

Funções geradoras na obtenção do termo geral de uma sequência

Luiz Gustavo Chaves de Pinho[1], Cícero Moreira Hitzschky Filho[2],
[1]Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia/Matemática,
e-mail:luiz.pinho@aluno.uece.br
[2]Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia/Matemática, e-mail:
cicero.moreira@uece.br

RESUMO. A função geradora é uma técnica interessante para analisar sequências e determinar a expressão para o termo geral. Além disso, o uso de tal função se estende para probabilidade e análise combinatória. Neste trabalho, iremos utilizar essa característica para apresentar alguns exemplos para sequências conhecidas e também mostrar aplicações da função.

Palavras-chave: Funções Geradoras. Recorrência. Sequências.

1. INTRODUÇÃO

Durante o estudo de sequências, séries e recorrências, não é comum nos encontrarmos com funções geradoras, são funções que se associam a uma sequência, e são definidas da seguinte forma.

Definição. *Seja (a_n), com $n \in \mathbb{N}$ uma sequência. A função geradora (ou função geratriz) associada a esta sequência é a série formal $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$.*

Além disso, é de suma importância relembrarmos uma importante série, a série de Taylor, que é

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Com essa função e série, dada a forma de recorrência podemos determinar a expressão geral para a sequência. Para obtermos essas soluções iremos utilizar o seguinte roteiro:

1. Use a relação de recorrência para obter uma equação funcional para a função geradora f;
2. Resolva esta equação para a expressão para f;
3. Aplique a fórmula de Taylor (ou outros métodos) na expressão de f para encontrar os coeficientes a_n.

2. FUNÇÕES GERADORAS EM PROBLEMAS DE COMBINATÓRIA

A aplicação para essa função é vasta. Pondo um coeficiente binomial para cada variável, associamos cada um deles com um problema de análise combinatória, assim expandindo suas aplicações, por exemplo, quais seriam as diferentes maneiras de se retirar bolas brancas e pretas de uma caixa? Nesta aplicação, o grau do termo da função geradora representa a quantidade de bolas retiradas, enquanto o coeficiente representa a quantidade de maneiras. Vamos exemplificar esse resultado.

Considere uma caixa com 6 bolas, 4 roxas e 2 azuis, de quantas formas diferentes posso tirar 3 bolas roxas e 1 azul? Para resolvermos, consideremos duas funções f para roxas e g para azuis.

$$f(x) = \binom{4}{0}x^0 + \binom{4}{1}x^1 + \binom{4}{2}x^2 + \binom{4}{3}x^3 + \binom{4}{4}x^4 = 1x^0 + 4x^1 + 6x^2 + 4x^3 + 1x^4 \quad (1)$$

$$g(y) = \binom{2}{0}y^0 + \binom{2}{1}y^1 + \binom{2}{2}y^2 = 1y^0 + 2y^1 + 1y^2 \quad (2)$$

Note que, o grau da variável indica a quantidade de bolas retiradas de sua respectiva cor, enquanto o coeficiente representa a quantidade de formas dessa retirada, como queremos 3 roxas e 1 azul queremos exatamente o termo da forma x^3y^1 que é encontrado fazendo o produto das funções, é válido pois os conjuntos são disjuntos e queremos o produto cartesiano, queremos apenas o produto do 4° termo de (1), que é $4x^3$, com o 2° termo de (2), que é $2y^1$, o produto é exatamente $8x^3y^1$, como o coeficiente é 8, nos mostra que há 8 formas de se realizar essa retirada.

3. FUNÇÕES GERADORAS E TERMOS GERAIS DE SEQUÊCIAS

Como vimos na seção anterior podemos associar funções geradoras com análise combinatória. Contudo, seu uso não se limita apenas a isso, veremos a seguir como podemos aplica-lá em sequências definidas por recorrência e determinar uma expressão para o termo geral. Inicialmente considere a sequência a seguir:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1}, \forall\, n \geq 1 \\ a_0 = 1. \end{cases} \quad (3)$$

Suponha que a função geradora para a sequência (3) seja dada pela equação (4).

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots \quad (4)$$

Usando a lei de formação, obtemos

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots \\ &= 1 + 2a_0x + 2a_1x^2 + \cdots \\ &= 1 + 2x\underbrace{(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots)}_{f(x)} \end{aligned}$$

Disso, $f(x) = 1 + 2xf(x)$, ou seja, $f(x) = \dfrac{1}{1-2x}$.

Note que a expressão obtida representa a convergência da série geométrica de razão $2x$. Deste modo,

$$f(x) = \frac{1}{1-2x} = 1 + 2x + (2x)^2 + (2x)^3 + \cdots = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \cdots \quad (5)$$

Como a equação (4) e (5) são iguais, obrigatoriamente, tem-se que os coeficientes são iguais. Portanto, o termo geral da sequência é $a_n = 2^n, \forall n \in \mathbb{N}$. Observe que também pode ser resolvida usando a série de Taylor citada anteriormente.

Vamos verificar para outros exemplos, estes são comumente vistos em cálculo I e II. Para obtermos os resultados desejados, determinadas sequências apresentam uma análise maior e que necessita de conhecimentos mais avançados. Definimos as seguintes sequências para determinarmos a expressão do termo geral:

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n \times \dfrac{k-n}{n+1}, \forall\, k \geq n \geq 1 \\ a_0 = 1 \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{a_{n-1}}{n}, \forall\, n \geq 1 \\ a_0 = 1. \end{cases} \tag{7}$$

Para a sequência (6), fixemos k arbitrariamente e realizando passos análogos ao exemplo, temos:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \cdots \\ &= 1 + 1 * \frac{k}{1} x + \frac{k}{1} * \frac{(k-1)}{2} x^2 + \frac{k(k-1)}{2} * \frac{(k-3)}{3} x^3 + \cdots \end{aligned}$$

Note que o coeficiente de x^n é exatamente igual a

$$\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)\ldots(k-n+1)}{n!} = \binom{k}{n}$$

Dessa forma, podemos reescrever a função como

$$f(x) = \binom{k}{0} x^0 + \binom{k}{1} x^1 + \binom{k}{2} x^2 + \binom{k}{3} x^3 + \ldots \tag{8}$$

de forma análoga ao que fizemos no exemplo, iremos comparar os coeficientes de cada termo x^n, obtemos que o termo geral dessa sequência é dada por

$$a_n = \binom{k}{n}$$

Para (7) iremos fazer de forma bastante similar, vamos repetir o processo, nossa função geradora é da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{1} x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \cdots \end{aligned}$$

Perceba que podemos reescrever nossa função substituindo o denominador por um fatorial

$$f(x) = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{4!} x^4 + \cdots \tag{9}$$

Dessa forma, obtemos que a expressão geral para essa sequência é

$$a_n = \frac{1}{n!}$$

Além disso, é importante ressaltar que (8) se limitado para no máximo k termos, obtemos o binômio de newton para $(1 + x)^k$. Para a sequência (9), os resultados e aplicações são bem observados ao analisarmos a série de Taylor para a função $f(x) = e^x$, para $a = 0$.

$$f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

nos proporcionando diversas análises como decrescimento, logaritmos, funções e inverso do fatorial.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os resultados obtidos neste trabalho nos permitem observar os usos das funções geradoras e a gama de aplicações, desde sequências até combinatória e probabilidade. Como apresentado em seu livro, Tertuliano (2018) conecta funções geradoras a permutações caóticas e números de Catalan nos exercícios propostos. Apesar de ser bastante útil, a resolução das sequências podem não ser tão fáceis, necessitando de uma análise mais longa e precisa para ser resolvida.

5. REFERÊNCIAS

FRANCO, Tertuliano. **Princípios de Combinatória e Probabilidade**. UFBA, 2018.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz **Um curso de cálculo: volume 1. 3. ed**. Rio de Janeiro, 1993.