



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
FACULDADE DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E LETRAS DE IGUATU
CURSO DE GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

ANTONIO CHARLES ALVES PINHEIRO

**UMA ANÁLISE DA FORÇA ELÉTRICA E DO
POTENCIAL ELÉTRICO POR SÉRIES INFINITAS**

**IGUATU-CEARÁ
2017**

Antonio Charles Alves Pinheiro

UMA ANÁLISE DA FORÇA ELÉTRICA E DO POTENCIAL ELÉTRICO POR SÉRIES INFINITAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura Plena em Física da Faculdade de Educação, Ciências e Letras de Iguatu - FECLI, como requisito parcial à obtenção do grau de licenciado em Física.

Orientador: Prof. Me. Leonardo Tavares de Oliveira.

IGUATU-CEARÁ

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Universidade Estadual do Ceará

Sistema de Bibliotecas

P654a Pinheiro , Antonio Charles Alves. CDD: 537.
Uma Análise da Força Elétrica e do Potencial
Elétrico por Séries Infinitas [recurso eletrônico] /
Antonio Charles Alves Pinheiro. - 2017.
1 CD-ROM: il.; 4 ¼ pol.

CD-ROM contendo o arquivo no formato PDF do
trabalho acadêmico com 52 folhas, acondicionado em
caixa de DVD Slim (19 x 14 cm x 7 mm).

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) -
Universidade Estadual do Ceará, Faculdade de
Educação, Ciências e Letras de Iguatu, Graduação em
Física, Iguatú, 2017.

Orientação: Prof. Me. Leonardo Tavares de Oliveira.

1. Eletricidade. 2. Séries Numéricas. 3. Princípio
de Superposição. 4. Cargas Elétricas. I. Título.

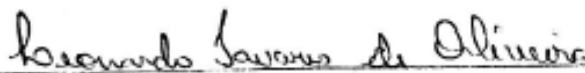
ANTONIO CHARLES ALVES PINHEIRO

UMA ANÁLISE DA FORÇA ELÉTRICA E DO POTENCIAL ELÉTRICO POR SÉRIES
INFINITAS

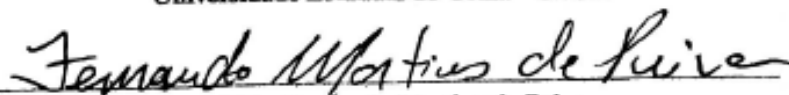
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Curso de Graduação em Física da Faculdade
de Educação, Ciências e Letras de Iguatu
da Universidade Estadual do Ceará, como
requisito parcial para à obtenção do grau de
Licenciado em Física.

Aprovada em: 22 de junho de 2017.

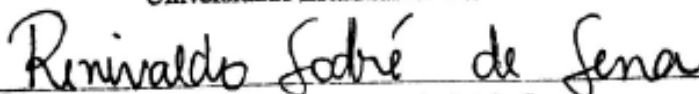
BANCA EXAMINADORA



Prof. Me. Leonardo Tavares de Oliveira (Orientador)
Faculdade de Educação, Ciências e Letras de Iguatu - FECLI
Universidade Estadual do Ceará - UECE



Prof. Dr. Fernando Martins de Paiva
Faculdade de Educação, Ciências e Letras de Iguatu - FECLI
Universidade Estadual do Ceará - UECE



Prof. Me. Renivaldo Sodré de Sena
Universidade Federal do Ceará - UFC

A toda minha família, pelo seu apoio, incentivo e especialmente a minha esposa Marciana, por toda sua compreensão, companheirismo e seu amor.

AGRADECIMENTOS

A minha querida e amada família, em especial meus pais, que apesar da distância, estiveram sempre ao meu lado.

Agradeço a esta pessoa tão especial, minha esposa Marciana Leonarda, pelo seu carinho, amizade, amor, paciência comigo nos momentos difíceis e por acreditar na minha vitória.

Agradeço também ao professor Leonardo, pela orientação e paciência.

Não podia deixar de agradecer aos meus professores da UECE, por ter acreditado em mim e pela suas dedicações em sala de aula.

Resumo

A eletricidade tem um papel fundamental para o desenvolvimento científico e a rápida expansão tecnológica. Neste trabalho faremos uma revisão bibliográfica sobre alguns conceitos da eletricidade e séries infinitas, a partir da análise do artigo apresentado por Possa e Nogueira (2003). Neste caso, iniciamos com uma brevíssima história da eletricidade e seus principais fatos históricos. Trataremos das séries infinitas e suas aplicações na força elétrica e no potencial elétrico, quanto a sua convergência e/ou divergência. Para cada distribuição de cargas puntiformes feitas ao longo de um eixo unidimensional Ox , usando o princípio de superposição, discutiremos os critérios de convergências das séries obtidas. Consideraremos série condicionalmente convergente e absolutamente convergente. Por último, veremos quanto a sua soma condicionalmente convergente e sua aplicação à força elétrica. Tudo isso será fundamental para entendermos a íntima relação entre os resultados físicos e as séries infinitas.

Palavras-chaves: Eletricidade. Séries Numéricas. Princípio de Superposição. Cargas Elétricas

Abstract

Electricity plays a key role in scientific development and rapid technological expansion. In this work, we will perform a literature review on some concepts of electricity and infinite series, based on the analysis of the article presented by Possa and Nogueira (2003). In this case, we begin with a brief history of electricity and its main historical facts. We will deal with infinite series and their applications in electric force and electric potential, as to their convergence and / or divergence. For each distribution of point charges made along a one-dimensional axis Ox , using the superposition principle, we will discuss the convergence criteria of the series obtained. We will consider series conditionally convergent and absolutely convergent. Finally, we will see how much its conditionally convergent sum and its application to the electric force. All of this will be instrumental in understanding the intimate relationship between physical results and infinite series.

Keywords: Electricity. Numerical Series. Principle of Superposition. Electrical Loads.

Lista de Figuras

1	<i>Jarra de Leyden</i>	p. 15
2	<i>Balança de Torção de Coulomb</i>	p. 16
3	<i>Gráfico I</i>	p. 27
4	<i>Gráfico II</i>	p. 28
5	<i>Trabalho da força F ao longo de T</i>	p. 37
6	<i>Distribuição sobre um eixo unidimensional Ox</i>	p. 40
7	<i>Distribuições de cargas negativas e positivas para o potencial</i>	p. 44
8	<i>Distribuições de cargas positivas e negativas para a força</i>	p. 48

Sumário

1	INTRODUÇÃO	p. 11
2	UMA BREVÍSSIMA HISTÓRIA DA ELETRICIDADE	p. 13
2.1	OS PRIMÓRDIOS DA ELETRICIDADE	p. 13
2.1.1	A lei de Coulomb	p. 15
3	SÉRIES NUMÉRICAS	p. 20
3.1	SEQUÊNCIAS DE NÚMEROS REAIS	p. 20
3.1.1	Limite de uma Sequência	p. 21
3.2	SÉRIES INFINITAS	p. 23
3.3	CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA E DIVERGÊNCIA PARA SÉRIES INFINITAS	p. 26
3.3.1	CrITÉrio da Comparação	p. 26
3.3.2	CrITÉrio da Integral de Cauchy	p. 27
3.3.3	CrITÉrio do Limite	p. 29
3.3.4	CrITÉrio de Cauchy para Convergência de Série	p. 30
3.4	SÉRIES ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE E CONDICIONALMENTE CONVERGENTE	p. 31
3.4.1	CrITÉrio da Raiz de Cauchy	p. 31
3.4.2	CrITÉrio da Razão de Cauchy	p. 32
3.5	SÉRIES ALTERNADAS	p. 33
3.5.1	CrITÉrio de Leibniz	p. 33
3.5.2	Reordenação de uma Série	p. 34

3.6	SÉRIE DE TAYLOR	p. 35
3.6.1	Série de Maclaurin	p. 35
4	FORÇA ELÉTRICA E POTENCIAL ELÉTRICO POR SÉRIES INFINITAS	p. 37
4.1	A DIFERENÇA DE POTENCIAL ELÉTRICO POR SÉRIES INFINITAS POSITIVAS	p. 37
4.1.1	Potencial Elétrico	p. 37
4.1.2	A Problemática do Potencial Elétrico por Séries Infinitas	p. 39
4.2	A FORÇA E O POTENCIAL ELÉTRICOS POR SÉRIES INFINITAS ALTERNANTES	p. 44
4.2.1	Aplicação da Série Absolutamente e Condicionalmente Convergente .	p. 44
4.2.2	A Série Condicionalmente Convergente da Força Elétrica	p. 48
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	p. 50
	REFERÊNCIAS	p. 51

1 INTRODUÇÃO

Cientificamente já fizemos um enorme progresso desde as primeiras ideias filosóficas apresentadas pelos gregos, nossa aplicação e conhecimento sobre o Eletromagnetismo é incomparavelmente maior hoje. Através do desenvolvimento de técnicas matemáticas poderosas e de suas aplicações no meio científico, fomos capazes de criar equipamentos e fazer observações sofisticadas muito além das nossas perspectivas. No entanto, ideias fundamentais como carga elétrica, força elétrica e potencial elétrico continuam as mesmas e também a procura de muitas respostas a perguntas primitivas, como do que é feita a matéria?

Para a física as séries infinitas são de grande importância. Como as funções que surgem em física-matemática, tais como, por exemplo, os polinômios de Taylor, no qual para obter informações sobre uma equação muitas vezes simplificamos uma função considerando apenas os primeiros termos em uma série de Taylor.

Neste trabalho iremos desenvolver e analisar as ideias já tratadas por Possa e Nogueira (2003) no qual mostrar o envolvimento da eletricidade por séries infinitas. No primeiro capítulo vamos tratar de alguns fatos históricos mais marcantes para a eletricidade, tomando como apoio o Pires (2008) e o Assis (2010). Desenvolveremos a lei de Coulomb, fundamental para os conceitos da eletricidade.

No capítulo seguinte iremos desenvolver as nossas ferramentas, usando como aparato o Guidorizzi (2002), Lima (2002) e Stewart (2013), para o tratamento de séries numéricas, essencial para análise deste trabalho, veremos os principais teoremas, mais alguns critérios importantes para o diagnóstico das séries que trataremos aqui. Veremos séries alternadas e série de Taylor primordial para série de Maclaurin.

Por fim, serão apresentadas algumas demonstrações aplicadas ao eixo unidimensional Ox para que possamos discutir a respeito do seu significado físico quanto a força e potencial associados às séries infinitas. Inicialmente trabalharemos com a problemática de não podemos calcular a diferença de potencial elétrico entre dois pontos gerado por uma

distribuição de cargas. Temos que achar uma forma de contornar esta divergência e calcular a diferença de potencial elétrico. Fisicamente estaremos frente a frente com séries divergentes tendendo ao infinito, quando isso acontece temos um desconforto quanto ao resultado final. Pois, na física, partimos de um princípio de que nenhuma quantidade mensurável pode ter um valor infinito. Isso não proíbe o infinito de existir no mundo da física, no entanto, requer que o resultado final seja fisicamente significativo.

2 ***UMA BREVÍSSIMA HISTÓRIA DA ELETRICIDADE***

A história da eletricidade está repleta de experiências sobre atração e repulsão, corpos carregados por atrito, contato e indução, diferença entre materiais condutores e isolantes, entre outros. Trataremos aqui do breve contexto histórico da eletricidade, tomando como apoio as obras de Pires (2008) e Assis (2010), onde mostrar o surgimento destes fenômenos e leis, assim como os seus diferentes enfoques ou interpretações no qual é essencial para o entendimento inicial deste trabalho.

2.1 **OS PRIMÓRDIOS DA ELETRICIDADE**

A eletricidade é um dos fenômenos mais incríveis da natureza. Os gregos foram os primeiros a descobrir este fenômeno. Provavelmente Tales de Mileto (625-546 a.C.), filósofo grego, no ano 600 a.C., já conhecia alguns efeitos de caráter elétrico, tal como a capacidade de um âmbar¹ em atrair leves objetos quando atritado. Isso era obtido também com outros materiais, com graus variados de intensidade. Os gregos tinham também o conhecimento que algumas "pedras", como as magnetitas (lodestones), encontradas em uma região da Ásia Menor, com o nome de Magnésia, atraíam o ferro sem mesmo serem atritadas. Só mais tarde na Idade Média, que Petrus Peregrinus (1220 - 1270) escreveu uma obra conhecida como *Epístola de Magnete*, talvez o primeiro trabalho escrito no qual buscava explicar os fenômenos elétricos e magnéticos. Os atomistas acreditam que alguma coisa emitida por um dos corpos, viajaria até o objeto atraído. Mais tarde surgiu a ideia de uma aura envolvendo os corpos, chamada de "eflúvio".

Em 1600, William Gilbert (1540-1603), médico da rainha Elizabeth I, foi o primeiro a fazer estudos sistemáticos sobre fenômenos elétricos e magnéticos. Era um famoso médico em Londres. Porém, quanto a sua reputação como cientista foi graças ao seu livro *Do magneto*,

¹uma resina fóssil translúcida e de coloração amarela derivada de um pinheiro antigo que não existe mais.

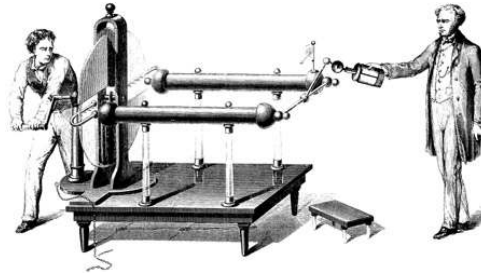
corpos magnéticos e do grande magneto Terra, publicado em 1600. Foi ele quem atribuiu a palavra Eletricidade, derivando-a do "elektron" que significa âmbar em grego. Gilbert mostrou que o efeito elétrico não é exclusivo do âmbar, mas que muitas outras substâncias podem ser carregadas eletricamente ao serem atritadas. Ele não acreditava em ação à distância e, assim, se um corpo atuava em outro sem tocá-lo, alguma coisa invisível deveria ter sido enviado de um corpo ao outro.

Com os avanços científicos de Gilbert seguiu-se uma grande quantidade de pessoas construindo experimentos eletrostáticos. Em 1672, Otto Von Guericke (1602-1686), pioneiro nestes experimentos, inventa uma máquina de atrito geradora de cargas elétricas, moldada numa esfera de vidro onde girava constantemente. Este experimento apareceu em seu Livro *Novas Experiências de Magdeburgo sobre Espaço Vazio*. A citação é do seu livro:

O. v. Guericke (1672 *apud* ASSIS, 2010) explica que caso a pessoa tenha interesse, ela deve pegar uma esfera de vidro, um pequeno frasco do tamanho de uma cabeça de bebê e envolve-la com enxofre moído em um pilão. Então, aquecendo-a, deve derreter o pó. Depois de esfriá-la deve quebrar a esfera [de vidro], extrair a bola [de enxofre] que sobrou e guardá-la em um lugar seco de baixa umidade.

Esta montagem de Guericke é considerada como sendo a primeira máquina elétrica da história. A produção destes experimentos trouxe grandes avanços para o estudo dos fenômenos eletrostáticos; numa mudança de simples observações para a experimentação de efeitos. Mais tarde em 1729, Stephen Gray (1696-1736), apresentou um trabalho, onde verificava que a eletricidade se movia de um objeto para outro, na qual mostrou que o mistério fluído elétrico, poderia se propagar por algumas matérias... e outras não. Isso levou a Gray, a dividir o mundo em dois diferentes tipos de substâncias. Sendo conhecidos futuramente como condutores e isolantes elétricos. Em outro momento na Holanda em 1745, Pieter Von Musschenbrook (1692-1761), professor em Leyden inventou um dispositivo chamado de "Jarra de Leyden" onde mostra que também era possível armazenar a eletricidade por meio da qual poderia acumular consideráveis quantidades de eletricidade.

No decorrer do século XVIII, conseguindo produzir e armazenar a eletricidade, as máquinas elétricas começaram a evoluir aparecendo os geradores de eletricidade estática onde deram um grande impulso à parte experimental. Com Benjamin Franklin (1706-1790), a "Jarra de Leyden" seguia em destaque, chegando à conclusão de que a eletricidade era um elemento presente, e em proporcionalidades diferentes, em toda a matéria. A eletricidade já não era criada pelo atrito dos corpos, mas o deslocamento de um objeto para outro. Logo a quantidade permanecia constante. Defendia a existência de um único fluído elétrico, e que os dois tipos diferentes de eletricidade correspondiam em existência excesso de um ou a carência

Figura 1: Jarra de Leyden

Fonte: <https://geocities.ws/saladefisica5/leituras>

de outro. Chamou de "positivamente carregado" o corpo com excesso de carga e "negativamente carregado" o corpo em carência de carga. Quando corpos eram colocados em contatos a corrente elétrica fluiria de um corpo para outro dependendo da diferença de carga. Franklin acreditava que a eletricidade poderia agir à distância, porém ele nunca desistiu da teoria do eflúvio.

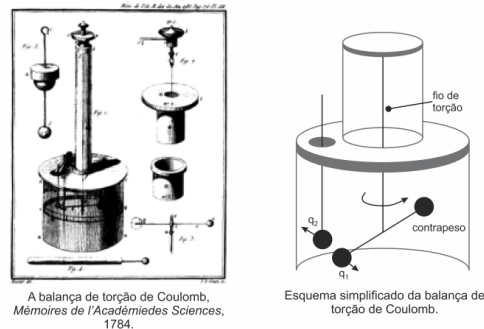
Esta teoria do eflúvio muito foi contestada, demonstrada experimentalmente e substituída pela ação à distância por Franz Ulrich Theodor Aepinus (1724-1802). Já, o primeiro a fazer uso do inverso do quadrado da distância para a força entre polos magnéticos foi John Michell (1724-1793), onde em 1750 publicou esta e outras várias teorias. Joseph Priestley (1733-1804) descobriu, em 1767, fazendo analogia a força de gravitação (onde no interior de uma esfera é nula), que a força elétrica também seria nula no interior de uma esfera oca e eletrizada. Propôs também que esta força elétrica deveria obedecer a proporcionalidade $1/r^2$, onde r é a distância entre as cargas, a mesma da força da gravidade. Ficou por conta de Henry Cavendish (1731-1810) e Daniel Bernoulli (1700-1782) tentarem fazer medições para comprovar a Lei de Priestley. Porém, foi Charles Augustin Coulomb (1736-1806) que realizou tal comprovação depois de experiências cuidadosas usando balanças de torção.

2.1.1 A lei de Coulomb

O primeiro a sugerir uma expressão para a força elétrica foi Daniel Bernoulli, em 1760, simplesmente com base em analogias. A demonstração através do arranjo experimental, utilizando uma balança de torção, foi feita por Coulomb, e posteriormente adaptada por Cavendish para, determinar a constante gravitacional (G). Com a ajuda desse equipamento pode-se comprovar a forma da força elétrica.

Como mostrando por Machado (2000), na balança de torção, existe uma haste q_1q que horizontalmente, possui na sua extremidade, uma esfera q_1 com uma superfície metálica, e, na outra, um contrapeso q . Essa haste é suspensa por um fio de constante de torção conhecida,

b

Figura 2: Balança de Torção de Coulomb

Fonte: <https://euduca.com.br/files/questions/65/20160724040043165.png>

k , presa, na parte superior, a uma escala giratória, provocando uma torção no fio. Próximo à esfera q_1 , uma distância r_{12} , existe outra esfera, q_2 , também de superfície metálica, só que fixa. A posição inicial do haste quando não há nenhuma carga elétrica nas esferas é zero no marcador.

No primeiro momento do experimento, Coulomb eletrizou as duas esferas q_1 e q_2 com cargas de mesmo sinal; primeiramente eletrizou a esfera q_2 , por um processo de eletrização por indução no qual a esfera q_1 foi atraída para a esfera q_2 , trocando, metade da carga de q_2 para q_1 ; de forma que produziu um torque, sobre a esfera q_1 , fazendo o haste girar na horizontal e torcendo o fio, até que o torque da força elétrica ser contrabalançado pelo torque gerado pela torção do fio. Coulomb então girou a escala rotatória de um certo ângulo α , até trazer de volta a haste à posição inicial, e mediu o ângulo nessa escala.

No segundo momento, ele utilizando agora uma esfera q_3 igual à esfera q_2 , só que neutra, Coulomb tocou a esfera q_2 com a q_3 , e como elas eram idênticas, metade da carga foi transferida de q_2 para q_3 . Com isso, a força elétrica entre, q_2 e q_3 diminuir, e novamente medimos o torque, através do ângulo α' de que a haste precisava girar para volta à posição inicialmente. Isso foi necessário porque Coulomb queira medir, neste momento a influência da carga na força elétrica trazendo a haste à posição inicial zero, a distância r_{12} entre esferas q_1 e q_2 se manteve igual, o que faz com que a variação na força se devesse apenas à variação das cargas. Poderemos ver como resultado desta parte da experiência que, tendo sido reduzida a carga à metade, o torque assim como a força elétrica, também o foi. Portanto, a força elétrica que agir sobre q_1 era diretamente proporcional à carga q_2 por questões de simetria relacionadas à terceira Lei de Newton ou à conservação do momento linear, a força elétrica que agir em q_1 e q_2 são proporcionais. Assim, como essas duas forças eram iguais em módulo por causa da terceira Lei de Newton, a força elétrica sobre q_2 também tinha que ser proporcional à carga em q_2 . Dessa forma, a força elétrica era proporcional a ambas as cargas, e, conseqüentemente, ao produto delas.

Agora analisando a relação entre a força elétrica e a distância, primeiramente podemos observar que a experiência foi feita com a esfera q_2 a uma distância r_{12} da esfera q_1 . No segundo momento, cargas foram transferidas para ambas, e a força entre elas produziu uma torção no fio até que se atingiu a situação de equilíbrio. Então, a escala rotatória foi utilizada para trazer de volta a haste para a posição inicial e a torção do fio foi obtida pelo ângulo α_1 medido na escala.

Feitas estas medidas, a esfera q_2 foi colocada a uma nova distância r'_{12} da esfera q_1 . Com a variação na distância, a força elétrica também variou, e um novo torque foi gerado por essa força. Novamente, a escala foi girada para trazer de volta a haste à posição inicial, e um novo ângulo α_1 foi medido. Como as cargas em q_1 e q_2 não eram alteradas, nesta parte da experiência verificou a influência da distância na força elétrica. Os resultados experimentais mostraram que, com a aproximação das esferas, o ângulo medido aumenta de forma proporcional ao quadrado do inverso da distância $1/r^2$, isto é, por sua vez implica que a força elétrica também é proporcional ao quadrado do inverso da distância. Usando uma constante de proporcionalidade k , no SI, escrita da seguinte forma

$$K \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 10^{-7} c^2 N \cdot m^2 / C^2 \cong 8,98755 \cdot 10^9 N \cdot m^2 / C^2.$$

Resumindo as duas partes da experiência, o resultado obtido pode ser sintetizado na equação. Medimos então

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}. \quad (2.1)$$

Apresentar-se anteriormente, a chamada Lei de Coulomb. Com experiências, não muito precisas, Coulomb conseguiu obter de forma correta a lei da força elétrica.

Neste momento dois importantes acadêmicos italianos, Luigi Aloisio Galvani (1737-1798), professor de Anatomia da Universidade de Bolonha, demonstrou em 1780 por vários experimentos, que segundo ele, haveria uma espécie de "eletricidade animal", mais tarde esta eletricidade se tornou uma fonte de controvérsias. Outro em 1800, Alessandro Volta (1745-1827), físico, construiu dispositivo gerador de eletricidade por meio de reações químicas - a "pilha voltaica". Ambos fascinados pela eletricidade aplicaram a ela sua visão de mundo diferente. Em 1808, Humphrey Davy (1778-1829), construiu a maior pilha do mundo. Davy mostrou que o fluxo contínuo de eletricidade da pilha através dos filamentos, onde cruzou uma forte e constante corrente elétrica. Esse fenômeno trouxe a inauguração de uma nova forma de iluminação - o arco voltaico.

Em seguida surgiria a ideia que poderia haver uma relação entre a eletricidade e

magnetismo. Em 1735, foi publicado em um periódico na *Philosophical Transactions of the Royal Society*, no qual relatava um acidente onde uma caixa contendo alguns metais teria sido destruída e alguns objetos teriam ficado imantados atraindo outros metais. Logo vários experimentos surgiriam tentando explicar este fenômeno. Em 1807, o físico dinamarquês Hans Christian Oersted (1777-1851), iniciou seus estudos relacionados a ação da eletricidade sobre objetos imantados. Porém, somente em 1820, que ele percebeu que ao aproximar uma agulha magnetizada de um fio no qual passava uma corrente, a mesma sofre uma deflexão: nascia a relação eletricidade e magnetismo. Ele apresentou pouco mais tarde seus resultados, porém não determinou as leis quantitativas do fenômeno. Surgia assim a ciência do Eletromagnetismo.

Depois de cinco anos, André Marie Ampère (1775-1836), o físico francês, observou uma atração quando as correntes elétricas fluíssem na mesma direção, entre fios paralelos, e uma repulsão quando as correntes elétricas fluíssem em direções opostas. Construiu um pouco mais tarde a ideia onde enrolado um fio na forma de espiral, fazendo passar uma corrente, tal se comportaria exatamente como ímã. Sugeriu também que no interior dos corpos existiria uma corrente fluindo, magnetizados dos corpos. Segundo ele, cada molécula teria no interior uma corrente circular. Ampère analisava matematicamente esses fenômenos com relação as forças entre pares de partículas, ele não fazia especulações sobre qual seria as causas dos fenômenos.

Michael Faraday (1791-1867), é considerado um dos maiores físicos experimentais de todos os tempos. Com 14 anos era um simples aprendiz de encadernador onde teve a oportunidade de ler vários livros. Realizaria mais tarde uma quantidade enorme de experimentos como assistente do famoso químico Sir Humphry Davy. Suas contribuições para o eletromagnetismo começariam a ganhar prestígio em 1821, o editor da revista *Annals of Philosophy* solicitou-lhe que escrevesse sobre as experiências e teorias eletromagnéticas. Não demorou muito para Faraday mostrar todo o seu potencial, onde passaria a relatar seus próprios experimentos. Fez descobertas como a decomposição química por meio da corrente elétrica. Em 1831, fez observações sobre deslocamento de um ímã próximo de um fio no qual produziria uma corrente elétrica neste fio. Verificou também que variando uma corrente em um fio produzia corrente noutro fio próximo. Foi o descobridor da indução eletromagnética. No decorrer dos seus experimentos e descobertas, após observar figuras formadas por limalhas de ferro produzidas por um ímã quando colocadas sobre folhas de papel, Faraday passou a ver as forças elétricas e magnéticas como uma espécie de linhas elásticas que se estendia no espaço a partir de ímãs e que podiam ser distorcidas, as quais ele chamou de *linhas de forças*. Era com estas linhas que o espaço vazio deveria ser preenchido, este passaria a formar um campo de forças.

Apoiados nas ideias de Michael Faraday surgiu o físico e matemático escocês James Clerk Maxwell (1831-1879). Aos 14 anos de idade ganhou a Medalha de Matemática da Royal Society de Edimburgo pela invenção de um método mecânico. Contribuiu para várias áreas da física, estabeleceu a relação entre eletricidade, magnetismo e luz. Foi influenciado pelos trabalhos de Thomson e Faraday, em especial pelas linhas de força. Reconheceu que sem a intuição física de Faraday jamais teriam desenvolvido a teoria do Eletromagnetismo. Maxwell é geralmente lembrado como o cientista do século XIX a ter mais influência sobre a física do século XX e o responsável por contribuições básicas nos modelos naturais, sendo considerada uma ponte entre a matemática e a física.

3 SÉRIES NUMÉRICAS

As séries estão mais frequentemente na matemática pura, contudo, elas surgem também na física. Algumas delas são utilizadas em áreas como o eletromagnetismo. A seguir apresentaremos algumas propriedades de séries que utilizaremos ao longo deste trabalho, apoderando-se das obras de Guidorizzi (2002), Lima (2002) e Stewart (2013). Começaremos com os limites de sequências de números reais em seguida trataremos de séries infinitas quanto a: critério de convergência e divergência. Por fim, veremos as séries alternadas, seu critério de convergência e série de Taylor.

3.1 SEQUÊNCIAS DE NÚMEROS REAIS

Uma sequência de números reais é uma função definida no conjunto dos \mathbb{N} dos números naturais e tomando valores no conjunto \mathbb{R} dos números reais. Assim, se $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma sequência de números reais, o valor $a(n)$ será representado por a_n e chamado o *termo geral* ou *n-ésimo termo* da sequência a .

Escrevemos $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$, ou $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ou ainda a_n para indicar a sequência a .

Em relação as sequências $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, podemos dizer:

1. *Limitada superiormente* quando existe um número real b tal que $a_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isso significa que todos os termos a_n pertencem à semi-reta $(-\infty, b]$.
2. *Limitada inferiormente* quando existe um número real c tal que $c \leq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isso significa que todos os termos a_n pertencem à semi-reta $[c, +\infty)$.
3. *Limitada* quando é limitada superior e inferiormente, para todo $n \in \mathbb{N}$. Isso significa quando existem $b, c \in \mathbb{R}$ tais que $a_n \in [b, c]$.
4. *Ilimitada* quando não é limitada.

Dada uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, uma subsequência de a é a restrição da função $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k < \dots\}$ de \mathbb{N} .

Também podemos classificar uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, como:

1. *Crescente* quando $a_n < a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n < \dots$.
Quando $a_n \leq a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ a sequência diz-se *não-decrescente*.
2. *Decrescente* quando $a_n > a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > \dots$.
Quando $a_n \geq a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ a sequência diz-se *não-crescente*.

As sequências crescentes, não-decrescentes, decrescentes e não-crescentes chamamos de sequências monótona.

3.1.1 Limite de uma Sequência

Definição 3.1 *Afirmamos que o número real L é limite da sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, e escrevemos*

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad (3.1)$$

quando para cada número real $\varepsilon > 0$ é possível obter um número natural n_0 tal que

$$|a_n - L| < \varepsilon, \quad (3.2)$$

para todo $n > n_0$.

Em linguagem simbólica:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; n > n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon,$$

ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; n > n_0 \Rightarrow a_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon).$$

Assim, $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ se, e somente se, todo intervalo aberto de centro L contém todos os termos a_n da sequência, salvo talvez, para um número finito de índices n .

Logo, por definição temos que se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ (real, finito), diz-se que a sequência a_n converge para L , ou tende para L . Uma sequência que possui limite chama-se *convergente*. Caso contrário, ela se chama *divergente*. Assim, podemos afirmar que uma sequência a_n diz-se divergente quando, para nenhum número real L , é verdade que se tenha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$.

Apresentaremos, a seguir, alguns resultados sobre limites, com o objetivo de podermos analisar de forma mais detalhada as séries que virão a seguir. Neste primeiro momento, mostraremos que uma sequência não pode possuir dois limites distintos.

Teorema 3.1 (*Unicidade do limite*) Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$, então $a = b$.

Prova. Dado qualquer número real $a \neq b$ e seja $\varepsilon = \frac{1}{2} |b - a| > 0$. Além disso, note que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap (b - \varepsilon, b + \varepsilon) = \emptyset$, pois se existisse $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$, então $|b - a| = |b - a_n + a_n - a| \leq |a_n - b| + |a_n - a| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |b - a|$, um absurdo. Logo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap (b - \varepsilon, b + \varepsilon) = \emptyset$. Por outro lado, $a_n \rightarrow a$ então, para todo $\varepsilon > 0$, em particular $\varepsilon = \frac{1}{2} |b - a| > 0$, tem-se que existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $n > n_0 \Rightarrow a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Daí, $a_n \notin (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$, $\forall n > n_0$, ou seja, $a_n \rightarrow b$ absurdo. Logo, $a = b$. ■

Teorema 3.2 Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$, então toda subsequência de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para L .

Prova. Seja $(a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots, a_{n_k}, \dots)$ uma subsequência de (a_n) . Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - L| < \varepsilon$ para todo $n > n_0$. Como os índices da subsequência formam um subconjunto infinito, existe entre eles um $n_{k_0} > n_0$. Então $n_k > n_{k_0} \Rightarrow n_k > n_0 \Rightarrow |a_{n_k} - L| < \varepsilon$. Logo $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n_k} = L$. ■

Teorema 3.3 Toda sequência convergente é limitada.

Prova. Seja $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ e tome $\varepsilon = 1$. Então, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \in (L - 1, L + 1)$ para todo $n > n_0$. Consideremos o conjunto finito $D = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n_0}, L - 1, L + 1\}$. Sejam $M = \max D$ e $m = \min D$. Então, $m \leq a_n \leq M$ para todo $n_0 \in \mathbb{N}$, ou seja, (a_n) é limitado. ■

Exemplo 3.1 Vejamos que a sequência $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ tem limite zero.

Com efeito, dado $\varepsilon > 0$ podemos obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Então,

$$\forall n > n_0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Teorema 3.4 Toda sequência monótona limitada é convergente.

Prova. Suponha que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é não-decrescente, isto é, $a_n \leq a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $b \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, dado $L = \sup \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Vamos provar que $a_n \rightarrow L$. Com efeito, dado qualquer $\varepsilon > 0$, como $L - \varepsilon$ não é cota superior do conjunto dos termos da sequência (a_n) , pois $L - \varepsilon < L = \sup \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Logo, existe algum $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $L - \varepsilon < a_{n_0} \leq L$. Daí temos que se $a_n \geq a_{n_0}$ para todo $n \geq n_0$, $L - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq L < L + \varepsilon$, para todo $n \geq n_0$. Assim, $a_n \rightarrow L$. Para (a_n) não-crescente e $a_n \rightarrow \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, prova-se de forma análoga. ■

3.2 SÉRIES INFINITAS

Nesta seção definiremos somas infinitas através das sequências. Assim sendo, poderemos mostrar que algumas somas podem convergir e outras não, já que nem toda sequência possui limite. A seguir trataremos das condições para convergência e divergência. Problema principal da teoria de séries.

A partir de uma sequência de números reais a_n formamos uma nova sequência (s_n) , cujos termos são as somas

$$s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1}, \quad (3.3)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, que denominamos as reduzidas da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. A parcela a_n é denominada o *n-ésimo termo ou termo geral* da série.

Se existir o limite é

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n), \quad (3.4)$$

dizemos que a série infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente e o seu limite S será chamado soma da série.

Escrevemos então

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (3.5)$$

Se a sequência das reduzidas não convergir, diremos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente. Uma condição necessária para que uma série convergia é seu termo geral tender a zero.

Teorema 3.5 Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série convergente então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Prova. Seja $S = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, onde $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Evidentemente, tem-se também $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = S$. Logo $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = S - S = 0$

■

Exemplo 3.2 A recíproca do teorema citado anteriormente é falsa.

De fato, o contra-exemplo clássico, bastante conhecido, é dado pela série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Neste caso o seu termo geral $\frac{1}{n}$ tende para zero, mas a mesma diverge. Com efeito,

$$s_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \dots + \frac{2^{n-1}}{2^n} = 1 + \frac{n}{2}.$$

Logo, vemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2^n} = \infty$ e, por consequência $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$. Como a sequência (s_n) é crescente e ilimitada superiormente, temos que $s_n \rightarrow \infty$, ou seja, a série harmônica diverge.

Notemos que, de um modo razoável, plausível, porém ainda assim arbitrário, definimos série infinita como igual a S e que uma condição necessária (mas não suficiente), como mostramos anteriormente, para essa convergência acontecer é $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. A condição para a existência de um limite S é dada quando para todo $\varepsilon > 0$, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ fixo tal que,

$$|S - s_n| < \varepsilon, \quad (3.6)$$

para $n > n_0$.

Quando tivermos uma soma infinita, ou o limite não existir ou ainda mais se existir s_n podendo não convergir a um limite único, mas oscilar, como no caso a seguir

$$s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots - (-1)^n + \dots \quad (3.7)$$

Dependendo da escolha feita das suas reduzidas quando de ordem n ímpar teremos $s_n = 1$ e para n par implicar em $s_n = 0$. Séries como essa são conhecidas como oscilantes. Pois, não há nenhuma convergência para este limite. Muitas vezes, o elemento divergente é ampliado para incluir também séries oscilantes. Podemos explorar as séries geométrica e harmônica para melhor esclarecer a natureza matemática da convergência e da divergência de uma série.

Exemplo 3.3 A série geométrica é do tipo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a = 1 + a + \dots + a_n \quad (3.8)$$

Quanto as suas condições de convergência temos:

- divergente, quando $|a| \geq 1$, pois, neste caso, o termo geral não tende para zero.
- quando $|a| < 1$, convergir, pois, neste caso, a sequência das suas somas parciais é

$$s_n = 1 + a + \dots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}, \quad (3.9)$$

isto é, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, tende para $\frac{1}{1-a}$.

Exemplo 3.4 A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ é convergente e sua soma é 1. Com efeito, sendo $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Trata-se de uma série telescópica, e sua reduzida de ordem n é

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Logo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1$.

Exemplo 3.5 Considere a série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, generalizada, analisaremos para $\alpha > 1$ se converge. Como os termos desta série são positivos, a sequência (s_n) de suas somas parciais é crescente. Para provar que (s_n) converge, basta obter uma subsequência limitada. Tomaremos $m = 2^n - 1$,

$$s_{2^n-1} = 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \dots + \frac{1}{(2^n-1)^\alpha}\right)$$

$$s_{2^n-1} < 1 + \frac{2}{2^\alpha} + \frac{4}{4^\alpha} + \dots + \frac{2^{n-1}}{(2^{n-1})^\alpha} = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{2}{2^\alpha}\right)^i,$$

pois $\frac{1}{(2^n-1)^\alpha} = \frac{1}{(2^{n-1}+2^{n-1}-1)^\alpha}$. Como $\alpha > 1$, temos $\frac{2}{2^\alpha} < 1$, logo a série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{2^\alpha}\right)^i$ converge e é, portanto limitada. Assim $s_m < c$ (onde c é a soma da convergência), para todo $m = 2^n - 1$. Concluímos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ é convergente quando $\alpha > 1$. Como já vimos no exemplo 3.1 onde a série é divergente para $\alpha = 1$.

Observação 3.1 Das propriedades aritméticas dos limites de sequências, resulta que:

- quando $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são séries convergentes, então a série $\sum(a_n + b_n)$ é convergente, visto que $\sum(a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$.
- quando $\sum a_n$ é convergente, então a série $\sum(\alpha a_n)$ é convergente, visto que $\sum(\alpha a_n) = \alpha \sum a_n$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.
- quando as séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$ convergem, então a série $\sum c_n$ cujo termo geral é $c_n = \sum_{i=1}^n a_i b_n + \sum_{j=1}^{n-1} a_n b_j$ converge e $\sum c_n = (\sum a_n)(\sum b_n)$.

3.3 CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA E DIVERGÊNCIA PARA SÉRIES INFINITAS

Analisaremos a seguir alguns critérios importantes para o desenvolvimento do nosso trabalho. Inicialmente nos ocuparemos em desenvolver os critérios mais simples, passando logo em seguida para os critérios mais complicados. Por enquanto, começaremos analisando séries de termos positivos, em seguida analisaremos as de termos negativos.

3.3.1 Critério da Comparação

Teorema 3.6 (Critério da Comparação) *Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ séries de termos não-negativos. Se existem $\alpha > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $a_n \leq \alpha b_n$ para todo $n \geq n_0$, tem-se*

- (a) *se $\sum b_n$ for convergente e $a_n \leq b_n$ para todo n , então $\sum a_n$ convergente.*
- (b) *se $\sum b_n$ for divergente e $a_n \geq b_n$ para todo n , então $\sum a_n$ divergente.*

Prova. Suponha que (s_n) e (t_n) sejam as reduzidas das séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$, respectivamente.

- (a) Como os termos de ambas as séries são não-negativos, então as sequências (s_n) e (t_n) são não-decrescentes pois $(s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. No entanto, por hipótese $\sum b_n$ é convergente, assim existe $t \in \mathbb{R}$ tal que (t_n) converge para t . Logo, $t_n \leq t$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Porém, $a_n \leq b_n$ para todo n , assim $s_n \leq t_n < t$. Portanto, (s_n) é monótona e limitada, pelo teorema (3.4) convergente.
- (b) Por hipótese a reduzida t_n da série $\sum b_n$ é divergente. Então, $t_n \rightarrow \infty$. Como $a_n \geq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, implica que $s_n \geq t_n$. Portanto, $s_n \rightarrow \infty$ e $\sum a_n$ é divergente.

3.3.2 Critério da Integral de Cauchy

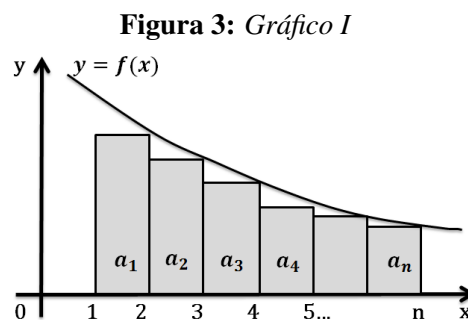
Muito semelhante com o critério anterior, este também é um critério de comparação, só que agora comparamos a série a uma integral. Quando comparamos geometricamente a área de uma série de retângulos de largura unitária com a área sob a curva.

Teorema 3.7 (Critério da Integral) *Se f é uma função contínua, positiva e decrescente em $[1, \infty[$ e seja $f(n) = a_n$. Então a série $\sum a_n$ é convergente se, e somente se, a integral imprópria $\int_1^{\infty} f(x)dx$ for convergente. Então, tem-se*

(a) $\int_1^{\infty} f(x)dx$ for convergente, então $\sum a_n$ é convergente.

(b) $\int_1^{\infty} f(x)dx$ for divergente, então $\sum a_n$ é divergente.

Prova. A área do primeiro retângulo sombreado na figura 3 é o valor de f na extremidade direita de $[1, 2]$, ou seja, $f(2) = a_2$.



Fonte: elaborado pelo autor

Com efeito, comparando as demais áreas dos retângulos sombreados com a área sob a curva $y = f(x)$ de 1 até n , obtemos que

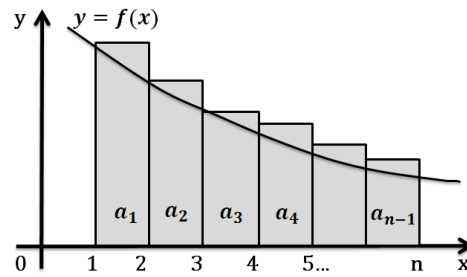
$$a_2 + a_3 + \dots + a_n \leq \int_1^n f(x)dx. \quad (3.10)$$

Visto que essa desigualdade depende do fato de f ser decrescente. Analogamente, podemos ver na figura 4.

Então,

$$\int_1^n f(x)dx \leq a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1}. \quad (3.11)$$

Figura 4: Gráfico II



Fonte: elaborado pelo autor

(a) Se $\int_1^{\infty} f(x)dx$ for convergente, então usando a (3.10) dá a

$$s_n = a_1 + \int_1^n f(x)dx \leq \int_1^{\infty} f(x)dx = M, \quad (3.12)$$

como $s_n \leq M$ para todo n , a sequência (s_n) é limitada superiormente. Então (s_n) é uma sequência crescente limitada, logo, é convergente pelo teorema (3.4). Portanto, isso mostrar que $\sum a_n$ é convergente.

(b) Se $\int_1^{\infty} f(x)dx$ for divergente, então $\int_1^{\infty} f(x)dx \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$ porque $f(x) \geq 0$. Dada a (3.11) vemos que

$$\int_1^n f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} a_k = s_{n-1} \quad (3.13)$$

e também $s_{n-1} \rightarrow \infty$. Isso sugere que $s_n \rightarrow \infty$, logo $\sum a_n$ é divergente.

■

Exemplo 3.6 (Função zeta de Riemann) A função zeta de Riemann é definida por

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}, \quad (3.14)$$

contanto que a série apresentada convirja. Logo, tomaremos $f(x) = x^s$, e então para $s \neq 1$,

$$\int_1^{\infty} x^{s-1} dx = \frac{x^{-s+1}}{-s+1} \Big|_1^{\infty}, \quad (3.15)$$

enquanto para $s = 1$,

$$\int_1^{\infty} x^{s-1} dx = \ln x \Big|_{n=1}^{\infty}. \quad (3.16)$$

A integral e, portanto, a série, é divergente para $s \leq 1$, e convergente para $s > 1$. De

fato, a (3.14) poderia similar a condição de $s > 1$. Com já foi mostrado no exemplo (3.2) anteriormente para $s = 1$ é uma série harmônica, e diverge.

3.3.3 Critério do Limite

Teorema 3.8 (Critério do Limite) Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ duas séries, com $a_n > 0$ e b_n , para todo $n \geq n_0$, onde n_0 é um natural fixo. Suponhamos que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L. \quad (3.17)$$

Então:

- (a) Se $L > 0$, $L \in \mathbb{R}$, ou ambos são convergentes ou ambos são divergentes.
- (b) Se $L = \infty$ e $\sum b_n$ diverge, $\sum a_n$ também diverge.
- (c) Se $L = 0$ e $\sum b_n$ converge, $\sum a_n$ também converge.

Prova.

- (a) Dado $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$, $L > 0$ e real, tomando-se $\varepsilon = \frac{L}{2}$, existe um natural $n > n_0$, tal que

$$k > n \implies L - \frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < L + \frac{L}{2} \quad (3.18)$$

ou seja

$$k > n \implies b_n \frac{L}{2} < a_n < b_n \frac{3L}{2}. \quad (3.19)$$

Usando o critério da comparação apresentado anteriormente, vemos que ambos serão convergentes ou ambos serão divergentes.

- (b) Dado $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$, tomando-se agora $\varepsilon = 1$, existe um natural $n > n_0$, tal que

$$k > n \implies \frac{a_n}{b_n} > 1 \quad (3.20)$$

e, portanto

$$k > n \implies a_n > b_n. \quad (3.21)$$

Pelo critério da comparação vemos, que se $\sum b_n$ for divergente, então $\sum a_n$ também será divergente.

(c) Dado $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$, tomando-se agora $\varepsilon = 1$, existe um natural $n > n_0$, tal que

$$k > n \implies \frac{a_n}{b_n} > 1 \quad (3.22)$$

ou seja

$$k > n \implies a_n > b_n. \quad (3.23)$$

Novamente, pelo critério da comparação, vemos que se $\sum b_n$ for convergente, então $\sum a_n$ também será convergente. ■

3.3.4 Critério de Cauchy para Convergência de Série

Teorema 3.9 (*Critério de Cauchy para Séries*) A série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$n \geq n_0 \implies |a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \dots + a_{n+s}| < \varepsilon. \quad (3.24)$$

quaisquer que sejam os naturais $n > n_0$ e $s \in \mathbb{N}$.

Prova. A série $\sum a_n$ é convergente se, e somente se, a sequência $s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $n \geq 0$, for convergente. Onde (s_n) é a sequência das reduzidas de $\sum a_n$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existir um natural n_0 tal que, quaisquer que sejam os naturais n e s ,

$$n \geq n_0 \implies |s_{n+s} - s_n| < \varepsilon. \quad (3.25)$$

Como

$$n \geq n_0 \implies |s_{n+s} - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \dots + a_{n+s}|. \quad (3.26)$$

O que, resulta que série é convergente. ■

3.4 SÉRIES ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE E CONDICIONALMENTE CONVERGENTE

Dada qualquer série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, podemos considerar a série correspondente

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots, \quad (3.27)$$

cujos termos são os valores absolutos dos termos da série original. Logo, por definição uma série $\sum a_n$ é conhecida como absolutamente convergente quando a série $\sum |a_n|$ é convergente. Caso contrário, se uma série $\sum a_n$ é convergente, porém a série $\sum |a_n|$ é divergente, dizemos que $\sum a_n$ é condicionalmente convergente.

Teorema 3.10 *Toda série absolutamente convergente é convergente.*

Prova. Se a série $\sum |a_n|$ converge, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \implies |a_{n+1}| + \dots + |a_{n+s}| < \varepsilon, \quad (3.28)$$

qualquer que seja $s \in \mathbb{N}$. Logo, como

$$|a_{n+1} + \dots + a_{n+s}| \leq |a_{n+1}| + \dots + |a_{n+s}| < \varepsilon, \quad (3.29)$$

temos, pelo critério de Cauchy para séries, que a série $\sum a_n$ converge. ■

3.4.1 Critério da Raiz de Cauchy

Teorema 3.11 (*Critério da Raiz*) *Seja a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, com $a_n > 0$ para todo $n \geq n_0$, onde n_0 é um natural fixo. Suponhamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ existe, finito ou infinito. Seja*

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}. \quad (3.30)$$

Então:

- (a) Se $L < 1$ então $\sum a_n$ é absolutamente convergente e, portanto, converge.
- (b) Se $L > 1$ ou $L = \infty$ então $\sum a_n$ é divergente.

(c) Se $L = 1$, o critério da raiz é inconclusivo.

Prova. Podemos, provar, fazendo comparativamente com a série geométrica de razão L .

(a) Se $L < 1$, tomando $\varepsilon = \frac{1-L}{2}$. Portanto existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > N$, quando $L - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < L + \varepsilon$. Com efeito $L' = L + \varepsilon$, temos que $L' < 1$ e $|a_n| < L'^n$. Como a série $\sum_{k=N}^{\infty} L'^k$ é uma série geométrica com razão $|L'| < 1$, ela converge. Logo, pelo critério da comparação, a série $\sum |a_n|$ é convergente, o que implica que a série $\sum a_n$ é absolutamente convergente.

(b) Se $L > 1$, tomando $\varepsilon = \frac{L-1}{2}$ e $L' = L - \varepsilon$. No caso acima, obtemos $L'^k < a_n$ com $L' > 1$. Assim, tomando $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$. Logo, não pode ter $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, o que significa que a série é divergente.

(c) Para $L = 1$ é só observar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ para $a_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$, ou $a_n = \frac{1}{n^2}$, $n \geq 1$, e lembrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

■

3.4.2 Critério da Razão de Cauchy

Teorema 3.12 (Critério da Razão) Seja a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, com $a_n > 0$ para todo $n \geq n_0$, onde n_0 é um natural fixo. Suponhamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ existe, finito ou infinito. Seja

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}. \quad (3.31)$$

Então:

(a) $L < 1$ então $\sum a_n$ é absolutamente convergente e, portanto, converge.

(b) $L > 1$ ou $L = \infty$ então $\sum a_n$ é divergente.

(c) $L = 1$, o critério da razão é inconclusivo.

Prova. A prova é análoga ao apresentado anteriormente, porém mais cuidadosamente analisada.

- (a) Se $L < 1$, tomando $\varepsilon = \frac{1-L}{2}$. Portanto existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > N$, quando $L - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \varepsilon$. Com efeito $L' = L + \varepsilon$, temos que $L' < 1$ e $|a_{n+1}| < |a_n|L'$. Assim, podemos usar a indução finita para obter $|a_{N+k}| < a_{NL^k}$. Como a série $\sum |a_n|L'^k$ é uma série geométrica com $|L'| < 1$, ela converge. Logo, pelo critério da comparação, a série $\sum |a_{N+k}|$ é convergente, o que implica que a série $\sum a_n$ é absolutamente convergente.
- (b) Se $L > 1$, tomando $\varepsilon = \frac{L-1}{2}$ e $L' = L - \varepsilon$. No caso acima, obtemos $|a_{NL^k}| < |a_{N+k}|$ com $L' > 1$. Assim, tomando $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{N+k} = \infty$. Logo, não pode ter $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, o que significa que a série é divergente.
- (c) Para $L = 1$ é só observar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ para $a_n = \frac{1}{n}, n \geq 1$, ou $a_n = \frac{1}{n^2}, n \geq 1$, e lembrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

■

3.5 SÉRIES ALTERNADAS

Os critérios de convergências que estudamos até aqui se aplicam apenas as séries de termos positivos. Ao contrário das séries de termos positivos, consideraremos agora séries infinitas alternadas, as quais os termos são alternadamente positivos e negativos. A série se torna mais rápida convergentemente, pois há o cancelamento parcial devido aos sinais alternantes. São séries cujo o n -ésimo termo é escrito da forma $a_n = (-1)^{n-1}b_n$ ou $a_n = (-1)^n b_n$ onde b_n é um número positivo. Neste caso, demonstraremos o critério de Leibniz, como uma condição geral para a convergência de uma série alternada.

3.5.1 Critério de Leibniz

Teorema 3.13 (Critério de Leibniz) *Seja a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$. Se a sequência a_n for decrescente, e se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, então a série alternante $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ será convergente.*

Prova. Neste caso, examinaremos as suas reduzidas,

$$s_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - \dots - a_{2n}, \quad (3.32)$$

$$s_{2n+2} = s_{2n} + (a_{2n+1} - a_{2n+2}) \quad (3.33)$$

uma vez que $a_{2n+1} > a_{2n+2}$, temos

$$s_{2n+2} > s_{2n}. \quad (3.34)$$

Analisando por outro ponto de vista,

$$s_{2n+2} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) \dots - a_{2n+2}. \quad (3.35)$$

Logo, concluímos que, sendo cada par de termos $a_{2s} - a_{2s+1} > 0$,

$$s_{2n+2} < a_1. \quad (3.36)$$

Portanto, se as somas dos seus reduzidos pares limitada $s_{2n} < s_{2n+2} < a_1$ e os termos a_n decrescente e o termo geral $a_n \rightarrow 0$. Logo, essa série alternante é convergente. ■

Exemplo 3.7 *A série harmônica alternada.*

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

satisfaz

(i) $b_{n+1} < b_n$ uma vez que $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, ou seja, b_n é decrescente.

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ logo, a série é convergente pelo critério de Leibniz.

3.5.2 Reordenação de uma Série

Quando uma série é absolutamente convergente ou condicionalmente convergente, o importante da questão é saber se a sua soma se comporta infinitamente ou finitamente. Se permutarmos a ordem dos termos de uma soma finita, ela permanecerá inalterável. Já para as somas de termos infinitos, isso nem sempre é válido. Por exemplo, a série

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots$$

é uma reordenação da série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$. De fato, $\sum a_n$ é uma série absolutamente convergente com soma S , então qualquer rearranjo de $\sum a_n$ tem a mesma soma S .

3.6 SÉRIE DE TAYLOR

Dada uma pequena região em torno de um ponto qualquer quando precisamos conhecer melhor o comportamento desta função neste ponto, é comum expandir essa função usando Série de Taylor. A série de Taylor da $f(x)$, a série em torno do ponto x_0 de interesse é dada por a expressão

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) \quad (3.37)$$

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \dots, \quad (3.38)$$

onde $f^n(x_0)$ representa a derivada n -ésima de $f(x)$ aplicado no ponto x_0 .

3.6.1 Série de Maclaurin

Quando expandirmos em torno de $x_0 = 0$ a (3.38), teremos a série chamada de série de Maclaurin

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0). \quad (3.39)$$

Muitas aplicações são realizadas com as séries de Maclaurin, na física, e também em expansão de várias funções transcendentais para séries infinitas como as de potências.

Exemplo 3.8 Com a expansão de Maclaurin podemos obter $\ln(2)$.

Primeira derivada de $f(x) = \ln(1+x)$, obtemos

$$f'(x) = (1+x)^{-1}, \quad (3.40)$$

Para n derivadas, temos

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}. \quad (3.41)$$

Logo, a Série de Maclaurin (3.39) resulta em

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad (3.42)$$

Em particular, em $x = 1$ temos

$$\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}, \quad (3.43)$$

a série harmônica é condicionalmente convergente.

4 FORÇA ELÉTRICA E POTENCIAL ELÉTRICO POR SÉRIES INFINITAS

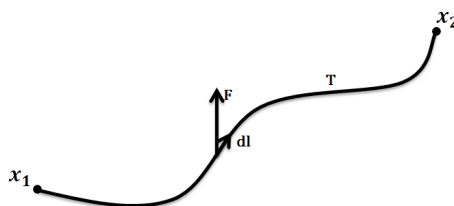
Ao desenvolver do capítulo discutiremos os significados físicos das séries infinitas divergentes e condicionalmente convergentes que resultam de diferentes distribuições de cargas elétricas puntiformes posicionadas ao longo de um eixo unidimensional Ox . Desenvolveremos as séries infinitas aplicadas ao potencial elétrico e a força elétrica, acrescentado algumas ideias ao trabalho já apresentado por Possa e Nogueira (2003), mostrando uma relação íntima entre séries infinitas e eletricidade.

4.1 A DIFERENÇA DE POTENCIAL ELÉTRICO POR SÉRIES INFINITAS POSITIVAS

4.1.1 Potencial Elétrico

A ideia de potencial elétrico está relacionado diretamente com o trabalho realizado para transporta uma carga de um ponto x_1 a um ponto x_2 .

Figura 5: Trabalho da força F ao longo de T



Fonte: elaborado pelo autor

Consideraremos, inicialmente, um deslocamento radial, de um ponto x_1 até um ponto x_2 , onde a força sobre uma carga elétrica q_0 é dada pela lei de Coulomb. Portanto,

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qq_0}{r^2} \hat{r}. \quad (4.1)$$

Com isso, o trabalho realizado pela força elétrica, é

$$W \equiv - \int_{x_1}^{x_2} \vec{F} \cdot \vec{dl}, \quad (4.2)$$

no qual chamamos de W o trabalho, \vec{F} a força elétrica exercida na carga elétrica em cada ponto e \vec{dl} é o diferencial do vetor deslocamento no percorrer da trajetória. Segundo Young (2009) a força não é constante durante o deslocamento, logo é preciso integrar para calcular o trabalho $W_{x_1 \rightarrow x_2}$ realizado por uma força sobre q_0 quando ela se desloca de x_1 até x_2 . Escrevemos,

$$W_{x_1 \rightarrow x_2} = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F} \cdot \vec{dl} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qq_0}{r^2} dr, \quad (4.3)$$

o trabalho realizado pela força elétrica ao longo de uma trajetória depende apenas do ponto inicial e do ponto final. Vamos escrever a (4.3) igualando o trabalho realizado pela força elétrica durante um descolamento de x_1 até x_2 com a diferença da energia potencial ΔU_p . No qual temos a energia potencial U_p para uma carga elétrica de prova q_0 num ponto situado a qualquer distância r de uma carga elétrica q como

$$U_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qq_0}{r}. \quad (4.4)$$

Portanto, dividiremos a grandeza da diferença da energia potencial $-\Delta U_p = -[U_p(x_2) - U_p(x_1)]$ e o trabalho por q_0 , pois a diferença de energia potencial é igual ao trabalho realizado pela força elétrica quando a partícula se move de x_1 até x_2 , logo

$$\frac{W_{x_1 \rightarrow x_2}}{q_0} = \frac{-\Delta U_p}{q_0} = - \left(\frac{U_p(x_2)}{q_0} - \frac{U_p(x_1)}{q_0} \right). \quad (4.5)$$

Podemos definir o potencial elétrico em um determinado ponto como a energia potencial que seria associada a uma unidade de carga nesse ponto. Portanto, associada a carga elétrica de prova q_0 nesse ponto x_1 , em que $\Phi(x_1) = \frac{U_p(x_1)}{q_0}$ e $\Phi(x_2)$ é definida de modo análoga. Chamamos de $\Phi(x_1)$ o potencial elétrico no ponto x_1 e $\Phi(x_2)$ de potencial elétrico no ponto x_2 . Logo, o trabalho realizado por unidade de carga elétrica pela força elétrica quando a carga se desloca de x_1 até x_2 é igual ao a diferença de potencial elétrico no ponto x_1 e x_2 respectivamente. Portanto,

$$\frac{W_{x_1 \rightarrow x_2}}{q_0} = \Delta\Phi = [\Phi(x_2) - \Phi(x_1)]. \quad (4.6)$$

Para encontramos o potencial elétrico de uma única carga elétrica puntiforme q , dividiremos a expressão (4.4) por q_0 . Obtemos

$$\Phi(r) = \frac{U_p}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r} \quad (4.7)$$

em que r é a distância entre carga elétrica q e o ponto em que o potencial elétrico está sendo calculado.

O que acontece se tivermos N cargas elétricas interagindo? A experiência mostra que os efeitos das interações entre as cargas elétricas eles se superpõem.

Definição 4.1 (O Princípio de Superposição) *Quanto aos efeitos das interações entre as cargas elétricas eles se superpõem, ou seja, a resultante da força elétrica que atua individualmente, agora é soma vetorial de suas interações com todas as N cargas apresentadas. Assim, a força elétrica de N cargas elétricas podemos escrever, como*

$$\vec{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{(r_i)^2} \hat{r}_i, \quad (4.8)$$

onde a soma é estendida a todas as demais cargas.

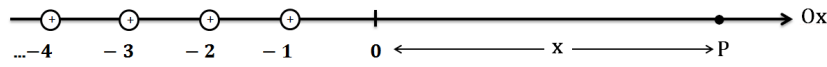
Pelo princípio de superposição, o potencial elétrico produzido por uma distribuição de cargas puntiformes $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ num ponto P . É a soma do potencial de todas as cargas individuais, isto é,

$$\Phi(r_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i}, \quad (4.9)$$

onde o nível zero do potencial elétrico é escolhido arbitrariamente no infinito, ou seja, $\Phi(\infty) = 0$, e r_i é a distância da carga elétrica q_i ao ponto P em que estamos calculando o potencial elétrico.

4.1.2 A Problemática do Potencial Elétrico por Séries Infinitas

Suponha que tenhamos um número N finito de cargas elétricas distribuídas sobre um eixo unidimensional Ox . Pelo princípio de superposição, sabemos que a diferença de potencial elétrico entre dois pontos quaisquer existe e é finito. No entanto, se fizermos N tender ao infinito, é esperado que o potencial elétrico dado pela (4.9) seja uma série infinita convergente para que não haja uma ambiguidade de informações na diferença de potencial entre dois pontos. Queremos analisar o comportamento do potencial para N infinito.

Figura 6: Distribuição sobre um eixo unidimensional Ox 

Fonte: elaborado pelo autor

Conforme a figura 6 abaixo, como supõe Possa e Nogueira (2003) para uma distribuição de cargas elétricas pontiformes e positivas de mesma magnitude q , colocadas nas posições $-1, -2, -3, -4, \dots, -n$. Tomando o sistema de referência no qual o potencial é nulo no infinito, temos o potencial elétrico, conforme a expressão (4.9), dado por:

$$\Phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1}{x_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2}{x_2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_3}{x_3} + \dots, \quad (4.10)$$

para $q_1 = q_2 = q_3 = \dots = q_n = q$, implica

$$\Phi(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \dots \right). \quad (4.11)$$

Agora sendo que cada x_n para $n = 1, 2, 3, \dots$ dados por $x_n = (x + n)$, temos que

$$\Phi(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2+x} + \frac{1}{3+x} + \dots \right), \quad (4.12)$$

ou seja,

$$\Phi(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)}, \quad (4.13)$$

com $x \neq -n$.

Suponha que $x = 0$, ou seja, fazendo uma análise do potencial elétrico na origem no eixo Ox , tem-se

$$\Phi(0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}, \quad (4.14)$$

$$\Phi(0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \zeta(1) \quad (4.15)$$

onde $\zeta(s)$ é a função zeta de Riemann, como mostrado no exemplo (3.6). Neste caso, $\zeta(1)$ é a série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, e o potencial elétrico obtido das (4.13) e (4.15) são divergentes para qualquer x finito, como mostrado no capítulo anterior. Observe que tal divergência vem do fato de tomarmos o ponto de referência do potencial nulo no infinito.

Se tentássemos encontrar a diferença do potencial elétrico entre dois pontos x_1 e x_2 ,

$$\Delta\Phi = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \quad (4.16)$$

teríamos

$$\Delta\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+x_2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+x_1} \right]. \quad (4.17)$$

Estaríamos, agora frente a uma problemática. Já que, quando somamos séries divergentes seu resultado é indeterminado, ou seja, pode ser divergente ou convergente.

Para contornarmos esta problemática, tomaremos um ponto arbitrário x_0 qualquer como ponto de referência. Isto pode ser feito devido o potencial elétrico ser uma grandeza relativa. Assim,

$$\Delta\Phi = \Phi(x) - \Phi(x_0), \quad (4.18)$$

portanto,

$$\Phi(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+x} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+x_0} \quad (4.19)$$

$$\Phi(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+x_0} \right] \quad (4.20)$$

$$\Phi(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(n+x_0) - (n+x)}{(n+x)(n+x_0)} \right] \quad (4.21)$$

$$\Phi(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(x_0-x)}{(n+x)(n+x_0)} \right]. \quad (4.22)$$

Vamos analisar a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(x_0-x)}{n^2 + n(x_0+x) + xx_0} \right]. \quad (4.23)$$

Usando os critérios já apresentados, prontamente, temos que para um n grande, o termo dominante no denominador é n^2 , assim, usando o teorema (3.6), podemos comparar a série dada com a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x_0-x)}{n^2}$. Observe que

$$\frac{(x_0-x)}{n^2 + n(x_2-x_1) + x_2x_1} < \frac{(x_0-x)}{n^2} \quad (4.24)$$

pois o lado esquerdo tem um denominador maior. Sabemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x_0-x)}{n^2} = (x_0-x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad (4.25)$$

e que a série $\sum \frac{1}{n^2}$ é convergente. No entanto, foi mostrado nas observação (3.1), que uma constante α vezes uma série convergente, converge. Portanto, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(x_0 - x)}{(n+x)(n+x_0)} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(x_0 - x)}{n_2 + n(x_0 + x) + xx_0} \right] \quad (4.26)$$

é convergente. Como resposta temos que, sempre que tomarmos x_0 finito, a expressão (4.22) será finita. Isto mostra que a escolha do ponto de referência para o potencial exclui o problema de potenciais dando infinito. Desta forma, o trabalho realizado por um agente externo para levar uma carga elétrica de um ponto, agora mais especificamente para um ponto x_0 até a origem, é dado por

$$\Phi(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x_0 \left(1 - \frac{x}{x_0}\right)}{x_0(n+x) \left(\frac{n}{x_0} + 1\right)} \right]. \quad (4.27)$$

Para $x = 0$, temos que

$$\Phi(0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x_0}{n(n+x_0)} \right], \quad (4.28)$$

que é finito, como queríamos, uma vez que, a série dada na expressão (4.28) é convergente e tem soma igual a 1, como vimos na série telescópica apresentado no exemplo (3.4).

Agora podemos encontrar a diferença de potencial elétrico $\Delta\Phi$ sem ambiguidade, dada pela (4.22) do potencial elétrico, entre dois pontos x_1 e x_2

$$\Delta\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x_0 - x_2}{(n+x_2)(n+x_0)} \right] - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x_0 - x_1}{(n+x_1)(n+x_0)} \right]. \quad (4.29)$$

Usando as séries convergentes, como visto nas observação (3.1), podemos soma termo-a-termo as séries dada

$$\Delta\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{x_0 - x_2}{(n+x_2)(n+x_0)} \right] - \left[\frac{x_0 - x_1}{(n+x_1)(n+x_0)} \right] \right\}, \quad (4.30)$$

ou equivalentemente,

$$\Delta\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(x_0 - x_2)(n + x_1) - (x_0 - x_1)(n + x_2)}{(n + x_2)(n + x_1)(n + x_0)} \right] \quad (4.31)$$

$$\Delta\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x_0x_1 + x_0n - x_2x_1 - x_2n - x_0x_2 - x_0n + x_2x_1 + x_1n}{(n + x_2)(n + x_1)(n + x_0)} \right] \quad (4.32)$$

$$\Delta\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x_0(x_1 - x_2) + n(x_1 - x_2)}{(n + x_2)(n + x_1)(n + x_0)} \right] \quad (4.33)$$

$$\Delta\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(x_1 - x_2)(n + x_0)}{(n + x_2)(n + x_1)(n + x_0)} \right] \quad (4.34)$$

$$\Delta\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(x_1 - x_2)}{(n + x_2)(n + x_1)} \right]. \quad (4.35)$$

Constatamos que podemos através de um processo matemático, quando de alguma forma possível, analisar uma sistema onde existe uma carga de prova unitária em uma posição x_0 , onde mostramos que para um agente externo realizar um trabalho levando uma carga de prova unitária da posição x_0 até a origem é realmente finito.

Além disso, é importante também lembramos que um agente externo gasta uma quantidade infinita de trabalho, para realojar até a origem uma carga elétrica de prova, porém, este não é um problema exclusivo da quantidade infinita de cargas elétricas, mais também das posições.

Como sugerir Macedo e Guedes (2009), podemos compreender melhor quando exploramos as posições através de uma série em que possamos aplicar funções diversas, onde poderemos fazer uma análise quanto às condições de convergência para estas funções quanto as suas distribuições. Considerando que infinitas cargas puntiformes de mesma magnitude q estão distribuídas sobre o eixo unidimensional Ox de tal forma que, o potencial elétrico em um dado ponto do eixo é expresso por

$$\Phi(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x + F(n))}, \quad (4.36)$$

$\Phi(\infty) = 0$, onde $F(n)$ é uma função que descreve a distribuição das infinitas cargas sobre o eixo. Dependendo de $F(n)$ o potencial será divergente ou convergente. Um exemplo que podemos definir é considerando que as cargas estão distribuídas nas posições dada pela função zeta de Riemann para $\zeta(2)$, em $x = 0$ potencial elétrico seria dado por

$$\Phi(0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \zeta(2). \quad (4.37)$$

Vemos que se trata de uma série que decresce em $\frac{1}{n^2}$, analisando pelo teorema (3.8), logo é

uma série convergente e de soma igual a $\frac{\pi^2}{6}$.

As funções que aplicássemos na (4.36) obteríamos resultados particulares e admissíveis de análise quanto as suas condições de convergências. O aumento da distância entre as cargas elétricas leva a um valor finito do potencial elétrico. Isso mostra que o fato do potencial de uma distribuição ser finita ou infinita de cargas elétricas, em geral, não depende apenas do valor das cargas, mas também de como elas estão distribuídas geometricamente.

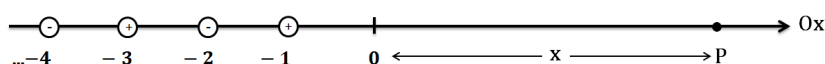
4.2 A FORÇA E O POTENCIAL ELÉTRICOS POR SÉRIES INFINITAS ALTERNANTES

Através de séries alternadas constataremos quanto ao comportamento do potencial elétrico e da força elétrica. Faremos distribuição no decorrer de todo o eixo Ox ora acrescentando cargas elétricas positivas, ora cargas elétricas negativas, alternadamente. Teremos como consequência, um potencial elétrico com resultado condicionalmente convergente, novamente, terá a questão do incômodo causado por uma série divergente. Em seguida, manusearemos as séries condicionalmente convergentes com o objetivo de obter série absolutamente convergente. Já para a força elétrica, discutiremos as interações eletrostáticas por séries alternadas. Os distintos resultados apresentados por uma força elétrica envolvendo uma série condicionalmente convergente diante das mudanças de posições ao longo do eixo Ox . Por fim, toda a atenção ao operar séries com aplicações na física.

4.2.1 Aplicação da Série Absolutamente e Condicionalmente Convergente

Analisaremos agora as séries alternadas, mostrada na seção (3.5) de séries numéricas, para Possa e Nogueira (2003) consideraremos uma nova distribuição onde as cargas elétricas negativas e positivas são colocadas nas posições $-1, -3, -5, \dots$ e $-2, -4, -6, \dots$, respectivamente. Como mostraremos na figura abaixo.

Figura 7: Distribuições de cargas negativas e positivas para o potencial



Fonte: elaborado pelo autor

Desenvolvendo esta distribuição para o potencial elétrico $\Phi(x)$, temos que

$$\Phi_p(x) = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_1 + \dots, \quad (4.38)$$

para $\Phi(\infty) = 0$, tem-se

$$\Phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{1+x} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{-q}{2+x} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{3+x} + \dots, \quad (4.39)$$

reorganizando a série

$$\Phi(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{1+x} + \frac{-1}{2+x} + \frac{1}{3+x} + \frac{-1}{4+x} + \dots \right]. \quad (4.40)$$

Poderemos levar todos os termos do numerador ao um expoente natural $n > 1$, assim

$$\Phi(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(-1)^2}{1+x} + \frac{(-1)^3}{2+x} + \frac{(-1)^4}{3+x} + \dots \right]. \quad (4.41)$$

Encontramos uma série alternada para o potencial elétrico, com referência no infinito, onde

$$\Phi(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(x+n)}. \quad (4.42)$$

Para simplificação começaremos nossa análise pela origem, ou seja, quando $x = 0$, resultando em

$$\Phi(0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}. \quad (4.43)$$

Verificando quanto a convergência ou divergência, usando o teorema (3.13), podemos ver que a (4.43) satisfaz todas as condições requeridas pelo critério de Leibniz, uma vez que

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}, \quad (4.44)$$

podemos ver também que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad (4.45)$$

logo, a série é convergente pelo critério anunciado acima. Porém, a série também diverge, porque a série de valores absolutos correspondente é

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad (4.46)$$

que é a série harmônica e é, portanto, divergente. Portanto, as séries em (4.42) e (4.43) são condicionalmente convergentes, como definido na seção (3.4). Por conseguinte, seu resultado depende de como a soma é efetuada. Pelo princípio da superposição, poderíamos

distribuir a ação da carga elétrica positiva seguida da ação da negativa e assim sucessivamente. Contudo, como visto na subseção (3.5.2), qualquer série condicionalmente convergente pode ser rearranjada para dar uma soma diferente. Vamos considerar a série harmônica alternada, para mostra este fato, em que

$$\Phi(0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n)} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^3}{2} + \frac{(-1)^4}{3} + \frac{(-1)^5}{4} + \dots \right], \quad (4.47)$$

como vimos na seção (3.6) no exemplo (3.8) a série apresenta na (4.47) é igual a $\ln(2)$. Com isso

$$\Phi(0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n)} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \dots \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \ln(2). \quad (4.48)$$

Adotando agora a ação de uma carga elétrica positiva seguida da ação de duas negativas sequencialmente, a nova série é igual à

$$\Phi(0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} \right) + \dots \right]. \quad (4.49)$$

Se multiplicarmos a série da (4.49) por $\frac{1}{2}$, obtemos

$$\Phi(0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8} \right) + \dots \right]. \quad (4.50)$$

Isolando o termo $\frac{1}{2}$ da série reordenada da expressão (4.49), resulta

$$\Phi(0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \right] + \dots \right\} = \frac{q}{8\pi\epsilon_0} \ln(2). \quad (4.51)$$

De outra forma, poderíamos inserir zeros entre os termos na série da (4.50), teremos

$$\Phi(0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \dots \right] = \frac{q}{8\pi\epsilon_0} \ln(2). \quad (4.52)$$

Acrecentando mais uma exemplo de distribuição de posições ao trabalho de Possa e Nogueira (2003), no qual adicionamos as séries (4.49) e (4.49) e usando as observações em (3.1), onde temos também que a soma desses zeros não afeta a soma da série; cada termo na sequência de somas parciais é repetido, mas o limite é o mesmo, então

$$\Phi(0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \dots \right] = \frac{3q}{8\pi\epsilon_0} \ln(2). \quad (4.53)$$

Observe que a série da (4.49) contém os mesmos termos que a da (4.53), mas rearranjados de modo a consideramos a ação de uma carga elétrica negativa em seguida da ação de um par

cargas de positivas. Assim, a aplicação do princípio da superposição de diferentes maneiras, conduz a diferentes resultados.

A condição de não absolutamente convergente, põe-nos novamente frente a problemática inicial ao calculamos a diferença de potencial elétrico $\Delta\Phi$ entre dois pontos x_1 e x_2 . Como as séries são condicionalmente convergentes, não temos nenhuma garantia que sua soma possa ser feita termo-a-termo. Apesar disso, poderemos fazer uso da mesma metodologia para encontrar o resultado finito da diferença de potencial elétrico,

$$\Delta\Phi = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \quad (4.54)$$

aplicando a expressão (4.42), se

$$\Delta\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{(n+x_2)} \right] - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{(n+x_1)} \right] \quad (4.55)$$

$$\Delta\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{(n+x_2)} - \frac{1}{(n+x_1)} \right] \quad (4.56)$$

$$\Delta\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^{n+1} \cdot \frac{(n+x_1) - (n+x_2)}{(n+x_2)(n+x_1)} \right] \quad (4.57)$$

$$\Delta\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^{n+1} \cdot \frac{(x_1 - x_2)}{(n+x_2)(n+x_1)} \right]. \quad (4.58)$$

Faltamos saber qual o resulta desta série quanto a sua convergência e/ou divergência. Vejamos se a (4.58) satisfaz o critério de Leibniz, uma vez que

$$\frac{x_1 - x_2}{(n+1)^2 + (n+1)(x_2 - x_1) + x_2x_1} < \frac{x_1 - x_2}{n^2 + n(x_2 - x_1) + x_2x_1}, \quad (4.59)$$

podemos ver também que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 - x_2}{n^2 + n(x_2 - x_1) + x_2x_1} = 0, \quad (4.60)$$

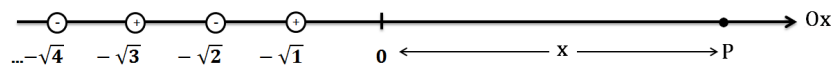
logo, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^{n+1} \cdot \frac{x_1 - x_2}{(n+x_2)(n+x_1)} \right]$ é convergente pois respeita todos os critérios acima. Segue que a série é absolutamente convergente, porque a série de valores absolutos correspondentes é convergente.

Quando calculamos o trabalho realizador por um agente externo em levar uma carga elétrica unitária de prova do infinito para a origem, podemos ver resultados distintos, como os expostos nas (4.48), (4.51) e (4.53). Já para o cálculo da diferença de potencial elétrico entre dois pontos, isto não é verdade. O resultado encontrado em uma soma de série condicionalmente convergente, onde depende de como a soma seja feita, não pode nos velar a resultados fisicamente distintos.

4.2.2 A Série Condicionalmente Convergente da Força Elétrica

Explorando a ideia de força elétrica para séries infinitas de termos alternado, onde são feitas distribuições de cargas elétricas puntiformes positivas e negativas de mesma magnitude q ao longo de um eixo unidimensional Ox nas respectivas posições $-\sqrt{1}$, $-\sqrt{3}$, $-\sqrt{5}, \dots$ e $-\sqrt{2}$, $-\sqrt{4}$, $-\sqrt{6}, \dots$ como mostrar Possa e Nogueira (2003).

Figura 8: Distribuições de cargas positivas e negativas para a força



Fonte: elaborado pelo autor

Juntamente a origem podemos colocar uma carga elétrica de prova q_0 em que interage com a distribuição feita acima. No qual podemos calcular a magnitude destas forças elétricas considerando que

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + \dots, \quad (4.61)$$

resulta em

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_0q}{(x_1)^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_0(-q)}{(x_2)^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_0q}{(x_3)^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_0(-q)}{(x_4)^2} + \dots, \quad (4.62)$$

substituindo x tem-se

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_0q}{(\sqrt{1})^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_0(-q)}{(\sqrt{2})^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_0q}{(\sqrt{3})^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_0(-q)}{(\sqrt{4})^2} + \dots, \quad (4.63)$$

reorganizando

$$F = \frac{q_0q}{4\pi\epsilon_0} \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \right] = \frac{q_0q}{4\pi\epsilon_0} \left[1 + \frac{(-1)^2}{2} + \frac{(-1)^2}{3} + \frac{(-1)^2}{4} + \dots \right], \quad (4.64)$$

obtendo a força resultante sobre o eixo Ox , como

$$F = \frac{q_0q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}. \quad (4.65)$$

Agora vamos analisar a expressão da força (4.65) quanto a sua convergência e/ou divergência. Podemos analisar agora pelo critério de Leibniz. Por outro lado,

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \quad (4.66)$$

podemos ver também que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad (4.67)$$

logo, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ é convergente pois respeita os critérios acima.

Observamos que a série é não absolutamente convergente, porque a série de valores absolutos correspondentes é convergente, mas não absolutamente convergente, pois a série de valores absolutos correspondentes é a série harmônica do tipo $\frac{1}{n}$ e é, portanto, divergente. Consequentemente, temos novamente uma série condicionalmente convergente. Com a compreensão similar a anterior, temos que se as cargas elétricas fossem colocadas na sequência: $x = -\sqrt{1}$ uma positiva, depois em $x = -\sqrt{2}$ uma negativa, sucessivamente, teríamos uma força elétrica de magnitude

$$F = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \dots \right] = \frac{q_0q}{4\pi\epsilon_0} \ln(2) \quad (4.68)$$

Depois, se as cargas fossem colocadas na sequência: $x = -\sqrt{1}$ uma positiva, depois em $x = -\sqrt{2}$ uma negativa, seguida em $x = -\sqrt{4}$ outra negativa, sucessivamente, teríamos uma força elétrica de magnitude

$$F = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \dots \right] = \frac{q_0q}{8\pi\epsilon_0} \ln(2). \quad (4.69)$$

De outra forma, se as cargas fossem colocadas na sequência: $x = -\sqrt{1}$ uma negativa, depois em $x = -\sqrt{2}$ uma positiva, seguida em $x = -\sqrt{4}$ outra positiva, sucessivamente, teríamos uma força elétrica de magnitude

$$F = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \dots \right] = \frac{3q_0q}{8\pi\epsilon_0} \ln(2). \quad (4.70)$$

Sendo a força elétrica uma grandeza absoluta pois ela mesmo tem significado físico. Como explicar os diferentes resultados da força elétrica mostrado pela série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ sobre q_0 ? Do ponto vista físico podemos afirmar que, a força elétrica depende da ordem em que colocamos as cargas elétricas ao longo do eixo Ox .

5 *CONSIDERAÇÕES FINAIS*

Através de aplicações simples de eletricidade fomos capaz de discutir as interpretações físicas relacionadas com as séries divergentes e condicionalmente convergentes. Vimos que a indeterminação quando se manusear tais séries, aplicada a um rigor matemático, nos mostrar que nem sempre pode nos conduzir a diferentes resultados físicos, contrariamente, a força elétrica pode produzir diferentes valores.

Testemunhamos que quando lidamos com séries, devemos considerar alguns cuidados, quanto às suas interpretações físicas dos resultados obtidos, como vimos na última subseção (4.3.2) dedicada à soma de séries divergentes. Isto se deve ao fato de existe uma relação intrínseca entre os resultados físicos e as séries infinitas.

Nosso propósito ao escrever um trabalho como esse é usar as informações e conhecimentos adquiridos em sala de aula, pois todos os conceitos usados e aplicados são visto ao longo do curso de física. Todo o desenvolvimento do trabalho mostra a necessidade que um aluno de graduação em física deve ter nas mãos para discutir sobre tema muitas vezes interdisciplinar. Portanto, é de grande importância que o aluno adquira ao longo do curso competências e habilidades, capaz de construir argumentações consistentes ao concluir o curso. Conhecimentos esses fundamentais para progredir no meio acadêmico.

REFERÊNCIAS

- ASSIS, A. K. T. **Os Fundamentos Experimentais e Históricos da Eletricidade**. Campinas, SP. Apeiron Montreal, 2010.
- GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002.
- LIMA, E. L. **Curso de Análise**. 1. ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2002.
- MACEDO, D. X.; GUEDES, I. **Potencial Elétrico para Distribuições de Cargas Puntiformes: sobre a Convergência de Séries Infinitas**. Revista Brasileira de Ensino de Física, São Paulo, SP, v.32, n.3, 2009.
- MACHADO, K. D. **Teoria do Eletromagnetismo**. v.1, ed. Paraná: UEPG, 2000.
- NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de física básica: Eletromagnetismo**. 5. ed. São Paulo: Edgard Blücher LTDA, 2013.
- PIRES, A. S. T. **Evolução das Idéias da Física**. São Paulo, SP. Livraria da Física, 2008.
- POSSA, D.; NOGUEIRA, J. A. **Alguns Problemas de Eletromagnetismo Envolvendo Séries Infinitas**. Revista Brasileira de Ensino de Física, São Paulo, SP, v.25, n.4, 2003.
- STEWART, J. **Cálculo 2**. 7. ed. São Paulo: Americana, 2013.
- YOUNG, H. D. **Eletromagnetismo 2. Física III**. 12. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2009.