

A definição combinatória do determinante e a existência de n autovalores para matrizes de ordem n

Antônio Carlos Rodrigues Aragão Filho[1], Cícero Moreira Hitzschky Filho[2]
[1]Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia/Ciências da Computação, e-mail: antonio.aragao@aluno.uece.br
[2]Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia/Matemática, e-mail: cicero.moreira@uece.br

RESUMO. O presente trabalho tem por objetivo apresentar a definição combinatória de determinante como uma formulação alternativa à definição recursiva dada pela expansão de Laplace. Inicialmente são apresentados conceitos fundamentais relacionados a matrizes quadradas e cofatores, e, em seguida, apresenta-se a definição combinatória de determinante. Essa definição é utilizada para demonstração de um resultado importante de álgebra linear sobre a existência de n autovalores, não necessariamente distintos, para uma matriz de ordem n.

Palavras-chave: Determinante. Combinatória. Autovalores.

1. INTRODUÇÃO

Em alguns casos, é se tem interesse em analisar um mesmo conceito sob diferentes perspectivas, pois cada abordagem evidencia aspectos estruturais que podem permanecer ocultos em uma única formulação. Demonstrar resultados por caminhos distintos amplia a compreensão conceitual e revela conexões internas entre áreas aparentemente separadas. No caso do determinante, sua apresentação tradicional por meio da expansão de Laplace destaca um caráter recursivo e operacional. Entretanto, a formulação combinatória explicita sua relação direta com permutações e com o grupo simétrico S_n. Essa perspectiva torna mais transparente a estrutura de $\det(A-\lambda I)$ como polinômio de grau n. Desse modo, evidencia-se naturalmente o fato de que uma matriz de ordem n possui n autovalores, integrando Combinatória e Álgebra Linear em uma visão unificada.

2. O DETERMINANTE SOB DUAS PERSPECTIVAS

Matrizes são tabelas de números organizados em linhas (horizontais) e colunas (verticais). Diz-se que $m \times n$ são as dimensões de uma matriz que possui m linhas e n colunas. Quando o número de linhas é igual ao número de colunas, diz-se que a matriz é quadrada. Dada uma matriz A de dimensões $n \times n$, denomina-se como submatriz de A, a matriz A_{ij} de dimensão $(n-1) \times (n-1)$ obtida da eliminação da i-ésima linha e da j-ésima coluna de A. Um importante conceito de matrizes amplamente utilizado na teoria com uma quantidade vasta de aplicações é o determinante de uma matriz. Será denotado por $\det(A)$, o determinante da matriz A de ordem n.

Uma forma bastante comum de definir o determinante é por recorrência. Inicialmente, para $n = 1$, pomos $\det(A) = a_{11}$. Para o caso $n \geq 2$, utiliza-se um conceito auxiliar, o de *cofator*. O *cofator* $\overline{A_{ij}}$ de um dado elemento a_{ij} é definido como $\overline{A_{ij}} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$ em que A_{ij} é a submatriz de A com $i, j \in \{1,2,...,n\}$. Deste modo, o determinante de uma matriz A pode ser definido por indução conforme a definição 1 conhecida como *Expansão de Laplace*.

Definição 1. *O determinante de uma matriz $A_{n\times n}$, denotado por* $\det(A)$ *ou por $|A|$, é o número real definido recursivamente por*

$$\det(A) = \begin{cases} a_{11}, & \text{se } n = 1, \\ a_{11}\overline{A_{11}} + a_{12}\overline{A_{12}} + \cdots + a_{1n}\overline{A_{1n}}, & \text{se } n > 1, \end{cases}$$

$\overline{A_{1j}}$ sendo o cofator de a_{1j}, para $j = 1, \ldots, n$.

Como exemplo, sendo $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, seu determinante é obtido por

$$\begin{aligned} \det(D) &= 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 1(1\cdot 1 - 0\cdot 2) - 2(0\cdot 1 - 0\cdot 3) + 3(0\cdot 2 - 1\cdot 3) \\ &= 1(1-0) - 2(0-0) + 3(0-3) \\ &= 1\cdot 1 - 2\cdot 0 + 3\cdot(-3) \\ &= 1 - 0 - 9 \\ &= -8. \end{aligned}$$

Outra forma de definir determinante de uma matriz é utilizando permutações. Seja $I_n = \{1,2,...,n\}$. Uma permutação dos elementos de I_n é uma bijeção $\sigma : I_n \to I_n$, em que cada permutação pode ser vista como uma ênupla $\sigma = (\sigma(1),...,\sigma(n))$ dos valores assumidos nos números $1,2,...,n$. Denotaremos o conjunto de todas as permutações de I_n por S_n. Considerando que $(1,2,\ldots,n)$ é a configuração original, dizemos que uma permutação $(\sigma(1),\ldots,\sigma(n)) \in S_n$ é par se é necessário um número par de trocas para se obter novamente a configuração original. Caso seja necessário uma quantidade ímpar de trocas, dizemos que a permutação é ímpar. Por exemplo, a permutação $(1,3,2)$ é uma permutação ímpar de I_3, pois através de uma troca entre 3 e 2, obtemos $(1,2,3)$ que é a configuração original. De maneira análoga, observamos que $(3,1,2)$ é uma permutação par.

Definição 2. *Seja A uma matriz de ordem n, a definição combinatória de determinante da matriz de A é data por*

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)},$$

de forma que $sgn(\sigma) = 1$ se σ é permutação par e $sgn(\sigma) = -1$ se σ é ímpar.

Vamos calcular novamente o determinante da matriz D apresentada anteriormente utilizando a definição combinatória. Ou seja,

$$\det(D) = \sum_{\sigma\in S_3} sgn(\sigma)\, d_{1\sigma(1)}d_{2\sigma(2)}d_{n\sigma(3)},$$

As permutações de $\{1,2,3\}$ e seus sinais são:

σ	$\text{sgn}(\sigma)$	$d_{1\sigma(1)}d_{2\sigma(2)}d_{3\sigma(3)}$
$(1,2,3)$	$+1$	$d_{11}d_{22}d_{33} = 1\cdot 1\cdot 1 = 1$
$(1,3,2)$	-1	$d_{11}d_{23}d_{32} = 1\cdot 0\cdot 2 = 0$
$(2,1,3)$	-1	$d_{12}d_{21}d_{33} = 2\cdot 0\cdot 1 = 0$
$(2,3,1)$	$+1$	$d_{12}d_{23}d_{31} = 2\cdot 0\cdot 3 = 0$
$(3,1,2)$	$+1$	$d_{13}d_{21}d_{32} = 3\cdot 0\cdot 2 = 0$
$(3,2,1)$	-1	$d_{13}d_{22}d_{31} = 3\cdot 1\cdot 3 = 9$

Somando com os respectivos sinais tem-se:

$$\det(D) = (+1)(1)+(-1)(0)+(-1)(0)+(+1)(0)+(+1)(0)+(-1)(9) = 1-9 = -8.$$

Deste modo, $\det(D) = -8$ como obtido anteriormente. Vale ressaltar que seria totalmente equivalente anunciar a definição 2 como um resultado da definição 1 e vice-versa.

3. A RELAÇÃO ENTRE DETERMINANTE E AUTOVALORES

Nessa seção utilizaremos a definição combinatória de determinante para mostrar o seguinte teorema:

Definição 3. *Seja A uma matriz $n\times n$. Denomina-se autovalor de A a um escalar λ que satisfaz à equação $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, para algum vetor não nulo $\boldsymbol{x}$, chamado, por sua vez, de autovetor associado ao autovalor λ.*

Demonstração. Note que $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \Leftrightarrow A\boldsymbol{x} - \lambda\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow (A-\lambda I_n)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ que é um sistema linear homogêneo. Logo, ele admite solução trivial se, e somente se, $(A-\lambda I)$ é invertível (Araújo, 2014, p. 104). Entretanto, não pode haver solução trivial, pois $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ por definição. Deste modo, não existe matriz inversa para a matriz $(A-\lambda I)$. Segue que $\det(A-\lambda I) = 0$ (Araújo, 2014, p. 178). Observe que a matriz $A-\lambda I$ é da forma

$$A-\lambda I_n = \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}.$$

Deste modo, usando a definição combinatória de determinante, temos que

$$\det(A-\lambda I_n) = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\cdots(a_{nn}-\lambda) \quad + \sum_{\substack{\sigma\in S_n \\ \sigma\neq(1,2,\ldots,\text{n})}} \text{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}.$$

Perceba que $(a_{11}-\lambda)\cdots(a_{nn}-\lambda)$ terá pelo menos uma parcela com λ^n. Desse modo, $\det(A-\lambda I)$ é um polinômio de grau n na variável $\lambda \in \mathbb{R}$. Assim, pelo Teorema Fundamental da Álgebra, esse polinômio possui n raízes complexas acarretando n valores, não necessariamente distintos, para λ. Portanto, existem n autovalores para a matriz A.

□

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento deste trabalho permitiu evidenciar que a função determinante, tradicionalmente introduzida por meio da definição recursiva associada à expansão de Laplace, também

pode ser compreendida sob uma perspectiva essencialmente combinatória. A formulação baseada em permutações não apenas explicita a estrutura algébrica do determinante como soma ponderada de produtos, mas também estabelece uma conexão conceitual direta com princípios fundamentais da contagem.

Além de constituir uma aplicação significativa da Combinatória, a definição combinatória do determinante revela-se particularmente útil na análise de propriedades estruturais de matrizes, como a invertibilidade e o estudo de autovalores por meio do polinômio característico. Assim, a abordagem apresentada contribui para uma compreensão mais ampla e integrada entre diferentes áreas da Matemática, evidenciando a inter-relação entre Álgebra Linear e Combinatória.

5. REFERÊNCIAS

ARAÚJO, Thelmo Pontes de. **Álgebra Linear: teoria e aplicações**. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

FRANCO, Tertuliano. **Princípios de Combinatória e Probabilidade**. Salvador: UFBA, 2018.

LIMA, Elon Lages. **Álgebra Linear**. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014a.

LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise**. v.1.1.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014b.

ISSN: 2317-6458