

## O SER DA GEOMETRIA: CRÍTICA À CRÍTICA DE LUKÁCS A EINSTEIN

William Casagrande Candiottto <sup>1</sup>

Patricia Laura Torriglia <sup>2</sup>

Ademir Damazio <sup>3</sup>

José Deribaldo Gomes dos Santos <sup>4</sup>

**Resumo:** O texto faz parte de uma investigação que teve como objetivo compreender a gênese, os nexos e a estrutura do objeto da Geometria. Assim sendo, apresentamos, neste artigo, a relação entre as geometrias não-euclidianas e a Teoria da Relatividade, bem como uma crítica à crítica de Lukács a Einstein. A intenção da crítica se traduz na necessidade de discutir a natureza do conhecimento geométrico e sua relação com a materialidade do mundo. Tal crítica, no que tange ao debate sobre a tridimensionalidade do ser, apresenta indícios fundamentais para compreender o objeto da Geometria como um reflexo do movimento da matéria, das leis físicas que traduzem esse movimento. A análise realizada não encontrou nos argumentos einsteinianos a intenção de provar que o objeto da Geometria é constitutivo da realidade física, ao contrário do que defendeu Lukács.

**Palavras-chave:** Geometria. Crítica a Einstein. Conhecimento geométrico.

## EL SER DE LA GEOMETRÍA: CRÍTICA A LA CRÍTICA DE LUKÁCS A EINSTEIN

**Resumen:** El texto forma parte de una investigación cuyo objetivo fue comprender la génesis, los nexos y la estructura del objeto de la Geometría. De esta manera, presentamos en este artículo la relación entre las geometrías no euclidianas y la Teoría de la Relatividad, así como una crítica a la crítica de Lukács a Einstein. La intención de la crítica es discutir la naturaleza del conocimiento geométrico y su relación con la materialidad del mundo. Tal crítica, en lo que respecta al debate sobre la tridimensionalidad del ser, presenta indicios fundamentales para comprender el objeto de la Geometría como un reflejo del movimiento de la materia, de las leyes físicas que traducen ese movimiento. El análisis realizado no encontró en los argumentos einsteinianos la intención de probar que el objeto de la Geometría es constitutivo de la realidad física, al contrario de lo que defendió Lukács.

**Palabras clave:** Geometría. Crítica a Einstein. Conocimiento geométrico.

<sup>1</sup> Doutor em Educação pela Universidade Federal de Santa Catarina. Centro Universitário Barriga Verde. *E-mail:* williamcasagrande@hotmail.com.

<sup>2</sup> Doutora em Educação pela Universidade Federal de Santa Catarina. *E-mail:* patrilaura@gmail.com.

<sup>3</sup> Doutor em Educação pela Universidade Federal de Santa Catarina. Centro Universitário Barriga Verde. *E-mail:* addamazio71@gmail.com.

<sup>4</sup> Doutorado em Educação Brasileira pela Universidade Federal do Ceará. *E-mail:* deribaldo.santos@uece.br.

## Introdução

O presente texto é resultado de uma investigação<sup>5</sup> que teve como objetivo compreender a gênese, os nexos e a estrutura do objeto da Geometria. Nessa direção, apresentamos, neste artigo, a relação entre as geometrias não-euclidianas e a Teoria da Relatividade, bem como uma crítica à crítica de Lukács a Einstein. A intenção da referida crítica se traduz na necessidade de compreender a natureza do conhecimento geométrico, bem como sua relação com a materialidade do mundo.

A crítica por nós elaborada, no que se refere ao debate sobre a tridimensionalidade do ser, revela indícios fundamentais para compreender o objeto da Geometria como um reflexo do movimento da matéria, das leis físicas que traduzem esse movimento. Esta concepção de Geometria possui seus fundamentos filosóficos na dialética materialista, em contraponto às concepções idealistas e materialista-mecanicistas.

Iniciamos com um esboço sobre a relação entre as geometrias não-euclidianas e a Teoria da Relatividade, porém, com algum tangenciamento a respeito da compreensão do objeto da Geometria. Por fim, desenvolvemos uma crítica à crítica de Lukács ao experimento ideal einsteiniano.

## As geometrias não-euclidianas e a Teoria da Relatividade

As revoluções física e matemática, ocorridas nos séculos XIX e XX, evidenciaram discussões acerca de temas como a quarta dimensão e algumas de suas concepções místicas, bem como sobre uma das categorias caracterizadoras do objeto da Geometria, o espaço. Com o surgimento dessas novas concepções físicas foi possível corroborar as proposições dialético-materialistas da indissociabilidade entre espaço e tempo. Estes, bem como o movimento, são formas fundamentais de existência da matéria.

---

<sup>5</sup> Tese de Doutorado intitulada *Crítica da razão matemática: uma análise do objeto da Geometria* defendida por William Casagrande Candioto, em 2016, no Programa de Pós-Graduação em Educação (PPGE) da Universidade Federal de Santa Catarina (Ufsc). Órgão de fomento: Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes).



A quarta dimensão despertou interesse ao longo da história e, antes do desenvolvimento das teorias físicas que a atribuíram ao tempo, foi bastante difundida a ideia mística de seres que habitavam tal dimensão. Para esse misticismo, a humanidade vive em um espaço tridimensional, não sendo possível “acessar” a dimensão extra. Tal concepção atravessa a Filosofia, a Matemática, a Física e as ciências em geral.

A atividade humana, ao ser mediada pela Matemática, lida com espaços multidimensionais e até de infinitas dimensões. Porém, por se tratar de abstrações matemáticas, em especial as de bases geométricas, refletem a realidade física, a fim de construí-las cada vez mais elevadas para a compreensão da realidade material. Há que se considerar as apreciações conceituais que absolutizam as abstrações geométricas. Se, por um lado, existem entendimentos que as consideram como independentes da realidade física, por outro, há as concepções que as consideram abusivas, por não refletirem a realidade física existente sobre a base da tridimensionalidade puramente espacial. Aquelas transitam pelo idealismo e estas pelo materialismo mecanicista.

Contrária às concepções absolutista-idealistas e, ao mesmo tempo, distante dos entendimentos mecanicistas, a dialética materialista caracteriza o objeto da Geometria em relação à realidade física. Nesse sentido, Konstantinov (1965, p. 139) afirma:

En la física y en las matemáticas suele utilizarse el concepto de los llamados “espacios multidimensionales” o espacios que poseen cuatro, cinco, seis, etc., e incluso un número infinito de dimensiones. Dicho concepto ha resultado muy fecundo al abordar numerosos problemas científicos. Pero cabe preguntar: ¿no contradice eso la tesis de la tridimensionalidad del espacio? De ningún modo. El espacio efectivo, real, en el que existen todas las cosas y los hombres mismos, es el espacio ordinario de tres dimensiones; en cambio, el espacio multidimensional es una abstracción que incluye idealmente un conjunto mayor o menor de magnitudes que no expresan forzosamente la extensión, sino otras propiedades de los objetos estudiados.

O autor esclarece a natureza das abstrações geométricas dessas dimensões extras. Ou seja, dimensões que expressam outras grandezas, existentes para além das espaciais. Konstantinov (1965) afirma que o espaço ordinário é tridimensional e essa concepção vem sendo estudada exaustivamente pela física moderna. Porém,

esta última ainda não comprovou outras dimensões espaciais. Há teorias que propõem espaços de até nove dimensões, como é o exemplo da teoria de cordas (CANDIOTTO, 2016, p. 135).

Segundo Randall (2011, p. 63, grifos da autora):

Aunque no sepamos *por qué* las tres dimensiones del espacio resultan tan especiales, podemos, sin embargo, preguntarnos *cómo*, ¿Cómo es posible que pueda parecer que el universo tiene sólo tres dimensiones espaciales si el espacio-tiempo fundamental subyacente contiene más? [...] Si la teoría de cuerdas es la descripción correcta de la naturaleza, y hay nueve dimensiones espaciales (más una temporal), ¿qué ha pasado con las seis dimensiones espaciales que faltan? ¿Por qué no son visibles? ¿Producen algún impacto discernible en el mundo que vemos?

Todavia, as teorias que propõem dimensões extras não as comprovam. Na esfera das relações sociais contemporâneas, a compreensão do espaço ainda está limitada à tridimensionalidade, somada a uma dimensão temporal.

Se, porventura, o espaço possuir uma estrutura com mais dimensões, possivelmente, a partir do avanço da Física e da Geometria, a humanidade chegará a conhecê-las. Tais possíveis dimensões, no entanto, não refutam a dialética materialista. Ao contrário, reforçam os estudos, no plano ontológico, sobre a relação entre a matéria e a consciência. Isso ocorre porque a dialética materialista concebe a unidade do mundo em sua materialidade indissociável, na qual perscruta-se o contínuo desenvolvimento da matéria e o consequente movimento da consciência na apreensão da realidade material. É nesse contínuo e indissociável movimento que se encontra o objeto da Geometria. Ele é reflexo do desenvolvimento da realidade física, plasmado continuamente na consciência. Ou seja, é o reflexo da realidade, capturado pelo movimento da consciência.

Nesse sentido, Aleksandrov (1991b, p. 175) afirma:

No existe [...] ningún misticismo en el concepto matemático de espacio multidimensional. No es más que un cierto concepto abstracto creado por los matemáticos con el propósito de describir en lenguaje geométrico aquellas cosas que no admiten una ilustración geométrica sencilla en el sentido usual. Este concepto abstracto tiene una base enteramente real, refleja la realidad y fue creado por las demandas de la ciencia y no por un sueño ocioso de la imaginación.



Esses conceitos abstratos das multidimensões caracterizam um método geométrico de interpretação das grandezas. Assim, é possível descrever graficamente, por exemplo, o movimento de um corpo ao representar as três dimensões espaciais, o tempo, a massa, a velocidade etc., e atribuir-lhe  $n$  dimensões por meio da interpretação geométrica.

Diante disso, há diferenças entre os conceitos geométricos abstratos de espaços  $n$ -dimensionais e as dimensões espaciais da realidade física. Assim, de acordo com a Física Moderna, expressam-se três dimensões espaciais, mais uma temporal. Essa nova concepção, como adiantado, iniciou-se, apesar de conter seu gérmen na Física Clássica, com o surgimento das Geometrias não-euclidianas e, posteriormente, com a Teoria da Relatividade. “Pero, como subraya Lenin, no se puede confundir la mutabilidad de los conceptos de espacio y tiempo ‘con la inmutabilidad del hecho de que el hombre y la naturaleza sólo existen en el tiempo y en el espacio;’ [...]” (KONSTANTINOV, 1965, p. 140). Essas duas formas fundamentais de existência da matéria se transformam continuamente e produzem, na consciência, novos reflexos geométricos. Com isso, não se pode defender uma Geometria absoluta alheia a essas transformações.

Num primeiro olhar, não parece que o tempo possa influir na geometria da realidade física, uma vez que, para o senso comum, a compreensão da ligação indissolúvel entre o espaço e o tempo torna-se difícil. Outra dificuldade na qual nos deparamos é quanto à diferenciação entre o tempo e a sua medição. O primeiro é uma propriedade da realidade física e a segunda é uma criação humana na relação de reflexo na consciência.

Segundo Einstein e Infeld (2008, p. 242):

A sensação psicológica subjetiva de tempo nos permite ordenar as nossas impressões, declarar que um acontecimento precede outro. Mas ligar todo instante de tempo a um número, pelo uso de um relógio, considerar o tempo um contínuo unidimensional, já é uma invenção. Assim também os conceitos das geometrias euclidianas e não euclidiana, e o nosso espaço compreendido como um contínuo tridimensional.

Um relógio pode ser atribuído a qualquer objeto material que possa medir certa regularidade na realidade física. Portanto, torna-se mais preciso tanto mais exata for

a tecnologia aplicada. Pode-se pensar na medição por meio atômico, mas se pode registrar a medição por intermédio de cristais de quartzo ou até mesmo pelos menos precisos pêndulos. A precisão absoluta, entretanto, é uma abstração da qual não se pode abusar. Tais medições não são absolutas porque a matéria se transforma continuamente no espaço e no tempo. Para efeito de medida, porém, recorta-se essas medições com o objetivo de, no limite de nossas necessidades e possibilidades, compreender e conviver cotidianamente com a realidade física. Isso não significa, de modo algum, um relativismo ontológico.

Essa classe de relativismo, segundo Einstein e Infeld (2008, p. 158), tem expressão também na Teoria da Relatividade, dado que, na imersão da vida cotidiana, algumas medições dependem do observador.

O tempo é determinado por relógios, as coordenadas espaciais por réguas, e o resultado de sua determinação pode depender do comportamento desses relógios e réguas quando em movimento. Não há razão alguma para acreditarmos que se comportarão da maneira que gostaríamos. A observação mostra, indiretamente, por meio dos fenômenos do campo eletromagnético, que um relógio em movimento muda de ritmo e uma régua muda de comprimento, enquanto, com base nos fenômenos mecânicos, não pensamos que isso acontecesse.

Essas medições do tempo e do espaço dependem de objetos físicos. A geometria da realidade física se caracteriza nesse processo de medição e, portanto, possui a métrica como categoria ontológica central. Encontra-se, assim, uma relatividade do objeto da Geometria, pois ele não pode ser um atributo da própria realidade física e tampouco uma forma *a priori* da sensibilidade humana. O senso comum, que não concebe a possibilidade de mudança do ritmo do tempo e das medidas de um corpo sob a influência do movimento, está fundado nos fenômenos mecânicos ordinários. Tais fenômenos são justamente a base do surgimento da Geometria euclidiana e caracteriza o desenvolvimento da Física na época de Euclides. No contexto histórico em que viveu o matemático, não foi possível outra Geometria, uma vez que o desenvolvimento das forças produtivas não possibilitou uma compreensão da realidade física para além de certos limites estreitos.



Nessa relação de medição de comprimentos de corpos físicos, que caracteriza a métrica da Geometria e as novas concepções físicas, Mañes (2001, p. 45, grifo do autor) afirma:

La longitud de un objeto no es un concepto absoluto, sino que depende del observador. Para medir un objeto en reposo basta con usar una regla. Para medir un objeto en movimiento, podemos anotar las posiciones de sus extremos, y la diferencia nos dará la longitud. Pero es evidente que si el objeto se mueve, hemos de tener cuidado de medir las posiciones de sus extremos *al mismo tiempo*. De lo contrario, la diferencia entre las posiciones tendrá poco que ver con la longitud del objeto. Pero, dado que la simultaneidad es un concepto relativo, se sigue que también lo será la longitud de un objeto.

A dependência em relação ao observador para se determinar o comprimento de um objeto não encerra, como indicado, um relativismo ontológico, mas um relativismo gnosiológico. Essa medição, que é relativa ao observador, quando feita em movimento, requer a consideração da categoria tempo, mais especificamente, a simultaneidade.

Para a Teoria da Relatividade, a simultaneidade é relativa, depende do observador interno ou externo ao fenômeno. Assim, a métrica da geometria do espaço também é relativa ao observador. Essa relatividade, por sua vez, passa pela síntese relacional entre o reflexo objetivo da realidade material e o reflexo subjetivo, que é capturado pela consciência do sujeito. É nessa relação, constituída abstratamente, que se encontra o objeto da Geometria. Tal concepção pode apresentar impactos significativos nos processos de ensino e aprendizagem desta ciência, uma vez que rompe com os paradigmas clássicos de sua compreensão.

O caráter abstrato do objeto da Geometria tem um papel importante na compreensão da realidade física, uma vez que possibilita à consciência ir além das experiências e necessidades imediatas. Segundo Aleksandrov (1991b, p. 227):

En la teoría de la relatividad, la geometría abstracta encuentra aplicación no sólo como aparato matemático; las ideas propias de un espacio abstracto proporcionan el medio para una formulación más profunda de los fundamentos de esta teoría. Las posibilidades contempladas en la geometría abstracta se descubren en la realidad, y el pensamiento consigue con ello su triunfo más brillante. La geometría abstracta, nacida del estudio empírico de las relaciones espaciales y formas de los cuerpos, afronta ahora, en calidad de método matemático bien desarrollado, el estudio del espacio real.

A Geometria, como indicado acima, não se constitui apenas como uma ferramenta aplicada à Física, senão uma parte constituinte desta. Ela proporciona as abstrações matemáticas necessárias ao avanço da Física e possibilita suas comprovações na realidade física. Esse caminho da Geometria – desde a experiência até as mais refinadas abstrações e, posteriormente, seu retorno à realidade material para compreendê-la – é o mesmo para toda ciência, como afirma Aleksandrov (1991b).

Um dos êxitos da relação entre as Geometrias não-euclidianas e a Teoria da Relatividade foi evidenciar a natureza física da métrica da Geometria, ou seja, o reflexo da realidade física na consciência, que se constitui em abstrações geométricas.

As discussões sobre a geometria do espaço físico ganham, num dado momento, um elemento característico, qual seja, a observação do espaço em escala macro e microscópica. Como as três dimensões são propriedades da realidade física e determinam as propriedades métricas, a Geometria se constitui como uma abstração dessas propriedades que variam continuamente com o movimento da matéria. Nesse viés, até onde nossas possibilidades científicas e tecnológicas permitem chegar atualmente, o espaço se mostra constituído por três dimensões espaciais e uma temporal.

Inicialmente, o grande impulso no desenvolvimento da Teoria da Relatividade foi a Geometria riemaniana, pois ela incorpora as geometrias não-euclidianas e euclidiana como casos singulares. Conforme Paty (2005, p. 656):

A geometria riemaniana é a mais geral e engloba a geometria euclidiana bem como as várias geometrias não-euclidianas a título de casos particulares. [...] Chegou assim, pela pura especulação matemática, ao pensamento da “indissociabilidade da geometria e da física”.

Essa indissociabilidade entre a Geometria e a Física foi uma proposição que Riemann elaborou matematicamente e que obteve, anos mais tarde, corroboração com a Teoria da Relatividade. A Geometria, sendo uma ciência matemática, constitui-se como um sistema lógico que independe das casualidades da realidade física e



organiza logicamente seu desenvolvimento histórico e estabelece as abstrações que podem corresponder, ou não, a essas realidades.

Assim, as abstrações geométricas não são um reflexo mecânico da realidade física na consciência, inclusive porque os conceitos geométricos não representam exatamente tal realidade, apenas uma aproximação. Segundo Einstein (2005, p. 678):

Según la concepción más depurada de la naturaleza de los cuerpos sólidos y de la luz, no existen objetos naturales cuyas propiedades correspondan exactamente a los conceptos fundamentales de la geometría euclídea. El cuerpo sólido no es rígido, y el rayo de luz no representa con justeza la línea recta ni, más generalmente, una figura unidimensional. Conforme a la ciencia moderna, ninguna experiencia corresponde sólo y exclusivamente a la geometría, sino a la geometría unida a la mecánica, óptica etc. Pero como, por otra parte, la geometría debe preceder a la física, puesto que las leyes de la última no pueden ser expresadas sin el auxilio de la primera [...].

Segundo o autor, a natureza dos corpos sólidos não corresponde exatamente aos fundamentos da Geometria euclidiana. Isso é pertinente porque esta última é um caso singular de geometrias mais gerais e, por sua vez, essas também não representam de forma absoluta a realidade física, apenas uma aproximação.

As necessidades humanas delineiam a produção dos conhecimentos geométrico e físico da realidade material e estes se complementam na medida em que a Geometria se torna uma parte constituinte da Física. A Geometria precede a Física na compreensão da realidade, uma vez que seu objeto é uma abstração. Assim, a Física necessita dessa abstração geométrica para interpretar seu objeto.

O impacto causado pelo desenvolvimento das geometrias não-euclidianas e pela Teoria da Relatividade nas concepções de tempo, espaço, movimento e matéria aprimorou o objeto da Geometria na medida em que delimitou sua procedência abstrata. Ou seja, colocou os limites de sua constituição na relação entre a realidade física e as formas de reflexo na consciência.

Com isso, inferimos que o objeto da Geometria se constitui como um reflexo e não uma parte constitutiva da realidade física ou uma forma a priori da sensibilidade humana. As possibilidades didáticas fundamentadas nessa compreensão sobre o objeto da Geometria se apresentam como um caminho frutífero à elaboração de um ensino desenvolvimental, conforme Davídov (1988). E, no caso da Geometria, esse

teor teórico tem, necessariamente, ligação com o seu objeto tal qual como entendemos e defendemos no presente texto.

### **Crítica à crítica de Lukács a Einstein: elementos de análise do objeto da Geometria**

No que diz respeito às relações entre a Geometria, como uma forma de reflexo, e a realidade material, Lukács (2018, p. 343-370) faz uma crítica ao método positivista e neopositivista da compreensão da realidade fundada no elemento matemático e ao que ele chama de “unilateralidade da postura exclusivamente gnosiológica e lógica da realidade” (LUKÁCS, 2018, p. 358). A tendência a esta unilateralidade derivou um esforço do neopositivismo “para demolir toda diferença entre a própria realidade e sua imagem nas diferentes formas de reflexo” (LUKÁCS, 2018, p. 358).

Na Ontologia, Lukács (2018) critica as concessões filosóficas feitas à teoria da manipulação neopositivistas por célebres cientistas. O autor húngaro exemplifica o problema e, para tal, utiliza o experimento ideal de Einstein e Infeld (2008) sobre seres bi e tridimensionais. Com base na relação entre a Geometria e a Teoria da Relatividade, o referido filósofo esclarece, contudo, que não se trata de uma crítica à teoria, mas à compreensão de Einstein e Infeld (2008) de que o objeto da Geometria é uma parte constitutiva da realidade física.

O autor da Ontologia cita parte do livro *A evolução da física*, de autoria de Albert Einstein e Leopold Infeld (2008). O trecho da seção “geometria e experiência”, reproduzido a seguir foi retirado diretamente do original:

Começamos pela descrição de um mundo no qual vivem apenas criaturas bidimensionais, e não tridimensionais como o nosso. O cinema nos acostumou com criaturas bidimensionais representado em uma tela bidimensional. Imaginemos agora que essas *figuras-sombra*, isto é, os atores na tela, realmente existem, que têm o poder do pensamento, que podem criar sua própria ciência, e que, para elas, uma tela bidimensional representa o espaço geométrico. Essas criaturas são incapazes de imaginar, de um modo *concreto*, um espaço tridimensional, do mesmo modo como somos incapazes de imaginar um mundo *de quatro dimensões*. Podem desviar uma linha reta; sabem o que é um círculo, mas são incapazes de construir uma esfera, pois isso significaria abandonar a sua tela bidimensional. Estamos em situação semelhante. Estamos capacitados a desviar e curvar linhas e superfícies, mas dificilmente podemos imaginar um espaço tridimensional desviado e curvado. (EINSTEIN; INFELD, 2008, p. 186-187, grifos nossos).



Na passagem, aparece a expressão “de um modo concreto” que, em Lukács (2018), é suprimido. Parece-nos que tal diferença, nesse trecho, não altera a essência da ideia que se quer expressar.

Para o filósofo, o experimento ideal não trata de problemas concretos da física, pois não existem seres bidimensionais que pensem e atuem num mundo bidimensional e possam, dali ser retirados, levados a outro mundo tridimensional para, assim, terem percepção da terceira dimensão.

Na sequência, Einstein e Infeld (2008) intensificam o exemplo e colocam os seres bidimensionais nas mesmas condições em que os humanos se encontram durante o desenvolvimento do conhecimento geométrico e físico da realidade material. Chega a dizer que se as figuras-sombras, naquela situação, deixassem de ser conservadoras, começariam a admitir que o espaço é não-euclidiano. O exemplo trata apenas de uma situação hipotética que beira o absurdo quanto à adaptabilidade da metáfora ao espaço físico de seres humanos que vivem um mundo tridimensional. O exemplo traz o cinema como recurso da metáfora, mas esquece de que a reprodução em tela, bem como numa pintura, corresponde à realidade tridimensional refletida bidimensionalmente (CANDIOTTO, 2016, p. 100).

Cheptulin (1982) cita um exemplo semelhante ao usado por Einstein e Infeld (2008):

O professor Zelner, espiritualista, chegou a recorrer ao seguinte raciocínio: admitamos que existam seres com duas dimensões, que só podem deslocar-se da esquerda para a direita, para frente e para trás, mas não de baixo para cima. Eles seriam parecidos com um peixe chato, por exemplo, o linguado, colocado em um aquário chato, e privado da possibilidade de se deslocar para o alto e para baixo. Esses seres vivos não sabem nada da terceira dimensão espacial que nós conhecemos, já que somos seres de três dimensões. É por isso que, para chegar ao centro do círculo, esses seres podem deslocar-se no sentido do raio e, assim, eles cortarão forçosamente a circunferência. Quanto a nós, podemos chegar ao centro do círculo de outra maneira, seguindo a terceira dimensão, isto é, aproximando-nos do alto para baixo e de baixo para o alto. (CHEPTULIN, 1982, p. 187).

O caso anterior se aproxima ao exemplo de Einstein e Infeld (2008). Contudo, também expressa uma abstração absurda que não corresponde à realidade física das coisas, pois não há peixes e aquários chatos, tampouco existem peixes que saibam geometrizar.

Segundo Cheptulin (1982), a metáfora de Zelner trata-se de um esforço para a demonstração de que estamos em posição semelhante em relação à quarta dimensão, na qual não podemos alcançar o centro de uma esfera, por exemplo, sem tocar sua superfície, o que seria possível para seres quadridimensionais. Este exemplo, diferente em partes ao de Einstein e Infeld (2008), refere-se a uma metáfora que apela às questões sobrenaturais que não compreendemos e nem explicamos com base no espaço tridimensional. “Esses raciocínios mostram o quanto a quarta dimensão é necessária a certos filósofos para fundamentar a existência de Deus e de todo o misticismo” (CHEPTULIN, 1982, p. 187). No entanto, o exemplo apresentado pelo autor é pautado numa concepção idealista da realidade material.

No caso do exemplo analisado por Lukács (2018), entendemos que os físicos queriam mostrar como é difícil imaginar um espaço não-euclidiano, em vez de necessariamente evidenciar um espaço físico de quatro dimensões, uma vez que a Teoria da Relatividade apresenta uma explicação para o problema ao superar o tempo e o espaço absolutos, independentes da matéria. Ou seja, um espaço de três coordenadas espaciais e uma temporal. De acordo com Aleksandrov (1991b, p. 223), “La proposición más esencial y básica de la teoría de la relatividad es la siguiente: el espacio es completamente inseparable del tiempo, y ambos forman una única forma de existencia de la materia, la variedad tetradimensional del espacio-tiempo”.

Na sequência de seus apontamentos críticos, Lukács (2018, p. 360) afirma o seguinte:

Pode-se dizer: mesmo que tudo o que dissemos contra a experiência intelectual de Einstein esteja correto, não toca a essência de sua linha de pensamento, a saber, que a geometria constitui uma parte da física. Aquela não é, por conseguinte, um reflexo da realidade, brilhantemente abstraído e por isso infinitamente frutífero cientificamente, cuja aplicação crítica pela física a tem promovido e ainda a promove extraordinariamente, mas seus objetos são igualmente reais, corpóreos, como os da própria física.

Na continuidade, Lukács (2018, p. 361) coloca a indagação puramente filosófica: “é a geometria um reflexo da realidade ou são seus objetos e as conexões entre eles componentes reais da realidade física tal como a dureza, o peso etc. [?]”.



Não nos parece que o experimento ideal de Einstein e Infeld (2008) tenha a intenção de afirmar a constituição física do objeto da Geometria, tampouco que ela não é um reflexo da realidade física. Os autores têm a intenção de mostrar que o espaço é não-euclidiano. Essa é a essência do experimento da dupla de físicos. No trecho anterior, Lukács (2018) fala que a essência do argumento de Einstein e Infeld (2008) é “que a geometria constitui uma parte da física”. Para nossa análise, não há problemas em tal afirmação, pois a Geometria não pode ser separada da Física. Aquela, com efeito, é constitutiva desta. A Geometria é, por conseguinte, um reflexo da própria realidade física das coisas.

Segundo Aleksandrov (1991b, p. 221), “la geometría como ciencia de las propiedades del espacio está relacionada con la física, depende de ella y solamente puede ser separada de ésta en la abstracción y en ciertos contextos”. A pretensão de Lukács (2018), segundo o entendimento da presente exposição, é mostrar que o objeto da Geometria não constitui uma parte da realidade física mesma. Porém, como foi expresso por ele, na análise específica do experimento de Einstein e Infeld (2008), leva ao entendimento de que esse objeto é independente da Física enquanto ciência. Isso porque os físicos citados não distinguem claramente as propriedades do espaço e o reflexo da ciência geométrica, bem como a matéria e o reflexo da ciência física.

Aleksandrov (1991b, p. 221-222) assim se expressa sobre a questão:

La dependencia de la geometría respecto a la física, o en otras palabras, la dependencia de las propiedades del espacio respecto a la materia, fue claramente señalada por Lobachevski, quien previó la posibilidad de un cambio en las leyes de la geometría en relación con los nuevos descubrimientos físicos.

Essa questão da relação da Física com a Geometria acarreta confusões de toda ordem, sobretudo ao se tratar do objeto da Geometria, pois não é uma questão puramente matemática, mas também de ordem filosófica. Por exemplo, “en la época de Demócrito, las figuras geométricas no estaban todavía separadas de las reales tanto como ahora” (ALEKSANDROV, 1991a, p. 45), e isso tinha consequências na concepção de Geometria. Posto que “Demócrito considerava los cuerpos reales como compostos de átomos, nada más natural que también contemplara las figuras geométricas bajo este mismo ángulo” (ALEKSANDROV, 1991a, p. 45).

Após colocar a questão supracitada, Lukács (2018) cita a sequência dos argumentos de Einstein e Infeld (2008). Transcrevemos o trecho dos autores direto do original, bem como a frase imediatamente anterior, que convida o leitor a voltar ao mundo das criaturas tridimensionais:

Que se quer dizer com a declaração de que o nosso espaço tridimensional é euclidiano? O significado é que todas as declarações lógicas provadas da geometria euclidiana podem ser também confirmadas pela experiência real. Podemos, com a ajuda de corpos rígidos ou de raios de luz, construir objetos correspondentes aos objetos idealizados da geometria euclidiana. A aresta de uma régua ou um raio de luz corresponde à linha; a soma dos ângulos internos de um triângulo construído com hastes delgadas é 180 graus; a razão dos raios de dois círculos com um centro comum, construídos de arames finos flexíveis, é igual à de suas circunferências. Assim interpretada, a geometria euclidiana se torna um capítulo da Física, embora muito simples. Mas podemos imaginar que foram descobertas discrepâncias, como, por exemplo, a de que a soma dos ângulos internos de um triângulo grande, construído de hastes, que por muitas razões tinham de ser consideradas rígidas, não é 180 graus. (EINSTEIN; INFELD, 2008, p. 188).

Lukács (2018, p. 361) afirma que, com essa declaração, Einstein e Infeld (2008) consideram “geometria euclidiana como uma hipótese, um modelo para o conhecimento de fenômenos físicos”. Para nossa análise, Einstein e Infeld (2008) não considerariam a Geometria euclidiana como um modelo para o conhecimento dos fenômenos físicos, porque a realidade física, de acordo com a Teoria da Relatividade, é não-euclidiana. O espaço circundante ao ser humano é interpretado euclidianamente apenas no que se refere às pequenas dimensões, de certo modo até no âmbito do globo terrestre, porém com muitas restrições. A Teoria da Relatividade dá um duro golpe na teoria kantiana do tempo e espaço ao provar que nosso espaço real é não-euclidiano.

Portanto, esta compreensão supera “la doctrina de que la Geometría Euclidiana es inherente a la naturaleza del mundo físico” (ALMIRA; RAMOS, 2004, p. 91). Se isso procede, como podem Einstein e Infeld (2008), como afirma Lukács (2018), sustentar que o objeto da Geometria é constitutivo da própria realidade física? Einstein e Infeld (2008) afirmam que a percepção imediata considera apenas o espaço da Geometria euclidiana e custa a visualização de um espaço não-euclidiano. Assim, a Geometria de Euclides torna-se um caso singular da Geometria de Lobachevski e de Riemann. Por consequência, um caso singular de conhecimento dos fenômenos



físicos. Por isso, Einstein e Infeld (2008) dizem que a Geometria euclidiana se torna um capítulo simples da Física. Logo na sequência do trecho, eles dizem:

Como já estamos acostumados com a ideia de *representação concreta* dos objetos da geometria euclidiana por corpos rígidos, provavelmente buscaríamos alguma força física para causa desse inesperado mau procedimento de nossas hastes. (EINSTEIN; INFELD, 2008, p. 188-189, grifo nosso).

Ou seja, eles evidenciam a necessidade que a humanidade teve, na época do desenvolvimento das geometrias não-euclidianas, de procurar problemas na própria realidade física que afetavam a convicção na Geometria de Euclides.

A análise que se procede aqui não é contrária à totalidade da crítica de Lukács (2018) a Einstein e Infeld (2008), pois, o presente artigo comunga com a crítica às concepções que consideram o objeto da Geometria como parte constitutiva da realidade física e da absurdidade do exemplo de Einstein e Infeld (2008). Porém, não vemos em momento algum, nas passagens desses dois autores, o argumento da constituição física do objeto da Geometria.

Ao tratar da necessária homogeneização no reflexo geométrico da realidade heterogênea e do correto reflexo da condição quantitativa da Matemática, Lukács (2018, p. 362) escreve:

Essa homogeneização razoável no reflexo geométrico possibilita uma elevadíssima matematização das relações espaciais assim desveladas, uma racionalização expressa matematicamente de conexões puramente espaciais que jamais poderiam ter sido alcançadas pela via da mera observação, etc. das próprias coisas. Se falamos aqui de matematizar, devemos de imediato acrescentar que, naturalmente, também a matemática se baseia no reflexo correto das qualidades quantitativas das coisas e relações da realidade.

Após considerar que a Matemática tem por base refletir corretamente o mundo concreto, o autor procura exemplificar como ocorre tal reflexão:

Para nos limitar ao mais elementar, ao falarmos de 40 seres humanos ou de 50 árvores, nossos pensamentos refletem, dos objetos, o puramente quantitativo, o número de uma porção então existente em tal grupo de objeto, deixando de lado toda outra qualidade qualitativa. Esta, em nosso exemplo, ainda existe em um resíduo abstrato, na medida em que falamos de seres humanos e de árvores. Querendo avançar daqui até a operação matemática mais simples, até a adição, devemos também apagar esse resíduo abstrato ou

substituí-lo com uma abstração que supera ainda mais o qualitativo. Podemos, então, dizer que 40 seres vivos adicionados a 50 seres vivos perfazem 90 seres vivos (LUKÁCS, 2018, p. 362).

De um só golpe, o filósofo indica a impossibilidade ontológica de se separar quantidade de qualidade e, ao mesmo tempo, demonstra como a Matemática é um reflexo que homogeneiza a heterogeneidade do cotidiano.

O desenvolvimento da matemática confirmou brilhantemente a correção e fecundidade dessa abstração homogeneizadora e auxiliou a determinar conexões quantitativas altamente complexas da realidade, o que, por vias diretas, seria igualmente impossível. Portanto, repetimos, da base do reflexo abstrativo homogeneizador também foi possível uma matematização das puras relações espaciais geometricamente refletida (LUKÁCS, 2018, p. 362).

A abstração homogeneizante é uma necessidade de todo conhecimento, exemplificado, aqui, com o caso da Matemática. Na análise da realidade, de um fenômeno físico, por exemplo, o conhecimento não pode prescindir das demais propriedades do objeto em referência. Tal homogeneidade matemática, portanto, não pode ser absolutizada e encarada como “a chave única e definitiva para o decifrar dos fenômenos” (LUKÁCS, 2018, p. 347), como ocorre com o neopositivismo.

Poder-se-ia prosseguir, no exemplo de Lukács (2018), e abstrair todas as propriedades qualitativas, de modo que restaria apenas a relação quantitativa “quarenta mais cinquenta é igual a noventa”. No entanto, fica evidente tanto a capacidade homogeneizadora da Matemática, quanto a impossibilidade ontológica de se separar quantidade de qualidade.

A análise de Lukács (2018) do conhecimento geométrico e matemático expressa uma compreensão dialético-materialista da realidade, sobretudo da espacialidade e das relações quantitativas. Com base nesse entendimento posto no plano ontológico, o autor sustenta o desenvolvimento do pensamento teórico-matemático que contribui para a plena formação humana. A formação de tal pensamento se torna possível por meio do método dialético-materialista de compreensão da realidade que, por seu caráter ontológico, possibilita o conhecimento o mais fiel possível da realidade.



Ao fim de sua análise do experimento de Einstein e Infeld (2008) e da compreensão do objeto da Geometria e da Matemática, Lukács (2018, p. 363) adverte com justeza:

Todos esses triunfos da abstração razoável não alteram em nada, contudo, do fato ontológico fundamental de que tanto a geometria quanto a matemática são reflexos e não partes, «elementos» etc. da realidade física. Porque refletem momentos importantes, fundamentais, puras relações espaciais ou puras relações quantitativas, são tremendos instrumentos para o conhecimento de cada realidade na medida em que sua essência constitua relações espaciais ou relações quantitativas. Em que pesem todos esses brilhantes resultados, não se pode esquecer a simples verdade de que esses tipos de reflexo apenas podem refletir determinados momentos da realidade, enquanto que, todavia, a realidade em si existente é feita de uma infinidade de outros componentes.

Essa advertência é importante para não se incorrer nos mesmos tropeços do neopositivismo ao reduzir a realidade às descrições e interpretações puramente lógico-matemáticas. Os conhecimentos matemáticos e geométricos são reflexos da realidade objetiva e, portanto, sua coerência estrutural não pode se organizar por si própria, em uma abstração que independa do movimento da referida realidade. Isso porque “a esta abstracción no debe elevársela a la categoría de absoluta mediante una sustitución de la propia realidad objetiva por conceptos abstractos” (ALEKSANDROV, 1991b, p. 218).

Diante do exposto, a crítica de Lukács (2018) ao experimento de Einstein e Infeld (2008) se torna pertinente à análise da relação entre a realidade física e o reflexo geométrico, uma vez que as geometrias não-euclidianas constituíram uma base do desenvolvimento da Teoria da Relatividade.

### **Considerações finais**

Com base em nossa análise sobre a relação entre as geometrias não-euclidianas e a Teoria da Relatividade, bem como os indícios reveladores de uma concepção dialético-materialista do objeto da Geometria, não encontramos nos argumentos einsteinianos a intenção de provar que o objeto da Geometria é constitutivo da realidade física, ao contrário do que defendeu Lukács (2018).

Lukács (2018) esclarece que suas considerações não pretendem uma crítica à teoria física de Einstein e Infeld (2008), “apenas constataam que sua experiência

intelectual não traz qualquer evidência filosófica para a tese de que a Geometria seria um ‘campo da Física’” (LUKÁCS, 2018, p. 363).

O filósofo acrescenta, sobre os experimentos dos físicos, o seguinte: “parece-nos que nesse aspecto o significativo físico fez uma concessão filosófica à teoria da manipulação do neopositivismo e reforçou, com sua autoridade, sua tendência principal de deixar a realidade desaparecer da ciência” (LUKÁCS, 2018, p. 363).

A presente análise reforça sua concordância sobre o fato de que o experimento em debate não agrega prova filosófica à questão em si. Porém, não entende que, nos argumentos de Einstein e Infeld (2008), há a intenção de provar que o objeto da Geometria é constitutivo da realidade física. Ou seja, os físicos não procuram demonstrar que exista conjunção entre o reflexo e a própria realidade física.

Como afirma a crítica de Lukács (2018), a não diferenciação entre o reflexo e a própria realidade física caracteriza uma concepção idealista ou materialista-mecanicista do desenvolvimento da matéria em movimento. Pode-se observar esse movimento da compreensão do objeto da Geometria, ao longo da história, cujas mudanças ocorreram entre aqueles que concebem esse objeto como inerente à realidade física e os que o entendem como uma forma a priori da sensibilidade humana.

Sendo assim, finalizamos com alguns questionamentos: A comprovação, pela Física, das teorias que afirmam a existência de mais de três dimensões espaciais causaria quais possíveis impactos na compreensão do objeto da Geometria? Tal compreensão sobre o objeto da Geometria pode ser considerada na análise de objetos de outras áreas do conhecimento matemático? Quais as possíveis implicações de nossa compreensão sobre este objeto para o seu ensino escolar?

A discussão aqui desenvolvida não esgota o debate, tampouco apresenta respostas completas a essas perguntas, mas provoca uma reflexão necessária sobre o objeto da Geometria, com a finalidade de contribuir na sua compreensão e possibilitar uma interpretação mais próxima possível de sua complexa relação com a realidade física.



## Referências

ALEKSANDROV, A. D. Visión general de la matemática. In: ALEKSANDROV, A. D. et al. **La matemática: su contenido, métodos y significado**. Madrid: Alianza, 1991a. p. 17-89.

ALEKSANDROV, A. D. Geometrias no euclidianas. In: ALEKSANDROV, A. D. et al. **La matemática: su contenido, métodos y significado**. Madrid: Alianza, 1991b. p. 123-227.

ALMIRA, C. J. M. S.; RAMOS, P. R. Evolución de la Geometría desde su perspectiva histórica. **Boletín de la Asociación Matemática Venezolana**, Caracas, v. 11, n. 1, p. 85-101, 2004.

CANDIOTTO, W. C. **Crítica da razão matemática: uma análise do objeto da Geometria**. 2016. 194p. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Florianópolis, 2016.

CHEPTULIN, A. **A dialética materialista: categorias e leis da dialética**. São Paulo: Alfa-Omega, 1982.

DAVÍDOV, V. **La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico: investigación psicológica teórica y experimental**. Moscú: Progreso, 1988.

EINSTEIN, A. Geometria no euclídea y física. **Scientiae Studia**, São Paulo, v. 3, n. 4, p. 677-681, 2005.

EINSTEIN, A.; INFELD, L. **A evolução da física**. Rio de Janeiro: Zahar, 2008.

KONSTANTINOV, F. V. **Fundamentos de la filosofía marxista**. Distrito Federal do México: Grijalbo, 1965.

LUKÁCS, G. **Prolegômenos e Para a ontologia do ser social**. Maceió: Coletivo Veredas, 2018.

MAÑES, J. L. **Geometría del Espacio-Tiempo**. In: UN PASEO POR LA GEOMETRÍA, 2001, Bilbao. Anais... Bilbao: RSME, 2001. p. 37-54.

PATY, M. Introdução a três textos de Einstein sobre a geometria, a teoria física e a experiência. **Scientiae Studia**, São Paulo, v. 3, n. 4, p. 641-662, 2005.

RANDALL, L. **Universos ocultos: un viaje a las dimensiones extras del cosmos**. Barcelona: Acantilado, 2011.

Recebido junho 2023.

Aprovado julho 2023.