

A terceira lei de Newton é uma consequência do princípio da conservação da quantidade de movimento e da segunda lei de Newton. Experiências mostram que a quantidade de movimento de um sistema de partículas isolado permanece constante, mesmo após serem submetidas a diferentes tipos de colisões. Em situações desse tipo as únicas forças atuantes são devidas as interações mútuas entre as partículas.

Iremos considerar um sistema livre de interações externas e mais simples possível, que possuem somente duas partículas, no qual podemos denominá-las como partículas 1 e 2. Devido as ações internas as velocidades das partículas variam com o tempo, sendo,  $v_1$  e  $v_2$  as velocidades das partículas 1 e 2 em um dado instante de tempo  $t$ ,  $v'_1$  e  $v'_2$  as velocidades das mesmas partículas para um instante de tempo  $t'$ , respectivamente. Assumindo suas massas, respectivamente, como  $m_1$  e  $m_2$ . Temos a quantidade de movimento para o instante de tempo  $t$  igual

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2,$$



e a quantidade de movimento para o instante de tempo  $t'$  igual a

$$\mathbf{P}' = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2.$$

Temos que, ao fazer tal medição experimentalmente para diferentes instantes de tempo, para quaisquer valores de  $t$  e  $t'$ , sempre obtemos  $\mathbf{P} = \mathbf{P}'$ .

Esse resultado é na realidade a descrição do princípio da conservação da quantidade de movimento, e pode ser definido como

*"A quantidade de momento total de um sistema de partículas perfeitamente isolado, sujeito apenas as suas ações mútuas permanece constante".*

Matematicamente podemos escrever

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = \vec{P}'. \quad (2.4)$$

Apesar da equação derivar de um caso particular de um sistema com somente duas partículas, ela é válida para um sistema de  $n$  partículas.

Uma consequência da equação (2.4) é que podemos representar a variação da quantidade de movimento para colisão entre duas partículas isoladas como

$$\Delta \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}_1 = -(\mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}_2) = -\Delta \mathbf{p}_2. \quad (2.5)$$

A última equação acima, trata-se da variação da quantidade de movimento da partícula 1 e 2, respectivamente. Ao dividimos  $\Delta \mathbf{p}_1$  e  $\Delta \mathbf{p}_2$  pelo intervalo de tempo decorrido durante a colisão,  $\Delta t$ , teremos

$$\frac{\Delta \mathbf{p}_1}{\Delta t} = -\frac{\Delta \mathbf{p}_2}{\Delta t},$$

assumindo um  $\Delta t$  muito pequeno, podemos considerar no caso limite que

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = -\frac{d\mathbf{p}_2}{dt}.$$

A partir da segunda lei de Newton a equação acima é reescrita como

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}. \quad (2.6)$$

Sendo  $\mathbf{F}_{12}$  a força exercida pela partícula 1 sobre uma partícula 2 e  $\mathbf{F}_{21}$  a força exercida pela partícula 2 sobre a partícula 1. Esse resultado trata-se da 3ª lei de Newton descrita por ele como

*"A toda ação corresponde a uma reação igual e contrária, ou seja, às ações mútuas de dois corpos um sobre outro são sempre iguais e dirigidas em sentidos contrários".*

Essa lei conhecida popularmente como princípio da ação e da reação como foi

exposta aqui trata de um par de forças que ocorre em corpos diferentes com mesma intensidade e sentidos contrários. Ou seja, se um corpo A aplica uma força qualquer em um corpo B,  $\mathbf{F}_{AB}$ , este aplicará uma força de igual intensidade porém com sentido contrário em B,  $\mathbf{F}_{BA}$ .

## 2.4 Alguns Tipos de Força

Todos os tipos de força podem ser obtidos através de quatro interações básicas, conhecidas como as interações fundamentais da natureza que são: interações gravitacionais, interações eletromagnéticas, interações fortes e interações fracas.

A interação gravitacional, regida pela lei da gravitação universal, proposta por Isaac Newton trata da interação mais fraca; todavia, devido à sua importância, principalmente na astronomia, foi a primeira a ser evidenciada. Ela explica as interações gravitacionais entre dois corpos, sendo mais relevante na mecânica astronômica, devido a algumas características como o fato de atuar em corpos eletricamente neutros e as massas astronômicas serem muito grandes (MOYSÉS, 2013). Matematicamente podemos expressá-la como

$$\mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r},$$

onde  $m_1$  é a massa do corpo 1,  $m_2$  a massa do corpo 2,  $\hat{r} = \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}}$  é o vetor unitário que vai de 1 para 2,  $r = |\mathbf{r}|$  é a distância entre os corpos e, por último,  $G$  é a constante de proporcionalidade conhecida como constante gravitacional cujo valor no Sistema Internacional (S.I.) é de aproximadamente  $6,67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 / kg^2$ .

Outra interação, a força eletromagnética, teve sua lei para cargas elétricas em repouso elaborada apenas 1785 em por Charles Coulomb (1736-1806). Embora seja semelhante à interação gravitacional, pode ser de caráter atrativo ou repulsivo e, ao invés da massa das partículas usamos suas cargas que podem ser positivas ou negativas. A lei de força escrita por Coulomb é dada por

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r},$$

onde  $q_1$  e  $q_2$  são, respectivamente, as cargas das partículas 1 e 2, e  $k$  é a constante de proporcionalidade, cujo valor no S.I. é de  $9 \cdot 10^9 N \cdot m^2 / C^2$ .

As interações fortes estão localizadas numa escala de  $10^{-15}m$ , ou seja, são as responsáveis por forças nucleares. Mas, elas atuam apenas nas partículas elementares, os hádrons, e além de serem muito mais intensas que as forças eletromagnéticas, são bastante complexas.

Por fim as interações fracas também constituem forças nucleares, entretanto, sua intensidade está entre as interações gravitacionais e eletromagnéticas. Essa interação é responsável pelo decaimento beta, que trata da emissão de elétrons pelo núcleo de algumas partículas radioativas.

### 2.4.1 Forças que Dependem da Velocidade

Em movimentos unidimensionais são poucas as forças realmente importantes que dependem da velocidade, podemos citar a força de atrito. A dependência dessa força dá-se devido a ela ser sempre oposta a direção da velocidade, sua intensidade, por exemplo, será praticamente constante para a força normal perpendicular a superfície em que ocorre o movimento (WATARI, 2004).

As demais forças dependentes da velocidade serão de resistência do ar ou em fluidos, que além de sempre serem opostas ao sentido do movimento são geralmente mais complexas. Em algumas situações só é possível identificar a relação com a velocidade por meio de experimentos. Os casos mais simples desses tipos de forças são aquelas que não existe nenhum outro de tipo de força atuando, sendo a equação do movimento para este caso pode ser representada como

$$F(v) = m \frac{dv}{dt}. \quad (2.7)$$

Podemos obter manipulando a equação anterior o tempo  $t$  e a posição  $x$  em função de  $v$ , isto é,

$$t(v) = \int \frac{mdv}{F(v)} \quad e \quad x(t) = \int v(t)dt.$$

Precisamos ressaltar que essas equações podem sofrer pequenas alterações de acordo com as massas dos objetos e do meio em que se locomovem. Por exemplo, um automóvel a alta velocidade varia sua força de resistência do ar com o quadrado da velocidade, enquanto um grão caindo de uma altura qualquer, tem essa força relacionada com a sua velocidade. Podemos citar também, as forças de resistências nos fluidos, onde para baixas velocidades a força é proporcional a sua velocidade, já para altas velocidades é mais conveniente a proporcionalidade ao quadrado.

## 2.4.2 Força Central

Um dos tipos mais importantes de forças são as chamadas forças centrais. Elas são compostas por algumas das interações fundamentais da natureza, como as forças gravitacionais e elétricas. Normalmente, acredita-se que toda força dirigida para o centro é uma força central, entretanto, para forças atuantes em dada região do espaço sobre uma partícula situada em um ponto  $P$  qualquer dessa região, recebe o nome de forças centrais somente quando obedecem as seguintes propriedades:

- Está dirigida através de uma linha que liga o ponto  $P$  a um ponto fixo  $O$ , denominado de centro de força.
- A intensidade de  $\mathbf{F}$  depender somente da distância ao centro de forças.

Devido a essas características as forças centrais podem ser escritas como

$$\vec{F} = F(r)\hat{r}, \quad (2.8)$$

onde  $r = \|\mathbf{r}\|$ ,  $\hat{r}$  é o vetor unitário na direção radial,  $F(r)$  é o módulo da força que depende de  $r$  e  $\mathbf{F}$  é força que pode ser atrativa, apontando para centro, ou repulsiva apontando para longe do centro, dependendo do sinal da força  $F(r)$ .

Esse tipo de força apresenta algumas características básicas como o fato de serem conservativas, ou seja, o trabalho é independente do caminho, descreverem trajetórias planas o que conseqüentemente acarreta na conservação do momento angular, sendo que a quantidade de momento angular  $\mathbf{L}$  é definida através do produto vetorial do momento linear  $\mathbf{P}$  pelo raio vetor  $\mathbf{r}$  que liga a partícula ao centro de força (MOYSÉS, 2013).

## 2.4.3 Força Eletromagnética

Forças eletromagnéticas são ocasionadas devido a interações provocadas por campos magnéticos  $\mathbf{B}$  e campos elétricos  $\mathbf{E}$ , essas interações andavam de forma independente até o século XIX, quando James Clerk Maxwell (1831-1879) através de quatro equações propôs a unificação das duas forças, originando então a teoria do eletromagnetismo.

A força magnética que age sobre uma carga  $q$  com velocidade  $\mathbf{v}$  imersa em um campo magnético  $\vec{B}$  é dada pela equação

$$\mathbf{F}_B = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

As partículas eletrizadas criam em torno de si um campo elétrico, propriedade do espaço em torno das cargas elétricas, que ao serem aproximadas de outras cargas geram forças elétricas. Tais campos são definidos normalmente como força por unidade de cargas e são facilmente identificados em cargas de provas colocadas em regiões do espaço vazio a partir da ação de forças sobre essas cargas.

Já a força elétrica que atua sobre uma  $q$  situada em um campo elétrico  $\mathbf{E}$  é representada, matematicamente, como  $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ .

Desse modo a força resultante sobre uma carga  $q$  é a soma da força resultante elétrica com a força resultante magnética, gerando o que conhecemos como forças eletromagnéticas ou força de Lorentz que é dada por

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (2.9)$$

A equação anterior recebe o nome de força eletromagnética ou força de Lorentz, em homenagem ao físico holandês Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928).

A força de Lorentz foi de grande utilidade ao longo da história tendo contribuições fundamentais na evolução da teoria do eletromagnetismo, como os estudos realizados por Edwin Hall em 1879 sobre o movimento de cargas em condutor submetido em um campo magnético, e a experiência realizada em 1897 por J. J. Thomson, que conseguiu medir com precisão a razão entre a carga e massa do elétron  $\frac{q_e}{m}$ .

# 3 *Elementos da Geometria Diferencial de Curvas*

A matemática é a linguagem utilizada pelos físicos para evidenciar os conceitos físicos e fenômenos a eles relacionados, incluindo a geometria diferencial. Tal disciplina matemática desempenha um papel importante para a física teórica contemporânea: suas aplicações estendem-se da mecânica clássica à física das partículas elementares.

Apresentaremos neste capítulo um breve estudo sobre geometria diferencial de curvas, nos limitando a curvas no espaço tridimensional  $\mathbb{R}^3$ . Porém, há uma teoria geral de curvas em  $\mathbb{R}^n$ , que é de fundamental importância para a teoria da relatividade geral de Einstein.

## 3.1 Curvas Parametrizadas

---

Intuitivamente, a ideia de curva é entendida como a trajetória descrita por um ponto em movimento. Esta ideia é tornada matematicamente precisa pela noção de curvas parametrizadas.

Seja  $\mathbb{R}^3$  o conjunto dos ternos  $(x, y, z)$  de números reais. Iremos caracterizar certos subconjuntos de  $\mathbb{R}^3$ , que chamamos de curvas. Podemos imaginar uma curva em  $\mathbb{R}^3$  como o conjunto de pontos que é descrito com um único parâmetro  $t$ , isto é, para cada  $t$  em um intervalo  $I \in \mathbb{R}$ , a curva  $\alpha$  é dada pelo ponto

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)),$$

em  $\mathbb{R}^3$ . Rigorosamente,  $\alpha$  é uma função de  $I$  em  $\mathbb{R}^3$ , e as funções  $\alpha_1(t)$ ,  $\alpha_2(t)$  e  $\alpha_3(t)$  são chamadas funções coordenadas euclidianas de  $\alpha$ .

**Definição 3.1** *Uma curva diferenciável parametrizada em  $\mathbb{R}^3$  é uma aplicação infinitamente diferenciável  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  de um intervalo aberto  $I = (a, b)$  da reta real  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}^3$ , na qual tem-se  $-\infty > a < b < \infty$ .*

Quando dizemos que  $\alpha$  é diferenciável na definição acima, significa que  $\alpha$  é uma correspondência que leva para cada  $t \in I$  em um ponto  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)) \in \mathbb{R}^3$ , de modo que as funções coordenadas  $\alpha_1(t)$ ,  $\alpha_2(t)$  e  $\alpha_3(t)$  sejam diferenciáveis.

Convém denotar  $t$  como parâmetro da curva e a imagem  $\alpha(I) \subset \mathbb{R}^3$  é chamada o traço da curva  $\alpha$ . Em virtude desta definição, não se deve confundir uma curva parametrizada, que é uma aplicação diferenciável, com seu traço, que é um subconjunto de  $\mathbb{R}^3$ . Além disso, observe que  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$  é o vetor posição do ponto da curva para o qual o parâmetro tem valor  $t$ , que os físicos costumam denotar pelo vetor  $\mathbf{r}(t)$ . Vejamos alguns exemplos:

**Exemplo 3.1** (*Catenária*) *É a curva que representa o formato de um fio flexível de massa específica uniforme suspensa pela suas extremidades sobre a ação da força gravitacional, estudada principalmente na engenharia na construção das pontes de pênisis (os cabos que sustentam as pontes e viadutos).*

*Galileu Galilei foi o primeiro a propor matematicamente a forma da curva dada por um fio suspenso entre dois ponto sob a ação unicamente da gravidade, sendo segundo ele uma parábola. Suas ideias foram refurtadas por alguns matemáticos como Jakob Bernoulli que também desafiou publicamente os matemáticos a propor uma solução para o problema, surgindo então três soluções (dos matemáticos Johann Bernolli, Huygens e Leibniz). A partir de então, foi formulada uma equação diferencial que descreve uma catenária, a saber*

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k}{s},$$

*sendo  $k$  uma constante positiva e  $s$  o comprimento de arco. Cuja a solução é igual a*

$$x(t) = \frac{k}{2}(e^{t/k} + e^{-t/k}).$$

**Exemplo 3.2** (*Hélice*) *A curva  $t \mapsto (a \cos t, a \sin t, 0)$  trata de um círculo de raio  $a > 0$  no plano  $xy$  de  $\mathbb{R}^3$ . Mas, se ela cresce ou diminui a uma certa taxa constante em torno do eixo  $z$ , obteremos uma hélice  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , determinada pela equação*

$$t \rightarrow (a \cos t, a \sin t, bt),$$

*onde  $a > 0$ ,  $b \neq 0$ .*

Podemos visualizar uma curva  $\alpha$  em  $\mathbb{R}^3$ , como um ponto em movimento. Então, para todo parâmetro de "tempo"  $t$  existe um vetor tangente ao ponto  $\alpha(t)$ , que é o chamado de velocidade instantânea de  $\alpha$  neste instante de tempo.

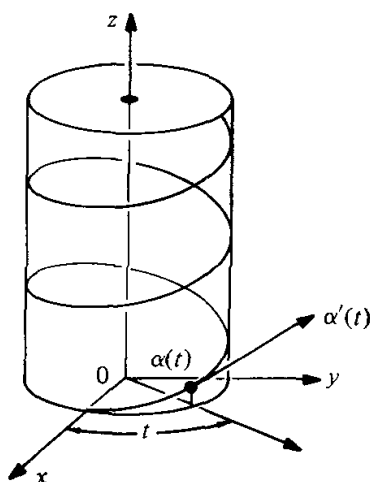


Figura 5: Hélice

**Definição 3.2** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva diferenciável e parametrizada de  $\mathbb{R}^3$ , na qual  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ . Para cada  $t$  em  $I$ , o vetor velocidade de  $\alpha$  em  $t$  no ponto  $\alpha(t) \in \mathbb{R}^3$  é dado pela derivada

$$\dot{\alpha}(t) = \left( \frac{d\alpha_1}{dt}(t), \frac{d\alpha_2}{dt}(t), \frac{d\alpha_3}{dt}(t) \right)_{\alpha(t)},$$

onde  $\dot{\alpha}(t) = \frac{d\alpha}{dt}$ , ou seja, iremos representar, a partir deste momento, o ponto como a derivada em relação ao parâmetro  $t$ .

A última definição acima pode ser interpretada da seguinte forma geométrica: sabemos que a derivada de uma função real em relação ao parâmetro  $t$ , é dada por

$$\frac{df}{dt}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Esta fórmula ainda faz sentido se  $f$  é substituída pela curva  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ . De fato, teremos

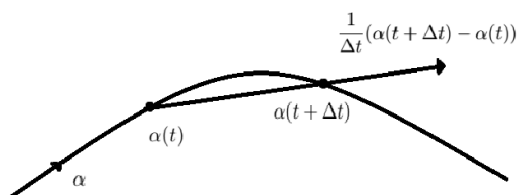
$$[\alpha(t + \Delta t) - \alpha(t)] = [\alpha_1(t + \Delta t) - \alpha_1(t), \alpha_2(t + \Delta t) - \alpha_2(t), \alpha_3(t + \Delta t) - \alpha_3(t)].$$

Este é um vetor com origem no ponto  $\alpha(t)$  e extremidade no ponto  $\alpha(t + \Delta t)$ , multiplicando pelo escalar  $\frac{1}{\Delta t}$ , obtemos

$$\frac{1}{\Delta t} [\alpha(t + \Delta t) - \alpha(t)] = \left[ \frac{\alpha_1(t + \Delta t) - \alpha_1(t)}{\Delta t}, \frac{\alpha_2(t + \Delta t) - \alpha_2(t)}{\Delta t}, \frac{\alpha_3(t + \Delta t) - \alpha_3(t)}{\Delta t} \right].$$

Agora fazendo  $\Delta t$  muito pequeno, temos que  $\alpha(t + \Delta t)$  tendo a aproximar-se de  $\alpha(t)$ . No caso





limite com  $\Delta t \rightarrow 0$ , temos o vetor velocidade (tangente) a curva  $\alpha$  no ponto  $\alpha(t)$ , a saber

$$\dot{\alpha}(t) = \left( \frac{d\alpha_1}{dt}(t), \frac{d\alpha_2}{dt}(t), \frac{d\alpha_3}{dt}(t) \right) = (\dot{\alpha}_1(t), \dot{\alpha}_2(t), \dot{\alpha}_3(t)).$$

**Exemplo 3.3** Encontre o vetor velocidade ou tangente  $\dot{\alpha}(t)$  da curva regular dada pelo vetor  $\alpha(t) = \left( \frac{2t^2}{1+t^2}, \frac{2t^3}{1+t^2} \right)$ . Das equações anteriores afirmamos que

$$\dot{\alpha}(t) = \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{2t^2}{1+t^2} \right), \frac{d}{dt} \left( \frac{2t^3}{1+t^2} \right) \right)$$

usando a regra do quociente,

$$\dot{\alpha}(t) = \left( \frac{4t(1+t^2) - 4t^3}{(1+t^2)^2}, \frac{6t^2(1+t^2) - 4t^4}{(1+t^2)^2} \right) = \left( \frac{4t}{(1+t^2)^2}, \frac{6t^2 + 2t^4}{(1+t^2)^2} \right).$$

Podemos, a partir do resultado anterior, encontrar também a velocidade instantânea. Para isso, basta substituímos o valor de  $t$  pelo instante desejado. Como por exemplo em  $t = 1$  temos um  $\dot{\alpha}(t) = (1, 2)$ .

A existência de reta tangente em todos os pontos da curva é de fundamental importância para o desenvolvimento da geometria diferencial. Porém, podemos ter  $\dot{\alpha}(t) = 0$  para algum parâmetro  $t$  em  $I$ . Para o ponto de  $\alpha$  na qual  $\dot{\alpha}(t) = 0$  chamamos de *ponto singular* de  $\alpha$ . Convém, portanto, restringirmos às curvas sem pontos singulares.

**Definição 3.3** Uma curva diferenciável parametrizada  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  é chamado regular quando  $\dot{\alpha}(t) \neq 0$  para todo  $t \in I$ .

A partir de agora consideraremos apenas curvas diferenciáveis parametrizadas regulares, na qual iremos chamá-las apenas de curvas parametrizadas regulares.

**Definição 3.4** O comprimento de arco de uma curva parametrizada regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , a partir do ponto  $t_0 \in I$ , é a função  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{\alpha}(t)\| dt,$$

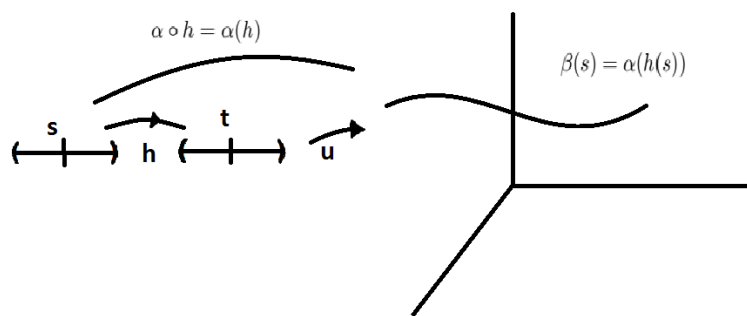
onde  $\|\dot{\alpha}(t)\| = \sqrt{(\dot{\alpha}_1(t))^2 + (\dot{\alpha}_2(t))^2 + (\dot{\alpha}_3(t))^2}$  é o comprimento do vetor  $\dot{\alpha}(t)$ . Como  $\dot{\alpha}(t) \neq 0$  para todo  $t$ , o comprimento de arco  $s$  é uma função diferenciável de  $t$  e  $\frac{ds}{dt} = \|\dot{\alpha}(t)\|$ .

Dado qualquer curva  $\alpha$ , é possível construir uma nova curva que segue a mesma trajetória de  $\alpha$ .

**Definição 3.5** Sejam  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva parametrizada regular e  $h : J \rightarrow I$  uma função diferenciável no aberto  $J \subset \mathbb{R}$ . Podemos então considerar a nova curva  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definida por

$$\beta(s) = (\alpha \circ h)(s) = \alpha(h(s)).$$

A curva  $\beta$  é chamada de reparametrização de  $\alpha$  por  $h$ .



**Figura 6:** Reparametrização

Para calcular as coordenadas de  $\beta$ , simplesmente substituímos  $t = h(s)$  sobre as funções coordenadas  $\alpha_1(t)$ ,  $\alpha_2(t)$  e  $\alpha_3(t)$  de  $\alpha(t)$ . Por exemplo, dada  $\alpha(t) = (\sqrt{t}, t\sqrt{t}, 1-t)$  com  $I : 0 < t < 4$ , então se  $h(s) = s^2$  em  $J : 0 < s < 2$  tem-se

$$\beta(s) = (s, s^3, 1 - s^2).$$

**Definição 3.6** Sejam  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva parametrizada e  $\dot{\alpha}(t)$  o vetor velocidade de  $\alpha$  em  $t$ . Assim, definimos como a rapidez de  $\alpha$  em  $t$  ao comprimento  $v(t) = \|\dot{\alpha}(t)\|$  do vetor velocidade,

isto é,

$$v(t) = \|\dot{\alpha}(t)\| = \left[ \left( \frac{d\alpha_1}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\alpha_2}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\alpha_3}{dt} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

para  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ .

**Definição 3.7** Uma curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  é dita parametrizada pelo comprimento de arco, se para cada  $t_0, t_1 \in I$ ,  $t_0 \leq t_1$ , tem-se

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\dot{\alpha}(t)\| dt = t_1 - t_0.$$

Agora iremos enunciar o resultado que afirma a possibilidade de qualquer curva regular poder ser parametrizada pelo comprimento de arco.

**Teorema 3.1** Sejam  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular e  $s : I \rightarrow s(I) \subset \mathbb{R}$  a função comprimento de arco de  $\alpha$  a partir do instante  $t_0$ . Então, existe a função inversa  $h$  de  $s$ , definida no intervalo aberto  $J = s(I)$ , e  $\beta = \alpha \circ h$  é uma reparametrização de  $\alpha$ , onde  $\beta$  está parametrizada pelo comprimento de arco.

**Prova.** Por hipótese,  $\alpha$  é uma curva regular, portanto

$$\dot{s}(t) = \|\dot{\alpha}(t)\| > 0,$$

$f$  é uma função estritamente crescente. A partir disso, existe uma função inversa de  $s$ , a saber,  $h : J \rightarrow I$ . Como para todo  $t \in I$ ,  $h(s(t)) = t$ , teremos que

$$\frac{dh}{dt} = 1 \Leftrightarrow \frac{dh}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = 1,$$

ou seja,

$$\frac{dh}{ds} = \frac{1}{\dot{s}(t)} = \frac{1}{\|\dot{\alpha}(t)\|} > 0.$$

Concluimos que  $\beta(s) = (\alpha \circ h)(s)$ ,  $s \in J$ , é uma reparametrização de  $\alpha$ , e

$$\left\| \frac{d\beta}{ds} \right\| = \left\| \frac{d\alpha}{dt} \cdot \frac{dh}{ds} \right\| = \left\| \frac{\dot{\alpha}(t)}{\|\dot{\alpha}(t)\|} \right\| = 1.$$

Portanto,  $\beta$  está parametrizada pelo comprimento de arco, pois

$$\int_a^b \|\dot{\beta}(s)\| ds = b - a.$$



**Proposição 3.1** *Uma curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  está parametrizada pelo comprimento de arco se, e somente se,  $\|\dot{\alpha}(t)\| = 1$ .*

**Prova.** Suponha que a curva  $\alpha$  está parametrizada pelo comprimento de arco. Então,  $s(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{\alpha}(t)\| dt = t - t_0$ , e  $\dot{s}(t) = 1$ . Como  $\dot{s}(t) = \|\dot{\alpha}(t)\|$ , concluímos que  $\|\dot{\alpha}(t)\| = 1$ , para todo  $t \in I$ . Reciprocamente, se  $\|\dot{\alpha}(t)\| = 1$  implica que  $s(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{\alpha}(t)\| dt = \int_{t_0}^t dt = t - t_0$ . ■

## 3.2 Curvatura e Torção

Iremos abordar agora, as principais características geométricas das curvas parametrizadas pelo comprimento de arco, começando pela curvatura. A mesma mede a taxa de variação do vetor tangente de uma curva parametrizada pelo comprimento de arco.

**Definição 3.8** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, chama-se curvatura de  $\alpha$  em  $s \in I$  a função escalar*

$$k(s) = \|\ddot{\alpha}(s)\|.$$

A proposição a seguir caracteriza as retas como sendo as curvas de curvatura identicamente nula.

**Proposição 3.2** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. Então,  $\alpha(I)$  é um segmento de reta se, e somente se,  $k(s) = 0$ , para todo  $s \in I$ .*

**Prova.** Se  $\alpha(I)$  é um segmento de reta, então  $\alpha(s) = \mathbf{p} + \mathbf{v}s$  onde  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$  e  $\mathbf{v}$  é um vetor unitário de  $\mathbb{R}^3$ . Portanto, para todo  $s \in I$ ,  $\dot{\alpha}(s) = \mathbf{v}$  e  $\ddot{\alpha}(s) = 0$ , donde  $k(s) = \|\ddot{\alpha}(s)\| = 0$ . Reciprocamente, se  $\|\ddot{\alpha}(s)\| = 0$ , para todo  $s \in I$ , então  $\ddot{\alpha}(s) = 0$ . Integrando, tem-se que  $\dot{\alpha}(s) = \mathbf{v}$  e  $\|\mathbf{v}\| = 1$ . Integrando novamente, obtemos  $\alpha(s) = \mathbf{p} + \mathbf{v}s$ , cujo traço é um segmento de reta. ■

Dado  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco, então  $\|\dot{\alpha}(s)\| = 1$ . Com isso,

$$\frac{d}{ds} \langle \dot{\alpha}(s), \dot{\alpha}(s) \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \ddot{\alpha}(s), \dot{\alpha}(s) \rangle = 0,$$

para todo  $s \in I$ . Assim,  $\ddot{\alpha}(s)$  é ortogonal a  $\dot{\alpha}(s)$ . Portanto, para todo  $s \in I$ , onde  $k(s) \neq 0$ , isto é,  $\alpha''(s) \neq 0$ , podemos definir um vetor unitário na direção de  $\alpha''(s) \neq 0$ .

**Definição 3.9** Chama-se produto interno em um espaço vetorial  $V$ , denota-se por  $(V, \langle, \rangle)$ , as operações que associam a cada par de vetores  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  um número real  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  de modo que sejam satisfeitas os seguintes axiomas para  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  e  $\mathbf{w} \in V$  sendo eles linearmente independentes e  $\alpha$  constante pertencendo aos reais:

1. Simétrica:  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$
2. Distributiva:  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$
3. Homogeneidade:  $\langle \alpha \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$
4. Positiva Definida:  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$  e  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = 0$
5. Linear:  $\langle \alpha \mathbf{u}_1 + \beta \mathbf{u}_2, \mathbf{v} \rangle = \alpha \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v} \rangle + \beta \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v} \rangle$

**Definição 3.10** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco tal que  $k(s) \neq 0$ . O vetor

$$\mathbf{n}(s) = \frac{\ddot{\alpha}(s)}{k(s)},$$

é denominado vetor normal a  $\alpha$  em  $s$ . A reta normal a  $\alpha$  em  $s_0 \in I$  é a reta que passa por  $\alpha(s_0)$  na direção do vetor normal  $\mathbf{n}(s_0)$ .

Denotamos por  $\mathbf{t}(s) = \dot{\alpha}(s)$  o vetor unitário tangente a curva  $\alpha$ . Além disso, temos que  $\mathbf{t}(s)$  e  $\mathbf{n}(s)$  são vetores ortonormais, visto que  $\ddot{\alpha}$  e  $\dot{\alpha}$  são ortogonais. Assim, podemos escrever

$$\dot{\mathbf{t}}(s) = k(s)\mathbf{n}(s).$$

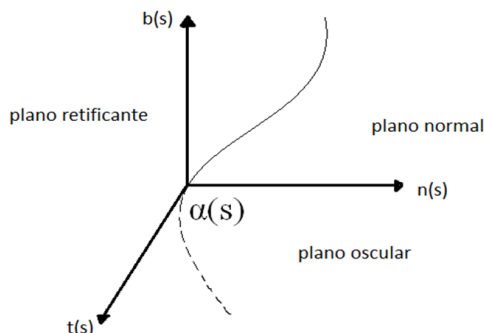
Em todos os pontos da curva em que  $k(s) \neq 0$  definimos um terceiro vetor que, juntamente com os vetores  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{n}$ , formam uma base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$ .

**Definição 3.11** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco, tal que  $k(s) > 0$ . O vetor binormal a  $\alpha$  em  $s$  é o vetor unitário

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s).$$

Desta forma fica definido um triedro positivamente orientado  $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$  em cada ponto da curva com curvatura diferente de zero, conhecido como *triedro de Frenet*.

Cada par de vetores do triedro de Frenet determina um plano. O plano de  $\mathbb{R}^3$  que contém  $\alpha(s)$  e é normal ao vetor  $\mathbf{t}(s)$  é o *plano normal* á curva  $\alpha$  em  $s$ . O plano que contém  $\alpha(s)$  e é normal a  $\mathbf{b}(s)$  é chamado de *plano osculador*, e o plano que contém  $\alpha(s)$  e é normal a  $\mathbf{n}(s)$  é o *plano retificante* da curva  $\alpha$  em  $s$ . Note que a derivada de  $\mathbf{b}(s)$  é dada por



$$\dot{\mathbf{b}}(s) = \dot{\mathbf{t}}(s) \times \mathbf{n}(s) + \mathbf{t}(s) \times \dot{\mathbf{n}}(s) = \mathbf{t}(s) \times \dot{\mathbf{n}}(s),$$

pois  $\dot{\mathbf{t}}(s)$  é paralelo a  $\mathbf{n}(s)$ . Portanto,  $\dot{\mathbf{b}}(s)$  é ortogonal a  $\mathbf{t}(s)$ . Como  $\|\mathbf{b}(s)\| = 1$ , então  $2\langle \dot{\mathbf{b}}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = 0$  implica  $\dot{\mathbf{b}}(s)$  ortogonal a  $\mathbf{b}(s)$ . Assim, inferimos que  $\dot{\mathbf{b}}(s)$  é paralelo a  $\mathbf{n}(s)$ , isto é,  $\dot{\mathbf{b}}(s)$  é igual

$$\dot{\mathbf{b}}(s) = \tau(s) \cdot \mathbf{n}(s), \quad (3.1)$$

onde  $\tau(s) \in \mathbb{R}$  é denominado de torção da curva em  $s$ .

**Definição 3.12** *Seja  $\alpha(s)$  uma curva parametrizada pelo um comprimento de arco. O número  $\tau(s)$  definido pela equação (3.1) é chamado de torção de  $\alpha$  em  $s$ .*

Diferentemente da curvatura, a torção pode ser negativa. Se a curva é plana, os vetores  $\mathbf{t}(s)$  e  $\mathbf{n}(s)$  pertencem ao plano que contém o traço e  $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$  é um vetor unitário constante e perpendicular a esse plano. Segue-se que  $\dot{\mathbf{b}}(s) = 0$  e, portanto, a torção é nula. A torção mede a rapidez com que muda a direção do vetor unitário  $\mathbf{b}(s)$ , isto é, a rapidez com que a curva se afasta do plano osculador.

A definição de curvatura e torção foram consideradas para uma curva que esteja parametrizada pelo comprimento de arco. No caso de uma curva regular com qualquer parâmetro, a curvatura e torção são dadas conforme a proposição seguinte.

**Proposição 3.3** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular de parâmetro  $t$  e  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma reparametrização de  $\alpha$  pelo comprimento de arco, ou seja,  $\beta(s(t)) = \alpha(t)$ , para todo  $t \in I$ .*

Sejam  $k(s) > 0$  e  $\tau(s)$  a curvatura e a torção de  $\beta$  em  $s \in J$ , então

$$k(s(t)) = \frac{\|\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t)\|}{\|\dot{\alpha}(t)\|^3}, \quad (3.2)$$

$$\tau(s(t)) = \frac{\langle \dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t) \rangle}{\|\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t)\|^2}. \quad (3.3)$$

**Prova.** Sabemos que  $\beta(s(t)) = \alpha(t)$ . Assim, derivando em relação ao parâmetro  $t$  obtemos

$$\frac{d\beta}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{\alpha}(t), \quad (3.4)$$

derivando novamente, tem-se

$$\frac{d^2\beta}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{d\beta}{ds} \frac{d^2s}{dt^2} = \ddot{\alpha}(t). \quad (3.5)$$

Assim, dessas duas últimas equações segue que

$$\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t) = \frac{d\beta}{ds} \frac{ds}{dt} \times \frac{d^2\beta}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{d\beta}{ds} \frac{ds}{dt} \times \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Portanto,

$$\|\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t)\| = \left|\frac{ds}{dt}\right|^3 \left\| \frac{d^2\beta}{ds^2} \right\|,$$

onde usamos o fato de que  $\beta$  está parametrizada pelo comprimento de arco e, com isso,  $\frac{d\beta}{ds}$  e  $\frac{d^2\beta}{ds^2}$  são ortogonais. No entanto,  $\frac{ds}{dt} = \|\dot{\alpha}(t)\|$ . Assim, podemos concluir que

$$\left\| \frac{d^2\beta}{ds^2} \right\| = \frac{\|\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t)\|}{\|\dot{\alpha}(t)\|^3} = k(s(t)).$$

No caso da torção, vamos utilizar os vetores norma e binormal dados por

$$\mathbf{n}(s(t)) = \frac{1}{k(s(t))} \frac{d^2\beta}{ds^2},$$

$$\mathbf{b}(s(t)) = \frac{d\beta}{ds} \times \mathbf{n}(s(t)).$$

Substituindo  $\frac{ds}{dt} = \|\dot{\alpha}(t)\|$  e  $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{\langle \ddot{\alpha}(t), \dot{\alpha}(t) \rangle}{\|\dot{\alpha}(t)\|}$  nas equações (3.4) e (3.5), e usando o valor da expressão de  $k(s(t))$ , teremos

$$\mathbf{n}(s(t)) = \frac{\ddot{\alpha}(t)\|\dot{\alpha}(t)\|^2 - \dot{\alpha}(t)\langle \ddot{\alpha}(t), \dot{\alpha}(t) \rangle}{\|\dot{\alpha}(t)\| \|\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t)\|},$$

$$\mathbf{b}(s(t)) = \frac{\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t)}{\|\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t)\|}.$$

Derivando a última igualdade em relação ao parâmetro  $t$ , temos

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds}(s(t)) = \frac{\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}}{\|\dot{\alpha}\| \|\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}\|} - \frac{\langle \dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}, \dot{\alpha} \times \ddot{\alpha} \rangle \dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}}{\|\dot{\alpha}\| \|\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}\|^3}.$$

Por outro lado, a torção pode ser dada da seguinte forma

$$\tau(s(t)) = \left\langle \frac{d\mathbf{b}}{ds}(s(t)), \mathbf{n}(s(t)) \right\rangle,$$

com isso, concluímos que

$$\tau(s(t)) = \frac{\langle \dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t) \rangle}{\|\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t)\|^2}.$$

Logo,  $k(s(t))$  e  $\tau(s(t))$  são, respectivamente, a curvatura e a torção de  $\alpha$  em  $t$ .

■

Observe que com o emprego da equação (3.2), podemos ter a torção com a forma equivalente

$$\tau(t) = -\frac{1}{k^2} \frac{\langle \dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}, \ddot{\alpha} \rangle}{\|\dot{\alpha}\|^6}. \quad (3.6)$$

### 3.3 Fórmulas de Frenet

A derivada do triedro de Frenet, composto pelos vetores unitários  $\mathbf{t}(s)$ ,  $\mathbf{n}(s)$  e  $\mathbf{b}(s)$ , nos fornecem informações sobre o comportamento da curva em uma vizinhança de  $s$ , além de poderem ser expressas como combinação linear desses vetores, já que eles formam uma base ortonormal. Sabendo que  $\mathbf{n}(s) = \mathbf{b}(s) \times \mathbf{t}(s)$ , temos

$$\dot{\mathbf{n}}(s) = \dot{\mathbf{b}}(s) \times \mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s) \times \dot{\mathbf{t}}(s) = \tau(s)\mathbf{n}(s) \times \mathbf{t}(s) + k(s)\mathbf{b}(s) \times \mathbf{n}(s),$$

no entanto,  $\mathbf{n}(s) \times \mathbf{t}(s) = -\mathbf{b}(s)$  e  $\mathbf{b}(s) \times \mathbf{n}(s) = -\mathbf{t}(s)$  resulta em

$$\dot{\mathbf{n}}(s) = -\tau(s)\mathbf{b}(s) - \mathbf{t}(s)k(s).$$

Resunindo as três equações que fornecem as derivadas dos vetores  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{b}$ , temos

$$\dot{\mathbf{t}}(s) = k(s)\mathbf{n}(s), \quad (3.7)$$

$$\dot{\mathbf{n}}(s) = -k(s)\mathbf{t}(s) - \tau(s)\mathbf{b}(s), \quad (3.8)$$

$$\dot{\mathbf{b}}(s) = \tau(s)\mathbf{n}(s). \quad (3.9)$$



As equações anteriores são conhecidas como fórmulas de Frenet ou fórmulas de Serret-Frenet.

Como aplicação das fórmulas de Frenet, veremos que as curvas planas são caracterizadas por terem torção nula.

**Proposição 3.4** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular, com curvatura não-nula. Então, se  $\tau = 0$  implica que  $\alpha$  é uma curva plana.*

**Prova.** Se  $\tau = 0$  para toda  $s \in I$ , então por (3.9) tem-se que  $\dot{b}(s) = 0$  e  $b(s) = b$  é constante. No entanto, fixando  $s_0$ , considere a função  $g(s) = \langle \alpha(s) - \alpha(s_0), b \rangle$ . Derivando temos  $\dot{g}(s) = \langle \dot{\alpha}(s), b \rangle = \langle t(s), b \rangle = 0$ , pois  $b$  e  $t$  são ortonormais. Portanto,  $g(s)$  é constante. Como  $g(s_0) = 0$ , concluímos que  $g(s) = 0$  para todo  $s$ , ou seja,  $\alpha(I)$  está contido num plano que contém  $\alpha(s_0)$  e é ortogonal ao vetor  $b$ .

■

## 4 Aplicações à Dinâmica

Neste capítulo iremos utilizar a mecânica newtoniana e as propriedades da geometria diferencial abordados, respectivamente, nos capítulos dois e três desse trabalho para mostrar uma relação entre as grandezas dinâmicas e os entes matemáticos da geometria diferencial de curvas.

Para a mecânica newtoniana, num referencial inercial, o movimento de uma partícula é dado pela equação

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F},$$

onde  $m$  é a massa da partícula,  $\ddot{\mathbf{r}}$  é sua aceleração e  $\mathbf{F}$  é a força resultante que age sobre ela. Com isso, dado a posição e velocidade iniciais da partícula, é possível determinar a posição como função do tempo, isto é, determinar a curva descrita pela partícula.

É conveniente mudarmos algumas notações para estabelecer a relação mencionada: os vetores unitários  $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$  que compõem o triedro de Frenet passarão a ser escritos, respectivamente, como  $\mathbf{e}_{(1)}, \mathbf{e}_{(2)}, \mathbf{e}_{(3)}$ . Agora as fórmulas de Frenet assumem a seguinte forma

$$\frac{d\mathbf{e}_{(1)}}{ds} = k\mathbf{e}_{(2)}, \quad (4.1)$$

$$\frac{d\mathbf{e}_{(2)}}{ds} = -k\mathbf{e}_{(1)} - \tau\mathbf{e}_{(3)}, \quad (4.2)$$

$$\frac{d\mathbf{e}_{(3)}}{ds} = \tau\mathbf{e}_{(2)}. \quad (4.3)$$

### 4.1 Relação Entre as Grandezas Dinâmicas e a Curvatura

---

Seja  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  o vetor posição da partícula em um instante de tempo  $t$ . A partir da definição de comprimento de arco, inferimos que  $v = \frac{ds}{dt}$ , sendo então  $\frac{1}{v} = \frac{dt}{ds}$ , onde  $v = \|\dot{\mathbf{r}}\|$  é o módulo da velocidade ou velocidade escalar. Também pelas definições vistas

no capítulo anterior,  $\mathbf{e}_{(1)} = \mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$ . Aplicando a regra da cadeia temos

$$\mathbf{e}_{(1)} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\mathbf{v}}{v}, \quad (4.4)$$

sendo  $\mathbf{v}$  o vetor velocidade da partícula. Usando a equação (4.1) e o resultado anterior obteremos

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{e}_{(1)}}{ds} &= \frac{dt}{ds} \frac{d\mathbf{e}_{(1)}}{dt} = \frac{1}{v} \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{v}}{v} \right) = \frac{1}{v} \left( \frac{1}{v} \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \frac{d\mathbf{v}}{dt} \frac{v}{v^2} \right) \\ &= \frac{\mathbf{a}}{v^2} - \dot{v} \frac{\mathbf{v}}{v^3} = k\mathbf{e}_{(2)}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

a saber,  $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}$  é o vetor aceleração da partícula. A partir disso, podemos calcular a norma quadrada na última expressão, resultado em

$$k^2 = \left\| \frac{\mathbf{a}}{v^2} - \dot{v} \frac{\mathbf{v}}{v^3} \right\|^2 = \left\langle \frac{\mathbf{a}}{v^2} - \dot{v} \frac{\mathbf{v}}{v^3}, \frac{\mathbf{a}}{v^2} - \dot{v} \frac{\mathbf{v}}{v^3} \right\rangle = \frac{a^2}{v^4} - 2\dot{v} \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle}{v^5} + \frac{\dot{v}^2}{v^4}, \quad (4.6)$$

essa expressão relaciona grandezas cinemáticas com a curvatura.

Podemos ainda por meio das equações (4.4) e (4.5) escrever a aceleração como

$$\mathbf{a} = \dot{v}\mathbf{e}_{(1)} + kv^2\mathbf{e}_{(2)}, \quad (4.7)$$

observe que trata-se da aceleração decompostas em suas componentes tangencial (paralela ao vetor  $\mathbf{e}_{(1)}$ ) e normal (paralela ao vetor  $\mathbf{e}_{(2)}$ ). A componente tangencial possui intensidade dada por  $\dot{v}$ , enquanto que a componente normal, conhecida como aceleração centrípeta, tem módulo igual a  $\frac{v^2}{r}$ , sendo por definição  $r = \frac{1}{k}$  o raio de curvatura. Sabendo que  $\mathbf{v}$  é ortogonal a  $\mathbf{e}_{(2)}$ , e que  $\mathbf{e}_{(1)} = \frac{\mathbf{v}}{v}$ . Então, temos que

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle = \left\langle \left( \dot{v}\mathbf{e}_{(1)} + kv^2\mathbf{e}_{(2)} \right), \mathbf{v} \right\rangle = \frac{\dot{v}v^2}{v} + 0 = \dot{v}v.$$

Aplicando este resultado na equação (4.6) e usando o fato da curvatura ser uma função não-negativa, podemos escrever a curvatura como

$$k = \sqrt{\frac{a^2}{v^4} - 2\dot{v} \frac{\dot{v}v}{v^5} + \frac{\dot{v}^2}{v^4}} = \sqrt{\frac{a^2}{v^4} - \frac{2\dot{v}^2}{v^4} + \frac{\dot{v}^2}{v^4}} = \frac{1}{v^2} \sqrt{a^2 - \dot{v}^2}. \quad (4.8)$$

Com a finalidade de estreitar os laços entre curvatura e as grandezas dinâmicas começaremos a usar  $a = F/m$ , onde  $F$  é o módulo da força resultante que atua sobre uma partícula. Por outro lado, a energia cinética de uma partícula de massa  $m$  e velocidade  $v$  é dada por  $T = \frac{mv^2}{2}$ . Derivando em relação ao tempo  $t$ , obtemos  $\frac{dT}{dt} = mv \frac{dv}{dt}$ . Em outra notação,

temos  $\dot{T} = mv\dot{v}$ . Ou ainda,  $v\dot{v} = \frac{\dot{T}}{m}$  que é equivalente a escrever  $\dot{v}^2 = \frac{\dot{T}^2}{2mT}$ . Mas, o teorema do trabalho-energia (trabalho é igual a variação da energia cinética) nos fornece que  $\dot{T} = \langle \mathbf{F}, \mathbf{v} \rangle$ . A partir desses resultados, a equação (4.8) pode ser expressa como

$$k = \frac{1}{v^2} \sqrt{\frac{F^2}{m^2} - \frac{1}{2m} \frac{\langle \mathbf{F}, \mathbf{v} \rangle^2}{T}},$$

colocando  $m^2$  em evidencia

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{v^2} \sqrt{\frac{1}{m^2} \left( F^2 - \frac{m \langle \mathbf{F}, \mathbf{v} \rangle^2}{2T} \right)} \\ k &= \frac{1}{2T} \sqrt{F^2 - \frac{m}{2T} \langle \mathbf{F}, \mathbf{v} \rangle^2}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Agora um de nossos objetivos foi alcançado, associar curvatura a grandezas dinâmicas. Observe que quando a força e a velocidade forem sempre colineares o movimento será retilíneo e, conseqüentemente, a curvatura será nula. Visto que neste caso  $\langle \mathbf{F}, \mathbf{v} \rangle = \pm Fv$ . Porém, se a força e a velocidade forem perpendiculares a curvatura será igual  $k = \frac{F}{2T}$ , sendo  $T$  constante. Se o módulo de  $F$  for constante a curvatura também será, e descreverá uma trajetória na forma circular ou na forma de hélice.

## 4.2 Relação Entre as Grandezas Dinâmica e a Torção

Iremos dar continuidade em nossa abordagem de grandezas dinâmicas associadas aos entes matemáticos da geometria diferencial, sobretudo, neste momento, a torção. Podemos rescrever a torção, vista no capítulo anterior na equação (3.6), como

$$\tau = -\frac{1}{k^2 v^6} \langle \mathbf{v} \times \mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}} \rangle. \quad (4.10)$$

Substituindo o valor de  $k$  da equação (4.9) na equação da torção acima, teremos

$$\begin{aligned} \tau &= -\frac{\langle \mathbf{v} \times \mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}} \rangle}{\frac{v^6}{4T^2} \left( F^2 - \frac{m}{2T} \langle \mathbf{F}, \mathbf{v} \rangle^2 \right)} = -\frac{\langle \mathbf{v} \times \mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}} \rangle}{\frac{v^6 F^2}{4T^2} - \frac{v^6 m \langle \mathbf{F}, \mathbf{v} \rangle^2}{8T^3}}, \\ \tau &= -\frac{8T^3 \langle \mathbf{v} \times \mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}} \rangle}{2v^6 T F^2 - mv^6 \langle \mathbf{F}, \mathbf{v} \rangle^2}. \end{aligned}$$

Substituindo  $\dot{T}$  por  $\langle \mathbf{F}, \mathbf{v} \rangle$  e  $T^3$  por  $\frac{m^3 v^6}{8}$  na equação anterior, chegaremos a

$$\tau = -\frac{m^3 \langle \mathbf{v} \times \mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}} \rangle}{2T \left( F^2 - m \frac{\dot{T}^2}{2T} \right)}.$$

Distribuindo  $m^3$ , teremos

$$\tau = -\frac{\langle \mathbf{P} \times \mathbf{F}, \dot{\mathbf{F}} \rangle}{2T \left( F^2 - \frac{m\dot{T}^2}{2T} \right)}, \quad (4.11)$$

lembrando que  $\mathbf{P} = m\mathbf{v}$  é o momento linear da partícula.

Cumprimos assim o dever de mostrar as principais características geométricas da curvas descritas por partículas em função de grandezas dinâmicas.

## 4.3 Forças que Produzem Somente Trajetórias Planas

Aproximando nossa relação entre a geometria diferencial e a dinâmica, podemos através de equações responder a questionamentos que não seriam esclarecidos de forma concisa pela matemática convencional: que condições devem ser impostas para que as órbitas descritas por uma força sejam sempre curvas planas?

Como vimos na última proposição do capítulo anterior, a torção nula equivale a uma curva plana. Com isso, em uma trajetória plana, usando a equação (4.11), ocorrerá quando

$$\langle \mathbf{F} \times \dot{\mathbf{F}}, \mathbf{v} \rangle = 0.$$

Essa equação relaciona força e velocidade, entretanto, pretendemos achar condições que sejam escritas exclusivamente em termos de força. Porém, estamos buscando condições para que as órbitas sejam planas independentes das condições iniciais.

### 4.3.1 Força independente da Velocidade

Com a finalidade de facilitar a descrição deste tópico, convém usar as seguintes notações

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (x_1, x_2, x_3), & \mathbf{v} &= (v_1, v_2, v_3), \\ \mathbf{F} &= (F_1, F_2, F_3), & \partial_i &= \frac{\partial}{\partial x_i}, & \partial_t &= \frac{\partial}{\partial t}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Suponha que tenhamos a força dependente somente da posição e do tempo, isto é,  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ . Então a partir da equação (4.12) pela regra da cadeia

$$\begin{aligned}\dot{F}_i &= \frac{\partial F_i}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial F_i}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial F_i}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt} + \frac{\partial F_i}{\partial t}, \\ \dot{F}_i &= \sum_l^3 v_l \partial_l F_i + \partial_t F_i,\end{aligned}\quad (4.13)$$

onde  $v_l = \left( \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt} \right)$  e  $\partial_l F_i = \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_1}, \frac{\partial F_i}{\partial x_2}, \frac{\partial F_i}{\partial x_3} \right)$ .

Por outro lado, as componentes de um produto vetorial de dois vetores  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  em  $\mathbb{R}^3$  podem ser dadas por

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_i = \sum_{j,k}^3 \varepsilon_{ijk} A_j B_k,$$

sendo que  $\varepsilon_{ijk}$  é o símbolo ou conexão de Levi-Civita, isto é,

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{se } (i, j, k) = (1, 2, 3) \text{ ou permutação par dos índices;} \\ -1, & \text{se for permutação ímpar dos índices;} \\ 0, & \text{se algum índice for igual repetido.} \end{cases}$$

Com isso, podemos expressar a seguinte componente do produto vetorial de  $\mathbf{F}$  por  $\dot{\mathbf{F}}$ , como

$$(\mathbf{F} \times \dot{\mathbf{F}})_i = \sum_{j,k}^3 \varepsilon_{ijk} F_j \dot{F}_k. \quad (4.14)$$

Substituindo as equações (4.13) e (4.14) na expressão  $\langle \mathbf{F} \times \dot{\mathbf{F}}, \mathbf{v} \rangle = 0$ , teremos

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{F} \times \dot{\mathbf{F}}, \mathbf{v} \rangle &= \sum_i^3 (F \times \dot{F})_i v_i, \\ &= \sum_i^3 \left( \sum_{j,k}^3 \varepsilon_{ijk} F_j \dot{F}_k \right) v_i, \\ &= \sum_i^3 \left[ \sum_{j,k}^3 \varepsilon_{ijk} F_j \left( \sum_l^3 v_l \partial_l F_k + \partial_t F_k \right) \right] v_i, \\ &= \sum_i^3 \left( \sum_{j,k}^3 \varepsilon_{ijk} F_j \sum_l^3 v_l \partial_l F_k + \sum_{j,k}^3 \varepsilon_{i,j,k} F_j \partial_t F_k \right) v_i, \\ &= \sum_i^3 \left( \sum_{j,k}^3 \varepsilon_{ijk} F_j \sum_l^3 v_l \partial_l F_k \right) v_i + \sum_i^3 \left( \sum_{j,k}^3 \varepsilon_{ijk} F_j \partial_t F_k \right) v_i, \\ \langle \mathbf{F} \times \dot{\mathbf{F}}, \mathbf{v} \rangle &= \sum_i^3 \left( \sum_{j,k}^3 \varepsilon_{ijk} F_j \sum_l^3 \partial_l F_k \right) v_i v_l + \sum_i^3 \left( \sum_{j,k}^3 \varepsilon_{ijk} F_j \partial_t F_k \right) v_i = 0.\end{aligned}\quad (4.15)$$

Estamos à procura condições que garanta órbitas planas, independentes das

condições iniciais. Assim, os coeficientes de  $v_i v_l$  e  $v_i$  em (4.15) devem ser identicamente nulos. Neste caso, o coeficiente do termo linear, a saber,  $v_i$  é exatamente igual as componentes do produto vetorial de  $\mathbf{F}$  por  $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}$ . Assim, podemos ter a seguinte condição

$$\mathbf{F} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} = 0. \quad (4.16)$$

No caso dos coeficientes do termo quadrático,  $v_i v_l$ , após algumas manipulações algébricas chegamos a um conjunto de seis equações diferenciais parciais de primeira ordem. Explicitamente são as seguintes

$$F_2 \partial_1 F_3 - F_3 \partial_1 F_2 = 0, \quad (4.17)$$

$$F_3 \partial_2 F_1 - F_1 \partial_2 F_3 = 0, \quad (4.18)$$

$$F_1 \partial_3 F_2 - F_2 \partial_3 F_1 = 0, \quad (4.19)$$

$$F_3 \partial_1 F_1 - F_1 \partial_1 F_3 + F_2 \partial_2 F_3 - F_3 \partial_2 F_2 = 0, \quad (4.20)$$

$$F_1 \partial_1 F_2 - F_2 \partial_1 F_1 + F_2 \partial_3 F_3 - F_3 \partial_3 F_2 = 0, \quad (4.21)$$

$$F_1 \partial_2 F_2 - F_2 \partial_2 F_1 + F_3 \partial_3 F_1 - F_1 \partial_3 F_3 = 0. \quad (4.22)$$

Concluimos que para a força produzir somente trajetória plana, suas componentes cartesianas deve satisfazer um sistema de nove equações diferenciais parciais. Por isso, são raras as forças que produzem exclusivamente órbitas planas. A solução geral, que fornece a força mais geral possível que produz órbitas planas; infelizmente está fora do alcance devido ao elevado grau de complexidade dessas equações. No entanto, estas equações caracterizam e, portanto, servem como um critério para identificar tais forças.

Um exemplo de forças que geram sempre órbitas planas, são as forças centrais. Tais forças centrais fornecem um teste simples para os resultados acima.

Uma força central é caracterizada pela forma

$$\mathbf{F} = f(r, t) \mathbf{r} \quad \text{ou} \quad F_k = f(r, t) x_k, \quad (4.23)$$

onde  $r = \|\mathbf{r}\|$ . Assim, segue que

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} = \dot{f}(r, t) \mathbf{r},$$

na qual  $\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t}$ . Com isso, verifica-se que

$$\mathbf{F} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} = f(r, t) \mathbf{r} \times \dot{f}(r, t) \mathbf{r} = 0,$$

que, de fato, é identicamente nulo visto que  $\mathbf{F}$  e  $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}$  são colineares. Cumprindo assim a condição da equação (4.16).

Por fim se aplicarmos a equação (4.23), nas seis equações diferenciais parciais citadas acima, podemos, após alguns cálculos, garantir que serão todas identicamente nulas. Ou seja, a força central satisfazem aos critérios das forças que produzem somente órbitas planas.



## 5 *Considerações Finais*

Desde Galileu a matemática vem sendo reconhecida como o instrumento primordial para descrição das leis da natureza. Esse papel tem se tornado mais evidente a cada dia com o desenvolvimento das novas teorias e de seus conceitos e princípios. Podemos afirmar que ambas se complementam, uma vez que, a física dá um sentido mais concreto à matemática e esta é o meio pela qual a primeira pode evoluir. Desse modo, os estudantes de física para compreenderem sua área de atuação, os conceitos físicos e se manterem atualizados com os avanços da ciência, precisam dominar aparatos e ferramentas matemática que abarquem os vários caminhos pela qual uma teoria possa ser interpretada. Sendo que a geometria diferencial é uma dessas importantes ferramentas matemáticas.

Como mostrado neste trabalho, o domínio dessa disciplina proporcionará uma ampla visão ao estudante, possibilitando o mesmo a compreender de forma mais simples alguns problemas relativamente difíceis se tratados com a matemática usual, servindo ainda como alternativa para o desenvolvimento de determinados temas. Desse modo escrever um trabalho de conclusão de curso sobre tal tema, representa um desafio, uma vez que o mesmo requer do estudante de graduação conhecimentos históricos, conceituais e habilidades físicas e matemáticas, requerendo conhecimento de toda a vida acadêmica.

As contribuições desse trabalho são mínimas diante da plenitude e da potencialidade que podem ser alcançadas a partir da geometria diferencial aplicadas na física. Entretanto, não quer dizer que não são importantes, sendo de grande valia no amadurecimento acadêmico.

## *Referências Bibliográficas*

- [1] ALONSO, M.; FINN, E. J. **Física um Curso Universitário: Mecânica**. Vol.1. 2nd ed. São Paulo: Edgard Blücher LTDA, 2002.
- [2] CARMO, M. P. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. ed. SBM, Rio de Janeiro, 2008.
- [3] EVORA, F. R. R. FILOPONO DE ALEXANDRIA E A CRÍTICA AO CONCEITO DE MATÉRIA PRIMA. **Cad. Hist. Fil. Ci., Campinas**, Série 3, v. 10, n. 1, p. 55-76, jan.-jun., 2000. Disponível em:<<http://www.cle.unicamp.br/cadernos/pdf/FatimaEvora-v10-n1.pdf>>. Acessado em: 15 Set.2014.
- [4] GLEICK, J. **ISAAC NEWTON: Uma biografia**. São Paulo: Companhia das letras, 2004.
- [5] PEDUZZI, L.O.Q. **A Evolução Dos Conceitos da Física**. Florianópolis, Sc: UFSC, 2008.
- [6] LEMOS, N. A.; JUNIOR, A. D. P. **Geometria Diferencial de Curvas e Dinâmica da Partícula** Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 33, n. 2, 2306 (2011).
- [7] MACHADO, K. D. **Teoria do Eletromagnetismo**. Vol. 2. 1 ed. Ponta Grossa, Pr:UEPG, 2002.
- [8] NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica: mecânica**. 5 ed. São Paulo: Edgard Blücher LTDA, 2013.
- [9] O' NEILL, B. **Elementary Differential Geometry** 2nd ed. Academy Press, 1966
- [10] PIRES, S. T. **Evolução das Idéais da Física**. 1 ed. São Paulo: Livraria da Física, 2008.
- [11] RAMOS, P. L. P.; PONCZEK, R. L. **Evolução da História dos Conceitos de Energia e Quantidade de Movimento**. Universidade Estadual Feira de Santana, 2011. Disponível em:<<http://dfis.uefs.br/caderno/vol9n12/PatrickPonczek.pdf>>. Acessado em: 15 Set.2014
- [12] TENENBLAT, K. **Introdução à Geometria Diferencial**. 2nd ed. São Paulo: Blucher, 2008.
- [13] WATARI, K. **Mecânica Clássica**. Vol.1 2 ed. São Paulo: Livraria da Física, 2004.