UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

TEOREMA DE THALES: UMA CONEXÃO ENTRE OS ASPECTOS GEOMÉTRICO E ALGÉBRICO EM ALGUNS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA

Ana Carolina Costa Pereira

Orientadora: Profa. Dra. Rosa Lúcia Sverzut Baroni

Dissertação de Mestrado elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – Área de Concentração em Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosófico-Científicos, para obtenção do Título de Mestre em Educação Matemática

Rio Claro (SP)
2005

Comissão Examinadora

Profa. Dra. Rosa Lúcia Sverzut Baroni

Prof. Dr. Antonio Vicente Marafiote Garnica

Prof. Dr. Wagner Rodrigues Valente

Ana Carolina Costa Pereira

- Aluno(a) -

Rio Claro, 02 de dezembro de 2005

Resultado: Aprovada

Aos meus pais Risoleta Costa Pereira e
José Airton Pereira

AGRADECIMENTOS

A Deus, presente em todos os momentos.

A meus pais e meu irmão, por propiciarem condições para que eu continuasse meus estudos.

A minha orientadora professora Dra. Rosa Lúcia S. Baroni que acreditou que eu seria capaz quando nem eu mesma tinha essa certeza. Obrigada pelas orientações, compreensão, confiança e paciência durante a realização deste trabalho.

Aos professores da Banca Examinadora, pela atenção, Dr. Antonio Vicente M. Garnica e Dr. Wagner Rodrigues Valente, pelos comentários e sugestões.

Aos membros do Grupo de Pesquisa em História da Matemática e/ou suas relações com a Educação Matemática, que contribuíram com idéias e sugestões para o crescimento do trabalho.

A coordenação e ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP – Rio Claro/ SP, em especial, Sergio Nobre, Marcos Teixeira e Ubiratan D'Ambrosio pelo convívio, apóio e compreensão.

Aos colegas do programa de pós-graduação e Educação Matemática da UNESP – Rio Claro/SP, em especial a Silvana, Marli, Regina, Romélia, Marcos Lübeck, Adailton, Vanda, Mabel, Luciana, Luciane, Luzia, Keila, Carla, Mirian, Fernando, Jamur, Antônio Olímpio, Sabrina, Simone, Leandro, Ricardo, César Ricardo, Roger, pelo convívio e amizade.

Aos funcionários do Departamento de Matemática da UNESP de Rio Claro, Elisa, Ana, Zezé e Alessandra.

A meus primos Adelaide, Marcelo, Neuza, Beatriz e Victória por tudo que fizeram durante minha passagem pela cidade de São Paulo.

Aos meus colegas e professores da Universidade Estadual do Ceará – UECE, em especial o meu ex-orientador Cleiton Batista Vasconcelos.

Ao Michel Batista pelo carinho, amor e compreensão durante esse tempo que passei estudando em São Paulo.

Ao CNPq que financiou essa pesquisa por 22 meses;

Enfim, a todos os amigos que muito contribuíram direto e indiretamente para a elaboração e execução do estudo.

EPÍGRAFE

Ensinar é a arte das artes e é, portanto, tarefa árdua que requer o juízo atento não só de um homem, mas de muitos, porque ninguém pode ser tão atilado que não lhe escapem muitas coisas. (COMENIUS, 1657).

SUMÁRIO

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABELAS

RESUMO

A pesquisa visou a investigar livros didáticos de Matemática editados entre a última metade do século XIX e o século XX, no que diz respeito ao conteúdo dos corpos numéricos, focalizando a extensão do corpo dos números racionais para os reais. Nesse estudo, procurou-se observar como a geometria foi explorada, nesses livros didáticos, para o tratamento dessa questão. Mais precisamente, tomando como base o teorema de Thales, que relaciona o tratamento geométrico e algébrico por meio de medidas, buscou-se evidências no que diz respeito à questão da comensurabilidade. Para isso, selecionou-se sete livros didáticos de Matemática editados no período em questão: Elementos de Geometria e Trigonometria Rectilínea, C. B. Ottoni, 1904; Elementos de Geometria, F.I.C, 1923; Curso de Mathematica, E. Roxo, C. Thiré e J. C. Mello e Souza, 1940-1942; Matemática – Curso Moderno, A. Quintella, 1960-1963; Matemática – Curso Ginasial, O. Sangiorgi, 1968-1970; A Conquista da Matemática, J. R. Giovanni e B. Castrucci, 1985; e Matemática, L. M. P Imenes e M. Lellis, 1999. Em seguida, analisou-se cada coleção, observando o tratamento geométrico que foi dado aos números reais, em particular, no teorema de Thales. Nessa análise percebeu-se que a maioria dos livros didáticos selecionados na pesquisa apresentou o teorema de Thales remetendo a demonstração para o caso em que os segmentos eram comensuráveis. Porém, o primeiro livro analisado, faz uma discussão na demonstração, tanto para o caso em que os segmentos eram comensuráveis quanto incomensuráveis. Foi possível perceber que, nesse período, o assunto foi perdendo a precisão nos manuais escolares analisados. Considera-se plausível que a idéia subjacente ao teorema de Thales — ligada às condições de proporcionalidade de segmentos isto é, medição de segmentos —, pode ser uma forma de introduzir os números reais positivos. Deste modo, enfatizar o tratamento de comensurabilidade de segmentos ao desenvolver a demonstração do teorema de Thales possibilita estabelecer uma relação com a construção dos Números Reais, possibilitando um tratamento para os números reais, via medição.

Palavras-chave: Teorema de Thales, História da Educação Matemática, Números Reais, Ensino da Matemática

ABSTRACT

This research aimed to investigate Mathematics textbooks published from the late century XIX until the century XX, concerning the content of numerical fields, focusing on the extension from the rational to the real field. In the study, we tried to observe how geometry was explored in such books to address that issue. More precisely, taking the Thales' theorem, which relates the geometric and algebraic approach by measuring, research tries to find indications regarding measurability. To accomplish this proposal, seven Mathematics textbooks published within the aforementioned period were selected: Elementos de Geometria e Trigonometria Rectilínea, C. B. Ottoni, 1904; Elementos de Geometria, F.I.C, 1923; Curso de Mathematica, E. Roxo, C. Thiré e J. C. Mello e Souza, 1940-1942; Matemática – Curso Moderno, A. Quintella, 1960-1963; Matemática – Curso Ginasial, O. Sangiorgi, 1968-1970; A Conquista da Matemática, J. R. Giovanni e B. Castrucci, 1985; e Matemática, L. M. P Imenes e M. Lellis, 1999. Soon afterwards, each collection was analyzed, observing the geometric approach that was given to the real numbers, particularly in the Thales' Theorem. In that analysis it was noticed that most of the selected textbooks in the research presented the Thales' theorem but its demonstration was restricted to the case in which the segments were commensurable. However, the first analyzed book makes a discussion on the demonstration for both cases, commensurable and incommensurable. It was possible to notice that through that period, the topic was being lessened in its precision in the analyzed school manuals. It's plausible that the underlying idea to the Thales' theorem, linked to conditions of proportionality between segments, that is, segment measurement, can be a way to introducing positive real numbers. Thus, emphasizing the approach of commensurability of segments when developing the demonstration of Thales' theorem enables to establish a relationship to the construction of the Real numbers, allowing about a possible discursion to real numbers using measurement.

Keywords: Theorem of Thales, History of the Mathematics Education, Real Numbers, Teaching of Mathematics

INTRODUÇÃO

Desde o início de minha carreira no magistério, interessei-me por estudar assuntos referentes ao ensino de Matemática, principalmente os conteúdos da geometria e da aritmética. Durante a graduação (iniciação científica) e a pós-graduação (especialização), dediquei-me à pesquisa relacionada ao ensino de geometria nos livros didáticos. Selecionei alguns conteúdos e fiz uma comparação entre grupos de livros classificados como Recomendados com Ressalva (RR) e Recomendados com Distinção (RD), segundo a avaliação do Ministério da Educação – MEC, de 2002, no que tange a um conteúdo específico da geometria: o teorema de Thales.

No mestrado, optei por continuar trabalhando nessa mesma linha, porém com um olhar histórico. Procurei na História da Educação Matemática no Brasil subsídios para entender a situação atual do ensino de Matemática. Como já tinha desenvolvido trabalhos com livros didáticos de Matemática, busquei nesse instrumento pedagógico um meio para realizar a pesquisa. Em outros trabalhos que realizei com o teorema de Thales, ele era tratado de forma superficial, sem estabelecer a diferença entre o caso racional e o irracional, e pouco relacionando o conceito de segmentos comensuráveis e incomensuráveis. Deste modo, resolvi aprofundar o assunto, utilizando-o como um meio de estudar o tratamento geométrico dado aos números reais, isto é, à comensurabilidade de grandezas.

Partindo desse interesse, propus na pesquisa realizar uma análise de alguns livros didáticos de Matemática utilizados nas escolas brasileiras entre a última metade do século XIX e o século XX, no que diz respeito ao conteúdo dos campos numéricos, focalizando a ampliação do campo dos números racionais para os reais. Procurei observar como a geometria é explorada nos livros didáticos para o tratamento dessa questão, tomando como base o teorema de Thales, que relaciona o tratamento geométrico e algébrico por meio de medidas, com enfoque na questão da comensurabilidade.

Assim, esse estudo tem o intuito de estimular a reflexão sobre a maneira como certos conteúdos trabalhados no Ensino Fundamental são abordados nos livros didáticos de Matemática para analisar até que ponto a apresentação desse conteúdo foi modificada no livro didático brasileiro.

No primeiro capítulo são apresentados aspectos relacionados à contextualização da pesquisa e suas questões, mostrando a delimitação do estudo, a justificativa do tema escolhido, e a área de investigação na História da Educação Matemática. Também é tratado o procedimento metodológico da pesquisa, que incluí a escolha do período, limitado à segunda metade no século XIX e século XX, a escolha dos documentos e dos instrumentos de análise.

No segundo capítulo, com base na literatura referente ao livro didático, é apresentado um levantamento histórico da trajetória do livro didático brasileiro nos séculos XIX e XX, pois na história da educação brasileira ele desempenhou um papel importante para o crescimento educacional do país, por estar ligado ao nascimento do sistema educacional. Ele também é considerado um instrumento de controle estatal sobre o processo de ensino e aprendizagem nos diversos níveis de ensino. Assim, destacaremos, em termos da educação nacional, algumas características do livro didático nos contextos educacional, sócio-político-econômico.

No terceiro capítulo, é apresentado um estudo sobre o teorema de Thales, também conhecido como teorema das Linhas Proporcionais. Com a finalidade de embasar teoricamente o estudo, é apresentada nesse capítulo uma pesquisa bibliográfica a fim de se estudar algumas demonstrações do teorema, que no texto identificamos como teorema de Thales, nos períodos pré-eudoxiano e após a descoberta da teoria das Proporções de Eudoxo. Apresentaremos também algumas demonstrações do teorema de Thales encontradas em algumas renomadas obras voltadas para o Ensino Superior e outras utilizadas como leitura complementar para o Ensino Médio.

O quarto capítulo destina-se à análise dos livros didáticos selecionados. Cada obra analisada é apresentada em três partes: Descrição da obra, Análise do conteúdo específico e Conclusão. Na parte de “Descrição da obra” estão descritos os sete livros didáticos de Matemática selecionados, focando a importância de cada obra escolhida, assim como o respectivo autor, com identificação da obra e de suas características em termos da forma com que ela está organizada, número de capítulos ou unidades, e o tema de cada capítulo ou unidade. Na “Análise do conteúdo específico”, destacamos a localização, na seqüência de conteúdos, do tema teorema de Thales, e a análise do conteúdo propriamente dito, identificando os conceitos utilizados na demonstração, remetendo a eles, quando necessário para ressaltar demonstração do teorema tanto para o caso particular como para o caso geral, observando o uso do conceito de comensurabilidade de grandezas na demonstração, se estiver exposto. Na “Conclusão” apresenta-se uma síntese dessas análises.

No quinto capítulo, com base na análise nos sete livros didáticos, é apresentada a discussão dos resultados obtidos, com interpretação das sínteses para atender aos objetivos da pesquisa.

CAPÍTULO 1

A INVESTIGAÇÃO

Neste primeiro capítulo contextualizamos o tema do estudo e as questões a ele pertinente, com justificativas para a escolha do mesmo e das diretrizes que nortearam o desenvolvimento da pesquisa.

Nosso trabalho, inserido na linha de pesquisa da História da Matemática, mais especificamente na História da Educação Matemática, trata não só das mudanças ocorridas no ensino da Matemática nas escolas brasileiras, como também das transformações operadas nos livros didáticos graças às exigências dos contextos sócio-político-econômicos em que surgiram e foram usados. Trataremos aqui, também, dos procedimentos metodológicos, que incluem a escolha do período e dos documentos, instrumentos utilizados para a análise dos livros didáticos.

1. CONTEXTUALIZAÇÃO DO TEMA E SUAS QUESTÕES

Vários pesquisadores, dentre eles Moreira *et al.* (2004), Cobianchi (2001), Soares *et al.* (1999), têm trabalhado com a concepção que os alunos e professores têm sobre o conceito de números reais, mostrando que esse tema é de fundamental importância para o desenvolvimento do pensamento numérico construído por eles.

No que se refere à racionalidade dos números reais, encontramos diversas pesquisas envolvendo o tema, porém um grande número delas enfatiza a importância e, ao mesmo tempo, as dificuldades do trabalho com os números irracionais, principalmente quanto ao enfoque geométrico.

Isso se comprova quando estudos relatam que alunos e professores têm uma visível dificuldade de entender e diferenciar os números racionais dos irracionais

(COBIANCHI, 2001). Os Parâmetro Curriculares Nacionais – PCNs (1998: 16) mostram grande preocupação com a abordagem dos números irracionais, que tem se limitado quase exclusivamente ao ensino do cálculo com radicais.

Um outro estudo realizado por Severino (1999) que teve o intuito de investigar o conceito de números irracionais e sua história, junto a alunos dos cursos de Ciências Exatas de quatro universidades de Pernambuco, revelou grave deficiência quanto à compreensão desse conjunto numérico, tanto do ponto de vista conceitual como histórico.

Ainda hoje, em geral, o ensino dos números irracionais se resume a um conjunto de técnicas de resolução. Miguel (1994: 55) afirma que:

> Tradicionalmente as passagens dos livros didáticos para a escola secundária referente a eles (os irracionais) reduzem-se invariavelmente a um amontoado de regras de operar com radicais que acabam por constituir-se, aos olhos dos estudantes, em conhecimentos pouco úteis, pouco desafiadores e desligados dos demais temas presentes nos programas de Matemática (...) contrastando com a elevada dosagem de imaginação, sutileza e ousadia que impregnaram sua produção histórica (MIGUEL, 1994: 55).

A questão dos números irracionais percorre, dentro da história da Matemática, um caminho bastante longo, que remonta aos gregos, na busca de encontrar solução para o problema da incomensurabilidade. Destruiu-se todo o ideal pitagórico, que reduzia tudo a número, causando-se a primeira crise dos fundamentos matemáticos. O problema não foi resolvido até a descoberta da teoria das proporções de Eudoxo (408 a.C. - 355 a.C.), que utiliza apenas argumentos geométricos, colocando a geometria como o centro do conhecimento matemático. Somente no século XIX, como parte do Movimento da Aritmetização da Análise, matemáticos, como os alemães Dedekind (1831-1916) e Cantor (1845-1918), formalizaram o conceito de número real.

O sistema de números reais é um tema desenvolvido durante a formação intelectual do estudante, seja no Ensino Fundamental, Médio ou Superior. Muitos professores e livros didáticos definem-no como a união dos conjuntos dos números racionais com os irracionais. Segundo Fischbein *et al* (1995) “os números irracionais são uma parte do sistema e sem eles o conceito de números reais está incompleto.

Basta negligenciar os números irracionais e o sistema inteiro desmancha-se". (FISCHBEIN *et al* , 1995: 30 - tradução nossa)[1].

Na pesquisa realizada por Fischbein *et al*. (1995) que teve o intuito de investigar como os estudantes do Ensino Médio concebem os números irracionais, ficou claro que os estudantes investigados não possuem qualquer intuição a respeito do conceito de número irracional. O termo "irracional" é considerado por eles como equivalente a "não inteiro", isto é, números que têm uma infinidade de decimais ou, às vezes, análogos a números negativos, etc. Muitos estudantes não estão atentos à distinção essencial entre decimais periódicos e decimais não-periódicos, confusão produzida pela interpretação do termo "irracional".

Ainda no trabalho de Fischbein *et al.* (1995), os autores ressaltam que os números irracionais enfrentam dois principais obstáculos: a dificuldade de aceitar que duas grandezas podem ser incomensuráveis e que os números racionais não cobrem todos os pontos de um intervalo.

Em outro estudo realizado por Soares *et al*. (1999) com 84 alunos dos cursos de Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG e da Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC, com a finalidade de observar as concepções do conjunto dos números reais por parte dos alunos, mostrou que o ponto central das dificuldades na compreensão de uma série de conceitos ligados à estrutura dos números reais está ligado com o significado da incomensurabilidade de dois segmentos, o sentido e a necessidade dos irracionais.

Dentro dos diversos motivos mencionados acima, acreditamos que o conceito de número irracional é um assunto ainda muito confuso para estudantes e que esse assunto é intuitivamente difícil, principalmente se for excluída do ensino a relação entre os números irracionais e a incomensurabilidade, daí a importância de se trabalhar com esse tema.

Acreditamos que o trabalho com os números reais, com enfoque geométrico pode promover um maior entendimento do conceito, uma vez que trabalhar com entes pode favorecer ao aluno uma visão significativa da questão.

A idéia de medição de segmentos como forma de se introduzir números reais positivos, encontrada no trabalho de Baroni e Nascimento (2005), em que os autores

[1] The irrational numbers are a part of the system and without them the concept of real numbers is incomplete. It suffices to neglect the irrational numbers and the whole system falls apart. (FISCHBEIN *et al*, 1995: 30).

propõem um tratamento para os números reais via medição, é considerada por nós como uma proposta concreta, visando à melhoria do ensino dos números reais. Nesse estudo os autores apresentam

> (...) a construção do modelo, de R+, baseado na medição de segmentos. Essa construção está antecedida pela elaboração da noção de proporcionalidade, no sentido de comensurabilidade, estando, assim, em concordância com o desenvolvimento histórico do tema. Conforme salienta Lebesgue, o processo de medição permite introduzir tanto os números que serão ditos racionais quanto aqueles que serão ditos irracionais, (...) (BARONI & NASCIMENTO, 2005: 2).

Assim, em busca de conteúdos que oferecessem a oportunidade de explorar os aspectos algébrico e geométrico dos números reais em nível do Ensino Fundamental, escolhemos um teorema chave da Geometria Elementar: o teorema de Thales, que pode ser usado para demonstrar o teorema fundamental na semelhança e, conseqüentemente, aparecendo também na trigonometria para justificar as definições de seno, co-seno e tangente de um ângulo; na geometria espacial, no tratamento das secções de um sólido por um plano paralelo à base, etc.

Pesquisas envolvendo o teorema de Thales numa abordagem algébrica/geométrica ainda são poucas. Um trabalho realizado por Haruna (2000), mostra uma pesquisa sobre uma abordagem do processo de ensino e aprendizagem do teorema de Thales, analisando como se processa a apreensão do conceito por alunos da 8ª série do Ensino Fundamental, levantando os obstáculos didáticos e epistemológicos, com o uso do computador. Verifica até que ponto o computador favorece a superação dos obstáculos ou cria outros, por meio de uma seqüência didática. Como resultado do estudo, a pesquisadora cita que "um dos problemas que ainda persistiram foi quanto ao cálculo da medida do segmento formado pelas paralelas" (HARUNA, 2000: ix).

Outra pesquisa que tem o teorema de Thales como objeto de estudo é o estudo realizado por Silva (1997), que elabora uma seqüência didática com o objetivo de permitir ao professor estudar o teorema de Thales dando significado à propriedade, podendo, assim, identificar as dificuldades decorrentes da aplicação do teorema por meio do software Cabri-Géomètre.

Nesses trabalhos prevalece o uso do computador como ferramenta de ensino, porém, os mesmos não enfatizaram a questão da comensurabilidade de segmentos.

A abordagem que propomos ao estudar o teorema de Thales é importante para uma retomada do conceito de números do ponto de vista geométrico, promovendo um retorno às origens gregas.

Muitos dos textos do Ensino Fundamental e Médio aplicam geometricamente esse conceito, mas o apresentam com demonstrações incompletas quando estas envolvem números irracionais. Ivan Niven (1984) no seu livro *Números: Racionais e Irracionais*, retoma essa discussão referindo-se ao teorema de Thales:

> Muitos textos didáticos de Geometria, do 1º e 2º graus, apresentam demonstrações incompletas, quando estas envolvem números irracionais. A falha ocorre quando o resultado é demonstrado apenas para o caso racional, deixando o caso irracional inacabado. Isso acontece freqüentemente com o seguinte resultado: Se três paralelas são cortadas por duas transversais, (...) (NIVEN, 1984: 72).

Com o intuito de abordar o assunto com mais profundidade, buscamos nos livros didáticos de Matemática referentes ao Ensino Fundamental um instrumento de apoio para o estudo.

O livro didático representa o modo de conceber e praticar os ensinamentos propostos. Ele pode manifestar teorias pedagógicas concebidas pelo autor, constituindo-se assim, não só um fenômeno pedagógico, político, administrativo, técnico e econômico, mas é também "um objeto complexo dotado de múltiplas funções, a maioria, aliás, totalmente desapercebidas aos olhos dos contemporâneos" (CHOPPIN, 2002: 13).

Acreditamos que o papel desempenhado pelos livros didáticos durante a história é construído pela relação entre o oral e o escrito, ou seja, entre o professor e o texto de ensino.

Ao analisarmos historicamente os livros didáticos de uma dada disciplina ou área de ensino, podemos compreender que a forma de apresentação do conteúdo vai se alterando "(...) pois reflete a natureza dos conhecimentos em cada momento disponíveis, o nível de desenvolvimento em que se encontrem esses conhecimentos, e também as expectativas da sociedade em relação a esses conhecimentos para a formação das novas gerações (…)". (SOARES, 1996: 52-53).

Portanto, acreditamos que, ao tratar da abordagem de alguns conceitos matemáticos, tendo por base o livro didático de Matemática, estamos promovendo a análise de um dos recursos materiais mais utilizados pelos professores no processo de ensino-aprendizagem. Além disso, a análise histórica pode nos revelar a ocorrência, ao longo das décadas, de mudanças geradas por fatores sociais ou políticos, passiveis de análise mais profunda.

Pelo exposto acima objetivamos, com este trabalho, realizar uma análise da apresentação do teorema de Thales, conhecido como teorema das Linhas Proporcionais, por meio de livros didáticos de Matemática, a partir de meados do século XIX e século XX, tendo por base as seguintes perguntas diretrizes:

Como vem sendo abordado o teorema de Thales nos livros didáticos de Matemática a partir de meados do século XIX e século XX? Como esse conteúdo vem se modificando ao longo desse período nos livros didáticos?

Acreditamos que enfatizar a análise dos livros didáticos de Matemática, trabalhando especificamente o teorema de Thales, além de configurar o estilo da escrita das obras antigas e modernas dessa área, também mostrará as formas de exposição desse conteúdo nos livros didáticos no Brasil ao longo de um período. Pretendemos, assim, que a análise seja importante para mostrar a desenvolvimento de conceito do ensino de Matemática na escola brasileira, no que diz respeito às abordagens dos casos de comensurabilidade de segmentos.

Dessa forma, consideramos alguns objetivos específicos como norteadores do estudo proposto, conduzindo-nos à tentativa de esclarecer as questões propostas:

- Identificar, nos livros analisados, o teorema de Thales como o teorema das Linhas Proporcionais;
- Mostrar o modo de organização das obras pesquisadas;
- Configurar o caminho percorrido pela escrita da Matemática e do teorema de Thales no período em que os livros didáticos foram produzidos, por meio da análise dos mesmos, focando as relações entre os aspectos geométrico e algébrico.

2. ÁREA DO NOSSO ESTUDO

Nos últimos anos vêm ganhando destaque no meio acadêmico, pesquisas em História da Matemática e suas relações com a Educação Matemática. A História da Educação Matemática é uma das frentes propostas por essa relação.

A História da Educação Matemática, um campo que vem abrindo caminho para diversos estudos, “engloba temas de extrema importância tanto para a compreensão do desenvolvimento da Matemática no Brasil como para seu Ensino” (BARONI *et al., 2004: 133).* Nosso estudo está inserido na História das Disciplinas Escolares, que vêm crescendo com o número de pesquisas nessa área[2]. O estudo histórico dos conteúdos para o Ensino Fundamental e Médio, parte integrante desse ramo, também vem suscitando interesse de diverso pesquisadores, não só da Matemática, mas também de outras áreas.

Em um trabalho publicado por Chervel (1990), discute-se amplamente a função das disciplinas escolares como um campo de pesquisa em história. Ele considera os saberes escolares sob a forma de disciplinas escolares, em que o centro principal são os conteúdos de ensino.

As disciplinas escolares para ele são uma produção da e na escola, ou seja, “são criações espontâneas e originais do sistema escolar” (CHERVEL, 1990: 184). Mauro (2005) complementa que

> (...) o saber transmitido na escola, produto que ela mesma elaborou, historicamente vem sempre acondicionado no interior das disciplinas escolares. Assim, a escola produz uma Matemática específica, não vulgariza os saberes científicos ou faz deles uma adaptação, ou seja, não depende diretamente da matemática científica.Investigação na área de história das disciplinas escolares explica, sobretudo, as transformações ocorridas em uma disciplina ao longo do tempo.
>
> A História da Matemática escolar sob a ótica da história das disciplinas resulta da investigação sobre as disciplinas e considera como centro a escola, e como fontes tudo que foi produzido para a escola, na escola e pela escola. (MAURO, 2005: 12).

Dentro da história das disciplinas escolares, o livro didático desempenha um papel importante, pois, por meio deles, conseguimos identificar as tendências metodológicas, a filosofia educacional e até a visão do conhecimento produzido em uma determinada época, sendo um recurso fundamental para a história do ensino no Brasil (LORENZ, 2004). Podemos considerar, ainda, que “os manuais representam para os historiadores uma fonte privilegiada, seja qual for o interesse por questões relativas à educação, à cultura ou às mentalidades, à linguagem, às ciências... ou ainda à economia do livro, às técnicas de impressão ou à semiologia da imagem” (CHOPPIN, 2002: 13).

---

[2] Um exemplo de trabalho nessa área é o realizado pelo Prof. Dr. Wagner Rodrigues Valente que desenvolve vários projetos de reconstituição da História da Disciplina de Matemática no Brasil, no Grupo de Pesquisa: A Matemática na organização curricular: história e perspectivas atuais, na PUC-SP.

Os livros didáticos constituem para o historiador, uma fonte privilegiada, principalmente pelas variedades de olhares que ele pode atrair sobre ele. Assim, ele assume várias funções destinadas a diversas classes (aluno, professor, família, ...), mesmo quando é tratado do ponto de vista histórico. Choppin (2004) caracteriza quatro funções exercidas pelo livro didático: função referencial (curricular ou pragmática); função instrumental; função ideológica e cultural; e função documental.

Choppin (2004) ainda concebe duas grandes categorias de pesquisa histórica com livros didáticos. Primeiramente "aquelas que, concebendo o livro didático apenas como um documento histórico igual a qualquer outro, analisam conteúdos em uma busca de informações estranhas a ele mesmo, ou as que só se interessam pelo conteúdo ensinado por meio do livro didático" (CHOPPIN, 2004: 554). Uma segunda categoria é "aquele que, negligenciando os conteúdos dos quais o livro didático é portador, o consideram como um objeto físico, ou seja, como um produto fabricado, comercializado, distribuído ou, ainda, como um utensílio concebido em função de certos usos, consumido – e avaliado – em um determinado contexto" (CHOPPIN, 2004: 554).

Partindo do que foi caracterizado por Choppin (2004), inserimos nossa pesquisa na primeira categoria, pois a história que pretendemos apresentar não é a do livro didático, mas a de um conteúdo específico – o teorema de Thales – tomando o livro didático como uma fonte de pesquisa. Porém ressaltamos que dentro de uma pesquisa histórica de livros didáticos, essas categorias podem não ser suficiente para abrange todos os estudos nessa área.

Podemos destacar, ainda, a importância dos livros didáticos como fonte de pesquisa. Os manuais representam para os historiadores, uma fonte privilegiada, como ressalta Chervel (1990):

> O estudo dos conteúdos beneficia-se de uma documentação abundante à base de cursos manuscritos, manuais e periódicos pedagógicos. Verifica-se aí um fenômeno de "vulgata[3]", o qual parece comum às diferentes disciplinas. Em cada época, o ensino dispensado pelos professores é, grosso modo, idêntico, para a mesma disciplina e para o mesmo nível. Todos os manuais ou quase todos dizem então a mesma coisa, ou quase isso. Os conceitos ensinados, a terminologia adotada, a coleção de rubricas e capítulos, a organização do *corpus* de conhecimentos, mesmo os exemplos utilizados ou os tipos de exercícios praticados são idênticos, com variações aproximadas. São apenas essas variações, aliás, que podem apresentam mais do que desvios mínimos: o problema do plágio é uma das constantes da edição escolar (CHERVEL, 1990: 203).

[3] Vulgata é aquilo que é de uso público, divulgado, publicado, espalhado, propagado.

Nesse sentido, essa verificação por meio da análise de uma dada disciplina escolar ou um conteúdo específico, tomando como objeto de estudo o livro didático, deve sempre estar orientada por uma perspectiva histórica, pois torna-se “possível identificar os fatores mais diretamente ligados às mudanças de conteúdo e método de ensino, o que possibilita a articulação de propostas mais consistentes de alteração ou implementação de mudanças curriculares” (SANTOS, 1990: 21). O livro didático de Matemática se encaixa nesse estudo, pois tem um papel significativo no desenvolvimento da disciplina Matemática.

3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Este é o momento de mostrar como se desenvolveu a pesquisa, com enfoque nas etapas percorridas. Para Alves-Mazzotti (1999) o procedimento metodológico,

> (...) inclui a indicação e a justificação do paradigma que orienta o estudo, as etapas de desenvolvimento da pesquisa, descrição do contexto, o processo de seleção dos participantes, aos procedimentos e os instrumentos de coleta e análise dos dados, os recursos utilizados para maximizar a confiabilidade dos resultados e os cronogramas (ALVES-MAZZOTTI, 1999: 159)

Assim, dividimos os procedimentos metodológicos em três itens: escolha do período, escolha dos documentos e percurso, que seguem descritos.

3.1.1. ESCOLHA DO PERÍODO

O estudo proposto foi feito com livros didáticos de Matemática, selecionados no período compreendido entre a última metade do século XIX e o século XX. Passamos a repor algumas das razões que justificam a escolha desse período.

O século XIX, no Brasil, foi um período marcado por expressivos acontecimentos na área da Educação, e os livros didáticos desempenharam um papel importante no crescimento educacional do país. Um fato marcante é a chegada, ao Rio de Janeiro, da Impressão Régia, em 1808, marcando o início de produção e publicação de textos didáticos no Brasil.

A partir da década de 1830, alguns renomados professores brasileiros começaram a escrever livros próprios, pois até então utilizavam-se no ensino, traduções de obras principalmente francesas. Também nesse período surgiu a primeira instituição de ensino secundário sistemático, o Colégio Pedro II, em 1837.

Na segunda metade do século XIX houve um expressivo aumento na produção de livros de Matemática no Brasil. Começaram a surgir exercícios numéricos resolvidos e propostos e as aplicações práticas, porém não havia grandes preocupações didáticas na apresentação dos conteúdos.

Na transição do século XIX para o século XX, começou a nascer um movimento de Modernização Internacional da Matemática Escolar, que resultou no surgimento da Educação Matemática como uma área de pesquisa. Podemos citar alguns marcos importantes para esse surgimento: a publicação, em 1900, do nº 1, da revista L'Enseignement Mathématique, dirigida por Henry Fehr e Charles-Ange Laisant, fundada pelos mesmos em Genebra, em 1899; e a fundação da Comissão Internacional de Instrução Matemática (IMUK/ICMI), sob liderança de Felix Klein, durante o Congresso Internacional de Matemática (IMU) em Roma, 1908.

Aqui no Brasil, principalmente impulsionados pelas idéias de Felix Klein, personagem como Euclides Roxo unificaram as matemáticas em uma só disciplina escolar. Valente (2003) retrata bem esse evento: "(...) modificar a distribuição das matérias do curso secundário, do seguinte modo: o estudo da aritmética, álgebra, geometria, trigonometria se fará sob a denominação de Matemática, do 1º ao 4º ano do curso" (VALENTE, 2003: 75). O surgimento da Matemática como disciplina escolar, marcou o início do processo de modernização da Matemática escolar no Brasil, o que refletiu no modo da escrita dos livros de Matemática.

Outros acontecimentos continuaram se desenvolvendo no Brasil no decorrer do século XX, principalmente as reformas no ensino que mexeram com a estrutura educacional do país: a reforma Francisco Campos, na década de 30, dividiu o secundário em "ciclos": um Ensino Fundamental de cinco anos e um ensino complementar de dois anos; a reforma Capanema, em 1941, que promoveu a reorganização do ensino secundário, com a criação dos Ginásios, que eram as quatro séries posteriores ao ensino primário.

A Matemática superior, no Brasil, manteve-se vinculada às escolas de Engenharia apenas até o início da década de 1930. Com a fundação, em 1934, da Universidade de São Paulo – USP, novas teorias matemáticas foram introduzidas, até os anos 40, por professores estrangeiros no curso de Matemática da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras dessa Universidade. Esse curso foi responsável pela formação dos primeiros professores de Matemática.

Na segunda metade do século XX, outros fatos como o Movimento da Matemática Moderna, lançamento dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e a implementação do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) caracterizaram a educação brasileira no século XX.

Deste modo, acreditamos que o período escolhido para a seleção dos livros didáticos de Matemática é bastante significativo dentro da proposta do nosso estudo, na medida em que estamos tratando do desenvolvimento histórico da abordagem do conceito, que, neste estudo, é o teorema de Thales.

3.2. ESCOLHA DOS DOCUMENTOS

Para mostrar como se deu a constituição da Matemática Escolar brasileira, consideramos o estudo histórico dos conteúdos como um meio de observar algumas mudanças na abordagem do conhecimento produzido, modificado ou não, pelas reformas e tendências na Educação Escolar.

Desse modo, a escolha do material, mais precisamente do livro didático para a pesquisa, não foi tarefa fácil, uma vez que existem inúmeros livros-texto de Matemática que são colocados à disposição do público consumidor pelas editoras, obrigado-nos a limitar a amostra pesquisada. Isso acontece quando trabalhamos com pesquisa historiográfica em que o manual escolar é a ferramenta principal de nosso estudo. Choppin (2002) considera que são mais freqüentes as pesquisas que trabalham com os manuais “mais utilizados” em uma época e, para isso, relaciona quatro critérios relativos a quantidade da tiragem:

> É a associação de quatro critérios que podem, então lhe dar uma indicação sobre a difusão de um livro escolar: a duração da vida editorial (diferença entre as datas da última e da primeira edição), o número de edições declaradas (mas a estratégia dos diferentes editores não é idêntica e a realidade das edições anteriores não é sempre assegurada); o número das edições indicadas pelas bibliografias; e por fim, o número de exemplares conservados (CHOPPIN, 2002: 20).

Choppin (2002) propõe critérios para selecionar os manuais didáticos “mais utilizados”, entretanto consideramos pertinente discutir especificamente o último critério, embora não o utilizaremos para selecionar os livros didáticos da nossa pesquisa. Até que ponto o número de exemplares conservados implica na utilização do manual? Se o manual escolar é muito utilizado, pressupõe que não o encontraremos com facilidades em sebos e bibliotecas. Como explicar essa ligação? É preciso atentar com mais detalhes para esses critérios.

Deste modo, levando em consideração os critérios propostos por Choppin (2002), concentramos nossa atenção em dois deles.

O primeiro critério levado em consideração foi o de que todos os livros didáticos pertencessem ao período proposto para a análise e estivessem direcionados ao que conhecemos como Ensino Fundamental, uma vez que, atualmente, é nesse nível que encontramos o conteúdo trabalhado.

O segundo critério considerado foi o número de edições dos livros didáticos de Matemática e a duração da vida editorial do livro. Acreditamos que uma obra com muitas edições ou reimpressões revela sua importância em um dado período, assim como a popularidade da obra e do autor responsável pelo sucesso.

Definidos os critérios de seleção, restava-nos determinar os livros com os quais iríamos trabalhar. De acordo com os critérios citados anteriormente, selecionamos os livros didáticos que constam da tabela abaixo:

TABELA I: RELAÇÃO DE LIVROS DIDÁTICOS SELECIONADOS AUTOR E POR EDITORA

CÓD	TÍTULO DA OBRA	AUTOR	EDITORA	ANO
L1	*Elementos de Geometria e Trigonometria Rectilínea*	C. B. Ottoni	Francisco Alves	1904
L2	*Elementos de Geometria*	Frere Ignace Chaput – FIC	F. Briguiet & Cia	1923
L3	*Curso de Mathematica*	Euclides Roxo, Cecil Thiré e Júlio Cesar de Mello e Souza	Francisco Alves	1940-1942
L4	*Matemática – Curso Ginasial*	Ari Quintella	Companhia Editora Nacional	1960-1963
L5	*Matemática – Curso Moderno*	Osvaldo Sangiorgi	Companhia Editora Nacional	1968-1970
L6	*A conquista da Matemática*	Giovane e Castrucci	FTD	1985
L7	*Matemática*	Imenes e lellis	Scipione	1999

Na tabela, os códigos L1, L2, L3, L4, L5, L6 e L7 referem-se à maneira como os livros serão tratados, em alguns pontos do capítulo de análise.

3.3. DESCRIÇÃO DO PERCURSO

Num primeiro momento, selecionamos os livros didáticos de Matemática utilizados no estudo, segundo critérios mencionados anteriormente. Esses livros foram encontrados em bibliotecas, acervo do Grupo de Pesquisa em História da Matemática e/ou suas relações com a Educação matemática e do Grupo de Pesquisa em História Oral e Educação Matemática, ambos da UNESP de Rio Claro – SP, no Laboratório de Ensino da UNESP, Campus de Rio Claro, sebos, editoras e livrarias. Com os livros em mãos, fizemos um estudo detalhado das obras, com enfoque nos seguintes aspectos: Importância da obra para sua época e a importância do autor e sua biografia.

Na segunda parte, fizemos um estudo longitudinal para melhor contato com a obra. Para isso focalizamos a ficha catalográfica, as características das obras, como a forma de organização, o número de capítulos ou unidades, tema de cada capítulo ou unidade; posição, seqüência, e localização dos conteúdos analisados; e exercícios.

Na primeira leitura utilizamos os seguintes critérios para a análise do conteúdo, teorema de Thales:

- Identificação dos conceitos utilizados na demonstração, remetendo a esses conceitos quando necessário;
- Observação da demonstração do teorema para o caso particular e o caso geral;
- Observação do uso do conceito de comensurabilidade de grandezas na demonstração, caso seja exposto;
- Exemplos de aplicação do resultado do teorema;
- Exercícios e atividades propostas.

Na terceira etapa, fizemos uma síntese de cada análise do livro didático, para converter os resultados brutos em dados significativos para a pesquisa.

No quarto momento foram interpretadas as sínteses com o objetivo de responder à pergunta da pesquisa.

CAPÍTULO 2

LIVRO DIDÁTICO: HISTÓRIA E POLÍTICAS PÚBLICAS

Vem crescendo substancialmente, em várias áreas de pesquisa, debates sobre o livro didático. Choppin (2004: 549) coloca que, “(...) os livros didáticos vêm suscitando um vivo interesse entre os pesquisadores de uns trinta anos para cá”. Pode-se comprovar esse fato, pelo aumento de publicações sobre o tema em revistas voltadas à educação, dissertações, teses e grupos de estudos em seminários e congressos, nos últimos anos.

Neste capítulo apresenta-se um panorama histórico do livro didático brasileiro, no seu contexto mais geral, com enfoque na sua importância pedagógica e político-econômica, durante os séculos XIX, XX e XXI.

2.1 O LIVRO DIDÁTICO NO BRASIL NO SÉCULO XIX

Na história da educação no Brasil, os livros didáticos desempenharam um papel importante para o crescimento educacional do país. Afinal, conforme se lê em Bittencourt (1993), o livro didático pode ser considerado um instrumento do controle estatal sobre o processo ensino-aprendizagem, nos diversos níveis de ensino.

Os primeiros livros didáticos da nossa história tinham como prioridade o professor. Com isso,

> Deveria assegurar ao professor o domínio de um conteúdo básico a ser transmitido aos alunos e garantir a ideologia desejada pelo sistema de ensino. (...) Os livros a serem utilizados pelos professores foram pensados em dois níveis. Inicialmente, pelo custo e raridade de obras propriamente didáticas, impunha-se aos professores o uso de livros de autores consagrados, sobretudo as obras religiosas. Os professores fariam ditados

> e os alunos copiariam trechos ou ouviriam as preleções em sala de aula. Tal era o método imaginado para as primeiras décadas do século XIX. (BITTENCOURT, 1993: 25).

No decorrer do século XIX, os manuais escolares passaram a ser considerados obras que poderiam ser lidas também por crianças e adolescentes.

As concepções francesas acerca do livro didático foram assimiladas e copiadas pelos educadores brasileiros. No Brasil o termo *abrégés* e o *livre élémentaire* foram traduzidos como *compêndios* e *livros populares* para significar as duas classes de livros que passariam a circular no país. Na França, segundo Schubring (2004), os *abregés* eram uma versão concisa de um "manual" volumoso, enquanto o *élémentaire* era um livro didático que realmente fornecia a estrutura de sua respectiva disciplina.

Devido à crença por parte de Portugal de que o Brasil não precisava de imprensa, essa só chegou aqui tardiamente, quando, em 1808, D. João VI instalou a Impressão Régia, no Rio de Janeiro. No início de seu funcionamento, as condições de produção e publicação de textos didáticos foram precárias, de modo que a maioria dos livros didáticos foi editada e impressa no exterior.

Nesse período não havia planos globais que visasse à educação para todos. Criavam-se apenas escolas superiores, sem que existissem escolas secundárias. Só em 1837 foi fundado um estabelecimento para o ensino secundário, denominado Imperial Collegio de Pedro II, com a finalidade de atuar como padrão para as demais instituições. Durante muitos anos os programas do Colégio Pedro II exerceram grande influência sobre as escolas secundárias, que adequavam seus currículos e programas a partir deles. Segundo Miorim (1998), com a criação do Colégio Pedro II, tivemos, pela primeira vez:

> (...) um plano global e integral de estudos para o ensino secundário, no qual os alunos eram promovidos por série, e não mais por disciplina, e obtinham, no final do curso um título de bacharel em Letras, que lhe garantia [a partir de 1843] a matricula em qualquer escola superior, sem a necessidade de prestar exame. Nesse plano de estudo, nos moldes dos colégios franceses, predominaram as disciplinas clássico-humanistas (MIORIM, 1998: 87).

Ainda, no início do século XIX, o governo promoveu debates para criação e organização do sistema educacional do novo Estado. Nesses debates as propostas relativas aos livros didáticos tiveram prioridade. Na fase inicial, o governo apoiava projetos que insistiam na elaboração de livros didáticos segundo modelos estrangeiros, principalmente franceses e alemães. Assim, nessa fase, os livros escolares foram adaptações de obras estrangeiras existentes na época, conforme se pode ler em Bittencourt (1993):

> A geração de intelectuais do início do oitocentos determinou que os livros escolares fossem adaptados de obras estrangeiras, podendo-se mesmo traduzir-se alguns, que há nas outras nações cultas, particularmente a alemã, que mais se tem, assinalado nesta espécie de instrução, apropriando-os ao sistema estabelecido neste plano... (BITTENCOURT, 1993: 18).

A maioria dos livros aqui impressos eram manuais compostos de traduções francesas sobre matemática, física, filosofia e moral, cirurgia e anatomia. Dentre os livros mais importantes da Impressão Régia encontram-se as traduções de compêndios didáticos como *Elementos de Geometria* e *Tratado de Trigonometria*, de Legendre; *Elementos de Álgebra*, de Euler; *Tratado de Aritmética* de Lacroix; e *Tratado Elementar* de Física de Haüy.

É inegável que essas traduções de livros estrangeiros foram de suma importância para o estímulo da produção literária no Brasil, pois contribuíram com a divulgação da Matemática para a criação de uma cultura Matemática ativa.

Esses manuais escolares eram, em geral, direcionados à elite brasileira, pois devido à escassez de escolas, que nem todas as pessoas podiam freqüentar, muito desses compêndios, então, eram colocados no mercado com o intuito de atingir essa minoria. Bittencourt (1993) deixa bem claro que:

> Temos assim, de início, que a construção do saber escolar era destinada a uma parcela da população, proibindo legalmente à maioria dos trabalhadores o direito à escolarização (BITTENCOURT, 1993: 40).
> (...)
> Entre nós, o secundário representava, igualmente, um meio de preservar privilégios e manter a separação entre a elite identificada como o mundo branco europeu e o restante da população, composta de mestiços, negros, e índios. Eram cursos reservados a alunos em condições econômicas favoráveis, conservando-se, sempre como um curso pago. A aceitação tranqüila pelos políticos brasileiros de um ensino elementar gratuito e, ao contrario, as dificuldades em estabelecer um ensino grátis, de fato que se ocorreu após 1945, comprova a natureza elitista do curso, criados para atender as classes dirigentes, além de ser um curso exclusivamente reservado os jovens do sexo masculino. O ensino secundário feminino foi apenas objeto de eventuais propostas, limitando-se a ser exercido em poucas escolas confessionais ou particulares leigas (BITTENCOURT, 1993: 58).

Em alguns relatórios de Gonçalves Dias (DIAS apud BITTENCOURT, 1993) sobre as províncias do Norte Nordeste, indica-se que, nas primeiras décadas do

Império, começou a haver reclamações com relação à falta de manuais escolares em algumas escolas, que provocava uma deficiência na aprendizagem do aluno. “Um dos defeitos – é a falta de compêndios – no interior porque os não há – nas Capitais, por que não há escolha, ou foi mal feita; – por que a escola não é suprida, e os pais relutam em dar os livros exigidos, ou repugnam aos mestres os admitidos pelas autoridades” (DIAS apud BITTENCOURT, 1993: 19).

A partir disso, as críticas envolvendo os livros didáticos estrangeiros começaram a ser constantes. Alguns livros estrangeiros continham assuntos desconhecidos pelo público brasileiro, reforçando a necessidade de se produzirem livros com temas sobre o país, principalmente os relacionados à natureza e aos costumes.

Apareceram, então, os primeiros projetos de construção de livros didáticos brasileiros. O governo incentivava os mais célebres intelectuais do país para elaborá-los

> Os homens de ‘confiança’ do poder seriam, evidentemente, o grupo ideal de autores de obras didáticas, mas, com o decorrer do tempo, o número limitado de obras que surgiram de autores famosos fez com que as nossas autoridades educacionais aceitassem pessoas menos nobilitadas (…) (BITTENCOURT, 1993: 28-29).

Em meados do século XIX, o governo lançou um concurso para a confecção de livros. Os prêmios poderiam ser honrarias ou dinheiro, mas essa prática não permaneceu por muito tempo. Procedimento semelhante ocorrera na França no final do século XVIII, quando o parlamento francês designou o concurso para a apresentação de dez temas. Apenas sete livros foram selecionados, pois “estavam adequados a servirem de livres *élémentaires* a serem impressos à custa da República (Schubring, 2004: 86)”.

A proposta de aumento da produção de livros didáticos por autores brasileiros veio em um período de crescimento da rede escolar, quando também se visava à construção de mais escolas secundárias, pois até então só existia o Colégio Pedro II e, para agravar esta situação, existiam conflitos entre o Estado e a Igreja.

A produção de livros didáticos por autores brasileiros e editados no Brasil só ocorreu efetivamente no início do século XX, quando, segundo Soares (1996, 55), “só a partir de 1930 que medidas nacionalizadoras, associadas à expansão da rede de ensino e à criação das Faculdades de Filosofia, propiciam condições favoráveis ao aparecimento de autores e edições de livros didáticos em nosso país". Até então os livros publicados no Brasil eram traduções ou compilações de famosos livros estrangeiros.

No entanto, a concepção de livro didático permaneceu: ele era de fundamental importância na formação do professor como também na do aluno, servindo de instrumento de divulgação dos diversos conhecimentos escolares.

Quanto às questões didáticas propostas nos manuais de Matemática do século XIX, os mesmos ainda não eram dirigidos para o aluno. Somente no final do século XIX começou-se a produzir um livro voltado para o aluno, com exercícios numéricos, problemas e respostas aos exercícios. Podemos citar, por exemplo, os livros de Matemática do século XIX. Segundo Silva (2000):

> Não havia grandes preocupações didáticas com a apresentação dos conteúdos. Raras são as ilustrações nos livros de aritmética. A apresentação dos conteúdos segue uma ordem tradicional: definição, regra ou teorema, sendo que este podia apresentar uma demonstração formal ou, na maior parte dos casos, apenas uma variação numérica do resultado. (...) Não era comum a apresentação de referências bibliográficas. Quando estas apareciam, muitas vezes eram incompletas (SILVA, 2000: 133).

2.2 O LIVRO DIDÁTICO NO BRASIL NO SÉCULO XX E XXI

No inicio do século XX a produção didática, restringia-se a três grandes editoras: Garnier, Francisco Alves e a iniciante FTD. Porém, a Francisco Alves monopolizava a produção da literatura escolar. Nesse início o livro didático passou a ter uma importância maior no âmbito nacional, pois começou-se a desenvolver uma política estrutural consciente, que mexeu na estrutura da sociedade brasileira, no período entre o Estado Novo e a Nova República.

O processo iniciou-se com a criação do Instituto Nacional do Livro (INL), em 1929, na gestão do ministro da Educação e da Saúde, Gustavo Capanema, a quem, segundo Freitag (1997), competia coordenar e planejar as atividades relacionadas com o livro didático, além de estabelecer convênios com outros órgãos e instituições nesse âmbito. Pouco tempo depois, em 1938, o decreto-lei 1.006/38 institui a Comissão Nacional do Livro Didático (CNLD), com o propósito examinar e julgar os livros didáticos, indicar livros para tradução e sugerir abertura de concurso para produção de determinados tipos de livros didáticos ainda não existentes no país.

Assim, pelo esse decreto-lei 1006, de 30/12/1938, definiu-se, primeira vez no Brasil, o que seja um livro didático:

> Art. 2º, §1º – Compêndios são livros que exponham total ou parcialmente matéria das disciplinas constantes do programas escolares; 2- Livros de leitura de classe são livros usados para leitura dos alunos em aula; tais livros também são chamados de livros de textos, livro-texto, compêndios escolares, livro de classe, manual, livros didáticos (FREITAG, 1997: 12-13).

Na segunda metade do século XX, com a democratização do ensino, aumentou o número de escolas e de alunos, crescendo o número de consumidores de livro didático, acarretando uma extraordinária diversidade de livros didáticos no Brasil. Segundo Soares (1996), quatro fenômenos explicam esse crescimento e diversificação do livro didático: o tempo de duração do livro na escola; a autoria dos livros didáticos; as editoras e as sucessivas mudanças no conteúdo e a ditatização dos mesmos.

Concordamos com esses fenômenos mencionados por Soares (1996), porém observamos que o primeiro e o último deles estão relacionados. O tempo de duração que o livro didático permanece na escola está relacionado com as mudanças de conteúdos e metodologias empregadas nas obras. O século XX foi marcado por mudanças político-econômicas e educacionais, que influenciaram diretamente a maneira da escrita dos livros didáticos, ocasionando a curta duração das obras.

No que se refere à política do livro didático, a partir da década de 1960, o Brasil manteve vários acordos com os americanos (MEC/USAID). Assim, em 1966, surgiu a Comissão do Livro Técnico e do Livro Didático (COLTED) que, segundo Freitag (1997), defendia um programa de desenvolvimento mais abrangente, com a instalação de bibliotecas, criação de cursos de treinamento de instrutores e professores em várias etapas sucessivas, contemplando todas as esferas públicas: federal, estadual e municipal. Mas esse convênio fixado entre o Brasil e os Estados Unidos tinha como objetivo principal tornar disponível cerca de 51 milhões de livros, distribuídos gratuitamente, para estudantes brasileiros, no período de três anos. Tudo isso gerou críticas dos educadores, pois, para eles, os americanos queriam o controle do mercado livreiro, especialmente do livro didático.

Em outubro de 1967 foi criada a Fundação Nacional de Material Escolar (FENAME) que, segundo Höfling (2000), tinha como finalidade básica “a produção e distribuição de material didático às instituições escolares, mas, efetivamente, não contava com organização administrativa nem recursos financeiros para desempenhar tal tarefa". (HOFLING, 2000: 4).

Em 1971 a COLTED foi extinta e, a partir 1972, o Instituto Nacional do Livro (INL), assumiu a responsabilidade de promover e agilizar, em ação conjugada com as editoras, o programa de co-edição de obras didáticas. Criou-se, então, o Programa do Livro Didático, (PLID), que seria dividido em vários subprogramas, um para cada nível de ensino, a saber: Programa do Livro Didático para o Ensino Fundamental (PLIDEF); Programa do Livro Didático para o Ensino Médio (PLIDEM); Programa do Livro Didático para o Ensino Superior (PLIDES) e Programa do Livro Didático para o Ensino Supletivo (PLIDESU).

Em abril de 1983, foi criada a Fundação de Assistência ao Estudante (FAE), pela lei 7.091, que, como afirma Freitag (1997), tem a "finalidade de apoiar a Secretaria de Ensino de 1º e 2º graus – SEPS/MEC – desenvolver os programas de assistência ao estudante nos níveis da educação pré-escolar e de 1º e 2º graus para facilitar o processo didático-pedagógico". (FREITAG, 1997: 16). A partir de agosto de 1985, o programa recebe a designação de Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), com a finalidade de atender a todos os alunos de 1ª a 8ª série de ensino fundamental das escolas públicas federais, estaduais territoriais, municipais e comunitárias do país, com a distribuição de livros didáticos das disciplinas básicas, Língua Portuguesa e Matemática.

Até esse momento a escolha do livro didático era feita por comissões pertencentes a cada programa e, somente a partir de 1988, com a nova legislação, essa escolha passou a ser feita pelos próprios professores que utilizariam os livros em sala de aula. Isso promoveu a descentralização do poder administrativo do Programa Nacional do Livro Didático (PNDL). A nova política do livro didático provocou muitas mudanças, uma das quais relacionada aos livros consumíveis, de uso limitado, pois reunia, em uma só edição, o livro texto e o caderno de exercícios. Com essas mudanças, o PNLD passou a comprar apenas livros não consumíveis.

Em 1996 a FAE foi extinta, sendo suas funções assumidas pelo Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE), autarquia federal vinculada ao MEC criada em 1968, que assumiu a execução do PNLD com recursos oriundos principalmente do salário-educação.

Até 1994 o PNLD se restringia à compra e distribuição dos livros utilizados nas quatro primeiras séries do Ensino Fundamental, e os livros comprados não sofriam qualquer tipo de avaliação nem de conteúdo nem de metodologia. Em virtude disso, alguns livros continham erros conceituais e/ou informações equivocadas, que induziam a graves erros, ou veiculavam noções preconceituosas e discriminatórias, ou, ainda, apresentavam uma metodologia que privilegiava os exercícios de memorização.

A partir de 1995, o Ministério da Educação, preocupado com a qualidade dos livros didáticos que chegavam às escolas, iniciou uma campanha de avaliação do livro didático para o Ensino Fundamental de 1ª a 4ª séries, que seria utilizado nas escolas públicas de todo país. Em junho de 1995 foi realizada uma mesa-redonda intitulada "'Como melhorar o livro didático', com objetivo de colher subsídios para o estabelecimento de uma política do livro didático que assegurasse sua qualidade." (BATISTA, 2001: 55). Em outubro desse mesmo ano foi realizado o seminário *Livro Didático: Conteúdo e Processo de Avaliação*, que objetivava o estabelecimento de critérios para a análise dos livros. Ainda em dezembro, promoveu-se uma reunião para a apresentação e discussão dos critérios de avaliação do livro didático de 1ª a 4ª série.

Já em maio de 1996 o MEC divulgou o resultado da primeira avaliação de livros didáticos, utilizando os critérios estabelecidos nas reuniões anteriores. Nela, foram avaliados os livros didáticos de Língua Portuguesa, Ciências, Estudos Sociais e Matemática, de 1ª a 4ª séries, inscritos no PNDL/97, num total de 466 obras.

O resultado dessa avaliação foi publicado no Guia de Livros Didáticos de 1ª a 4ª série, distribuído gratuitamente na rede pública de ensino, visando a auxiliar os professores na escolha de livro didático.

Somente a partir de 1999 o MEC começou a avaliar os livros didáticos de 5ª a 8ª série nas disciplinas básicas: Língua Portuguesa, Geografia, História, Ciências e Matemática; e até hoje ele vem fazendo essa avaliação, buscando, a cada uma, aperfeiçoar os critérios adotados. Em 2005, o Ministério da Educação Instituiu o Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio, PNLEM, avaliando livros didáticos de duas disciplinas: Português e Matemática.

Atualmente o Ministério da Educação vem desenvolvendo, periodicamente, essa avaliação para o Ensino Fundamenta de 1ª a 4ª séries e de 5ª a 8ª séries, e para o Ensino Médio, nas disciplinas básicas.

Como se percebe, os livros didáticos no Brasil não ganharam destaque apenas pelos seus aspectos pedagógicos e de aprendizagem, mas, também, pela economia e política envolvidas no circuito de produção, circulação e consumo de manuais didáticos. O livro didático pode ser considerado, hoje, uma mercadoria, um produto do mundo da edição, que obedece à evolução das técnicas de fabricação e comercialização, pertencentes à lógica do mercado. Porém, com a intervenção do governo, por meio da avaliação dos livros didáticos, foi identificada uma nítida melhora nos livros didáticos, mas percebem-se, ainda, alguns problemas em relação a determinados conteúdos e abordagens[1].

Assim, desde o início, quando que os livros eram compostos apenas de textos, era o professor quem decidia como trabalhar didaticamente o conteúdo, estabelecer exemplos, exercícios e sugerir questões. Com o tempo, passou a incluir exercícios, ficando cada vez mais numerosos e, a partir de um certo momento, surgiu como complemento o livro do professor, que explica, orienta, define procedimentos de ensino, e até apresenta as respostas aos exercícios, forçando o autor a exercer diversas funções antes exclusivas do professor.

O livro didático sofreu todas essas mudanças até chegar aos que conhecemos hoje, com a política do país influenciando, diretamente, grande parte dessa evolução, cheia de decretos e leis.

[1] Ver Guia de Livros Didáticos, 2002, páginas 148 e 149.

CAPÍTULO 3

DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE THALES: UM ENFOQUE HISTÓRICO

Neste momento julgamos ser importante tecer alguns comentários sobre a Matemática que fundamentará nossa pesquisa. Abordaremos um estudo sobre o surgimento do nome teorema de Thales (Teorema da Proporcionalidade de Segmentos), fazendo uma relação entre alguns dados encontrados pela nossa pesquisa e as feitas em outros países. Faremos uma investigação sobre o "autor" do teorema – Thales de Mileto – contemplando um pouco sua história e alguns resultados atribuídos a ele.

Para a demonstração do teorema de Thales, vamos nos deter em alguns fatos da época da descoberta do problema da incomensurabilidade, a qual se deve grande parte do desenvolvimento da Matemática. Sendo assim, utilizaremos a obra *Os Elementos* de Euclides, como forma de investigar uma fonte próxima a esse período. Focaremos os livros V, VI e X, apontando fatores relevantes à compreensão, tanto dos momentos que ele pretendia descrever, quanto das conveniências encontradas nessa descrição.

Para finalizar, apresentaremos a demonstração do teorema de Thales no período Pré-Eudoxiano, a partir do conceito de número exposto na época de Thales e dos pitagóricos. Estudaremos, ainda, a fase após a descoberta da teoria das Proporções de Eudoxo, apresentando a demonstração encontrada no livro V de *Os Elementos* de Euclides. Como complementação, abordaremos também algumas demonstrações do teorema encontradas em renomados livros-textos utilizados no Ensino Superior ou como paradidáticos, no Ensino Médio.

3.1. INTRODUÇÃO

Um dos teoremas chave da Geometria Elementar é o conhecido teorema de Thales, que relaciona o geométrico e o numérico por meio de medidas. Seu enunciado mais conhecido atualmente é:

Se um feixe de retas paralelas é cortado por duas transversais, então as medidas dos segmentos correspondentes que estão sobre a reta são diretamente proporcionais[1].

Segundo a maioria dos autores de livros de História da Matemática, não se tem nenhuma evidencia histórica de quando e como surgiu o teorema de Thales, pois não existem documentos suficientes para comprovar sua existência e autoria. Muitas fontes sofreram alterações devido a várias versões de interpretações recebidas, dificultando separar o histórico do fantástico.

Contudo, conjectura-se que sua origem se deve à solução de problemas de natureza prática, principalmente na arquitetura e agrimensura grega, envolvendo paralelismo e proporcionalidade, relacionados diretamente ao geométrico e ao numérico. Provavelmente sua origem pode estar no método de medir a altura da pirâmide. Segundo Eves (2004):

> Há duas versões de como Tales calculou a altura de uma pirâmide egípcia por meio da sombra. O relato mais antigo, dado por Hierônimos, um discípulo de Aristóteles, diz que Tales anotou o comprimento da sombra no momento em que esta era igual à altura da pirâmide que a projetava. A versão posterior, dada por Plutarco, diz que ele fincou verticalmente uma vara e fez o uso da semelhança de triângulos. Ambas as versões pecam ao não mencionar a dificuldade de obter, nos dois casos, o comprimento da sombra da pirâmide – isto é, a distancia da extremidade da sombra ao centro da base da pirâmide (EVES, 2004: 115).

As duas versões de Hierônimos e Plutarco para o modo de como Thales mediu a altura da pirâmide, expostas no livro de Eves (2004), podem fornecer dúvidas com relação ao feito. Na primeira versão, Thales teria medido a altura da pirâmide pela observação de sua sombra com a sombra da pirâmide, porém, medir a altura da pirâmide tomando apenas essas variáveis, poderia ocasionar erro na medida, pois ele teria de levar em consideração sua posição, o horário do dia, a época do ano, a latitude etc., o que, em nenhum momento, foi mencionado na

[1] Adotaremos essa versão quando nos referirmos ao teorema de Thales.

descrição. Isso acontece também com a versão de Plutarco. Portanto, é importante, ao referirmos esses tipos de fatos históricos, levarmos em consideração todas as possíveis condições de realização dos feitos.

O teorema de Thales, que enuncia as condições de proporcionalidade de segmentos, até o final do século XIX era conhecido apenas como teorema das Linhas Proporcionais. Segundo Massot (1995), na França, nesse mesmo período, alguns autores como Rouche e Comberousse, no livro *Éléments de Géométrie*, foram pioneiros nessa designação.

No Brasil, segundo pesquisa realizada por nós com livros didáticos de Matemática, tanto aqueles apresentados no primeiro capítulo como em outros livros, de autores como Arão Reis, Algacyr Munhoz Maeder e Jácomo Stavale, o aparecimento do nome teorema de Thales relacionado ao teorema da Proporcionalidade surgiu na segunda metade do século XX, principalmente nos livros-texto que caracterizaram o Movimento da Matemática Moderna, como o livro do autor Osvaldo Sangiorgi. A partir desse momento começou a surgir uma variedade de enunciados referentes ao teorema da Thales.

Outros autores, anteriores aos dessa época, fazem referência ao teorema de Thales, ligando-o a um resultado do conteúdo de semelhança de triângulos. O livro da FIC, *Elementos de Geometria*, datado do início do século XX, enuncia da seguinte forma: "Toda parallela a um lado d'um triângulo determinam segundo triângulo semelhante ao primeiro (FIC,1923: 93)*.* O livro de autoria de Ary Quintella, Matemática: Curso Ginasial enuncia como lei de Thales" a paralela traçada a um dos lados de um segundo triângulo semelhante ao primeiro" *(QUINTELLA,1963).*

Uma pesquisa, realizada por Hélène Dervaz e Nicole Koget (1995) para a Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques - IREM, mostra as várias enunciações do teorema em diversos países:

Na Itália: "I segmenti staccati da um fascio di rette parallele su due trasversali sono direttamente proporzionali" (Os segmentos determinados por um feixe de paralelas sobre duas transversais são diretamente proporcionais).

Na Alemanha o teorema de Thales é enunciado como "todo triângulo inscrito numa semicircunferência é retângulo"; porém o teorema que corresponde ao teorema de Thales utilizado no Brasil é conhecido como Teorema dos Segmentos

Proporcionais: "Se um feixe de retas concorrentes é cortado por duas retas paralelas, então a razão entre as medidas dos segmentos determinados por uma reta do feixe é igual à razão entre as medidas dos segmentos correspondentes determinados sobre qualquer outra reta do feixe".

Na Espanha, "Si cortamos dos rectas cualesquiera, por varias rectas paralelas, los segmentos correspondientes determinados em ambias, son proporcionales". (Se cortamos duas retas quaisquer por várias retas paralelas, os segmentos correspondentes determinados em ambas, são proporcionais).

Assim, podemos ter uma visão, de um modo geral, dos enunciados direcionados ao teorema de Thales não só no Brasil, mas também em outros países.

3.2. VIDA E OBRA DE THALES DE MILETO

Pouco se sabe sobre a vida e as obras de Thales, porém é considerado um dos sete sábios da Antigüidade. Segundo Boyer (1998), Thales teria nascido no ano de 640 a.C. na cidade de Mileto, na Grécia antiga e sua morte teria ocorrido, aproximadamente, aos 78 anos, entre 548-545 a.C. A data de sua morte foi tomada com base no eclipse total do Sol ocorrido em 28 de maio de 585 a.C., pois, provavelmente, nesse acontecimento previsto por Thales, ele deveria ter por volta de 40 anos.

Acredita-se que Thales tenha sido professor de Anaximander (611 a.C. - 545 a.C.), sendo considerado o primeiro filósofo natural na Escola de Milesian. Entretanto, não temos nenhum escrito original de Thales, pois nenhuma de suas obras chegou aos dias de hoje, dificultando determinar suas concepções e suas descobertas Matemáticas. Segundo Eves (2004), a principal fonte de informações a respeito das realizações Matemáticas de Thales é o chamado Sumário Eudemiano de Proclus Diadocus[2] (410-485), que consiste nas primeiras páginas de abertura de seu livro *Comentário sobre o primeiro livro de Os elementos de Euclides*.

Descendente de família nobre Thales exerceu, provavelmente, várias atividades práticas. Foi estadista, matemático, astrônomo, engenheiro e próspero comerciante, que passava a maior parte do tempo viajando. É considerado o primeiro homem da história a quem se atribuem descobertas Matemáticas específicas. Acredita-se que Thales desenvolveu uma estrutura lógica para a geometria e introduziu, nesse estudo, a idéia de prova. Existem evidencias de que ele escreveu um livro sobre navegação, intitulado *O guia da estrela Náutica*. “É também muito conhecido o fato de Tales ter aconselhado os navegantes a se guiarem pela Ursa Menor em vez da Ursa Maior, como era a prática corrente da navegação. Isso se deve ao fato de a Ursa Menor conter a estrela polar que está a apenas um grau do pólo celeste” (LINTZ, 1999: 35).

Thales alcançou fama, como cientista na previsão do eclipse total do Sol. Para alguns pesquisadores há dúvidas sobre a autenticidade dessa história, mas Lintz (1999, 32-33) afirma que “(...) deve ter sido baseado nas observações dos Babilonios e Caldeus que já tinham estabelecido de maneira bastante completa os ciclos dos eclipses do sol e da lua, embora Neugebauer seja contrário a essa hipótese”.

Neugebauer (1969) adverte que não existe nenhuma evidência histórica que apóie esse feito. Os “Saros Babilônicos” eram a base para a predição de eclipses pelos babilônicos e seus sucessores. Ele é explicado como “uma medida ou número dos Caldeus”. Existe reivindicação que Thales tenha usado os “Saros babilônico”, um ciclo de 223 meses lunares (18 anos 10 dias 8 horas), para prever o eclipse. Segundo Neugebauer (1969):

> (...) lá não existe nenhum ciclo para eclipses solares visível em um determinado lugar; todos os ciclos modernos interessam como um todo a terra. Nenhuma teoria babilônica por predizer um eclipse solar existiu a 600 AC, como a pessoa pode ver depois da situação muito insatisfatória 400 anos, nem os babilônicos desenvolveram qualquer teoria que levou em conta a influência de latitude geográfica (NEUGEBAUER, 1969, 142 - tradução nossa) [3]

Existem muitas histórias sobre os feitos de Thales. Em uma de suas viagens para o Egito passou a ser admirado pelo rei Amasis, por ter medido a altura da pirâmide de Queops, sem escalá-la. Para isso ele teria comparado a sombra por ela

---

[2] Filosofo e matemático grego, nasceu em Alexandria e foi para Atenas onde se tornou chefe da escola neoplatônica, e tornou-se importante pelas suas observações freqüentes sobre a história da geometria grega mais antiga.

[3] (...) there exists no cycle for solar eclipses visible at a given place: all modern cycles concern the earth as a whole. No Babylonian theory for predicting a solar eclipse existed at 600 BC, as one can see from the very unsatisfactory situation 400 years later, nor did the Babylonians ever develop any theory which took the influence of geographical latitude into account (NEUGEBAUER, 1969, 142).

projetada com a de uma haste vertical. Aplicou, com isso, uma relação Matemática existente entre triângulos semelhantes. Além desse fato, são atribuídos a ele cálculos para medir a largura de um rio e a distância de um barco que se aproxima.

Muitos livros de história da Matemática tais como os de Boyer (1998), Eves (2003), Lintz (s/d) e dicionários biográficos específicos de Matemáticos creditam a Thales cinco teoremas da Geometria Elementar: (i) um círculo é bissectado por um diâmetro; (ii) os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais; (iii) os pares de ângulos opostos formados por duas retas que se cortam são iguais; (iv) se dois triângulos são tais que dois ângulos e um lado de um são iguais, respectivamente, a dois ângulos e um lado de outro, então os triângulos são congruentes; (v) um ângulo inscrito num semicírculo é um ângulo reto. Ressalte-se, entretanto, que, segundo Aaboe (1984), não há comprovação de que ele realmente tenha realizado esses feitos.

Segundo Heath (1921), Proclus, em *Comentário sobre o primeiro livro de Os elementos de Euclides*, nas primeiras, páginas fez comentários sobre a origem da geometria na Grécia por meio de Thales. Diz que Thales

> (...) primeiro foi o Egito e de lá introduziu esse estudo (geometria) na Grécia. Descobriu ele próprio muitas proposições e instruiu seus sucessores nos princípios que regem muitas outras, seu método de ataque sendo em certos casos mais geral (isto é, mais teóricos e científicos), em outros mais empíricos (αίΐσθητικώτερον , mais na natureza de simples inspeção ou observação)' (HEATH, 1921, Vol 1: 128 - tradução nossa)[4].

Com Thales, então, geometria se torna uma ciência dedutiva que depende primeiramente de proposições gerais. Plutarco o intitula como um dos sete sábios da Antigüidade: "ele era aparentemente o único destes cuja sabedoria foi, em especulação, além dos limites de utilidade prática(...)"[5] *(*PLUCARCO apud HEATH, 1921: 12 – Tradução nossa)*.*

Isso nos faz crer que os gregos é que acrescentaram à geometria o elemento novo da estrutura lógica, quase universalmente admitida hoje, mas permanece a

---

[4] 'first to Egypt and thence introduced this study (geometry) into Greece. He discovered many propositions himself, and constructed his successors in the principles underlying many others, his method of attack being in some cases more general (i. e. more theoretical or scientific), in others more empirical (αίΐσθητικώτερον, more in the nature of simple inspection or observation)' (HEATH, 1921, Vol 1: 128).

[5] "he was apparently the only one of these whose wisdom stepped, in speculation, beyond the limits of practical utility (…)" (PLUCARCO apud HEATH, 1921: 128).

grande questão de saber se esse passo crucial foi dado por Thales ou por outros, mais tarde.

3.3. DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE THALES

A idéia por trás do teorema de Thales está ligada às condições de proporcionalidade de segmentos, em que esses segmentos podem ser comensuráveis ou incomensuráveis com uma unidade de medição. No Ensino Fundamental e Médio, muitos livros didáticos atuais demonstram-no, trabalhando, apenas, com o caso em que os segmentos (grandezas) são comensuráveis[6] como provavelmente os pitagóricos trabalhavam, associando a um número inteiro ou uma razão entre dois números inteiros. Uma exposição organizada da Matemática pitagórica está nos livros VII, VIII e IX dos Elementos de Euclides.

Contudo, o conceito de proporção, para os gregos, estava ligado à idéia de subtração mútua. Segundo Boyer (1998),

> Aparentemente os gregos usaram a idéia de que quatro quantidades estão em proporção a:b = c:d, se as duas razões a:b e c:d têm a mesma subtração mútua; isto é, se em cada razão a quantidade menor cabe um igual número inteiro de vezes na menor e o novo resto no precedente o mesmo número inteiro de vezes, e assim por diante. (BOYER, 1998: 61).

Essa citação nos mostra que, sendo a razão a:b, na qual a grandeza **a** é um múltiplo da grandeza **b**, por exemplo, a = 8 e b = 2, isso significará que **b** caberá exatamente quatro vezes em **a**; então, a outra razão c:d só será igual a a:b, se apresentar a mesma propriedade, ou seja **d** coube exatamente quatro vezes em **c**. Assim, após subtrairmos quatro vezes **b** de **a** ou **d** de **c**, os restos, em cada caso, seriam iguais a zero.

Outro caso seria se a divisão não fosse exata. Quando isso ocorrer poder-se-á utilizar o processo das divisões sucessivas para determinação do Máximo Divisor Comum (MDC) entre dois números.

À medida que a Matemática se desenvolvia, as grandezas incomensuráveis se tornaram um problema, gerando o que se costuma chamar de “a crise dos incomensuráveis”.

---

[6] Dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são comensuráveis se existem um segmento U e dois inteiros m e n tais que AB = m.U e CD = n.U

Uma referência sobre a descoberta dos incomensuráveis pode ser encontrada no trabalho de Aristóteles, citado por Fowler (1999), que traz uma prova da incomensurabilidade da diagonal de um quadrado, com o seu lado indicando que se baseava na distinção entre pares e ímpares. Ele ainda menciona a ilustração Matemática favorita de Aristóteles para a incomensurabilidade, a da diagonal do quadrado, embora ele nunca sugira o fato que o levou à descoberta. Porém, o próprio Fowler (1999) discute que esse problema relacionado à diagonal do quadrado é muito simples para os pitagóricos, e que o problema surgiu da observação das diagonais de um pentágono, pois quando se traçam as cinco diagonais de um pentágono, elas formam um pentágono regular menor. As diagonais desse segundo pentágono, por sua vez, formam um terceiro pentágono regular, que é ainda menor. Esse processo pode continuar indefinidamente, resultando em pentágonos tão pequenos quanto se queira, levando à conclusão que a razão da diagonal para o lado, num pentágono regular, não é comensurável. E, ainda, acredita que os pitagóricos já conheciam o problema da incomensurabilidade logo no início de suas investigações Matemáticas, mas a mantinham como um segredo da seita.

O principal perigo da teoria dos incomensuráveis é que ela destruiria a generalidade da teoria das proporções, que só continuaria válida para grandezas comensuráveis. Segundo Fowler (1999), não há referências claras das tentativas feitas pelos pitagóricos para resolver esse impasse. Ele ainda ressalta que “até de onde eu sei, nenhum texto grego, cedo ou tarde, nos conta claramente sobre as dificuldades Matemáticas elevadas pela incomensurabilidade”[7] (FOWLER, 1999: 363- tradução nossa).

A descoberta forçou os pitagóricos a abandonar a sua filosofia básica de que todas as coisas eram números, e permitiu que os matemáticos gregos desenvolvessem novas teorias. O problema não foi resolvido antes da descoberta da teoria das proporções de Eudoxo de Cnido (408 a.C. - 355 a.C.) encontrado no livro V de *Os Elementos* de Euclides, em que a autenticidade do fato seria concluída, segundo Lintz, por citações de Arquimedes.

Lintz (1999) retrata que

---

[7] As far as I know, no Greek text, early or late, tells us clearly of the mathematical difficulties by incommensurability (FOWLER, 1999: 363).

> O trágico resultado da noção de grandezas incomensuráveis foi o descrédito da Matemática e dos matemáticos que, no final das contas, construíram um edifício sobre a areia e não faltaram críticos violentos que expuseram os pitagóricos ao ridículo. Mas, apesar de tudo, a pesquisa continuou e resultados continuaram a se acumular até o advento de Eudóxio que, finalmente, introduziu uma teoria correta dos incomensuráveis, reabilitando a Matemática como "ciência exata", inaugurando o *período da arte* (LINTZ,1999: 83).

O livro V de *Os Elementos* começa assumindo, na primeira definição, o conceito de magnitude como um conceito primitivo, que teria profundas raízes na imagem grega do universo. Alertamos para o equívoco de procurar entender essas discussões como um grego e não como um matemático atual. Como primeira aproximação, do ponto de vista matemático, podemos considerar magnitude como algo que pode ser aumentado, diminuído ou agregado a outros objetos da mesma espécie, como por exemplo, um segmento, uma superfície.

O essencial da noção de magnitude ou grandeza seria a possibilidade de encontrar seus múltiplos. Dos geômetras gregos não chegou até nós nenhuma informação sobre a maneira de introduzir, com precisão, esses conceitos.

Eudoxo define, também, a igualdade de razões, que se aplica a grandezas comensuráveis ou incomensuráveis e contém a idéia de proporcionalidade:

"Diz-se que quatro grandezas estão na mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta se, quando eqüimúltiplos quaisquer são tomados da primeira e da terceira e eqüimúltiplos quaisquer da segunda e da quarta, os primeiros eqüimúltiplos são ambos maiores que, ou ambos iguais a, ou ambos menores que, os últimos eqüimúltiplos considerados em ordem correspondente (Definição 5 do V Livro de *Os Elementos* de Euclides) [8]".

Em linguagem atual, considerando como grandezas os segmentos AD, DE, AE e EC (comensuráveis ou não), dizer que $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$, significa dizer que, para todo m e n inteiros positivos, as seguintes condições se verificam:

Se m. DB < n. AD, então m. EC < n. AE

Se m. DB > n. AD, então m. EC > n. AE

Se m. DB = n. AD, então m. EC = n. AE.

[8] Magnitudes are said to be in the same ratio, the first to second and the third to the fourth, when, if any equimultiples whatever be taken of the first and third, and any equimultiples whatever of the second and fourth, the former equimultiples alike exceed, are alike equal to, or alike fall short of, the latter equultiples respectively taken in corresponding order (HEATH, 1956: 114).

No livro VI, é feito o estudo da semelhança de figuras, a começar pela proposição fundamental, relacionada à proporcionalidade de segmentos determinados em duas retas cortadas por um feixe de paralelas, cuja demonstração dada pelos pitagóricos era incompleta, porque dependia da comensurabilidade das grandezas envolvidas [9].

Uma das conseqüências, supostamente causadas pela teoria das proporções de Eudoxo, foi forçar a forte separação entre números e geometria, deixando somente à geometria o tratamento das razões incomensuráveis. Os gregos foram um tanto afastados de um desenvolvimento numérico da Matemática. A aritmética e a álgebra só voltariam a ganhar importância e autonomia próprias com a influência árabe, a partir do século XII.

Outro livro de *Os Elementos*, em que podemos encontrar discussões sobre comensurabilidade de grandezas, é o Livro X. Nele está exposta a teoria geral das grandezas incomensuráveis, que, segundo Lintz (1999, 161), é "considerado pela tradição como o mais perfeito e bem acabado de todos eles". O livro inicia-se com quatro definições, desencadeando 115 proposições relacionadas à teoria dos incomensuráveis.

A questão referente à existência de uma certa grandeza e à inexistência de um número (racional) que o representasse só é retomada e encaminhada por Dedekind, no século XIX. Ele percebe, na teoria das Proporções de Eudoxo, a possibilidade de pensar na essência da continuidade de um segmento a partir de sua divisão em duas classes. A insuficiência dos números naturais é percebida pela correspondência não biunívoca entre estes e os pontos de uma reta tomada contínua. A superação dessa insuficiência é alcançada pela inclusão de um outro conjunto numérico que, unido ao anterior, daria origem ao conjunto dos números reais.

Desse modo, nosso propósito neste capítulo é explorar as idéias acerca da demonstração do teorema de Thales, em textos diversos, que convergem ou divergem para idéias acerca desse momento histórico. A ênfase dada aos estudos dos pitagóricos e aos de Eudoxo justifica-se pelas importantes contribuições dadas por eles. Os avanços e retrocessos, bem como a atmosfera em que esses

[9] Essa proposição fundamental será demonstrada nas próximas seções, pois é considerado por nós o teorema da Proporcionalidade de Segmentos ou Teorema de Thales exposto no Livro V dos Elementos de Euclides.

pensadores viveram, colaboram para uma maior compreensão do processo de desenvolvimento desse conceito.

Tendo em vista que os pitagóricos e Eudoxo tiveram seus estudos transmitidos por meio da tradição oral e só foram registrados, por outros autores, séculos mais tarde, voltamo-nos para o mais expressivo desses autores a fim de discutir o conteúdo, a forma e a coerência desses registros com as informações que se tinha daquela época.

Sendo assim, a obra *Os Elementos* de Euclides, mais precisamente os livros V e VI, será estudada e discutida, sendo apontados fatores relevantes à compreensão, tanto dos momentos que ele pretendia descrever, quanto das conveniências encontradas na descrição.

Por fim, olhando para a produção do conhecimento como um movimento histórico, deparamo-nos com um esforço humano, através do tempo, de sistematização dos estudos desenvolvidos para que outros, num outro tempo, possam compreendê-los ou complementá-los. Essas idéias estão, a nosso ver, imersas em outras, que têm como fundamento o conhecimento como algo universal.

3.3.1. PERÍODO PRÉ-EUDOXIANO

Apesar das dúvidas sobre a veracidade dos feitos de Thales (calcular a altura da pirâmide, a largura de um rio, a distância de um barco que se aproxima, etc), citado anteriormente, segundo Lintz (1999, 77) "fica certo que em sua época já eram bem difundidas as principais propriedades dos triângulos e a teoria da proporção que se baseia no resultado bem conhecido: se duas retas a e b são cortadas por retas paralelas, os vários segmentos determinados em a e b são proporcionais, isto é $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \ldots$" (LINTZ, 1999: 77).

Assim, com essa afirmação podemos acreditar que a proposição, hoje intitulada teorema de Thales, já era conhecida de longa data, embora sem prova severa. A demonstração rigorosa desse teorema só vai aparecer com Euclides, baseado na teoria dos incomensuráveis de Eudoxo. Uma idéia defendida por Lintz (1999) é a de que o problema proposto na proposição anterior foi a primeira tentativa de sistematizar a geometria.

No livro *História da Matemática,* Rubens G. Lintz, 1999, apresenta duas demonstrações para o teorema. Na primeira, o autor se baseia no conceito de números na época de Thales, em que “número é uma coleção de unidades e, por sua vez, unidade é um ponto sem posição” *(LINTZ, 1999, 59).* Vejamos a demonstração apresentada por ele:

> **Proposição:** Se duas retas a e b são cortadas por retas paralelas, os vários segmentos determinados em a e b são proporcionais, isto é $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \ldots$ (LINTZ, 1999: 39).

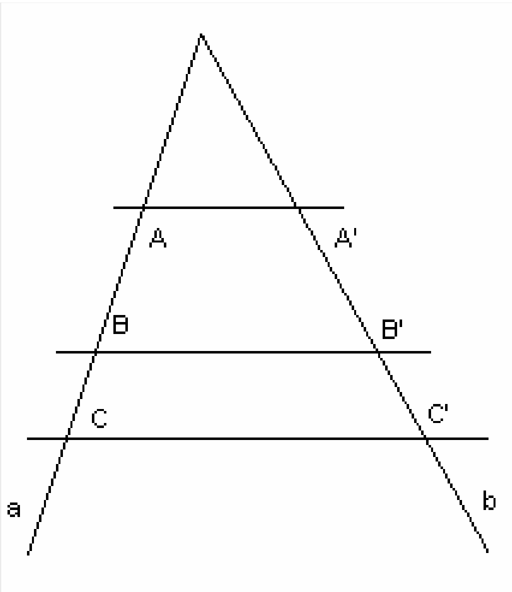


Figura 1

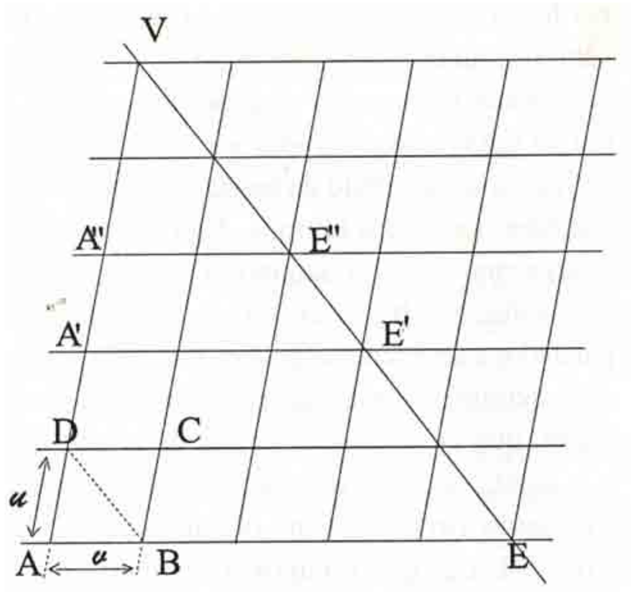


Figura 2

> **Demonstração**
> Tomemos um segmento u como unidade e construamos o reticulado da figura 2, formado de dois feixes de retas paralelas, definindo o quadrilátero ABCD, etc., (figura 2) de lados u e v. Consideremos as duas retas VA e VE e as paralelas AE, A’E’, A’’E’’. Então, diretamente da figura, vem
> VA’’ = 2u VE’’ = 2w
> VA’ = 3u VE’ = 3w
> onde w é o segmento DB tomado como unidade de medida das retas paralelas a DB.
> (...)
> Das relações acima, tiramos
> $$\frac{VA''}{VA'} = \frac{2}{3} = \frac{VE''}{VE'}$$
> O resultado facilmente se generaliza para a situação da figura 2, desde que, os segmentos determinados nas retas a e b sejam múltiplos, respectivamente, de unidades u e v pré-estabelecidas. Esta hipótese da existência de unidade comum para medir segmentos está ligada à questão da comensurabilidade de segmentos de grande profundidade e importância para a geometria e que vai culminar com a crise da escola pitagórica (...).
> (LINTZ, 1999: 42-43)

Uma outra tentativa de demonstração era a utilização das noções de números, na época dos pitagóricos, para o problema da proporcionalidade, o qual era exposto da seguinte maneira:

> **Proposição:** Se duas retas **a** e **b** são cortadas por um certo número de paralelas, estas determinavam sobre **a** e **b** segmentos proporcionais, isto é, $\frac{VA}{VA'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$. (LINTZ, 1999: 63)

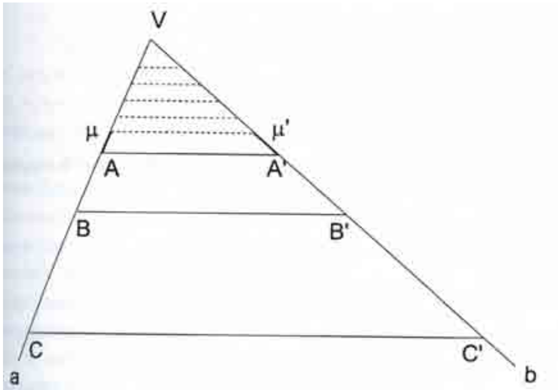


Figura 3

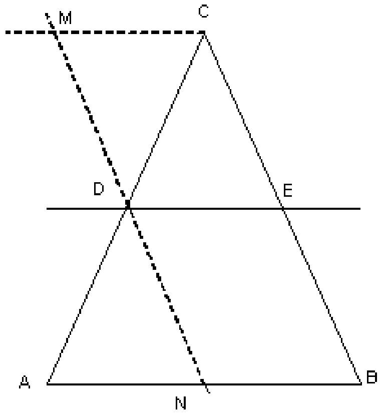


Figura 4

> **DEMONSTRAÇÃO**
> De acordo com a hipótese fundamental acima enunciada[10] existe uma unidade ou módulo **u** em **a** tal que
>
> $$VA = p\times u;\ AB = q\times u \ (1)$$
>
> Assim, VA fica subdividida em **p** segmentos e AB em **q** segmentos. O teorema ficará demonstrado se provarmos que, traçando-se as paralelas tracejadas a AA' e BB', também VA' e A'B' ficam subdivididos no mesmo número de partes iguais e, neste caso, se **u'** é uma dessas partes teremos VA' = p.u'; A'B' = q. u' (2)
> donde, comparando (1) e (2),
>
> $$\frac{VA}{VA'} = \frac{pu}{pu'} = \frac{u}{u'} = \frac{qu}{qu'} = \frac{AB}{A'B'}$$
>
> Provemos, então, a asserção acima, que se reduz à seguinte: dado um triângulo ABC (figura 4) e o ponto médio D de um dos lados, se traçarmos por D uma paralela a AB, ela divide CB em duas partes iguais CE e EB. De fato, tracemos por D uma paralela a CB e por C, uma paralela a AB. Agora usaremos o fato de serem iguais segmentos determinados em duas paralelas cortadas por outras duas. Os pitagóricos seguramente conheciam este fato que, nos elementos de Euclides, pode ser obtido facilmente do teorema sobre ângulos alternos e igualdade de triângulos, mas é provável que eles o conhecessem através de "demonstrações incompletas", quando comparados ao padrão de Euclides. Enfim, assumindo isso, os triângulos DMC e AND são iguais e, portanto, DM = DN; mas DM = CE e DN = EB, logo CE = EB
>
> q.e.d
>
> (LINTZ, 1999: 63-65)

---

[10] A hipótese fundamental que Lintz refere é: seja **u** um **segmento unidade** ou **módulo** e seja AB um segmento qualquer. 1) **u** pode ser aplicado um número inteiro **n** vezes sobre AB, então diremos que **AB é n vezes u** ou AB = n.u (...) e 2) **u** não pode ser aplicado um número inteiro de vezes sobre AB e, então subdividimos **u** em **q** partes novamente. Pode acontecer que AB seja igual a **p** vezes o novo **módulo** ou nova unidade u/q ou não, caso em que repetiremos o processo usado agora u/q dividido em q' partes como módulo e assim sucessivamente (Lintz, 1999: 60-61).

Nota-se uma mudança razoável da demonstração da época de Thales para a época de Pitágoras, embora ambas estejam incompletas. Enquanto Thales tira conclusões a partir das figuras, tomando-as como hipótese válida para o raciocínio da demonstração, os pitagóricos vão além, conseguem assimilar uma certa organização para a época, desprendendo-se de algumas particularidades visuais das figuras.

3.3.2. APÓS A DESCOBERTA DA TEORIA DAS PROPORÇÕES DE EUDOXO

Demonstração pela Teoria da Proporção

Até antes da descoberta da Teoria das Proporções, trabalhava-se apenas com o caso em que os segmentos (grandezas) eram comensuráveis, associado a número natural ou a uma razão de dois números naturais. Entretanto, após a descoberta do problema das grandezas incomensuráveis, muitos dos matemáticos gregos voltaram-se para solucionar o problema das grandezas incomensuráveis, desenvolvendo, assim, novas teorias. Esse problema foi resolvido pela descoberta da teoria das proporções de Eudoxo de Cnido (408 a.C. - 355 a.C.), encontrado no Livro V de *Os Elementos* de Euclides. Uma das conseqüências, supostamente causadas pela Teoria das Proporções de Eudoxo, foi forçar uma forte separação entre números e geometria, deixando somente à geometria o tratamento das razões incomensuráveis.

Para provar o teorema de Thales utilizando a teoria das proporções devemos considerar os segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{A'B'}, \overline{B'C'}$ (comensuráveis ou não), em que $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$ é válida, se as três condições abaixo, para todo m e n naturais quaisquer, forem satisfeitas:

Se n$\overline{AB}$ < m$\overline{BC}$ $\Rightarrow$ n$\overline{A'B'}$ < m$\overline{B'C'}$;

Se n$\overline{AB}$ = m$\overline{BC}$ $\Rightarrow$ n$\overline{A'B'}$ = m$\overline{B'C'}$;

Se n$\overline{AB}$ > m$\overline{BC}$ $\Rightarrow$ n$\overline{A'B'}$ > m$\overline{B'C'}$.

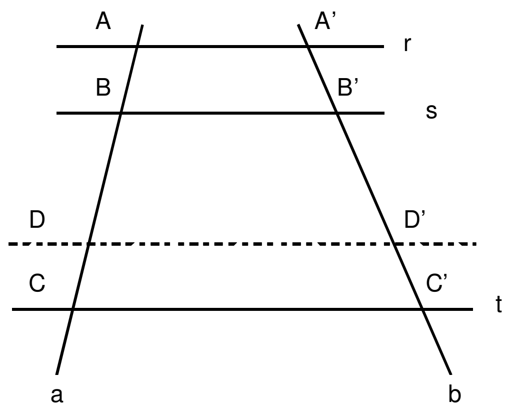


Figura 5

Teorema: Se um feixe de retas paralelas é cortado por duas transversais, então as medidas dos segmentos correspondentes que estão sobre a reta são diretamente proporcionais.

Demonstração

Assim, tomaremos m e n dois números naturais quaisquer, iremos dividir o segmento $\overline{AB}$ em m partes iguais cada uma determinando um segmento U, então teremos $\overline{AB}$ = mU e traçando-se paralelas dividiremos $\overline{A'B'}$ em m partes iguais de um certo U’, de modo que $\overline{A'B'}$ = mU’. Na reta **a**, partindo de B para C, marcaremos n segmentos U ($\overline{BC}$ = nU). Do mesmo modo na reta **b**, partindo de B’ para C’, marcaremos n segmentos U’ ($\overline{B'C'}$ = nU’). Sendo D a ultima extremidade do último segmento contido em $\overline{BC}$ podemos ter três casos possíveis:

1º caso: D está entre B e C (provar n$\overline{AB}$ < m$\overline{BC}$ $\Rightarrow$ n$\overline{A'B'}$ < m$\overline{B'C'}$.);

2º caso: D coincide com C (n$\overline{AB}$ = m$\overline{BC}$ $\Rightarrow$ n$\overline{A'B'}$ = m$\overline{B'C'}$.);

3º caso: D está além de C (n$\overline{AB}$ > m$\overline{BC}$ $\Rightarrow$ n$\overline{A'B'}$ > m$\overline{B'C'}$.).

Analisando o **1º caso** em que D está entre B e C.

De $\overline{AB}$ = mU temos que n$\overline{AB}$ = nmU e de $\overline{BD}$= nU temos que m$\overline{BD}$ = mnU. Logo n$\overline{AB}$ = m$\overline{BD}$.

Como $\overline{BD}<\overline{BC}$ então n$\overline{AB}$ = m$\overline{BD}$ < m$\overline{BC}$. Portanto n$\overline{AB}$ < m$\overline{BC}$.

Por outro lado, de $\overline{A'B'}$ = mU’ temos que n$\overline{A'B'}$ = nmU’ e de $\overline{B'D'}$= nU’ temos que m$\overline{B'D'}$ = mnU”. Logo n$\overline{A'B'}$ = m$\overline{B'D'}$.

Como $\overline{B'D'}<\overline{B'C'}$ então n$\overline{A'B'}$ = m$\overline{B'D'}$ < m$\overline{B'C'}$. Portanto n$\overline{A'B'}$ < m$\overline{B'C'}$.

Concluímos que n$\overline{AB}$ < m$\overline{BC}$ $\Rightarrow$ n$\overline{A'B'}$ < m$\overline{B'C'}$.

O **2º caso** em que D coincide com C.

De $\overline{AB}$ = mU temos que n$\overline{AB}$ = nmU e de $\overline{BD}$= nU temos que m$\overline{BD}$ = mnU. Logo n$\overline{AB}$ = m$\overline{BD}$.

De $\overline{A'B'}$ = mU’ vem que n$\overline{A'B'}$ = nmU’ e de $\overline{B'C'}$ = nU’ vem que m$\overline{B'C'}$ = mnU’.

Logo n$\overline{A'B'}$ = m$\overline{B'C'}$

Concluímos que n$\overline{AB}$ = m$\overline{BC}$ $\Rightarrow$ n$\overline{A'B'}$ = m$\overline{B'C'}$.

O **3º caso** em que D está além de C.

De $\overline{AB}$ = mU temos que n$\overline{AB}$ = nmU e de $\overline{BD}$ = nU temos que m$\overline{BD}$ = mnU. Logo n$\overline{AB}$ = m$\overline{BD}$.

Como $\overline{BD} > \overline{BC}$ então n$\overline{AB}$ = m$\overline{BD}$ > m$\overline{BC}$. Logo n$\overline{AB}$ > m$\overline{BC}$.

De $\overline{A'B'}$ = mU' temos que n$\overline{A'B'}$ = nmU' e de $\overline{B'D'}$ = nU' então m$\overline{B'D'}$ = mnU'. Logo n$\overline{A'B'}$ = m$\overline{B'D'}$.

Como $\overline{B'D'} > \overline{B'C'}$ então n$\overline{A'B'}$ = m$\overline{B'D'}$ > m$\overline{B'C'}$. Logo n$\overline{A'B'}$ > m$\overline{B'C'}$.

Concluímos que n$\overline{AB}$ > m$\overline{BC}$ $\Rightarrow$ n$\overline{A'B'}$ > m$\overline{B'C'}$.

Portanto, as três condições estão satisfeitas, provando que $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$.

Demonstração Euclidiana

A demonstração euclidiana[11], retirada do livro VI de *Os Elementos* de Euclides, traduzido por Heath (1956), baseia-se no método das áreas e na teoria das proporções.

O método das áreas consiste na junção do postulado das paralelas e na equivalência de triângulos, expostas no livro I dos "Os Elementos". As proposições 37[12], 38[13], e 39[14] estabelecem idéias relacionadas a esses conceitos, a partir dos quais são enunciadas e demonstradas. Segundo Haruna (2000)

> O método das áreas permite afirmar a igualdade de duas superfícies. O problema surge ao comparar duas áreas e exprimir essa relação, isto é, combinar ao mesmo tempo cada uma dessas áreas com uma cota comum, surgindo o problema das grandezas comensuráveis e incomensuráveis (HARUNA, 2000: 14).

Quando as grandezas são comensuráveis, a proposição 1 do Livro VI, dos "Os Elementos" de Euclides, fica bem definida, mas, quando as grandezas são

---

[11] Primeira demonstração conhecida do Teorema de Thales surgiu três séculos depois da existência de Thales, localizada na proposição 2 do Livro VI dos "Os Elementos" de Euclides (300 a.C.), sustentada na teoria da proporção de Eudoxo, apresentada no Livro V de Euclides.

[12] Parallelograms which are on equal bases and in the same parallels are equal to one another. (Os paralelogramos, construídos sobre duas bases iguais e entre as mesmas paralelas, são iguais entre si) (HEATH, 1956a, 331).

[13] Triangles which are on the same base and in the same parallels are equal to one another (Os triângulos, construídos sobre a mesma base e entre as mesmas paralelas são iguais) (HEATH, 1956a, 332).

[14] Triangles which are on equal bases and in the same parallels are equal to one another (Os triângulos, construídos sobre bases iguais e entre as mesmas paralelas são equivalentes) (HEATH, 1956a, 333).

incomensuráveis, surge a necessidade de usar a teoria da proporção explicada anteriormente.

Quando utilizamos a teoria das proporções associada ao método das áreas pela proposição 38 do Livro I, temos:

área ACE = m áreas ACB

área ACF = m áreas ACD

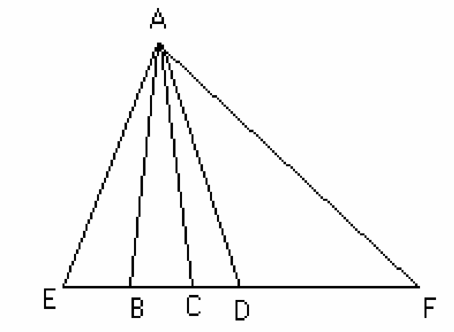


Figura 6

Assim, pode-se mostrar facilmente que se $\overline{CE}$ é maior, igual, ou menor que $\overline{CF}$, então a área do triângulo ACE é maior que, igual, a ou menor que a área do triângulo de ACF. Em outras palavras:

m BC > n CD implica m área ACB > n áreas ACD

m BC = n CD implica m área ACB = n áreas ACD

m BC < n CD implica m área ACB < n áreas ACD

Então, a razão de $\overline{BC}$ para $\overline{CD}$ é a mesma que a da área do triângulo de ABC no triângulo de ACD.

Apresentados alguns conceitos necessários para a demonstração, vejamos agora a enunciação e a demonstração da proposição 2, do Livro VI dos “Os Elementos” de Euclides, conhecido como teorema de Thales:

> **Proposição 2:** Se uma linha direta é desenhada paralela a um dos lados de um triângulo, cortará os lados do triângulo proporcionalmente; e se os lados do triângulo sejam cortados proporcionalmente, a linha que une os pontos da secção será paralelo ao lado restante do triângulo.

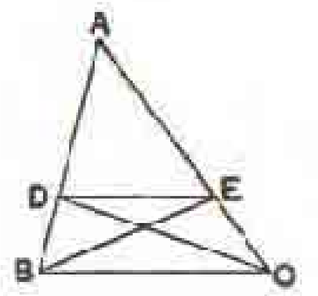


Figura 7

Demonstração[15]**:**
Seja DE paralelo ABC, um dos lados do triangulo ABC.
Eu digo que, como BD está para DA, então CE está para EA. Seja BE e CD traçados. Então a triângulo BDE é igual ao triângulo CDE, porque eles estão na mesma base DE e nas mesmas paralelas DE e BC (proposição 38 do livro I) [16]. O triângulo ADE Possui uma outra área, mas possuem a mesma razão (Proposição 7 do livro V) [17] então como o triângulo BDE está para o triângulo ADE, então o triângulo CDE está para o triângulo ADE.
Mas, como o triângulo BDE está para ADE, então BD está para DA; pois estando sobre a mesma altura, a perpendicular traçada de E para AB, estão para um outro, como suas bases (proposição 1 do livro VI).
Pela mesma razão, como o triângulo CDE está para ADE, então CE está para EA.
Portanto temos também, como BD está para DA, então CE está para EA (proposição 2 do livro V) [18].

Por outro lado, vamos cortar os lados AB e CA do triângulo ABC proporcionalmente, de forma que BD está para DA, como CE está para EA; e seja DE traçado.
Eu digo que DE é paralelo a BC.
Para, com a mesma construção, desde que BD está para DA, como CE está para EA, mas como BD está para DA, então está o triângulo BDE para o triângulo ADE, e como CE está para EA, então está o triângulo CDE para o triângulo ADE (proposição 1 do Livro VI),
Além disso, como o triângulo BDE esta para o triângulo ADE, então está o triângulo CDE para o triângulo ADE (proposição 2 do Livro V).
Portanto cada um dos triângulos BDE e CDE estão na mesma razão de ADE.
Então o triangulo BDE é igual ao triangulo CDE (proposição 9 do livro V);.e eles estão sobre a mesma base DE.
Mas os triângulos iguais que estão sobre a mesma base estão também na mesma paralela (proposição 39 do livro I)[19].
Portanto DE é paralela a BC.
Portanto ...

C.Q.D.

3.3.3. ALGUNS LIVROS-TEXTO DE MATEMÁTICA DA ATUALIDADE

Números Racionais e Irracionais – Ivan Niven

O teorema de Thales está apresentado no livro *Números Racionais e Irracionais*, na seção sobre uma aplicação à geometria, dentro do capítulo intitulado *Números Reais*. Encontramos seu enunciado no teorema 3.1: “Se três paralelas são cortadas por duas transversais, com ponto de intersecção A, B, C, A’, B’, C’, como

[15] Tentamos fazer uma tradução, exposta no Livro VI, dos “Os Elementos” de Euclides (HEATH, 1956), da demonstração da proposição 2, designada por nós teorema de Thales.
[16] Id. Ibid. fl. 42
[17] Equal magnitudes have to the same ratio, as also has same to equal magnitudes. (HEATH, 1956b, 148).
[18] If a first magnitude be the same multiple of a second that a third is of a fourth, and a fifth also be the same multiple of the second that a sixth is of the fourth, the sum of the first and fifth will also be the same multiple of the second that the sum of the third and sixth is of the fourth (HEATH, 1956: 139).
[19] Id Ibid fl. 42

na Fig. 12, então $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$, onde, por exemplo, AB representa o comprimento do segmento determinado por A e B" (NIVEN, 1985: 72).

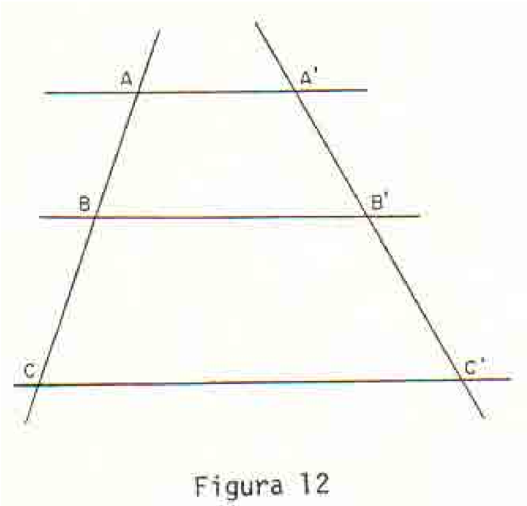


Figura 8

Em seguida, o autor menciona o uso do teorema na demonstração do teorema fundamental da semelhança, no teorema de Pitágoras e na Geometria Analítica. E explica que

> Vamos, agora, provar o teorema 3.1 para o caso em que AB/CD é irracional. Vamos aceitar a validade do Teorema 3.1 no caso de AB/CD ser racional, pois esta parte do teorema é, em geral, demonstrada nos livros de Geometria Elementar. Antes de demonstrarmos o Teorema 3.1 para AB/BC irracional, será útil estabelecer resultado preliminar:
>
> **Teorema 3.2.** Se m e n forem inteiros positivos tais que $\frac{m}{n} < \frac{AB}{BC}$, então $\frac{m}{n} < \frac{A'B'}{B'C'}$.

Esse resultado é demonstrado nesse livro, porém não iremos nos deter nessa demonstração. Como resultado, encontra-se, em seguida, o enunciado do **corolário do Teorema 3.2**:

$$\text{Se } \frac{m}{n} > \frac{AB}{BC}, \text{ então } \frac{m}{n} > \frac{A'B'}{B'C'}.$$

Partindo desses resultados, o autor demonstra o teorema de Thales da seguinte maneira:

> **DEMONSTRAÇÃO**
> Seja β um número irracional representando a razão AB/BC. Usaremos a representação decimal de β, como na Secção 3.2[20].
> Para ilustrar a passagem seguinte, façamos β assumir o valor π = 3,14159..., por exemplo. Podemos, então, escrever

[20] Na seção 3.2 desse livro o autor estuda a representação decimal para interpretar os números reais.

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\frac{3}{1} < \beta < \frac{4}{1}, \\ &\frac{31}{10} < \beta < \frac{32}{10} \\ &\frac{314}{100} < \beta < \frac{315}{100} \\ &\frac{3141}{1000} < \beta < \frac{3142}{1000}, ..., \text{etc.} \end{aligned}$$

As frações, à esquerda, são obtidas, tomando os números 3; 3,1; 3,14; 3,141; da representação decimal de π. As frações do lado direito são obtidas, aumentando estes mesmos números de 1; 0,1; 0,01; 0,001; etc.

A cadeia de desigualdade (1) é infinita; escrevemos somente as primeiras quatro. Estas desigualdades *caracterizam* o valor particular do β em questão, isto é, caracterizam π. Ou seja, se um número β satisfaz todas as desigualdades (1), então este número é igual a π.

As desigualdades (1) foram escritas em conexão com um exemplo ilustrativo, onde β tinha o valor de π. Abandonaremos agora este exemplo, mas ressaltamos que, qualquer que seja o valor irracional que β possa ter, sua representação decimal fornecerá uma cadeia de desigualdades

$$(2)\qquad \begin{aligned} &\frac{a_1}{1} < \beta < \frac{1+a_1}{1}, \\ &\frac{a_2}{10} < \beta < \frac{1+a_2}{10} \\ &\frac{a_3}{100} < \beta < \frac{1+a_3}{100} \\ &\frac{a_4}{1000} < \beta < \frac{1+a_4}{1000}, ..., \text{etc.} \end{aligned}$$

que caracterizará β de modo único e, em cada desigualdade, β estará entre dois números racionais. Os símbolos a_1, a_2, a_3,... representam inteiros.

Nossa intenção é fazer β' representar a razão A'B'/B'C' e demonstrar que β' também satisfaz as desigualdades (2), tal qual β. Mas, estas desigualdades caracterizam o número β e, portanto, β' ficará identicamente com β, de modo que

$$\beta = \frac{\text{AB}}{\text{BC}} = \frac{A'B'}{B'C'} = \beta'$$

Só falta, então, demonstrar que β' satisfaz as desigualdades (2). Para isso usaremos o Teorema 3.2. Inicialmente, escolhamos qualquer um dos números $a_1/1$, $a_2/10$, $a_3/100$, etc., digamos, $a_3/100$ e interpretemos este como sendo o número racional m/n do Teorema 3.2. Então, a hipótese do Teorema 3.2,

$$\frac{m}{n} < \frac{AB}{BC}.$$

se transforma em

$$\frac{a_3}{100} < \beta,$$

e isto é válido por causa das desigualdades (2). Logo, o Teorema 3.2 nos diz que

$$\frac{m}{n} < \frac{A'B'}{B'C'},$$

isto é,

$$\frac{a_3}{100} < \beta'.$$

Vemos, assim, que β' satisfaz

$$\frac{a_1}{1} < \beta', \frac{a_2}{10} < \beta', \frac{a_3}{100} < \beta', \frac{a_4}{1000} < \beta', \text{etc.}$$

Fazendo um uso análogo do corolário do Teorema 3.2, obtemos as desigualdades

$$\beta' < \frac{1+a_1}{1},\ \beta' < \frac{1+a_2}{10},\ \beta' < \frac{1+a_3}{100},\ \beta' < \frac{1+a_4}{1000}, \text{etc.}$$

Portanto, β' satisfaz as desigualdades (2) tal qual β; logo β = β', o que completa a demonstração do teorema 3.1.

(NIVEN, 1985: 72-78)

Meu Professor de Matemática e outras histórias – Elon Lages Lima

Para a prova do teorema de Thales, o autor, durante a demonstração, utilizará o teorema 1, porém não iremos demonstrá-lo, apenas enunciá-lo (LIMA, 2004: 129):

Teorema 1. As seguintes afirmações a respeito de y = f(x) são equivalentes:
1) y é diretamente proporcional a x;
2) para todo número real c > 0, tem-se f(c.x) = c.f(x);
3) existe um número k, chamado a "constante de proporcionalidade" entre x e y, tal que f(x) = k.x para todo x.

Segue o enunciado e a demonstração do teorema de Thales

Teorema 3: Toda paralela a um dos lados de um triângulo divide os outros dois lados em segmentos proporcionais.

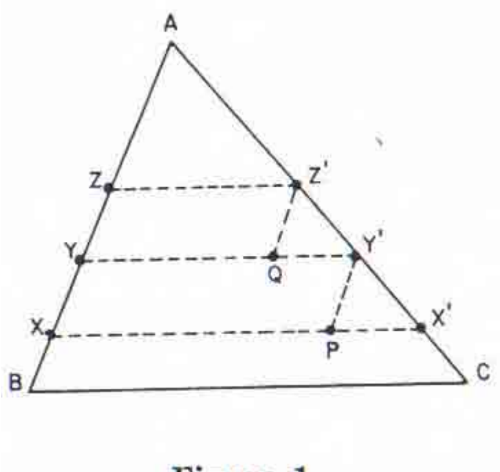


Figura 9

Demonstração: Seja ABC o triângulo. A cada ponto X do lado AB façamos corresponder o ponto X' do lado AC, de tal modo que XX' seja paralela a BC. Provaremos que o comprimento X'C é diretamente proporcional ao comprimento XB. Em primeiro lugar, é claro que se X, Y são pontos de AB tais que XB < YB então X'B < Y'B porque XX' e YY' são paralelos. Em seguida, afirmamos que se os pontos X, Y, Z do lado AB são tais que XY = YZ então X'Y' = Y'Z'. Para ver isto, tomemos os pontos P em XX' e Q em YY' de modo que Y'P e Z'Q sejam paralelas a AB. Os triângulos PX'Y'e QY'Z' são congruentes porque têm um lado igual (PY'= QZ') compreendido entre ângulos iguais. Desta observação resulta que se X, Y são pontos de AB com YB = n.XB então seus correspondentes X', Y' no lado AC são tais que Y'C = n.X'C. Isto conclui a verificação de que o comprimento X'C é diretamente proporcional a XB. Pelo Teorema 1, existe uma constante k tal que, para todo ponto X do segmento AB, tem-se X'C = k.XB (1). Em particular, para X = A, como A'= A, obtemos AC = k.AB (2). Subtraindo (1) de (2) vem: AX'= k. AX (3). Dividindo a igualdade (3) pela igualdade (1) resulta

$$\frac{AX`}{X`C} = \frac{AX}{XB}$$

Isso é precisamente o que estipula o Teorema de Tales.

(LIMA, 2004: 132-133)

Em seguida o autor faz uma observação que "o teorema de Tales equivale a afirmar que X`C é diretamente proporcional a XB. O leitor interessado poderá verificar que a constante de proporcionalidade k = AC/AB é igual a senB/senC" (LIMA, 2004: 133).

Geometria Moderna: Parte I – Moise e Dowrs

Nesse livro, *Geometria Moderna*, o autor nomeia como teorema fundamental sobre proporcionalidade o nosso conhecido teorema de Thales, demonstrando-o por meio do método das áreas, em um nível bem elementar. Segue a enunciação e a demonstração:

Teorema 12-1. O teorema Fundamental sobre Proporcionalidade.
Se uma reta paralela a um lado de um triângulo intercepta os outros dois lados em pontos distintos, então ela determina segmentos que são proporcionais a esses lados.

DEMONSTRAÇÃO

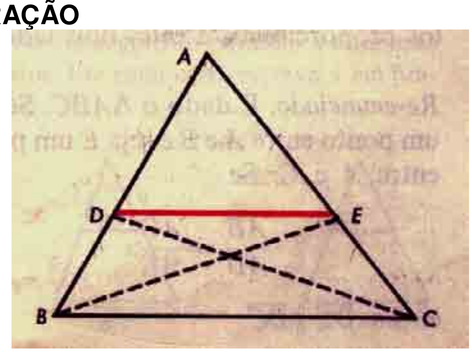


Figura 10

Re-enunciado. No ΔABC sejam D e E pontos de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ tais que $\overline{DE} \,//\, \overline{BC}$. Então $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.

Demonstração[21]

Nos ΔADE e ΔBDE consideremos $\overline{AD}$ e $\overline{BD}$ como as bases. Então esses triângulos têm a mesma altura. (Por que?) Portanto, pelo Teorema 11-7[22], a razão de suas áreas é igual a razão de suas bases e temos

(1) $\frac{a\Delta BDE}{a\Delta ADE} = \frac{BD}{AD}$.

[21] O tratamento que o autor dá, por exemplo, a **a∆BDC** é a área do triângulo BDC.

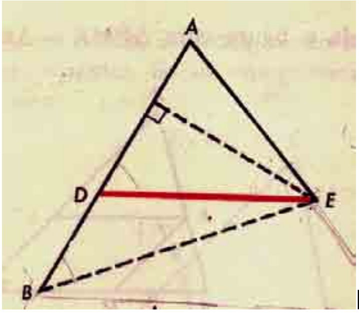


Figura 11

Analogamente, nos ΔADE e ΔCDE consideramos $\overline{AE}$ e $\overline{CE}$ como bases. Como esses triângulos têm mesma altura, concluímos, como antes, que

(2) $\dfrac{a\Delta CDE}{a\Delta ADE} = \dfrac{CE}{AE}$.

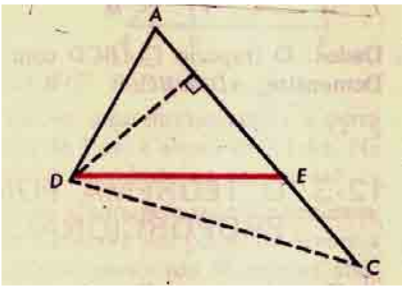


Figura 12

Mas ΔBDE e ΔBDE têm a mesma base $\overline{DE}$. (veja a figura à direita do re-enunciado). E eles têm a mesma altura, porque $\overleftrightarrow{DE}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são paralelas. Portanto, pelo Teorema 11-6.

(3) ΔBDE = ΔCDE

Combinado as três equações (1), (2) e (3), obtemos

(4) $\dfrac{BD}{AD} = \dfrac{CE}{AE}$.

Adicionando 1 a ambos os membros da equação (4), obtemos

(5) $\dfrac{BD + AD}{AD} = \dfrac{CE + AE}{AE}$, ou $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE}$,

como queríamos demonstrar.

O recíproco do Teorema Fundamental sobre Proporcionalidade é muito fácil de demonstrar.

(MOISE e DOWRS, 1971: 307-308)

Nas demonstrações apresentadas acima, retirada de famosos livros didáticos voltados para o ensino superior, e outros utilizados como leitura complementar para o Ensino Médio, percebem-se três maneiras distintas de provar o teorema de Thales. Na demonstração apresentada no livro de Niven (1985), é importante destacar a não utilização de conceito de comensurabilidade de segmentos. Ele conduz a demonstração por meio de definições de número racional e irracional, utilizando a representação decimal.

[22] Se dois triângulos têm a mesma altura h, então a razão entre suas áreas é igual a razão entre suas bases (MOISE, 1971: 281)

No texto de Lima (2004), o autor também não utiliza conceitos envolvendo comensurabilidade de segmentos. Ele emprega, para a demonstração, resultados como constante de proporcionalidade, grandezas proporcionais, entre outros.

Na última demonstração apresentada, Moise e Dowrs (1971) também não utilizam conceitos envolvendo comensurabilidade de segmentos, porém possibilita ao leitor uma prova bastante semelhante à que podemos encontrar no livro VI dos “Os Elementos” de Euclides, utilizando a comparação entre áreas.

É pertinente observar que cada autor teve um objetivo ao propor essas demonstrações, em que o teorema não estava relacionado diretamente com o conteúdo da disciplina de Geometria. Niven (1985), por exemplo, demonstra-o dentro do estudo com os números reais.

Desse modo, no estudo do teorema de Thales, encontramos outras formas de demonstração que não trabalham diretamente com a comensurabilidade de segmentos, de modo que possibilite caminhos diferentes para a abordagem do teorema em vários níveis de ensino, cabendo ao professor escolher os conceitos compatíveis com seus objetivos.

CAPÍTULO 4

ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA

Este capítulo é voltado para a análise dos livros didáticos de Matemática, selecionados entre os que circularam na última metade do século XIX e no século XX, particularmente, no que se refere ao tratamento dado ao teorema de Thales, buscando subsídios que evidenciem a abordagem da questão da comensurabilidade. A escolha dos documentos foi exposta no capítulo um, com justificativa dos critérios utilizados na seleção.

Assim, a análise está organizada em três momentos: *Descrição da obra*, *Análise do conteúdo específico* e *Conclusões*. Na *Descrição da obra*, focalizamos a importância da obra escolhida e do autor, dados biográficos (obra e autor), estrutura, abordagem dos conteúdos e exercícios. A *Análise do conteúdo específico* é o momento em que acontece a análise propriamente dita do conteúdo "teorema de Thales". E nas *Conclusões* fazemos uma síntese do conteúdo analisado, expondo nossas críticas e concepções.

Para facilitar a organização deste capítulo, a ordem de exposição dos livros didáticos analisados será cronológica, de acordo com o ano de edição das obras.

4.1. Obra L1: Elementos de Geometria e Trigonometria Rectilínea

Descrição da obra

O livro *Elementos de Geometria e Trigonometria Rectilínea*, escrito por Cristiano Benedito Ottoni[1], "personagem fundamental para a organização e estruturação da Matemática escolar no Brasil, durante quase meio século" (VALENTE, 2002: 132), é a compilação do livro de A. J. H. Vincent[2], *Cours de Géométrie Élémentaire*, que, na época, constituía um excelente tratado de geometria[3].

As observações que Valente (2002) faz, comparando a compilação de Ottoni e a obra original de Vincent, mostra-nos as várias modificações ocorridas:

> A análise interna da compilação de Ottoni vai-nos mostrar que foram retirados da G*eometria Plana* de Vincent capítulos que incluíam construções geométricas, dois apêndices que incluíam as cônicas (elipse, hipérbole, parábola). Na *Geometria Espacial*, Ottoni retirou o Capítulo que tratava de princípios da geometria descritiva (VALENTE, 2002: 149).

Com isso, "seus textos passarão a ser a referência da Matemática escolar no Brasil, durante bastante tempo. As compilações que abordavam a aritmética, geometria, álgebra e a trigonometria são adotadas em quase todos os estabelecimentos de ensino" (VALENTE, 2002: 146). Esse grande sucesso era fruto das ferramentas utilizadas por Ottoni, que garantiam ser escolares e didático-pedagógicas, tomando como objetivo central a construção de texto para o ensino. Uma prova disso é a utilização desses manuais didáticos no Colégio Pedro II, em que todos os livros de Ottoni foram adotados em um certo período. O livro de

---

[1] Cristiano Benedito Ottoni (1811-1896) foi professor de Matemática, Álgebra, Trigonometria e Geometria da Academia da Marinha, de 1837 a 1855. Foi nomeado lente Catedrático em 1844. A partir de 1855 desligou-se da sala de aula, porém continuou seu trabalho no ensino, publicando compilações de Livros Didáticos. Ottoni, paralelamente a tudo isso, desde 1834 estava envolvido com a política, ocupando várias cadeiras no parlamento, tornando-se, no final, Conselheiro e Senador. Foi o primeiro diretor da estrada de ferro D. Pedro II. Publicou, além de *Elementos de Geometria*, outros livros como *Elementos de Álgebra*, *Elementos de Trigonometria* e *Elementos de Aritmética*, e teve alguns livros adotados no Colégio Pedro II por mais de trinta anos.

[2] Alexandre-Joseph-Hidulph Vincent era matemático e erudito francês. Escreveu diversos livros interessantes sobre história das Matemáticas gregas. Foi professor de Matemática no Lycée Saint-Louis em Paris.

[3] O fato de Ottoni ter escolhido o livro de Vincent para compilar, explica-se por ser, na França, um livro bastante usado nas escolas técnico-militares; portanto, são ótimas referências.O livro de Vincent mistura a produção Matemática em si com o processo de construção dos elementos matemáticos, conteúdos da Matemática escolar (VALENTE, 2002).

geometria permaneceu, por mais de 30 anos, como compêndio indicado para uso no colégio, sendo o livro de vida mais longa dentre os demais da coleção do autor. É importante ressaltar que Ottoni foi o primeiro autor de livros didáticos de aceitação e adoção nacional.

As obras de Ottoni seguem uma estruturação clássica, ou seja, apresentação da teoria, seguida de exemplos numéricos. Não há exemplos propostos para o aluno. Esse fato só mudou com a chegada da produção escolar de livros didáticos, ocorrida no final do século XIX.

O livro escolhido para a análise teve a primeira edição em 1853; porém, para este estudo, foi utilizada a 10ª edição, datada de 1904. A obra é dividida em duas partes: a primeira que aborda o estudo da Geometria, sendo dedicadas 276 páginas a ela; e a segunda que aborda o estudo da Trigonometria, numa extensão de 69 páginas. É de nosso interesse apenas o estudo da Geometria, pois constitui o nosso objeto de estudo. A parte referente à Geometria apresenta-se estruturada em quatro livros (unidades), de maneira que cada um é divido em dois capítulos e, estes, em parágrafos. Os dois primeiros livros enfocam a Geometria Plana e os dois últimos, a Geometria no Espaço ou Espacial.

Em L1, o autor, na introdução de seu livro, mostra que “os obcjetos de que trata a Geometria, ou sejam figuras ou extensão mensurável, podem existir todos em um plano, ou ocupar no espaço posições quaesquer: daqui vem a divisão da sciencia em duas partes: GEOMETRIA PLANA e GEOMETRIA NO ESPAÇO” (OTTONI, 1904: 15), o que reflete a forma com que o autor concebe a geometria. Complementando a proposta, o autor apresenta na introdução, noções preliminares, como definições de espaço finito e infinito, superfície, linha, ponto, volume, área, entre outros.

No livro de Ottoni podemos verificar seu estilo euclidiano, ainda influenciado por autores como Legendre e Lacroix, pois as obras deles tinham caráter de referência para quem quer que fosse escrever livros didáticos. Silva (2000) descreve que:

> O estilo do autor é ainda euclidiano – colocando uma ênfase forte no método dedutivo, sem qualquer apelo à intuição, nem mostrando a relação da Geometria com o cotidiano, sem exercícios propostos ou resolvidos, sem ilustrações. Basicamente, em cada capítulo começa por definições ou axiomas, seguindo-se os teoremas e suas demonstrações. Este livro-texto, que segue o estilo de Legendre, serviu de modelo para outros autores que foram surgindo no decorrer do século (SILVA, 2000: 148).

É importante ressaltar que são poucos os exemplos numéricos ou exemplos que fornecem aos alunos o conhecimento da utilidade prática da geometria, apesar do autor enfatizar a extensiva utilidade da geometria em diversos campos aplicáveis como, por exemplo, "(...) à indústria e às artes, intervindo nas modificações pelas quaes a mão do homem faz passar os productos da natureza, presta igualmente a astronomia, a navegação, a geografia e a outras sciencias um auxilio poderoso e indispensável" (OTTONI, 1904, 16).

No decorrer da obra percebemos vários problemas intercalados entre conteúdos que focalizam, principalmente, problemas teóricos e de construção. Outro detalhe mencionado por Silva (2000), e verificamos na obra, é a ausência de exercício proposto ao aluno, característica de vários livros do século XIX.

Segue, na tabela abaixo, uma síntese da estrutura do L1.

TABELA II: SÍNTESE DO LIVRO *ELEMENTOS DE GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA RECTILÍNEA* DE OTTONI

LIVROS (UNIDADES)	CONTEÚDO
Introdução	Noções preliminares
Livro Primeiro - Das Figuras planas	Teorias das perpendiculares e obliquas, teorias das paralelas, propriedades dos triângulos, quadriláteros e suas variedades, polígonos, circunferência e suas interseção com recta, cordas, secantes e tangentes, medida dos ângulos, ângulos excêntricos, propriedades dos polígonos inscritos e circunscritos, e círculos secantes e tangentes uns a respeito de outros.
Livro Segundo - Da extensão em um plano	Linhas proporcionais, figuras semelhantes, outros teoremas e propriedades dos triângulos, avaliação e comparação das áreas, linhas proporcionais consideradas nos círculos, lados e áreas dos polígonos regulares, e medida da circunferência e da área do círculo.
Livro Terceiro - Das figuras consideradas no espaço	Noções preliminares, rectas e planos perpendiculares e oblíquos entre si, rectas e planos paralelos, ângulos polyedros, e polyedros convexos, cilindro reto, cone reto e esphera.
Livro Quarto - Da extensão considerada no espaço	Semelhança dos polyedros, áreas e volumes dos poliedros, área e volume de cilindro, pirâmide, cônica e esphera

Análise do conteúdo específico

O conteúdo analisado encontra-se no parágrafo, "Das linhas proporcionais", situado no livro segundo, "Da extensão em um plano", páginas 117 a 125. Nessa seção o autor expõe três teoremas que servem de base para a seção seguinte "Das figuras semelhantes". Vejamos o 1º teorema, (p. 117).

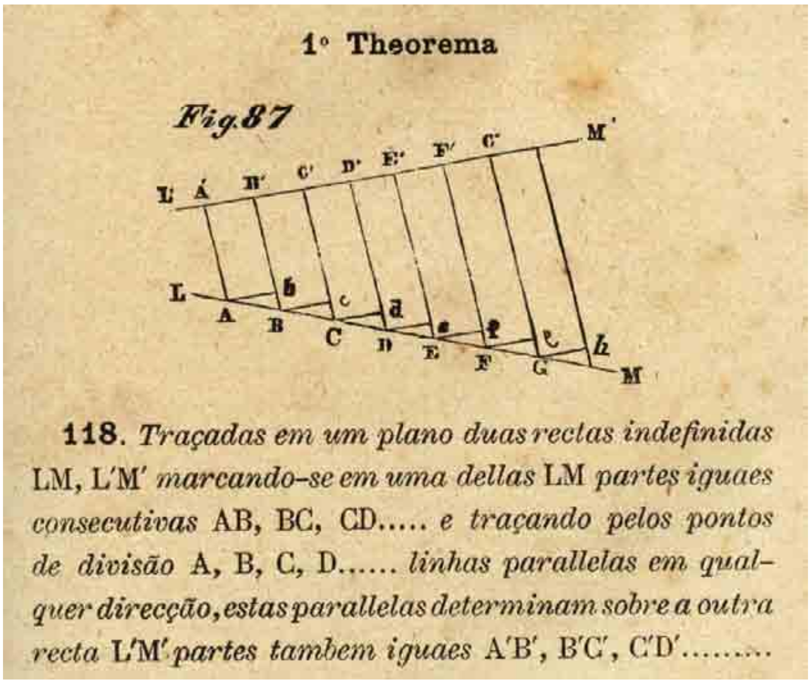

1º Theorema

Fig.87

118. *Traçadas em um plano duas rectas indefinidas* LM, L'M' *marcando-se em uma dellas* LM *partes iguaes consecutivas* AB, BC, CD..... *e traçando pelos pontos de divisão* A, B, C, D...... *linhas parallelas em qualquer direcção, estas parallelas determinam sobre a outra recta* L'M' *partes tambem iguaes* A'B', B'C', C'D'.........

Figura 13

Demonstração[4]
Pelos pontos A, B, C... tracem-se as rectas Ab, Bc, Cd... todas parallelas a L'M': os triângulos ABb, BCc, CDd... são todos iguaes por terem um lado igual AB=BC=CD etc., adjacente a ângulos iguaes a saber: BAb=CBc=DCd=... e ABb=BCc=CDd=... por serem ângulos correspondentes. Logo Ab=Bc=Dc, e por conseqüência A'B'=B'C'=C'B'=... (n. 65[5]) (OTTONI, 1904: 117)

O teorema acima apresenta alguns conceitos que, apesar de não trabalhado na introdução da seção, permeiam todo o processo da demonstração. É o caso de algumas propriedades do paralelismo de retas (assunto estudado no parágrafo dois, do livro primeiro, intitulado "Teoria das parallelas"). Na demonstração utilizam-se conceitos de congruência de triângulos, embora use o termo "todos iguais" para expressar a congruência dos triângulos ABb, BCc, CDd, ... Nesse teorema obtém-se um resultado que servirá como suporte para demonstração do teorema seguinte.

Ao analisar essa obra não encontramos, explicitamente, o título "teorema de Thales"; porém, identificamos o segundo teorema como o correspondente ao teorema hoje apresentado na maioria dos livros didáticos: "Se um feixe de paralelas é cortado por duas transversais, então as medidas dos segmentos correspondentes, que estão sobre a reta são diretamente proporcionais".

4 Fizemos algumas alterações relacionadas à notação de segmentos.
5 Em todo o parallelogrammo ABCD são iguaes os lados oppostos AB=CD e AD=BC (OTTONI, 1904: 65).

No enunciado proposto por Ottoni é estudado um trapézio[6] qualquer ABCD com uma reta EF paralela às bases. Se prolongarmos indefinidamente os lados não paralelos, teríamos duas transversais, sendo as bases retas paralelas, concluímos que se trata do atual teorema denominado por "teorema de Thales".

A concepção de grandeza geométrica é trabalhada na forma de comparação de dois segmentos, para o caso comensurável, tomando-se um deles como unidade inicial e o outro, aquele que se deseja medir. Para o caso em que os segmentos são incomensuráveis, trabalha-se com aproximações sucessivas de "números comensuráveis[7]". Essa noção está exporta na seção 2, "medida de ângulos," encontrada no livro primeiro, capítulo segundo. Vamos nos limitar às proposições e questões preliminares sobre o assunto (seções 89-91).

Ao introduzir essa seção o autor adverte o leitor dizendo que "este paragrapho pode parecer uma antecipação de matérias do segundo livro, ao qual pertence a avaliação ou medição das grandezas geométricas contidas nas figuras planas" (OTTONI, 1940: 86).

Assim, a seção 89 aborda o conceito de segmentos comensuráveis, utilizando-os na demonstração do segundo teorema. Vejamos como está trabalhado, no livro, o conceito de comensurabilidade:

> **89.** *Determinar a medida commum de duas linhas rectas, e a relação numérica entre ellas.*
> **1º.** Para achar a medida commum:
> Applique-se (por meio de um compasso) o *comprimento da menor recta sobre a do maior quantas vezes nella se contiver.*
> Se não ficar novo resto, a menor linha é a medida commum. Se o houver:
> *Applique-se o comprimento do resto sobre o da linha menor quantas vezes for possível.*
> Se não ficar novo resto, será o primeiro a medida comum; no caso contrário:
> *Applique-se o 2º resto sobre o 1º, o 3º sobre o 2º e assim se continue até chegar a um resto que se contenha no procedente, número exacto de vezes.* O último resto é a medida commum.
> **2º.** Querendo também achar a relação numérica das linhas dadas será preciso, ao passo que se emprega o processo graphico precedente, representar os resultados mumericamente; esta segunda parte da resolução do problema servirá também de demonstração à primeira.
> Para fixar as idéias, sejam, as rectas AB, CD

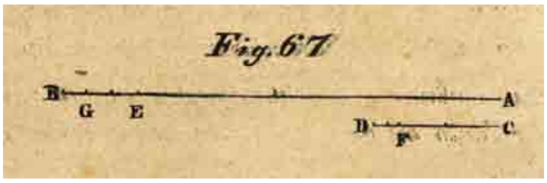


Figura 14

---

[6] "*Trapézio, quando tem dous lados Parallelos*" (OTTONI, 1904: 63).

[7] O autor refere-se a números comensuráveis, a relação numérica entre duas grandezas comensuráveis.

> E supponha-se que a menor CD coube 3 vezes na maior AB com o resto EB; então
>
> $$AB = 3CD + DF$$
>
> Cabendo o resto EB duas vezes em CD com o resto DF,
>
> $$CD = 2EB + BG$$
>
> O 2º resto DF applicado sobre o 1º EB cabe 2 vezes e resta BG; logo
>
> $$EB = 2DF + BG$$
>
> Finalmente, cabendo BG 3 vezes exactas em DF,
>
> $$DF = 3BG$$
>
> Este último valor substituído nos precedentes produz
>
> $$EB = 2 \times 3BG + BG = 7BG$$
> $$CD = 2 \times 7BG + 3BG = 17BG$$
> $$AB = 3 \times 17BG + 7BG = 58BG$$
>
> Logo o ultimo resto BG cabe em AB 58 vezes, em CD 17 vezes exactamente; logo BG é medida commum das duas linhas. A relação numérica é
>
> $$\frac{AB}{CD} = \frac{58BG}{17BG} = \frac{58}{17}$$
>
> A perfeita analogia entre este processo e o do *maior divisor commum* em Arithmetica prova que o resultado achado é a *maior medida commum* as duas linhas.
>
> **90.** *Determinar a medida commum a dous arcos do mesmo circulo ou de círculos iguaes e a sua relação numérica*
>
> Será o processo exactamente o mesmo do número antecedente, uma vez que se possa applicar a grandeza de um arco sobre a de outro. Ora, isto se consegue tomando com o compasso o comprimento da corda, porque cordas iguaes determinam iguaes arcos (n. 86[8]). É portanto escusado repetir a operação que não differe da precedente. (OTTONI, 1904: 86 a 88)

Contudo, poderão ocorrer situações nas quais nem sempre é possível caber, à unidade inicial, um número inteiro de vezes. Portanto, "quando tal condição não pode ser satisfeita, as grandezas cuja medida commum se procura (rectas, arcos, ou outras) se dizem incommensuraveis entre si" (OTTONI, 1904: 88). Esse assunto é abordado no parágrafo 91, "Reflexões sobre as linhas (e em geral quaesquer grandezas) entre si incomensuráveis":

> Quando se dá esta circumstancia, é impossível determinar com rigorosa exactidão a *relação numerica* entre as duas linhas; mas esta relação pode ser approximada indefinidamente, seguindo-se o mesmo processo até onde convier. Na Arithmetica vimos exemplos de incommensuraveis como $\sqrt{2}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[7]{10}$ (qualquer destas raízes é incommensuravel *com a unidade)* números que todavia se determinam com a approximação que se faz necessária em cada caso particular.
>
> Em muitas proposições de Geometria se affirma que quatro quantidades incommensuraveis duas a duas são entre si proporcionaes, isto é, que *a relação numérica entre duas grandezas incomensuráveis é igual à relação numérica entre outras duas grandezas também incomensuráveis.*
>
> Para bem compreender as proposições desse gênero, é preciso lembrar que a Arithmética e a Álgebra offerecem methotos para determinar approximadamente um número ou uma relação incommensuravel: e que as

[8] No mesmo circulo ou em circulos iguaes: 1º) Sendo iquaes dous arcos, são iguaes as cordas correspondentes. 2º) Sendo desiguaes, ao arco maior corresponde maior corda (OTTONI, 1904: 82-83)

aproximações sucessivas constituem uma serie de números commensuraveis $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \frac{m''}{n''}$,... cada um dos quaes é mais próximo, do que o antecendente, do valor que se procura determinar. A serie de números $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \frac{m''}{n''}$,... tem por *limite* o incommensuravel em questão.
Ora, não podemos ajuizar de uma grandeza incommensuravel senão pelas approximações successivas de que é ella o limite que *duas grandezas A e B incommensuráveis são proporcionaes as outras duas A'e B' da mesma natureza,* quando se pode provar que a mesma serie de valores $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \frac{m''}{n''}$,... representar ao mesmo tempo e com a mesma approximação em cada termo tanto a relação numérica $\frac{A}{B}$ como a outra $\frac{A'}{B'}$ (OTTONI, 1904: 89-90).

Definidos os conceitos de comensurabilidade de grandezas, observe a prova do 2º teorema, considerado por nós como teorema de Thales:

119. *Em qualquer trapézio ABDC toda a recta EF parallela as duas bases, divide os lados em partes directamente proporcionaes, isto é, AE:EB::CF:FD.*

DEMONSTRAÇÂO
No **1º caso** o theorema é corollario do precedente.

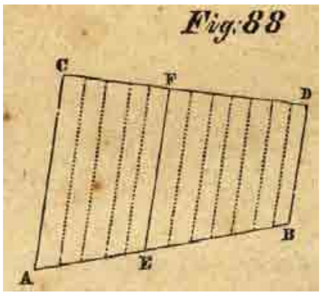


Figura 15

Seja AE: EB:: 5:7; então dividido AE em cinco partes iguaes, EB conterá sete dellas, e traçando pelos pontos de divisão parallelas a EF, ficará também CF dividido em cinco e FD em sete partes todas iguaes (118); logo também CF:FD::5:7, e portanto AE:EB::CF:FD.

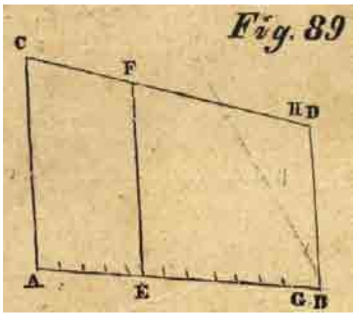


Figura 16

2º caso. Sendo AE, EB incomensuráveis, pode-se provar que toda a fracção que representa aproximadamente a razão AE:EB exprimirá, com o mesmo grão de approximação, a razão CE:FD. Com effeito, seja, por exemplo, a fracção $\frac{5}{8}$ a que exprime proximadamente o valor da razão AE:EB; isto significa que, dividido AE em cindo partes iquaes, EB conterá oito dellas e um resto GB menor do que uma; sendo, pois, o termo da approximação $\frac{1}{8}$ de EB. Mas traçando pelos pontos de divisão parallelas a EF, também CF conterá cinco partes iguaes e FD oito das mesmas com um resto HD menor que uma dellas, sendo, portanto, a razão approximada até $\frac{1}{8}$FD. Logo, $\frac{5}{8}$ exprime com a mesma approximação a razão AE:EB e a razão CF:FD. E como o mesmo se diz de outra qualquer fracção, podemos concluir.

AE:EB::CF:FD

Ottoni menciona, no início da demonstração do 1º caso, que se trata de um caso particular do teorema, em que os segmentos são comensuráveis. É bem pertinente à demonstração, tomado como base sua definição de segmentos comensuráveis. Ele tem por hipótese que AE:EB::5:7 e chega a CF:FD::5:7, concluindo, portanto, que AE:EB::CF:FD estão na mesma proporção. Para o 2º caso, verificamos que ele se utiliza de aproximações, isto é, toma a fração que exprime o mesmo grau de aproximação de uma razão. Observe-se a relação feita entre fração e razão, já que o autor usa conceitos da aritmética para trabalhar a incomensurabilidade de segmentos. Para ilustrar sua idéia coloca um exemplo. No final, o autor remete o leitor, as noções de incomensurabilidade, na seção 91.

Analisamos também os problemas resolvidos por ele, já que, em sua obra, não são propostos exercícios para o aluno. Nessa seção são sugeridos três problemas, todos referentes à construção. Vejam os enunciados:

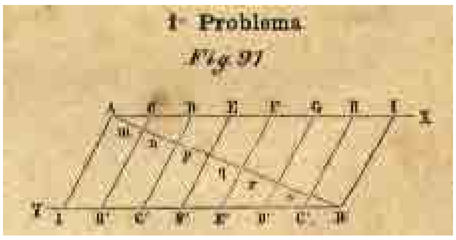


Figura 17

123. *Dividir uma linha dada AB em qualquer numero de partes iguaes. Vejam em 7 partes.*

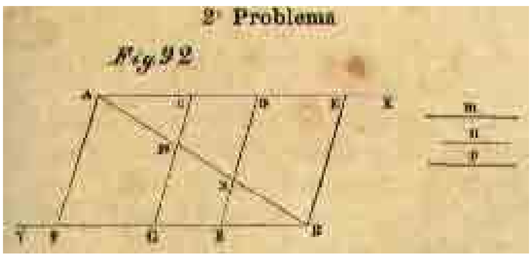


Figura 18

124. *Dividir uma linha dada AB em partes proporcionaes a linhas também dadas. Por exemplo, em 3 partes proporcionaes a m, n, p.*

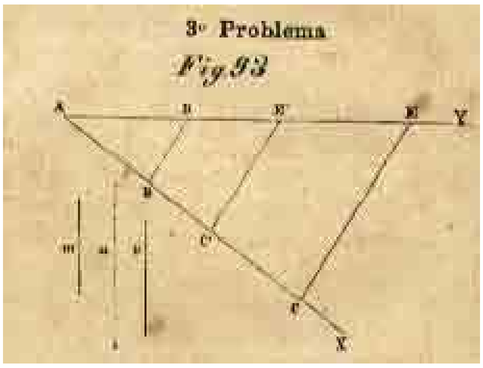


Figura 19

125. *Construir uma quarta proporcional a três rectas dadas m, n, p, isto é, achar uma linha que seja o 4º termo da proporção m:n::p:x.*

(OTTONI, 1904: 122-125)

Verificamos que os três problemas tratam de casos que envolvem segmentos comensuráveis.

Conclusões

A análise do livro L1 mostrou que o tema, embora não nomeado teorema de Thales, trabalha a concepção de grandezas geométricas sob a forma de comparação de dois segmentos com o uso de régua e compasso para o caso em que é possível obter uma medida comum, ou seja, comensurável. Pede-se, também, para que se determine a relação numérica entre essas medidas. Para o caso incomensurável, o autor observa que é impossível determinar com exatidão a relação numérica entre dois segmentos, porém se apropria de outros métodos para determinar, aproximadamente, um número ou uma relação incomensurável, usados na aritmética e na álgebra para encontrar essa relação. Assim, para a demonstração ele remete a esses métodos, provando o caso em que os segmentos são comensuráveis e incomensuráveis.

Embora se note, no livro, a falta de exercícios, características dos livros didáticos desse período, o autor tem a preocupação de trabalhar com problemas resolvidos, como atividades que englobam construção. Contudo, esses exercícios envolvem somente o caso em que os segmentos são comensuráveis.

4.2. Obra L2: Elementos de Geometria

Descrição da obra

A sigla F.I.C. que significa Frères de l'Instruction Chrétienne, refere-se a uma Congregação Cristã espalhada por toda França, originária da Congregação dos Frères Ploërmel, que organizou grandes obras didáticas nas várias áreas do conhecimento. Essas obras são escritas por frades-professores, com o objetivo de atender, na França, aos programas do ensino primário, secundário e à preparação ao exame final dos estudos secundários. Segundo Valente (2003)

> Os manuais *por F.I.C.* constituíram, em seu tempo, a máxima interferência no cotidiano escolar – sob a forma de livros didáticos – na organização dos conteúdos de ensino das Matemáticas, pensando em suas partes (aritmética, álgebra, geometria, trigonometria etc.). O texto desses manuais tem como marca didática fundamental a grande quantidade de exercícios propostos aos alunos. Essa inovação, vinda do século XIX, através dos manuais das congregações católicas francesas, sobrepõe à forma antiga de escrita dos livros de Matemática sem exercícios e organizados sob a forma de lições, onde o exemplo resolvido pelo mestre deveria ser copiado e sabido de cor (VALENTE, 2003, 50).

Aqui no Brasil os livros da F.I.C. surgiram no final do século XIX, traduzidos e adaptados por Eugênio de Barro Raja Gabaglia (1862-1919)[9]. Os didáticos da F.I.C. são também adotados para os cursos do antigo primário, ginasial e colegial (Clássico e Científico). Esses livros já eram escritos visando ao uso pelos alunos, incluíam exercícios gradativos, exercícios com resposta final, sem resposta, resumos etc. (VALENTE, 2000).

Muitos desses livros foram utilizados nas escolas brasileiras, como por exemplo, no Colégio Pedro II, a partir de 1895. É o caso das obras *Elementos de Geometria e Elementos de Trigonometria,* que ficaram como obras indicadas pelo Colégio Pedro II, em seu programa de ensino, pelo menos até 1930; porém, o livro *Elementos de Geometria* chegou a ser reeditado até meados da década de 1950, chegando à 14ª edição, de 1954[10], mostrando sua aceitação no campo educacional.

---

[9] Eugênio de Barro Raja Gabaglia formou-se em Engenharia Civil, com o grau de bacharel em Ciências Físicas e Matemáticas pela Escola Politécnica, foi professor do colégio Pedro II, Escola Naval e Escola Politécnica, lecionando várias disciplinas como Mecânica, Astronomia, Geografia, História, História Naval e principalmente Matemática. Foi diretor do Colégio Pedro II de 1913 a 1914. Ficou muito conhecido pela tradução e adaptação dos livros da F.I.C.. (Mais detalhes em VALENTE, 2002).

[10] Ver Valente, 1999, p. 185.

Os manuais escolares *por F.I.C.* traziam uma nova forma na escrita de livros didáticos de Matemática, numa tentativa de se organizar o ensino tradicional da época.

Assim, os livros têm uma característica particular em relação aos manuais escolares de Matemática utilizados até então: relatam anos e anos de experiência pedagógica acumulada no ensino das Matemáticas em escolas. Até então, a maioria dos livros de Matemática originavam-se dos colégios[11], sobretudo técnico-militares (VALENTE, 2002: 176-177).

O livro escolhido para a análise, *Elementos de Geometria*, datado de 1923, 12ª edição, está estruturado em sete livros (unidades), um apêndice composto de quatro partes e um tópico problemas numéricos. Cada livro e apêndice é dividido em capítulos e, estes, em parágrafos. A obra completa tem 577 páginas.

Essa obra é, basicamente, igual (organização e escrita) à obra de Ph André, *Éléments de Géometrie,* editado em 1869 ou 1870, pela Librarie Classique de F.-E. André-Guédon. Valente (2002) comenta que:

> A diferença entre os dois livros fica por conta dos anexos. Em André, o capitulo final, anexo, é das Matemáticas aplicadas, ou seja, *noções de agrimensura e nivelamento*; na tradução para o português o anexo tem quatro partes, que incluem: polígonos estrelados, teorema de Gudin, método de aproximativos etc. (VALENTE, 2002: 188)

No início do livro, na introdução encontram-se definições preliminares, como as: geometria “é a sciencia da extensão”, sólidos, comprimento, área, linha reta, linha poligonal, plano, figura, axioma, teorema, lema etc.

A obra analisada envolve uma geometria axiomática, concentrada em muitos teoremas e proposições. Encontra-se, no final de cada livro (capítulo), uma vasta seção de exercícios divididos em tópicos intitulados teoremas, lugares geométricos e problemas, que são, por sua vez, subdivididos por assuntos centrais do capítulo. Nessa edição não são apresentadas, ainda, respostas para os exercícios.

[11] Os colégios, a princípio, eram como internatos das universidades. A pedagogia professada era a pedagogia do “dizer sobre o fazer”. Os estudantes aprendem o conteúdo tomando nota do procedimento. Dentro do que se conhece hoje, talvez poderíamos nos apropriar do método de ensino dos colégios se observamos a forma com que os primeiros manuais de Matemática foram escritos. Valente (2002: 174-175) distingüe a escola do colégio, pois, segundo ele, (...) “à escola liga-se o *exercício*. Diferente da *lição*, que era a ordem do saber do mestre posta ao aluno, o *exercício* é a autorização que a escola dá ao aluno para mostrar suas dificuldades, seus esforços e seus fracassos. O exercício expõe, antes do resultado, o momento da aprendizagem”. Daí compreende-se que o início das discussões didáticas na Matemática exija a construção de textos que incluem muitos exercícios para os alunos.

É importante ressaltar que o livro traz, no final, um capítulo sobre "problemas numéricos" em que o autor faz uma recapitulação dos livros (capítulos) e explica que "em geometria, os problemas numéricos não são mais do que simples aplicações do cálculo aritmético a fórmulas conhecidas" (F.I.C., 1923: 419).

Em uma visão geral, percebemos que as características dos livros editados por F.I.C. são bem diferenciadas dos livros até então colocados no mercado, no início do século XX. As edições brasileiras são mais acessíveis, favorecendo, assim, cada vez mais sua utilização nas escolas com conseqüente aumento do número de reedições.

Segue, na tabela abaixo, uma síntese da estrutura de L2.

TABELA III: SÍNTESE DO LIVRO *ELEMENTOS DE GEOMETRIA* POR F.I.C.

LIVROS (UNIDADES)	CONTEÚDO
Introdução	Noções Preliminares
Livro I – Generalidades sobre a recta e os ângulos	Ângulos, perpendiculares e obliquas, triângulos, parallelas, polygonos e exercícios sobre o Livro I
Livro II – Circunferência	Arcos e cordas, Tangentes, Medidas dos ângulos, polygonos regulares e construcções gráphicas e exercícios sobre o Livro II
Livro III – Figuras Semelhantes	Linhas proporcionais, Polygonos semelhantes, relações numéricas das linhas nos triângulos, no círculo, nos polygonos, problemas sobre figuras semelhantes e exercícios sobre o Livro III
Livro IV – Superfícies	Avaliação das superfícies, Relações entre as superfícies, problemas sobre as superfícies e exercícios sobre o Livro IV
Livro V – Generalidades sobre as rectas e os planos	Rectas e planos perpendiculares e paralelos, ângulos diedros, projeção de um figura, ângulos sólidos ou polyedros e exercícios sobre o Livro V
Livro VI – Polyedros	Prisma, pyrâmide, poliedros semelhantes, simetria e exercícios sobre o Livro VI
Livro VII – Os três corpos redondos	Cylindro, cone, esphera, superfície e volume da esphera, figuras esféricas e exercícios sobre o Livro VII
Livro VIII – As Curvas usuais	Ellipse, traçado das tangentes à elipse, elipse considerada como projeção do círculo, Hipérbole, Assintoda da hipérbole, traçado das tangentes à hipérbole, parábola, traçado das tangentes à parábola, área da parábola.
Apêndice – Parte Primeira	Polygonos estrallados, dos sinaes em geometria, transversaes, razão anharmônica divisão harmônica, pólo e polar, figuras homothéticas e inversas e eixos radicaes
Apêndice – Parte Segunda	Secções cônicas, superfícies do segundo grau, helicóides e curvas planas diversas
Apêndice – Parte Terceira	Teorema de Gudin, teoremas geraes sobre as superfícies e os volumes, corpos limitados por um plano reverso, méthodo sommatório e fórmulas de Simpson
Apêndice – Parte Quarta	Aplicações – Méthodos aproximativos, quadratura e cubatura, cultura das madeiras, volume dos tonéis, abóbadas, pontes, diversas, pontes pênseis ou suspensas, estradas e canais, reflexão da luz, do calor, do som, curvas e superfícies diversas

Problemas Numéricos	Indicações gerais, exercícios sobre o livro III, IV, VI, VII, fórmulas da geometria plana, no espaço, sobre o livro VIII e do apêndice, e tábuas.

Análise do conteúdo específico

O conteúdo analisado, teorema de Thales, pode ser encontrado no Livro II, “Figuras Semelhantes”, no parágrafo I, “Linhas Proporcionais”*,* páginas 86 a 92. Iniciaremos o estudo verificando o conceito de comensurabilidades de segmentos, utilizados no estudo do teorema. Esse assunto pode ser encontrado no Livro II, na seção relativa a problemas de construções gráficas. No problema 203, que pede para “achar a medida comum de duas linhas dadas*”,* o autor trata do conceito de segmentos comensuráveis. Vejamos como está exposto o problema 203:

> O systema é análogo ao que se emprega na Arithmetica para achar o Máximo commum divisor entre dois números dados: applica-se a pequena linha *a* sobre a grande *b* tantas vezes quanto for possível; o resto transporta-se sobre a pequena linha, o novo resto sobre o resto precedente; e assim por diante, até não se achar mais resto.

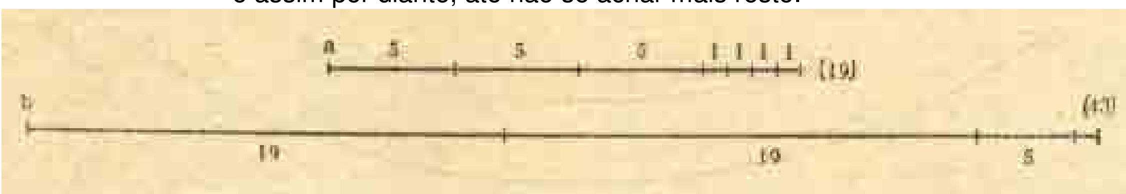


Fig. 150

Figura 20

> A ultima linha assim applicada é a medida commum procurada, Ella serve para estabelecer a razão que existe entre as duas linhas; por exemplo, no caso acima esta medida commum, que está marcada com o algarismo 1, contem-se 19 vezes na pequena linha *a*, e 43 vezes na grande *b*. Podemos pois dizes que *a* é os 19/43 de *b* (FIC, 1923: 69).

Em seguida vem uma observação referente a linhas incomensuráveis, como aquela a qual não é possível encontrar uma medida comum, remetendo-se ao exemplo da razão da diagonal para o lado do quadrado de medida um. A observação é apresentada com utilização, para construção, com régua e compasso, objetivo da seção de problemas de construção geométrica. Veja-se esta observação:

> **204. Observação**. *Linha incomensurável.* Por mais longe que se leve a operação, é possível que nunca se chegue a ter um resto que esteja contido exactamente no resto precedente; neste caso, as linhas são *incomensuráveis*, isto é, não têm medida commum. É o que há de acontecer procurando-se, por exemplo, a *razão da diagonal para o lado do quadrado.*
> Para ter a medida commum de AB e de AC, appliquemos, por exemplo, AB sobre AC, descrevendo do ponto A como centro, com AB como raio, um arco BE. A diagonal AC contém AE mais um resto EC que se deve aplicar

> sobre o lado do quadrado; para isso levantemos uma perpencicularEF à diagonal; as retas FB, FE são iguais entre si como tangentes traçadas do mesmo ponto (nº 191, I); demais o triângulo CEF é rectangulo isósceles, porque o ângulo C é igual a 45º; portanto
>
> CE = EF = FB
>
> Transportando FE de F para G, temos pois:
>
> BC = BG + GC, isto é BC = 2EC + GC
>
> Assim o lado do quadrado é igual a duas vezes i primeiro resto CE mais uma parte de CG, que se deve comparar com CE; ora, esta operação é análoga áquella que acabamos de fazer para comparar CE e BC. Acharemos pois que CE contém duas vezes CG mais um resto, e assim por diante; portanto *a diagonal e o lado do quadrado são linhas incomensuráveis.* (veja-se também nº 272) (FIC, 1923: 69-70)

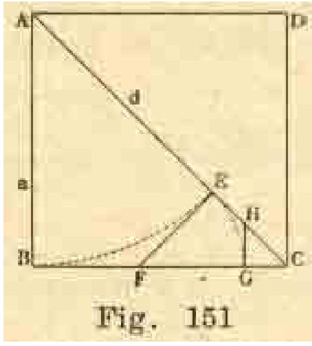


Figura 21

Expostos os conceitos de comensurabilidade de segmentos, os autores iniciam o Livro III tratando de Linhas Proporcionais, em que expõem conceitos de proporcionalidade de linhas, razão de duas linhas, meia proporcional, quarta proporcional e exemplos que comprovem esses conceitos. Contudo, apresentaremos alguns desses conceitos que consideramos importantes para a exibição do teorema de Thales. Vejamos os conceitos de proporcionalidade de linhas e razão de duas linhas:

> Duas *linhas* são *proporcionais* a duas outras linhas, quando a razão das duas primeiras é igual à razão das duas últimas.
>
> A *razão de duas linhas* é a razão dos números que exprimem os comprimentos dessas linhas, quando medidas pela mesma unidade (n. 203). (FIC, 1923, 86)

Observamos que na segunda definição, os autores remetem ao problema 203, que trata de encontrar uma medida, já mencionada anteriormente, comum de duas linhas dadas.

Antes de enunciarmos o teorema de Thales, veremos um teorema (n. 210), cujo resultado será utilizado:

> *As paralelas que determinam partes iguaes sobre uma secante dada, determinam também partes iguais sobre qualquer outra secante.*
>
> Sejam, AB, CD, EF, GH... parallelas que determinam sobre AG partes iguaes e seja BH uma secante qualquer.
>
> Tiremos parallelamente a BH as rectas AL, CM, EN; todas essas rectas são iguaes respectivamente aos segmentos BD, DF, FH, como sendo lados oppostos de parallelogrammos (n.100)[12]. Basta pois provar que

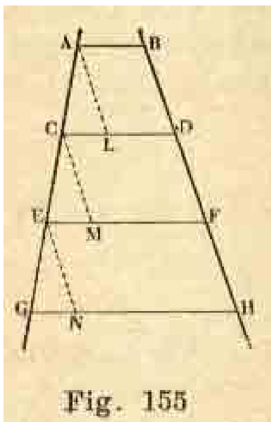


Figura 22

[12] Os lados oppostos d'um parallelogrammo são iguaes, assim como são também iguaes os ângulos oppostos (FIC, 1923: 27)

AL = CM = EN
Ora, os triângulos ACL, CEM, EGN são iguaes por terem um lado igual adjacente a ângulos respectivamente iguaes (n. 50)[13].
Por tanto AL = CM = EN
Por conseqüência BD = DF = FH
Logo...
(FIC, 1923: 88)

Essa prova é simples de ser verificada com uso de congruência de triângulos, como exposto pelos autores, em que o caso de congruência citada é L.A.A. (Lado – Ângulo – Lado).

O teorema 212 é o que chamamos de teorema de Thales[14], embora os autores não o nomeiem dessa forma[15].

Toda paralela a um lado de um triângulo divide na mesma razão os outros dois lados.
Seja ABC um triangulo qualquer, e seja DE uma parallela ao lado BC. Resta provar que

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$

Suponhamos primeiramente que os segmentos AD e DB tenham uma medida commum, a qual seja contida, por exemplo, 7 vezes em AD e 3 vezes em BD; teremos:

$$\frac{AD}{DB}=\frac{7}{3}$$

Se por todos os pontos de divisão de AB, tiram-se paralelas a BC, a reta AC fica dividida em 10 partes iguaes, das quaes 7 sobre AE e 3 sobre EC (n.210); $\frac{AE}{EC}=\frac{7}{3}$ por conseqüência $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ (FIC, 1923: 88-89)

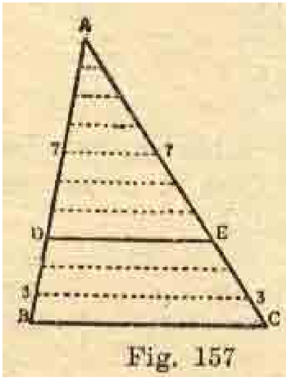


Figura 23

Na demonstração, os autores apresentam o caso em que os segmentos têm medidas comuns, isto é, são comensuráveis, tomando AD igual a 7 e DB com 3 unidades. Na conclusão enfatizam que, “como se pode repetir a demonstração, por menor que seja a medida comum entre AD e BD, o teorema é verdadeiro em todos os casos. – Logo toda a paralela a um lado...” (F.I.C., 1923: 89), generalizando o teorema. Assim, a demonstração do caso geral fica resumida a uma nota de rodapé: “No caso em que os segmentos AD e DB não tenham medida comum, explicar-se-á

[13] Dois triângulos são iguaes quando têm um lado igual adjacente a ângulos respectivamente iguaes (FIC, 1923: 12).
[14] No livro os autores nomeiam como teorema de Thales, um teorema ligado ao conteúdo de triângulos semelhantes: *Toda parallela a um lado dum triângulo determina um segundo triangulo semelhante ao primeiro* (FIC, 1923: 93).
[15] Ver observação feita na análise do livro *Elementos de Geometria e Trigonometria Rectilínea* de C. B. Ottoni, página 55.

a proposição como no caso dos ângulos (n. 144, nota)" (F.I.C., 1923: 89). Vale ressaltar que os conteúdos expostos nos livros didáticos envolvem opções didáticas, diretamente ligados ao curso a ele destinado.

A nota 144 refere-se ao teorema: "Dois ângulos quaisquer entre si com os arcos compreendidos entre seus lados, e descritos de seus vértices com o mesmo raio" (FIC, 1923: 48). Para o caso em que os arcos são incomensuráveis, os autores, apresentam a demonstração a seguir como uma nota de rodapé:

(*) Para demonstrar o theorema nos casos em que os arcos são *incommensuráveis*, transporta-se o pequeno ângulo DOE sobre o grande DOF, e supõe-se o arco DF dividido em um número qualquer *n* de partes iguaes. O ponto E se acha entre dois pontos de divisão, por exemplo, entre o *mº* e o ponto seguinte, marcado *m + 1*.
Temos por conseguinte:

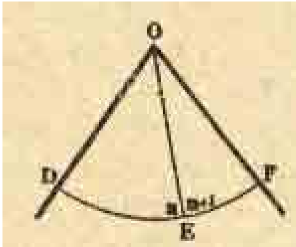


Figura 24

$$\frac{m}{n} < \frac{\text{arco DE}}{\text{arco DF}} < \frac{m+1}{n}$$

Se unirmos cada ponto de divisão ao ponto O, o ângulo DOE está dividido em *n* partes iguais, e o ângulo DOE é maior do que *m* desses ângulos parciais, e menor do que *m + 1* desses mesmos ângulos

Temos pois : $\frac{m}{n} < \frac{\text{ângulo DOE}}{\text{ângulo DOF}} < \frac{m+1}{n}$

Em ambos os casos, as razões extremas $\frac{m}{n}$ e $\frac{m+1}{n}$ ou $\frac{m}{n}+\frac{1}{n}$ diferem de 1/n, por conseguinte, se dividirmos DE em grande número de partes iguaes, a diferença 1/n podendo tornar-se tão pequena quanto se queira, tende para *zero*, e em todos os casos temos a proporção

$\frac{\text{ângulo DOE}}{\text{ângulo DOF}} = \frac{\text{arco DE}}{\text{arco DF}}$ (FIC, 1923: 49-50).

Em seguida ao teorema 212, vem os escholios[16], (n. 213), que, no número IV, mostra uma observação sobre o teorema:

212. Escholios I. Cada segmento pode ser comparado ao lado total, e a repartição proporcional operada por DE pode também ser expressa por cada uma das proporções seguintes:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \qquad \frac{DB}{AB} = \frac{EC}{AC}$$

II. Pela mudança de ordem dos meios, as três proporções acima tornam-se respectivamente:

$$\frac{AD}{AE} = \frac{BD}{EC} \qquad \frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} \qquad \frac{DB}{EC} = \frac{AB}{AC}$$

E estas proporções, tendo duas a duas uma razão commum, resumem-se em três razões iguaes.

[16] Escholio é uma observação (F.I.C., 1923: 3).

$$\frac{AD}{AE}=\frac{BD}{EC}=\frac{AB}{AC}$$

III. A parallelas DE pode ser tirada fora do triangulo, quer além da base, quer além do vértice (fig, 158). O teorema é sempre verdadeiro, e pode demonstrar-se como no caso acima.

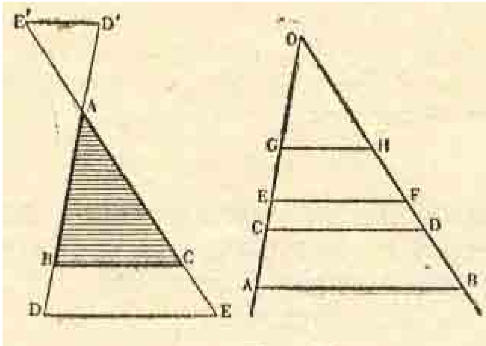


Figura 25

IV. *Se duas rectas quaesquer AO e OB são cortadas por uma serie de paralelas AB, CD, EF, GH, os segmentos da primeira recta estão todos na mesma razão para os segmentos correspondentes da segunda*. Porque pode escrever-se (n. 213, II):

$$\frac{OG}{OH}=\frac{GF}{HF}=\frac{OE}{OF}=\frac{EC}{FD}=\frac{OC}{OD}=\frac{CA}{DB}=\frac{OA}{OB}$$

ou $$\frac{OG}{OH}=\frac{GE}{HF}=\frac{EC}{FD}=\frac{CA}{DB}$$

(FIC, 1923: 89-90)

Encontramos, na seção *problemas sobre as figuras semelhantes* um problema considerado uma aplicação do teorema:

293. Dividir uma recta dada AB em partes proporcionaes a comprimentos dados m, n, r, ou a números dados, 12, 8, 10, por exemplo.

Tracemos uma recta AC fazendo com AB um ângulo qualquer; sobre essa recta AC tomemos consecutivamente os comprimentos dados m, n, r; tracemos CB, e depois parallelas a CB pelos diversos pontos de divisão. Os comprimentos m', n', r estão entre si como os comprimentos m, n, r (nº 213, IV).

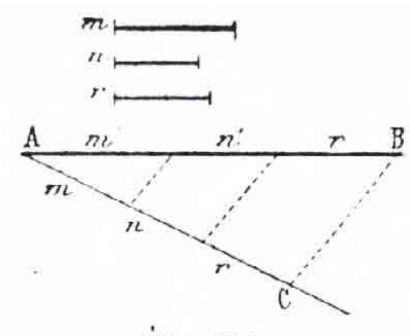


Figura 26

Se os dados são números, transporta-se sobre AC comprimentos proporcionaes e esses números, 12, 8, 10 milímetros por exemplo. (FIC, 1923: 126)

Nos exercícios não encontramos nenhum voltado para aplicação direta de resultado, porém muitos deles estão interligados a assuntos que necessitam do resultado. Seguem-se alguns exercícios na forma de teoremas:

317. Tiram-se paralelas AB, CD a uma das diagonais de um quadrilátero; provar que AC, BD cotam-se sobre a outra diagonal (FIC, 1923: 134).

412. Por um ponto dado, traçar uma reta que passe pelo ponto de concorrência de duas retas que não podem ser prolongadas (FIC, 1923: 143)

Conclusões

Ao analisar o livro L2 percebemos que o assunto teorema de Thales, embora não nomeado dessa forma, é apresentado como um teorema das linhas proporcionais. A compreensão de comensurabilidade de grandezas é estudada por meio de um problema de construções gráficas, situado no capítulo anterior. Os autores empregam um método utilizado na Aritmética para achar o Máximo Comum Divisor entre dois números dados. Essa analogia recai na comparação de dois segmentos, estabelecendo a razão existente entre duas linhas (segmentos). Para o caso em que os segmento são incomensuráveis, os autores admitem sua existência e citam o exemplo da diagonal para o lado do quadrado, e demonstram-no.

Na demonstração do teorema para o caso comensurável, embora os autores não utilizem esse termo, provam-no pela utilização de comparação entre medidas. O outro caso não é discutido, porém generalizam a demonstração, fazendo uma observação que se os segmentos não tiverem medida comum, esse fato pode ser explicado como no caso dos ângulos, no Livro II, parágrafo III, “medida dos ângulos”.

Não há exemplos sobre o assunto. Nos exercícios não encontramos aplicações diretas do resultado. Entretanto, na seção “problemas sobre figuras semelhantes”, verifica-se uma aplicação do teorema, com o uso de segmentos comensuráveis. Observamos, também, a utilização do resultado do teorema em outros teoremas, principalmente envolvendo semelhança.

4.3. Obra L3: Curso de Matemática

Descrição da obra

A coleção *Curso de Matemática,* de autoria dos professores Euclides Roxo (1890-1950)[17], Cecil Thiré, Júlio César de Mello e Souza[18], Editora Livraria Francisco Alves, desempenhou um importante papel no Movimento de Modernização do Ensino de Matemática no Brasil.

Criada entre a Reforma Francisco Campos e Reforma Capanema, a coleção *Curso de Matemática* veio substituir a tão famosa coleção *Curso de Matemática Elementar* de Euclides Roxo. Esses livros tinham "como finalidade a proposta de modernização do ensino no Brasil. A intenção principal era a da reestruturação da seqüência de conteúdos a ensinar, visando à fusão dos vários ramos (aritmética, álgebra, geometria) até então separados" (VALENTE, 2003: 79).

A coleção é organizada em cinco volumes, dos quais o livro do 1º ano não teve participação do autor Euclides Roxo. No livro do 2º ano ele participou como colaborador, conforme consta no prefácio que "(...) todos os novos exercícios são de autoria do nosso ilustre colega Prof. Euclides Roxo, que aparece, desse modo, como colaborador, na organização dos problemas e exercícios de aplicação" (ROXO et al., 1941: 01). O restante da coleção referente aos 3º, 4º e 5º anos participaram os três autores.

O livro do 2º ano, 9ª edição de 1941, é dividido em onze capítulos com 394 páginas; o do 3º ano, 4ª edição de 1941, tem vinte e quatro capítulos em 392 páginas; o do 4º ano, 6ª edição de 1942, traz vinte e seis capítulos em 406 páginas e o do 5º ano, 2ª edição de 1936, , traz vinte e três capítulos, totalizando 313 páginas.

---

[17] Euclides de Medeiros Guimarães Roxo (1890-1950) estudou no Colégio Pedro II e formou-se em engenharia em 1916 pela Escola Politécnica do Rio de Janeiro. Foi professor catedrático do Colégio Pedro II a partir de 1919 na cátedra de Aritmética, até então ocupada pelo falecido Raja de Garbaglia, foi diretor do colégio de 1930 a 1935. Em 1937, foi nomeado diretor do ensino secundário do Ministério da Educação e Saúde e presidente da Comissão Nacional do Livro Didático. Euclides Roxo é lembrado como uma pessoa que modernizou o ensino de Matemática no Brasil através da Reforma Francisco Campos quando foi membro da comissão que elaborou o projeto. Foi autor de vários livros didáticos de Matemática utilizada em várias escolas brasileiras tais como *Lições de Aritmética* (1925), *Curso de Matemática Elementar*, *Curso de Matemática* e *Matemática Ginasial*.

[18] Júlio Cesar de Mello e Souza (....-....) formou-se em engenharia pela Escola Politécnica do Rio de Janeiro. Foi professor catedrático do Instituto de Educação, recebendo o titulo de Professor Emérito da Faculdade Nacional de Arquitetura

Os livros da coleção *Curso de Matemática* são divididos em capítulos, por sua vez divididos em itens que tratam de subtópicos matemáticos. Cada capítulo é concluído com uma seção de exercícios, seguido das respostas em cada item. No final do livro encontra-se um índice.

De um modo geral, a coleção *Curso de Matemática* apresenta uma forma bastante inovadora em relação aos outros livros estudados até agora. Verificamos bastantes exemplos intercalados entre os conteúdos abordados. Além de conter exercícios propostos aos alunos, em anexo aparecem as respostas aos mesmos.

Segue a tabela IV com uma síntese da estrutura da obra.

TABELA IV: SÍNTESE DA COLEÇÃO CURSO DE MATEMÁTICA DE ROXO, THIRÉ E SOUSA

LIVROS	CONTEÚDO
VOL 1	
VOL 2	Cap. I – Ângulos e rotações, Cap. II – Perpendiculares e Oblíquas, Cap. III – Parallelos, Cap. IV – Triângulos, Cap. V – Quadriláteros, Cap. VI – Razoes e proporções, Cap. VII – Números proporcionais e grandezas proporcionais, Cap. VIII – Noção de figuras semelhantes e escalas, Cap. IX – Medição indireta das distancias e Funções Trigonométricas, Cap. X – Regra de três, Cap. XI – Porcentagem, Cap. XII – Juros Simples e Métodos comerciais, Cap. XIII – Descontos, Cap. XIV – Moedas e Cambio, Cap. XV – Divisão Proporcional, Cap. XVI –Equações literais, Problemas do 1º grau e Interpretação da soluções negativas, Cap. XVII –Variável e função, Cap. XVIII – Sistemas de equações do 1º grau, Cap. XIX – Divisão Algébrica, Cap. XX – Decomposição em Fatores, Cap. XXI – Frações Algébricas.
VOL 3	Cap. I – Expressões algébricas, identidade e equação, Cap. II – Equação do 1º grau com uma incógnita, Cap. III – Equação do 1º grau com duas ou mais incógnita e sistemas, Cap. IV – Problemas do 1º grau, Cap. V – Desigualdade e Inequações do 1º grau, Cap. VI – Potências e raízes, Cap. VII – Calculo dos radicais e Expoentes fracionários, Cap. VIII – Equação do 2º grau, resolução analítica e gráfica, Cap. IX – Equação do 2º grau, propriedades das raízes e discussão da equação do 2º grau, Cap. X – Trinômio do 2º grau, Cap. XI – Conjuntos de proposições fundamentais que servem de base à geometria dedutiva, Cap. XII – Noções sobre deslocamentos elementares no plano, Cap. XIII – Simetria no Plano, Cap. XIV – Estudo dos triângulos, Cap. XV - Estudos dos polígonos e soma dos ângulos internos e externos, Cap. XVI - Estudo dos quadriláteros, Cap, XVII - Noções e exemplos de lugares geométricos, Cap. XVIII - Círculo e propriedades dos arcos e das cordas, Cap. XIX - Tangente e normal, Cap. XX - Medida dos ângulos, Cap. XXI - Linhas proporcionais e Linhas Proporcionais no Triângulo, Cap. XXII - Semelhança e homotetia, Cap. XXIII - Relações métricas no Triângulo e Cap. XXIV – Relações Métricas no Círculo.
VOL 4	Cap. I – Equações Biquadradas, Cap. II – Equações Irracionais, Cap. III – Problemas do 2º grau, Cap. IV – Progressão Aritmética, Cap. V – Progressão Geométrica, Cap. VI – Função Exponencial, Cap. VII – Logaritmos, Cap.VIII – Logaritmos Decimais Cap. IX – Tábuas de Logaritmos, Cap. X – Juros Compostos, Cap. XI – Polígonos inscritíveis e circunscritíveis, Cap. XII – Polígonos regulares, Cap. XIII – Medida da Circunferência, Cap. XIV – Áreas, figuras equivalentes e relação entre as áreas de figuras semelhantes, Cap. XV – Plano e retas no espaço, Cap. XVI – Diedros, Planos perpendiculares e projeções, Cap. XVII – Ângulos poliédricos e Triedros suplementares, Cap. XVIII – Poliedros, primas e pirâmides, Cap. XIX – Geração e classificação das superfícies, Cap. XX – Cilindros e cone,

	Cap. XXI – Esfera, Cap. XXII – Arcos e ângulos, Cap XXIII – Funções trigonométricas, Cap XXIV. Relações entre as funções trigonométricas de arcos complementares, suplementares, etc, Cap. XXV – Relações algébricas entre as linhas de um mesmo arco, Cap. XXVI – Adição e Subtração de arcos, Duplicação e Bissecção
VOL 5	Cap. I – Resolução de triângulos. Cap II - Relações nos triângulos retângulos. Cap III - Relações nos triângulos obliqüângulo Cap IV - Uso das tábuas trigonométricas, Cap V - Resolução de triângulos retângulos, Cap VI – Resolução de triângulos obliqüângulo. Cap VII - Noções de análise combinatória. Cap VIII - Binômio de Newton. Cap IX - Noções de limites. Cap X - Determinação do limite de certas expressões. Limites singulares e Formas ilusórias. Cap XI - Variável, função e continuidade de uma função. Cap XII - Razão dos acréscimos, derivada de uma função e interpretação gráfica. Cap XIII - Derivada das funções elementares e diferencial de uma função. Cap. XIV - Derivação das funções transcendentes: sem x, cós x, tg x e cotg x. Cap XV - derivadas sucessivas de uma função. Cap XVI – Sinal da derivada, máximos e mínimos de uma função. Cap. XVIII - Problemas inverso da derivação e primitivas imediatas, Cap XVIII - Interpretação geométrica da integração, integral definida, aplicação ao calculo de certas áreas. Cap XIX - Volume, determinação do volume do prisma e da pirâmide. Cap XX - Volume do cilindro e do cone, áreas e volumes da esfera. Cap XXI - Estudo sucinto das seções cônicas, Cap XXII - Noções elementares sobre séries e convergência de séries, Cap. XXIII - Desenvolvimento em séries.

Analise do conteúdo especifico

O conteúdo analisado pode ser encontrado no volume 3 da coleção, capítulo XXI, intitulado "Linhas proporcionais e Linhas proporcionais no Triângulo", situado no parágrafo 19, "feixe de paralelas: propriedades", das páginas 317 a 339. Antes do estudo do teorema das linhas proporcionais, verificamos alguns conceitos como razão de duas grandezas e sua determinação, grandezas incomensuráveis e segmentos proporcionais, que os autores utilizaram na abordagem do mesmo.

O capítulo inicia-se com o tópico: "Razão de duas grandezas", de que é dado um exemplo, seguido da definição:

> Sejam AB e CD dois segmentos. Vamos supor que AB foi dividido em 3 partes iguais e que uma dessas partes está, por exemplo, contida exatamente 5 vezes em CD. Diremos então que AB é $3/5$ de CD ou que a razão de AB para CD é $3/5$ (ROXO et al., 1941: 317).

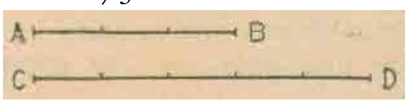


Figura 27

> O que fizemos para os dois segmentos, podemos fazer para duas grandezas quaisquer da mesma espécie:
> *Chama-se razão de duas grandezas da mesma espécie ao número que exprime quantas vezes uma das grandezas contém a outra ou uma parte alíquota dessa outra* (ROXO et al., 1941: 317).

Em seguida no tópico “como se determinar a razão de duas grandezas”, eles definem: a razão de dois segmentos é igual à razão dos números que lhe servem de medidas em relação à mesma unidade. A razão de duas grandezas é um número abstrato[19] (ROXO et al., 1941: 317).

Observe que, quando se menciona “razão de duas grandezas” (segmentos, áreas, volumes), admite-se que existe uma unidade de medida u, que se pode medir duas grandezas quaisquer de mesma espécie. Caso isso ocorra, essas grandezas são consideradas comensuráveis com a unidade utilizada. Caso não ocorra, os autores apresentam uma observação em que essas grandezas são incomensuráveis e as relacionam com o número irracional. Veja no trecho abaixo:

> Poderia acontecer, no exemplo do nº 1, que, por maior que fosse o número de partes iguais em que dividíssemos o segmento AB, uma dessas partes jamais coubesse em CD. Diríamos, então, que AB e CD são *incomensuráveis.*
> *Diz-se que duas grandezas são* incomensuráveis *quando não existe nenhuma unidade, por menor que seja, que se possa conter um número exato de vezes em ambas.*
> Praticamente não podemos verificar a incomensurabilidade de duas grandezas de mesma espécie, como p. ex., dois segmentos retilíneos, pois são limitados os meios de que dispomos para subdividir um segmento dado. Teoricamente é possível, entretanto, provar que certas dimensões de uma figura são, entre si, incomensuráveis. É o que veremos, por exemplo, para a diagonal e o lado de um quadrado, para o raio e a circunferência de um circulo, etc (ROXO et al., 1941, 318).

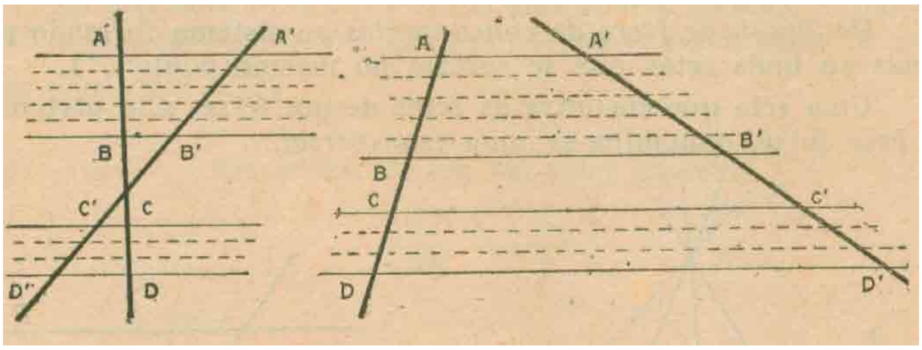
Os autores destacam a falta de atividade prática com relação à verificação da incomensurabilidade de duas grandezas; porém, afirmam que, teoricamente, isso pode ser possível, remetendo a problemas com figuras historicamente famosas. Fazem, também, a relação entre grandezas incomensuráveis e o número irracional, utilizando o conceito de razão, exposto no início do capítulo. O conceito de segmentos proporcionais é exposto posteriormente: “Quatro segmentos a, b, c e d são proporcionais quando a razão dos dois primeiros é igual à razão dos dois últimos” (ROXO et al., 1941: 319).

Nos próximos tópicos são tratados assuntos como: divisão interna e externa de um segmento, razão positiva e negativa, pontos que dividem em segmentos numa razão dada, divisão harmônica, conjugados harmônicos e algumas

[19] O conceito de número abstrato pode ser encontrado no volume 1: *Quando levamos em conta a natureza de um conjunto temos um número concreto, no caso contrário o número é abstrato. Exemplo: 15 livros é um número concreto: o símbolo 15, com o qual definimos esse conjunto de livros, é um número abstrato* (ROXO et al., 1941: 13)

observações. Porém não iremos fazer um estudo detalhado desses assuntos, pois, no momento, não é nosso objetivo.

Vamos verificar o teorema das linhas proporcionais que, na coleção, é exposto como uma propriedade do feixe de paralelas[20]:

> Um feixe de paralelas intercepta, sobre duas transversais quaisquer, segmentos proporcionais.
>
> **DEMONSTRAÇÃO**
>
> Consideremos um feixe de paralelas cortado pelas transversais AD e A'D'.
>
> Tomemos dois segmentos quaisquer AB e CD da primeira transversal e os segmentos A'B' e C'D' correspondentes da segunda.
>
> 
>
>
> **Figura 28**
>
> Queremos demonstrar a relação: $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$
>
> Vamos supor que uma unidade comum, u, está contida 5 vezes em AB e 3 vezes em CD. Temos:
>
> $$AB = 5u$$
> $$CD = 3u$$
>
> Podemos escrever:
>
> $$\frac{AB}{CD} = \frac{5}{3} \quad (R)$$
>
> Tracemos, pelos pontos de divisão dos segmentos AB e CD, paralelas ao feixe.
>
> O segmento A'B' ficará dividido em 5 partes iguais e o segmento C'D' em 3 partes iguais, de acordo com o estabelecido em o nº 24, cap. XVI[21].
>
> Temos, portanto:
>
> $$\frac{A'B'}{CD} = \frac{5}{3} \quad (R')$$
>
> Das relações (R) e (R') tiramos:
>
> $$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$$ (ROXO et al., 1941: 328-329)

Observemos que o autor demonstrou a propriedade para o caso particular, sem mencionar que se tratava de segmentos comensuráveis, tomando u como unidade comum de medida, e o segmento AB igual a 5u e CD igual a 3u. Em uma

[20] Para os autores denomina-se "feixe de paralelas ao sistema formado por duas ou mais retas paralelas" (ROXO et al., 1941: 327).

[21] Este item está ligado ao tópico "Segmentos iguais determinados por várias retas paralelas" que enuncia a propriedade: Si várias retas paralelas determinam segmentos iguais sobre uma transversal, determinam também segmentos iguais sobre qualquer outra transversal (ROXO et al., 1941: 267).

observação os autores informam que "a demonstração acima será sempre verdadeira, por menor que seja a unidade u com que medimos o segmento AB. Podemos, pois, admitir que, mesmo no caso de serem AB e CD incomensuráveis, é verdadeira a relação $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$"(ROXO et al., 1941: 329).

Alguns exercícios propostos no manual didático estão ligados ao resultado. Nos exercícios 10 e 12 aparecem casos em que pode-se trabalhar com segmentos comensuráveis. O exercício 11 generaliza o exercício 10. Porém, na atividade 22 verifica-se que é possível trabalhar o caso em que os segmentos são incomensuráveis.

> 10.Uma paralela a um lado de um triangulo determina sobre o segundo lado segmentos de 7m e 12m. Calcular os segmentos determinados sobre o terceiro lado, que mede 57m.
> 11.Uma paralela a um lado de um triangulo determina sobre o segundo lado segmentos de m e m. Calcular os segmentos determinados sobre o terceiro lado, que mede a.
> 12. Um feixe de cinco paralelas corta uma transversal em quatro segmentos, que medem 5m, 7m, 2m e 9m, respectivamente. Calcular os segmentos determinados pelo mesmo feixe em outra transversal, sabendo-se que o segundo segmento compreendido entre as paralelas extremas mede 34,5m.
> 22.Duas transversais partem do ponto A e encontram duas paralelas; a primeira corta as paralelas em B e C a segunda em D e E. Sabe-se que BC = 4m; BD = 12m; CE = 18m e AE = 16m. Calcular AB, AD e DE.
> (ROXO et al, 1941: 338)

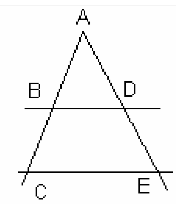


Figura 29

Conclusões

Ao analisar L3, percebemos que o assunto é apresentado como uma propriedade do feixe de paralelas. A concepção de comensurabilidade de grandezas é exposta no início do capítulo, quando se utiliza comparação de segmentos para explicar como determinar a razão de duas grandezas. Os autores não mencionam o termo "comensurável"; porém, no quarto parágrafo, definem grandezas incomensuráveis, afirmando que, na prática, é impossível verificar o fato, e que, teoricamente é possível. Em seguida cita o exemplo da diagonal e o lado de um quadrado. A relação entre duas grandezas incomensuráveis e o número irracional também é feita. Na demonstração do teorema, os autores apresentam a prova para o caso em que os segmentos são comensuráveis, observando que, se os segmentos forem incomensuráveis, a relação é verdadeira.

Nos exercícios, encontramos algumas atividades de fixação que podem proporcionar o estudo de segmentos comensuráveis com a unidade de medida. Encontramos também, em um dos exercícios a possibilidade de trabalhar com segmentos incomensuráveis.

4.4. Obra L4: Matemática – Curso Ginasial

Descrição da obra

A coleção *Matemática: Curso Ginasial,* de autoria do professor catedrático do Colégio Militar do Rio de Janeiro, Ary Quintella (1906-1968)[22], cargo explicitado nas contra capas de seus livros, é um personagem bastante conhecido no cenário nacional por meio das publicações de livros didáticos que vão, desde cursos ginasiais, clássicos e científicos a comércio básico, admissão, exame de madureza, vestibular e curso normal. Segundo Thiengo (2001: 114) "esses trabalhos foram bem aceitos no mercado e utilizados em diversas escolas do país; para comprovar esse dado basta observar o número de edições de suas obras". Isso nos assegura que, na sua época, as obras de Quintella exerceram grande influência no ensino de Matemática.

A coleção é formada por livros didáticos de Matemática, pertencentes a uma época anterior tanto ao Movimento da Matemática Moderna[23] no Brasil quanto ao período que alguns autores chamam de Matemática Tradicional. Na visão de Thiengo (2001) esse período (Matemática Tradicional) se caracteriza "em função do enfoque clássico observado nos livros didáticas inspirados no modelo europeu de

[22] Ary Norton de Murat Quintella formou-se na Escola Militar do Rio de Janeiro e especializou-se em Sévres, na França. Atuou como professor de Matemática e desenho em diversos estabelecimentos de ensino, como o Colégio Militar do Rio de Janeiro e o Instituto de Educação. Segundo Thiengo (2001: 113), além de professor, Quintella era militar, possuindo patente de general.

[23] O Movimento da Matemática Moderna iniciou-se, no Brasil, na década de 60, no século passado, tendo como um dos personagens fundamentais para a implantação desse movimento no país o professor Osvaldo Sangiorgi. Seu Objetivo era "a melhoria da qualidade do ensino de Matemática, modificando a prática pedagógica e inovando as concepções da própria Matemática, usando a modificação do currículo como estratégia para torná-la mais contemporânea, mais pura" (Thiengo, 2001: 28). No que se refere aos livros didáticos de Matemática, os mesmos refletiam a preocupação demasiada com a teoria dos Conjuntos e o cuidado em ressaltar as estruturas Matemáticas, enfocando a precisão e coerência de símbolos e representações. Os mesmos foram totalmente descaracterizados, enquanto material didático, "(...) todos os recursos imagináveis foram utilizados na elaboração de Livros, tais como a utilização de gravuras, figuras e até piadas de mau gosto" (Nogueira, 1996: 98). O enfraquecimento do movimento se deu nas décadas de 70 e 80, em que vários educadores matemáticos o contestaram.

abordagem Matemática, correspondendo ao período que vai até 1960” (THIENGO, 2001: 54).

A coleção *Matemática: Curso Ginasial* está estruturada em quatro volumes, da 1ª a 4ª série ginasial, divididos em unidades e subdivididos em capítulos, com subtópicos especificando os conteúdos trabalhados.

No prefácio do livro da 3ª série ginasial, o autor frisa bem a experiência vivida e compartilhada com vários professores de todo país, para a elaboração desses manuais didáticos, justificando a nova estrutura e conteúdos.

> Acreditamos deva ser uma obra didática compreendia como o resultado de uma experiência coletiva que inclua os trabalhos de classe e sua verificação, de modo a estabelecer a necessária correlação entre o que se pretendeu ensinar e aquilo que real e efetivamente resultou dessa pretensão (aprendizagem).
> [...]
> A nova edição de nosso Curso Ginasial foi projetada na base de um inquérito que realizamos entre professores de vários pontos do país. Vem, agora, modificada, mesmo em sua estrutura, com expressões, simplificações e acréscimos que os colegas identificarão facilmente (Quintella, 1963: 11).

Uma descrição mais minuciosa da coleção encontra-se no livro da 1ª série ginasial, 1961, 70ª edição, 8515 exemplares impressos e 1050 exercícios proposto, composto por 220 páginas; o volume da 2ª série ginasial, 1960, 57ª edição, 34412 exemplares e 1050 exercícios, é composto por 187 páginas; o livro da 3ª série ginasial, 1963, 59ª edição, com 1607 exemplares e 580 exercícios, é composto de 203 páginas; e o livro da 4ª série ginasial, 1965, 56ª edição, com 14621 exemplares com 723 exercícios, é composto por 206 páginas.

Os livros da coleção, *Matemática: Curso Ginasial,* caracterizam bem a situação do ensino vigente na época, isto é,

> Os programas adotados eram considerados fragmentados e extensos. A aulas eram expositivas e muito teóricas, tanto que a resolução de exercício em sala era uma pratica pouco comum e, quando acontecia, apresentavam-se aos alunos exercícios padronizados, que deveriam ser resolvidos a partir de um “modelo” que, por sua vez pesava nos cálculos exagerados. Os teoremas eram decorados pelos alunos a partir da exposição do professor, para mais adiante apresentá-los, através das provas que eram predominantemente orais (Thiengo, 2001: 13-14).

Quantos aos exercícios, muitos deles são propostos de forma bastante mecânica (achar, encontrar, resolver, calcular), o que favorece a prática, a memorização e a repetição, ainda que se observe, em alguns exercícios, a quebra dessa prática. Em termos visuais, o autor não apresenta muitas ilustrações, sendo exceção a parte que trabalha com geometria, levado pela necessidade de compreensão dos enunciados e demonstrações de teoremas.

Segue, na tabela abaixo, uma síntese da estrutura da obra analisada:

TABELA V: SÍNTESE DA COLEÇÃO *MATEMÁTICA: CURSO GINASIAL* DE ARY QUINTELLA

	UNIDADES	CAPÍTULOS
1ª SÉRIE	**Unidade I** – Números Inteiros; Operações Fundamentais e Números Relativos	Cap. I – Números Inteiros, Cap. II – Adição, Cap. III – Subtração, Cap. IV – Multiplicação, Cap. V –Divisão, Cap. VI – Problemas sobre as quatro operação e Cap. VII – Números relativos.
	Unidade II – Divisibilidade Aritmética. Números Primos	Cap. I – Divisibilidade, Cap. II – Números Primos, Cap. III – Máximo Divisor Comum, Cap. IV – Menor Múltiplo Comum.
	Unidade III – Números Fracionários	Cap. I – Frações ordinárias e Cap. II – Números decimais.
	Unidade IV – Sistema legal de unidade de medir	Cap. I – Sistemas de unidades decimais e Cap. II - Sistema de unidade não decimais.
2ª SÉRIE	**Unidade I** – Potência e raízes; Expressões irracionais	Cap. I – Potências, Cap. II – Quadrado, Cap. III – Raiz quadrada, Cap. VI – Raiz Cúbica e Cap. VII – Cálculo de Racionais.
	Unidade II – Cálculo Literal; Polinômios	Cap. I – Expressões algébricas, Cap. II – Adição e subtração de expressões algébricas, Cap. III – Multiplicação de monômios e polinômios. Produto Notável, Cap. IV – Divisão de monômios e polinômios, Cap. V – Casos simples de fatoração e Cap. VI – Frações Literais. Propriedades e operações.
	Unidade III – Binômio Linear; Equações e inequações do 1º grau com uma incógnita; sistemas lineares com duas incógnitas	Cap. I – Equação do 1º grau com uma incógnita, Cap. II – Desigualdade. Inequações, Cap. III – Sistemas lineares com duas incógnitas e Cap. IV – Problemas do 1º grau com uma e duas incógnitas
3ª SÉRIE	**Unidade I** – Razões e Proporções. Aplicações Aritméticas	Cap. I – Razões, Cap. II – Proporções, Cap. III – Números proporcionais, Cap. IV –Divisão em partes proporcionais, Cap. V – Regra de três, Cap. VI – Percentagem e Cap. VII – Juros Simples.
	Unidade II – Geometria Plana: figuras Geométricas Planas. Retas e Círculos	Cap. I – Retas, planos. Congruência, Cap. II – Ângulos, Cap. II – Polígonos, Cap. IV – Triângulos, Cap. V – Perpendiculares e oblíquas, Cap. VI – Paralelas, Cap. VII – Soma dos ângulos do triângulo e dos polígonos, Cap. VII – Quadriláteros convexos, Cap. IX – Círculo e Cap. X – Correspondência de arcos e ângulos.
	Unidade III – Linhas Proporcionais. Semelhança	Cap. I – Pontos que dividem um segmento numa razão dada. Cap. V – Segmentos determinados sobre transversais por um feixe de paralelas, Cap. III – Linhas proporcionais no triângulo e Cap. VI – Semelhança.
	Unidade IV – Relações Trigonométricas. Tábuas Naturais	Esta Unidade não é divida em capítulos.
SÉRI	**Unidade I** – Álgebra	Cap. I – Cálculo de radicais, Cap. II – Equações do 2º grau, Cap. III – Trinômio do 2º grau, Cap. IV – Problemas do 2º grau e Cap. V – equações redutíveis ao 2º grau.

	Unidade II – Geometria: Relações métricas nos polígonos e no círculo de π	Cap. I – Relações métricas no triâgulo retângulo, Cap. II – Relações métricas num triâgulo qualquer, Cap. III – Cálculo das alturas, medianas e bissetrizes, Cap. IV – Relações métricas no círculo, Cap. V – Polígonos inscritíveis e circunscritíveis, Cap. VI – Polígonos regulares e Cap. VII – Medição da Circunferência;
	Unidade III - Geometria	Cap. I – Medição das áreas das principais figuras planas e Cap. II – Relações métricas entre áreas.

Análise do conteúdo específico

O conteúdo analisado pode ser encontrado no livro da 3ª série ginasial, na unidade III intitulada "Linhas Proporcionais e semelhança" no capítulo II em que se estuda segmentos determinados sobre transversais por um feixe de paralelas composto de dois teoremas. É importante para a análise conhecer alguns conceitos como os de razão[24], proporção[25] e segmentos proporcionais[26].

O autor não utiliza, na demonstração do teorema de Thales, a definição de comensurabilidade de segmentos; todavia, achamos pertinente rever esses conceitos sob o olhar do autor. O conceito de grandezas comensuráveis e incomensuráveis é exposto da mesma forma nos livros da 2ª e 4ª série ginasial; porém escolhemos o livro da 2ª série, unidade I, no capítulo referente ao *cálculo com radicais* páginas 49 a 50, para mostrar com mais detalhes. O autor divide a demonstração em três casos, tomando AB como unidade e CD como o segmento que a ser medido:

> Se desejarmos medir um segmento CD com a unidade AB (fig. 3), tres casos poedem ocorrer.
> **PRIMEIRO CASO.** CD contém exatamente três vezes a unidade AB. A medida de CD é, então, o *número inteiro* 3.
> **SEGUNDO CASO.** CD não contém AB exatamente; porém, se dividirmos AB em duas partes iguais, verificaremos que uma dessas partes cabe exatamente cinco vezes em CD. A medida de CD é então o *número fracionário* $\frac{5}{2}$ ou $2\frac{1}{2}$.
> Nesses dois primeiros casos, dizemos que os segmentos AB e CD admitem *uma medida comum* ou são ***comensuráveis***.
> **TERCEIRO CASO.** Pode acontecer que CD não contenha AB e, por maior que seja o número de partes em que dividamos AB, nenhuma dessas

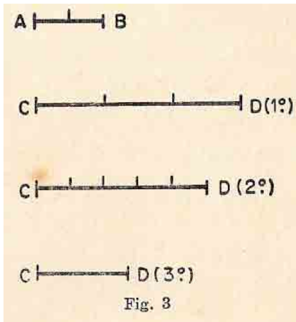


Figura 30

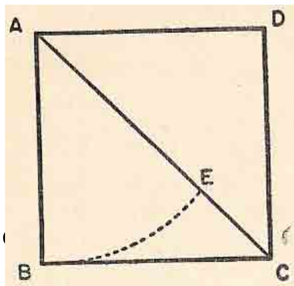


Figura 31

[24] Razão de duas grandezas da mesma espécie é o quociente da divisão dos núm suas medidas, com a mesma unidade (QUINTELLA, 1963: 15)
[25] Proporção é a igualdade de duas razões (QUINTELLA, 1963: 157).
[26] Quatro segmentos dados são proporcionais quando os números que exprimem suas medidas formam proporção (QUINTELLA, 1963: 169).

> partes fique contida exatamente em CD. É o que ocorre, por exemplo, com a diagonal e o lado do quadrado (fig. 4). A diagonal não contém o lado e nenhuma de suas partes alíquotas.
> Neste caso diz-se que AB e CD não admitem *medida comum* ou são *incomensuráveis.*
> Outro exemplo de grandezas incomensuráveis nos é dado pela circunferência e o diâmetro (QUINTELLA, 1960: 49-50)

É interessante mencionarmos que, na definição de números racionais e irracionais, o autor faz uma relação com comensurabilidade de grandezas.

> Os números que representam a medida de grandezas comensuráveis com a unidade denomina-se ***números racionais.***
> [...]
> Quando a grandeza é incomensurável com a unidade, sua medida não pode ser expressa por um número inteiro nem fracionário. Torna-se, então necessária a criação de novos números. A tais números dá-se o nome de ***números irracionais*** (QUINTELLA, 1960: 50).

Em seguida expõe o exemplo da raiz quadrada do número 2, que, aproximando diversas sucessões de números decimais, consegue encontrar um valor aproximado de $\sqrt{2}$.

Como nos demais livros analisados, o teorema de Thales, embora o autor não intitula-o dessa forma, necessita de um teorema auxiliar, imprescindível na sua demonstração. Vejamos esse teorema:

> "Se um feixe de paralelas divide uma transversal em partes iguais, dividirá também qualquer outra transversal em partes iguais".
> Sejam as paralelas S_1, S_2, S_3, S_4 (fig. 110):
> Hipótese: AB = BC = CD Tese: a = b = c
> DEMONSTRAÇÃO. Tracemos, pelos pontos A, B e C, paralelas à segunda transversal MN.
> Em virtude da teoria das paralelas, teremos:
> a = AE, b = BF, c = CG.
> Basta, pois, provar a igualdade dos segmentos AE, BF e CG. A igualdade destes segmentos resulta imediatamente da congruência dos triângulos ABE, BCF, CDG, que têm um lado igual por hipótese, adjacente a ângulos respectivamente iguais como correspondentes.
> Observemos que o raciocínio é o mesmo para as duas figuras (QUINTELLA, 1960: 174).

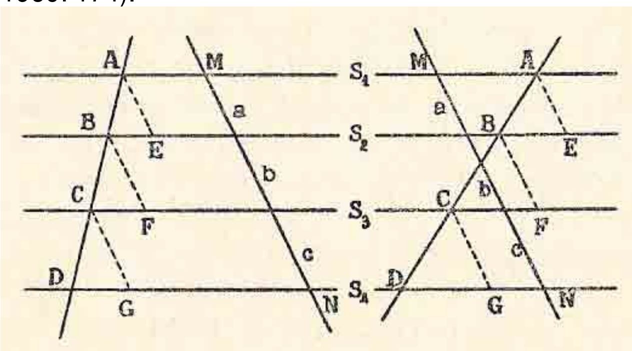
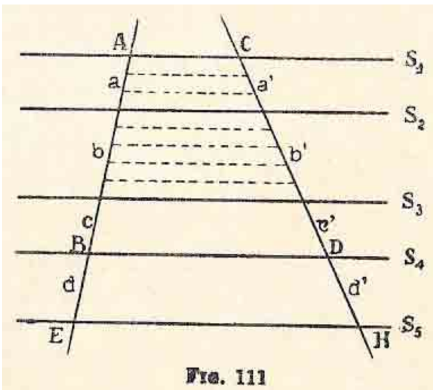


FIG. 110

Figura 32

Verifica-se que a demonstração é resultado do primeiro caso de congruência de triângulos (L.A.A.), podendo ser provado tanto para o caso em que existe um ponto de intersecção das transversais como para o caso em que as transversais não se interceptam. Ambos utilizam o mesmo raciocínio.

No segundo teorema, nomeado por teorema de Thales, é enunciado da seguinte forma: “um feixe de paralelas divide duas transversais quaisquer em segmentos correspondentes proporcionais” (QUINTELLA, 1963: 175). O autor considera uma demonstração, para o caso particular, em dois momentos: o primeiro, com três paralelas e o segundo, com qualquer número de paralelas:

> 1.º) Consideremos primeiramente três paralelas S_1, S_2 e S_3 e as duas transversais AB e CD (fig. 111).
>
> Teremos a tese $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$
>
> DEMONSTRAÇÃO. Dividamos os segmentos a e b em partes iguais a um segmento α, o que é sempre possível com erro tão pequeno quanto quisermos por ser α arbitrário, e admitamos que fique contido 3 vêzes em *a* e 5 vêzes em *b*, como mostra a figura. Temos, então:
>
> $a = 3\alpha$
>
> $b = 5\alpha \therefore \frac{a}{b} = \frac{3}{5}$ (1)
>
> Se traçarmos, pelos pontos de divisão de a e b, paralelas às retas do feixe, a segunda transversal CD ficará, também, dividida em partes iguais. Sendo β uma das partes, virá:
>
> $a' = 3\beta$
>
> $b' = 5\beta \therefore \frac{a'}{b'} = \frac{3}{5}$ (2)
>
> 
>
>
> FIG. 111
>
> **Figura 33**
>
> Se compararmos as igualdades (1) e (2), concluiremos: $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ ou $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$
>
> 2.º) Consideremos qualquer número de paralelas S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, etc. Teremos a tese:
>
> $$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = \ldots$$
>
> DEMONSTRAÇÃO. Em virtude da primeira parte, a propriedade é verdadeira para três paralelas. Assim, considerando S_1, S_2 e S_3, concluiremos; $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$
>
> considerando S_2, S_3, S_4: $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

> considerando S_3, S_4, S_5: $\frac{c}{c'} = \frac{d}{d'}$
>
> Como todas as igualdades têm uma razão comum, podemos, finalmente, concluir:
>
> $$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = ...$$ (QUINTELLA, 1960, 175-176)

Observe-se que, na demonstração, em nenhum momento utiliza o termo "segmentos comensuráveis" para o caso particular da prova. Ele admite uma unidade comum, chamada de segmento α, em que os segmentos a e b são partes iguais à dessa unidade de medida (α), repassando que é sempre possível com erro tão pequeno quanto quisermos por ser α arbitrário. Entendemos que Ari Quintella, está comparando segmentos, ainda que não fique claro se a e b são números naturais, ou inteiros, ou racionais ou reais.

Nos exercícios, podemos verificar a intenção do autor em trabalhar com muitas atividades envolvendo semelhança de triângulos e escalas; porém, no primeiro exercício, nos deparamos com uma aplicação direta desse teorema, em que os segmentos trabalhados são comensuráveis.

> **1.** Um feixe de quatro paralelas determina sobre uma transversal três segmentos de 3m, 4m e 5m, respectivamente. Calcular os segmentos determinados pelos mesmos feixe sobre outra transversal, cujo comprimento total entre as paralelas extremas é de 48m (QUINTELLA, 1963: 190).

Em outro exercício, encontramos um caso que se aplica o primeiro teorema[27] do tópico sobre linhas proporcionais no triângulo; porém, nesse teorema, observa-se a aplicação do resultado do teorema de Thales. O exercício é uma aplicação que envolve incomensurabilidade de segmentos.

> **3.** Sabendo que dois lados de um triângulo valem, respectivamente 25,20m e 18,20m e que a paralela ao terceiro lado corta o primeiro a 11,04m do vértice comum, calcular os segmentos em que fica dividido o segundo lado. (QUINTELLA, 1963: 190)

Conclusões

A analise da coleção livro L4 mostra que o autor não nomeia por teorema de Thales o teorema das linhas proporcionais que corresponde ao teorema de semelhança de triângulos. Ele também relaciona o conteúdo estudado de maneira a fundamentar os capítulos seguintes (Linhas proporcionais no triângulo e

[27] A paralela a um dos lados de um triângulo divide os outros dois lados em partes proporcionais (Quintella, 1963: 177)

Semelhança). A compreensão de grandezas geométricas é estudada tanto no volume da 2ª série ginasial quanto no da 4ª série ginasial, sem diferenças no conteúdo. Para o estudo de segmentos comensuráveis, o autor explica-o trabalhando com comparação de segmentos. Ele relaciona as definições de números racionais e irracionais com a comensurabilidade de grandezas.

Na demonstração, apresenta a prova para o caso particular do teorema, utilizando comparação de segmentos e dando ênfase ao conceito de feixe de paralelas, generalizando que o teorema é válido, não somente para três paralelas, mas para um número qualquer de paralelas. Ao caso incomensurável, o autor não faz nenhuma menção.

Nos exercícios encontrados no final da unidade, deparamos uma atividade de aplicação do teorema que envolve segmentos comensuráveis. Em outro exercício, porém, sendo aplicação do primeiro teorema das linhas proporcionais nos triângulos, fornecer o emprego do uso do resultado do teorema de Thales, sendo possível trabalhar incomensurabilidade de segmentos.

4.5. Obra L5: Matemática – Curso Moderno para os Ginásios

Descrição da obra

A coleção *Matemática: Curso Moderno para os ginásios,* escrito por Osvaldo Sangiorgi[28] foi um dos primeiros livros didáticos de Matemática, do Movimento da Matemática Moderna, tornando-se um marco na História da Educação Matemática no Brasil, a partir da década de 60 do século XX. Essa coleção teve por objetivo introduzir e difundir a Matemática Moderna nos estabelecimentos de ensino no Brasil. Thiengo (2001, 116) expõe que "[...] pela primeira vez no Brasil, o livro do aluno é seguido por um guia para o uso do professor contendo: observações de

---

[28] Osvaldo Sangiorgi (1924 -) formou-se em física pela USP, em 1943. Fez mestrado em Lógica pela Universidade do Kansas (EUA) e doutorado em Matemática pela USP. Tornou-se Livre-Docente da Escola de Comunicação e Artes (ECA) e professor titular da mesma. Atuou como professor em diversos estabelecimentos de ensino no Brasil, nos Estados Unidos, na Bélgica, na Alemanha, na Itália e em outras universidades da América, Europa, África e Ásia. Sangiorgi, além de ser lembrado pela iniciação ao ensino da Matemática Moderna no Brasil, atuava no cenário nacional como um consagrado autor de livro didático, chegando alguns volumes à 100ª edição. Desde 1954, ano que Sangiorgi publicou seus primeiros livros, até 2000, foram editados 84 livros distribuídos nos primeiros anos escolares, ensino superior e alguns ligados à prática docente. (Mais detalhes em THIENGO, 2001)

ordem pedagógicas, referências bibliográficas e respostas dos exercícios propostos". Porém, os livros didáticos editados pela FTD no início do século XX, já traziam guia do professor.

Essa era a característica dos primeiros livros didáticos de Matemática a partir de 1963, quando havia destacado um livro não só para o aluno, mas também para o professor, o "Manual do Professor".

Essa coleção brasileira composta por quatro volumes, que correspondiam ao ensino ginasial da época, foi também recomendada e utilizada em escolas de diversos países como Argentina, Uruguai e Peru, mostrando, assim, a importância da obra escolhida (THIENGO, 2000).

Apesar do grande impacto no ensino de Matemática promovido pelo Movimento da Matemática Moderna, são poucos os livros que incorporaram o objetivo real do movimento. Em um artigo (1982), Sangiorgi crítica a forma com que autores implantavam, nos livros didáticos, essa tendência modernista:

> Muita Matemática Moderna, escrita indevidamente, figurava em livros "didáticos", muitos dos quais se limitavam a transplantar, pura e simplesmente, tópicos de livros estrangeiros baseados em programas ambiciosos, que nem em seus países de origem chegaram a ser aprovados. Num aparente paradoxo, diante de tão "alta Matemática"exibida num festival de Livros Didáticos, um baixo nível de formação começou a ser constatado, decorrente do próprio desencontro: conteúdo do livro x necessidades prioritárias do aluno. (SANGIORGI, 1982: 192)

A coleção escolhida é formada por livros didáticos de Matemática pertencentes a esse período de modernização de ensino de Matemática, porém há variações nos anos de edição. Os quatro volumes estão estruturados em capítulos e estes divididos em partes, havendo, em alguns capítulos, apêndices de complementação do conteúdo[29].

Na introdução do 1º volume, o autor mostra seu anseio em estudar conteúdos que fazem parte Matemática Moderna: "(...) a razão pela qual você vai aproveitar o seu precioso tempo aprendendo o verdadeiro significado e as belas estruturas da Matemática Moderna" (SANGIORGI, 1970: Introdução).

Um ponto importante a ser ressaltado é a forma como o autor introduz os conteúdos a serem estudados no volume, principalmente os referentes à geometria:

---

[29] Na contra-capa de cada volume, podemos encontrar o programa do curso para cada série, sendo ressaltado que "de acordo com os Assuntos Mínimos para um Moderno Programa de Matemática para os Ginásios, aprovado pela Diretoria do Ensino Secundário, do Ministério de Educação e cultura, no Curso de Treinamento Básico para professores Secundários, realizado em Brasília, de 25 a 30 de novembro de 1963 (...)" (Folha de Rosto).

"(...) finalmente, vem o 'bom-bocado' do livro: o estudo da Geometria. Agora, não será mais preciso que você decore" enfadonhos teoremas e mais teoremas, contra o que, erradamente, alguns colegas mais adiantados costumavam "preveni-lo" *(Sangiorgi, 1968; xv)"*, refletindo assim o ensino de geometria proposto nos livros didáticos do autor.

Nos livros da coletânea *Matemática: Curso Moderno* transparece o estilo proposto no Movimento da Matemática Moderna, em que se privilegia a álgebra. Assim, a teoria dos conjuntos permaneceu como eixo principal no desenvolvimento do conteúdo, trazendo consigo conceitos e teorias que levam o aluno a explorar conteúdos por novos caminhos. O visual apresentado marca a aparência do movimento. Thiengo (2001, 105) menciona que "o período da Matemática Moderna marca a chegada de manuais escolares coloridos, com capas mais atraentes e ilustrações internas mais interessantes em cores, buscando estimular o estudante". O autor também disponibiliza ao aluno a seção "lembrete amigo", encontrado em alguns capítulos, que traz um resumo das principais idéias consideradas importantes.

Os exercícios são trabalhados em função da teoria dos conjuntos. Os mesmos são numerados em blocos, chamados pelo autor de grupos. O volume 1 tem 101 grupos de exercícios, o volume dois, 90 grupos o volume 3, 100 grupos e o volume 4, 95 grupos de exercícios, distribuídos de diferentes formas. O autor propõe cinco tipos de exercícios: de aplicação, de fixação, de práticas modernas, exercícios exploratórios e testes de atenção.

Segue a síntese da estrutura da obra analisada.

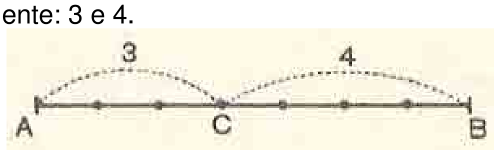
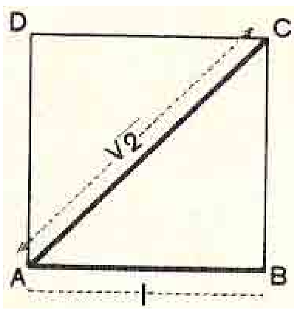
TABELA VI: SÍNTESE DA COLEÇÃO *MATEMÁTICA: CURSO MODERNO* POR OSVALDO SANGIORGI

	CAPÍTULOS	CONTEÚDOS
VOLUME 1	**Capítulo 1**	**Parte 1** – Conjunto e Relações e Apêndice 1 – Partição de um conjunto; **Parte 2** – Conjuntos dos Números Naturais; **Parte 3** – Sistema e bases e Apêndice 2 – Transformação de bases.
	Capítulo 2	**Parte 1** – Operações com Números Naturais e Propriedades estruturais; **Parte 2** – Divisibilidade no Conjunto $\mathbb{N}$
	Capítulo 3	**Parte 1** – Conjunto dos Números Racionais; **Parte 2** – Operações com Números Racionais e Apêndice 3 – Número Racional absoluto.
	Capítulo 4	Medidas
VOLUME 2	**Capítulo 1**	**1ª Parte** – Números Racionais absolutos, Operações com conjuntos, Propriedades estruturais e Reta Numerada; **2ª Parte** – Razões e Proporções, Por Cento, Porcentagem e Aplicações Práticas.
	Capítulo 2	**1ª Parte** – Números Proporcionais, Problemas com novas estruturas e Grandezas Proporcionais; **2ª Parte** – Regra de Três, Juros Simples e Desconto – Câmbio.

	Capítulo 3	**1ª Parte** – Novos números e novas estruturas, Números inteiros relativos, Estrutura de ordem e valor absoluto; **2ª Parte** – Operações com números inteiros relativos e Propriedades estruturais; **3ª Parte** – Números racionais relativos e Propriedades estruturais.
	Capítulo 4	**1ª Parte** – Sentenças e Expressões, Conjunto – Universo, Conjunto – Verdade, Equações e Inequações; **2ª Parte** – Relação Binária, Sentenças abertas com duas variáveis, Sistema de equações simultâneas e Apêndice 4 – Estruturas Matemáticas em outras disciplinas e Sistemas matemáticos – Aplicações.
VOLUME 3	**Capítulo 1**	Números reais e Estrutura de Corpo
	Capítulo 2	Cálculo Algébrico e Estudo dos Polinômios
	Capítulo 3	Estudo das Figuras Geométricas
	Capítulo 4	Estudo dos Polígonos e da Circunferência
	Apêndice	Transformações Geométricas planas
VOLUME	**Capítulo 1**	Números reais: práticas com números irracionais
	Capítulo 2	Funções
	Capítulo 3	Semelhança
	Apêndice	Números Complexos, áreas de região plana e mapas Topológicos.

Análise do conteúdo específico

O conteúdo analisado (teorema de Thales) pode ser encontrado no volume 4 da coleção, mais precisamente no capítulo três, intitulado "semelhança", dentro da 1ª parte que aborda os conceitos de razão e proporção de segmentos, feixe de paralelas e teorema de Thales, páginas 141 a 151. O capítulo inicia-se com o tratamento sobre razão de segmentos, abordando a definição e observações no que diz respeito a segmentos denominados comensuráveis e incomensuráveis. Acompanhemos:

> Seja o segmento $\overline{AB}$ e um ponto C que divide em dois segmentos: $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$, cujas medidas (na mesma unidade, cm, por exemplo) são respectivamente: 3 e 4.
>
> 
>
>
> **Figura 34**
>
> Nestas condições, diz-se que o ponto C divide o segmento $\overline{AB}$, *de A para B,* na *razão* 3 : 4 ou $\frac{3}{4}$. Indicações:
>
> $$\frac{m(\overline{AC})}{m(\overline{CB})} = \frac{3}{4}$$ ou usando a notação simplificada:
>
> $$\frac{AC}{CB} = \frac{3}{4}$$
>
> NOTA: É mais cômoda, agora, a indicação de *m(* $\overline{AC}$ *)* por AC e *m(* $\overline{CB}$ *)* por CB, nos estudos que se seguem. Portanto, AC e CB estão representando *números reais*.
>
> 
>
>
> **Figura 35**

> Diz-se, também, que C divide o segmento $\overline{AB}$, *de B para A;* na *razão* 4: 3 ou $\frac{4}{3}$, cuja indicação é, analogamente: $\frac{CB}{AC} = \frac{4}{3}$.
>
> OBSERVAÇÃO IMPORTANTE: Se a *razão* entre as medidas de dois segmentos é um *número racional,* os segmentos são denominados *comensuráveis.*
>
> No exemplo estudado os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$ são *comensuráveis,* pois:
>
> $\frac{AC}{CB} = \frac{3}{4}$ (número racional).
>
> Se a *razão* das medidas é um *número irracional*, então os segmentos são denominados *incomensuráveis*.
>
> Assim, por exemplo, a *diagonal* e o *lado* de um mesmo quadrado, ABCD, são *segmentos incomensuráveis,* porque a *razão* de suas medidas (sempre na mesma unidade) é igual ao *número irracional* $\sqrt{2}$, isto é:
>
> $$\frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{1} \text{ (número irracional).}$$
>
> De qualquer maneira, a *razão* entre dois segmentos é um *número real.* (SANGIORGI, 1968: 141-142)

Observe-se que o autor faz a ligação entre o número racional e os segmentos comensuráveis e entre o número irracional e os segmentos incomensuráveis, ilustrando o segundo caso com o exemplo da diagonal do quadrado de lado um. Em seguida traz um grupo de exercícios envolvendo atividades com segmentos comensuráveis.

Para a definição de proporção de segmentos, define, primeiro, o que são segmentos proporcionais: *Os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{MN}$ e $\overline{PQ}$ dizem-se proporcionais nessa ordem, quando a razão dos dois primeiros é igual à razão dos dois últimos. Indicação:* $\frac{AB}{CD} = \frac{MN}{PQ}$ *(SANGIORGI, 1968: 143).* Conseqüentemente, utiliza-se dessa definição para conceituar proporção, isto é, *diz-se também que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são proporcionais aos segmentos $\overline{MN}$ e $\overline{PQ}$ ou que os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{MN}$ e $\overline{PQ}$ estão em proporção (SANGIORGI, 1968: 143).* Desse modo, *f*az-se necessário estudar esse conceitos, pois são utilizados para demonstrações dos próximos teoremas.

Em seguida encontramos o teorema de Thales, situado dentro do tópico “feixe de paralelas”, como uma propriedade.

Assim, o conceito de feixe de paralelas é:

Ao conjunto de três ou mais retas de um plano, *paralelas* entre si, dá-se o nome de *feixe de paralelas.*
Qualquer reta (t, na figura) que não pertença ao feixe é uma transversal *que*
intercepta tôdas as retas do feixe (corolário do Postulado de Euclides) (SANGIORGI, 1968: 145).

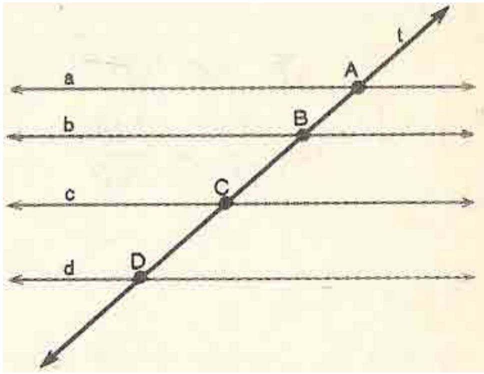


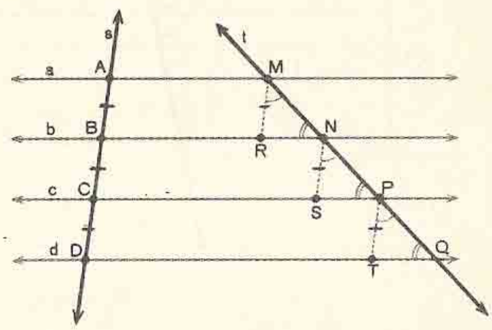
Figura 36

Esse feixe de paralelas cortado por uma transversal goza de algumas propriedades que, neste livro, será visto por meio de teoremas. Porém, como o teorema de Thales necessita de alguns resultados que o antecede, observaremos o enunciado e a demonstração do primeiro teorema (SANGIORGI, 1968:145):

T.1 : *Se um feixe de paralelas determina segmentos* ***congruentes*** *sôbre uma transversal, então determina sôbre outra qualquer transversal dêsse feixe segmentos também* ***congruentes.***

$$H \begin{cases} a \parallel b \parallel c \parallel d \\ s \text{ e } t \text{ transversais} \\ \overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \end{cases}$$

$$T \; \{ \; \overline{MN} \cong \overline{NP} \cong \overline{PQ}$$



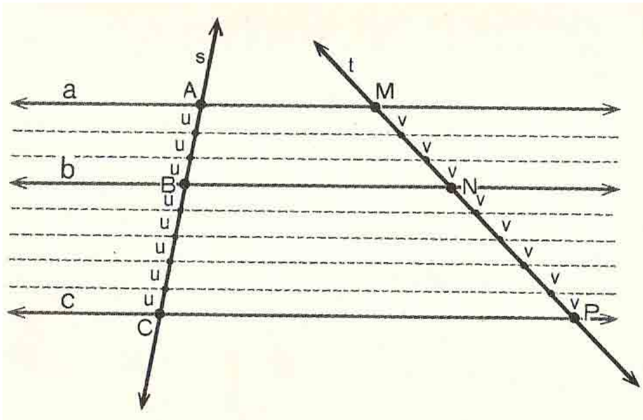
DEMONSTRAÇÃO:

Afirmações	*Justificações*
1. $\overline{MR} \parallel \overline{AB}$; $\overline{NS} \parallel \overline{BC}$ e $\overline{PT} \parallel \overline{CD}$ (. . . construindo)	1. Postulado de Euclides
2. Os quadriláteros *AMRB*, *BNSC* e *CPTD* são paralelogramos	2. Lados opostos paralelos dois a dois
3. $\overline{AB} \cong \overline{MR}$, $\overline{BC} \cong \overline{NS}$ e $\overline{CD} \cong \overline{PT}$	3. Lados opostos de um paralelogramo são congruentes
4. $\overline{MR} \cong \overline{NS} \cong \overline{PT}$	4. Hipótese e propriedade transitiva da congruência
5. $\triangle MRN \cong \triangle NSP \cong \triangle PTQ$	5. Caso A.L.A. (por quê?)
6. $\overline{MN} \cong \overline{NP} \cong \overline{PQ}$	6. Lados correspondentes de triângulos congruentes

c.q.d.

Figura 37

A demonstração é bem organizada (hipótese, tese e demonstração), com argumentos e notações estruturadas, justificativa de idéias que possam causar confusão. Contudo no item 5 da justificação, aparece o caso de congruência (A.L.A.), ficando ao leitor a explicação do motivo do resultado. Em seguida apresentamos o teorema de Thales nomeado pelo autor:

> *T. 2: Teorema de Tales:* Um **feixe de retas paralelas** determina sobre duas transversais, **segmentos proporcionais**.
>
> $H \begin{cases} a \,//\, b \,//\, c; \text{ s e t, transversais} \\ \overline{AB} \text{ e } \overline{BC} \in s; \ \overline{MN} \text{ e } \overline{NP} \in t \end{cases}$ $T \begin{cases} \overline{AB}, \overline{BC}, \overline{MN} \text{ e } \overline{NP} \text{ são proporcionais} \\ \text{ou } \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{MN}{NP} \end{cases}$
>
> **Demonstração:**
>
> 
>
>
> **Figura 38**
>
> *Se* $\overline{AB}$ *e* $\overline{BC}$ *são* comensuráveis*, então existe um segmento de medida* u *contido um número* p *de vezes em* $\overline{AB}$ *e um número* q *de vezes em* $\overline{BC}$*. Vale, pois, a razão:*
>
> $$\frac{AB}{BC} = \frac{p}{q}\left(\text{na figura}: \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5} \right)$$
>
> *Tracando-se, pelos pontos de divisão dos segmentos* $\overline{AB}$ *e* $\overline{BC}$*, as* retas paralelas *às retas do feixe, elas interceptarão os segmentos* $\overline{MN}$ *e* $\overline{NP}$ *respectivamente em* segmentos congruentes entre si *(pelo T.1). Nestas condições, existe um segmento de medida* v*, também contido* p *vezes em* $\overline{MN}$ *e* q *vêzes em* $\overline{NP}$*, isto é, vale a* razão:
>
> $$\frac{MN}{NP} = \frac{p}{q}\left(\text{na figura}: \frac{MN}{NP} = \frac{3}{5} \right)$$
>
> *Portanto, as razões* $\dfrac{AB}{BC}$ e $\dfrac{MN}{NP}$ são iguais*, isto é:*
>
> $$\frac{AB}{BC} = \frac{MN}{NP}$$
>
> *e os segmentos* $\overline{AB}$*,* $\overline{BC}$*,* $\overline{MN}$ *e* $\overline{NP}$ *são* proporcionais.
>
> *(SANGIORGI, 1968: 146-147)*

Na demonstração do teorema, há uma mudança quando o autor conceitua segmentos comensuráveis. Ele utiliza um conceito diferente do que foi estudado no início do capítulo (relação entre o número racional e o segmento comensurável), definindo-o, geometricamente.

Para o caso em que os segmentos são incomensuráveis com a unidade, o livro traz uma nota esclarecendo: “Por escapar ao conteúdo deste livro, será admitido sem prova o caso no qual $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são segmentos incomensuráveis (SANGIORGI, 1968: 147)”.

Os exercícios propostos são todos de caráter de aplicação direta do teorema, em que todos os itens possibilitam estudar apenas de segmentos comensuráveis. Observem-se os exercícios a seguir:

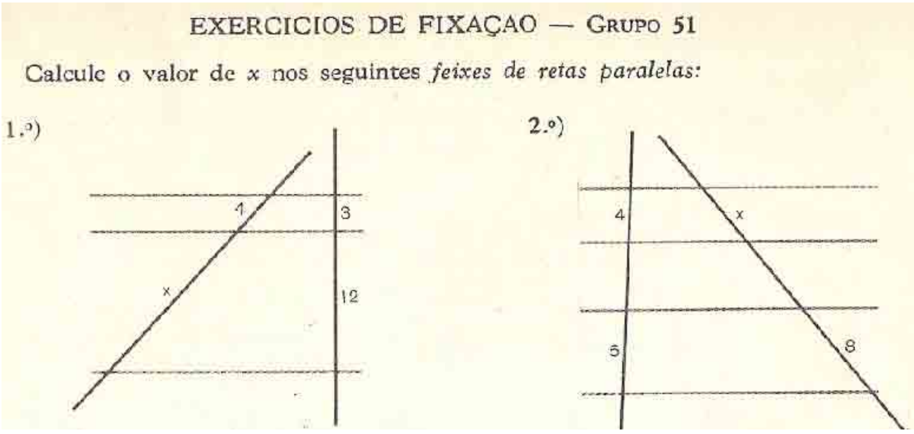


Figura 39

Conclusões

Ao analisar a coleção L5, percebemos que o teorema de Thales é abordado como uma das propriedades do feixe de paralelas, antecedendo o conteúdo de semelhança de triângulos. Sua prova concentra-se na demonstração do caso em que os segmentos são comensuráveis, sem demonstração do caso mais geral. Como os autores utilizam o conceito de comensurabilidade de segmentos, na demonstração, fomos verificar esse conceito no livro. O assunto é confusamente abordado. Em muitos momentos o autor passeia pelos conceitos geométrico e aritmético, sem fazer conexão entre as idéias. Utiliza o termo razão e fração, com o mesmo propósito, ao se referir à medida de dois segmentos. Para segmentos comensuráveis diz que, se a razão entre as medidas de dois segmentos é um número racional, os segmentos são denominados comensuráveis (SANGIORGI, 1968: 141); e, se a razão das medidas é um numero irracional, então os segmentos são denominados incomensuráveis (SANGIORGI, 1968: 141), fato que chamou a atenção.

Nos exercícios o autor aplica, de forma imediata, o teorema de Thales, repetindo o processo, diversas vezes, em vários itens, sendo trabalhado apenas o caso em que os segmentos são comensuráveis. A maioria dos exercícios são reduzidos a procedimentos algébricos, como o exemplo anterior.

4.6. Obra L6: A Conquista da Matemática

Descrição da obra

A coleção *A Conquista da Matemática* dos autores José Ruy Giovanni[30] e Benedito Castrucci[31], editora FTD, desde o início da década de 80 do século XX, vem sendo um enorme sucesso de vendas de livros didáticos de Matemática. Nesses mais de 20 anos, a coleção foi ganhando novas edições (atualizadas e reformuladas), sofrendo várias alterações em termos de capa, co-autoria, concepções e exercícios, movidas pelas exigências do mercado editorial.

Os livros da coletânea são datados de 1985, organizados em quatro volumes, que são divididos em unidades. Cada unidade, por sua vez, se divide em itens versando sobre subtópicos do tema principal da unidade. Os volumes têm, em média, 18 unidades. Cada unidade tem uma introdução, que exibe razoável uniformidade de organização interna, ao longo da coleção. Nas unidades da coleção, encontra-se seção de exercícios de fixação, organizada em grupos. No fim de cada unidade são exibidos exercícios "Complementares" com questões de múltipla escolha e respostas de exercícios de fixação. Pode-se, achar ainda, no final de algumas unidades, seções especiais intituladas "Leituras", contendo, em geral, aspectos históricos e algumas contextualizações de atividades do dia-a-dia do aluno.

---

[30] José Ruy Giovanni nasceu em 7 de março de 1937, em Rio Claro, interior de São Paulo. É bacharel e licenciado em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP). Por muitos anos foi professor de Matemática em escolas públicas e particulares da cidade de São Paulo, pois, desde muito cedo, percebeu que lecionar era sua verdadeira vocação. É autor de livros didáticos de Matemática pela Editora FTD, há cerca de 27 anos. Mantém contato permanente com professores de todo o Brasil, nesses anos todos, ministrando palestras e cursos.

[31] Benedito Castrucci (1909-1995) estudou no Ginásio Capital de São Paulo, em 1925. Fez curso técnico, motivo pelo qual ingressou tardiamente no Ginásio da Capital. Em 1930 recebeu o diploma de Bacharel em Ciências e Letras. Juntamente com o último ano de ginásio, cursou a Escola Normal do Brás, ficando habilitado como professor normalista. Foi bacharel em Ciências Jurídicas e Sociais pela Faculdade de Direito da USP, 1935, licenciado em Ciências Matemáticas e Físicas pela Faculdade de Filosofia Ciências e Letras da USP, em 1939, e doutor em Ciências Matemáticas pela FFCL da USP, em 1945. Fundou a Sociedade Brasileira de Matemática – SBM e foi autor de diversos livros de Matemática.

O estilo da coleção concentra-se na formalidade, embora se veja um pouco o caráter intuitivo. Na apresentação de cada livro didático, os autores ressaltam que “o objetivo deste livro é procurar despertar em vocês a aplicação da Matemática no mundo real, ao mesmo tempo que deve proporcionar-lhe habilidades suficientes para que possa enfrentar as questões que a Matemática e as ciências correlatas lhe apresentarão” *(GIOVANNI e CASTRUCCI, 1985: 5)*, mostrando o interesse em uma abordagem equilibrada entre o rigor matemático e uma Matemática experimental.

Ao longo da coleção observa-se grande concentração de tópicos de um mesmo campo, nos volumes de determinadas séries, como, por exemplo, 5ª e 6ª séries números; 7ª série, álgebra e 8ª série, geometria. Quanto à distribuição interna dos conteúdos nos volumes, percebe-se o padrão de agrupar os capítulos em grandes blocos destinados aos estudos de um mesmo tema. Além disso, o estudo da geometria e das grandezas e medidas é sempre deixado para os últimos capítulos dos volumes. No geral, os assuntos de aritmética e álgebra receberam maior destaque que os demais campos.

Os exercícios são, predominantemente, questões de fixação. São pouco freqüentes atividades que envolvam o contexto que o aluno vive, assim como habilidades de interpretação, observação, regularidade, conjecturas, argumentações lógicas, entre outros.

Segue uma síntese da estrutura da obra analisada.

TABELA VII: SINOPSE DA COLEÇÃO *A CONQUISTA DA MATEMÁTICA* DE GIOVANNI E CASTRUCCI

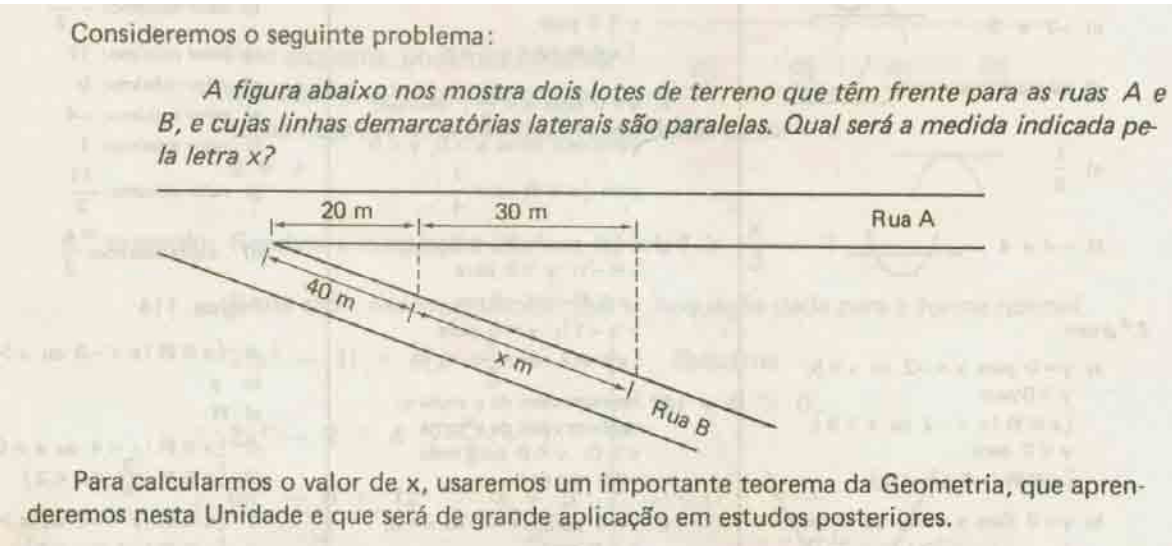
LIVROS	CAPÍTULOS E CONTEÚDOS
5ª SÉRIE	Uni. 1 – Conjunto dos números naturais; Uni 2 – Sistema de numeração; Uni 3 – Operações fundamentais com números naturais; Uni. 4 – Resolução de problemas com números naturais; Uni. 5 – Divisibilidade; Uni. 6 – MDC; Uni. 7 – MMC; Uni. 8 - Conjunto dos números racionais (Representação da forma fracionária); Uni. 9 – Resolução de problemas com números fracionários; Uni. 10 - Conjunto dos números racionais (Representação decimal); Uni. 11 – Introdução a Geometria; Uni. 12 – SMD: Medidas de comprimento; Uni. 13 – SMD: Medidas de superfície; Uni. 14 – SMD: Medidas de volume; Uni. 15 – SMD: Medidas de capacidade; Uni. 16 – SMD: Medidas de massa; Uni. 17 – Volume dos sólidos geométricos.
6ª SÉRIE	Uni. 1 – Potenciação; Uni. 2 – Estudo Elementar da Radiciação; Uni. 3 – Conjunto dos números inteiros; Uni. 4 – Conjunto dos números racionais relativos; Uni. 5. – Igualdade e desigualdade; Uni 6 – Equações do 1º grau com uma variável; Uni. 7. – Resolução de problemas do 1º grau com uma variável; Uni 8. – Inequação do 1º grau com uma variável; Uni. 9 – Coordenadas Cartesianas, Uni. 10 – Sistemas de equações do 1º grau com uma variável; Uni. 11 – Razão; Uni. 12 – Proporção; Uni. 13 – Proporção; Uni. 14 – Regra de três; Uni. 15 – Porcentagem e juros simples; Uni. 16 - Médias, Uni. 17 – Ângulos; Uni. 18 – Triângulos; Uni. 19 – Quadriláteros.
7ª SÉRIE	Uni. 1 – raiz quadrada; Uni. 2 – Conjunto de números reais; Uni. 3 – Expressões literais ou algébricas, Uni. 4 –Polinômios, Uni. 5. – Produtos Notáveis; Uni 6 –

	Fatoração; Uni. 7. – MDC e MMC; Uni 8. – Estudo das frações algébricas; Uni. 9 – Equações fracionárias; Uni. 10 – Equações literais do 1º grau; Uni. 11 – Sistemas de equações do 1º grau com duas variáveis; Uni. 12 – Determinação gráfica da solução de um sistema de equações do 1º grau com duas variáveis; Uni. 13 – Problemas do 1º grau com duas variáveis; Uni. 14 – Introdução a Geometria; Uni. 15 – Ângulos; Uni. 16 – Postulados e teoremas; Uni. 17 – Retas paralelas; Uni. 18 – Polígonos; Uni. 19 – Triângulos; Uni. 20 – Ângulos de um polígono convexo; Uni. 21 – Quadriláteros; Cap. 22 – Circunferência e círculo.
8ª SÉRIE	Uni. 1 – Potenciação; Uni. 2 – Calculo com radicais; Uni. 3 – Equação do 2º grau; Uni. 4 – Relações entre os coeficientes e as raízes da equação de 2º grau; Uni. 5 – Equações sujeitas a condições dadas; Uni. 6 – Equações redutíveis ao 2º grau; Uni. 7 – Equações Irracionais; Uni. 8 – Sistema simples de equações do 2º grau; Uni. 9 – Problemas do 2º grau; Uni. 10 – Sistema de coordenadas cartesianas; Uni. 11 – Estudo elementar de função; Uni. 12 – Função polinomial do 1º grau; Uni. 13 - Função polinomial do 2º grau; Uni. 14 – Segmentos proporcionais; Uni. 15 – Semelhança; Uni. 16 – Razões Trigonométricas no triangulo retângulo; Uni. 17 – Relações métricas no triangulo retângulo; Uni. 18 - Relações métricas e trigonométricas num triangulo qualquer; Uni. 19 – Relações métricas na Circunferência; Uni. 20 – Polígonos regulares; Uni. 21 – Medida da Circunferência e Uni. 22 – Áreas das figuras planas.

Análise do conteúdo específico

Essa coleção aborda o teorema de Thales no livro da 8ª série, unidade 14, intitulada *"Segmentos proporcionais"*, parágrafo 6, páginas 116 a 124. Nos tópicos que antecedem a demonstração do teorema de Thales podemos encontrar alguns conceitos importantes que os autores utilizam para a prova do teorema.

Os autores iniciam a unidade propondo um problema, como uma forma de provocar a curiosidade do aluno.


Consideremos o seguinte problema:

A figura abaixo nos mostra dois lotes de terreno que têm frente para as ruas A e B, e cujas linhas demarcatórias laterais são paralelas. Qual será a medida indicada pela letra x?

Para calcularmos o valor de x, usaremos um importante teorema da Geometria, que aprenderemos nesta Unidade e que será de grande aplicação em estudos posteriores.

Figura 40

Em seguida encontramos uma observação sobre algumas notações que serão utilizadas: AB = segmentos AB e $\overline{AB}$ = medida do segmento AB.

A definição de razão de dois segmentos[32] também é apresentada: "Razão de dois segmentos é a razão dos números que exprimem as medidas desses segmentos, tomadas na mesma unidade" (GIOVANNI E CASTRUCCI, 1985d: 116).

Nos próximos tópicos tratam-se do estudo de proporção[33], segmentos proporcionais[34] e feixe de paralelas, antes da apresentação do teorema de Thales. Iremos discutir agora, o conceito de feixe de paralelas e suas propriedades:

> Um conjunto de retas de um plano, paralelas entre si, denomina-se **feixe de retas paralelas** (ou simplesmente **feixe de paralelas**).
> A reta que corta as retas do feixe é denominada **transversal**.

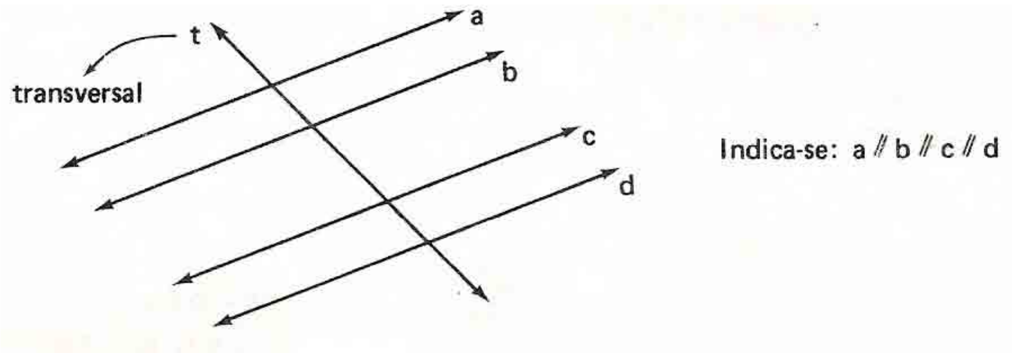


Figura 41

> Para facilitar, consideraremos **feixe de paralelas** um conjunto finito de retas paralelas entre si. (GIOVANNI e CASTRUCCI, 1985d: 118)

Consideramos importante observar que um feixe é um conjunto infinito de retas paralelas, porém, na maioria dos livros, encontramos um feixe de paralelas com três ou quarto paralelas.

A propriedade de feixe de paralelas será um resultado necessário para a demonstração do teorema de Thales; portanto, apresentaremos aqui a propriedade:

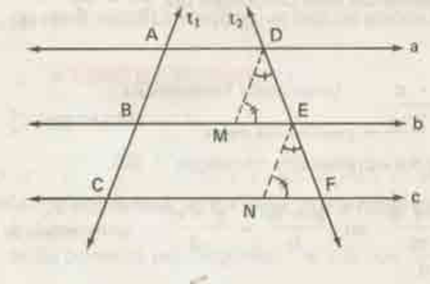
> Se um feixe de paralelas determina segmentos congruentes sobre uma transversal, também determina segmentos congruentes sobre qualquer outra transversal.

---

[32] Esse assunto já foi estudado na 6ª série, porém com diferente enunciado: *a razão de dois números racionais (com o segundo diferente de zero), é um quociente do primeiro pelo segundo* (GIOVANNI E CASTRUCCI, 1985b: 115).

[33] Esse assunto também foi visto na 6ª série em qu3e I Quatro números racionais a, b, c, e d, diferentes de zero, nessa ordem, formam uma proporção quando a razão o primeiro para o segundo é igual à razão do terceiro para o quarto. a : b = c : d ou $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (GIOVANNI e CASTRUCCI, 1985b: 121)

[34] Dizemos que quatro segmentos AB, CD, EF, GH, nessa ordem, são proporcionais quando os números que exprimem suas medidas (tomadas na mesma unidade) formam um proporção, isto é: $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{GH}}$ (GIOVANNI e CASTRUCCI, 1985d: 117)



$\left[\begin{array}{l} a \parallel b \parallel c \\ t_1 \text{ e } t_2 \text{ são transversais} \\ AB \cong BC \end{array}\right] \Rightarrow [DE \cong EF]$

Construção auxiliar

1. Por D, traçamos $DM \parallel AB$
2. Por E, traçamos $EN \parallel BC$

Demonstração	Justificação
1. ABMD é um paralelogramo.	1. $a \parallel b$ e $DM \parallel AB$
2. $DM \cong AB$	2. DM e AB são lados opostos de um paralelogramo.
3. BCNE é um paralelogramo.	3. $b \parallel c$ e $EN \parallel BC$
4. $EN \cong BC$	4. EN e BC são lados opostos de um paralelogramo.
5. $DM \cong EN$	5. Pela propriedade transitiva, pois $AB \cong BC$.
6. $\hat{D} \cong \hat{E}$	6. São ângulos correspondentes, para $DM \parallel EN$
7. $\hat{M} \cong \hat{N}$	7. São ângulos de lados paralelos de mesmo sentido.
8. $\triangle DME \cong \triangle ENF$	8. Caso ALA (ângulo, lado, ângulo).

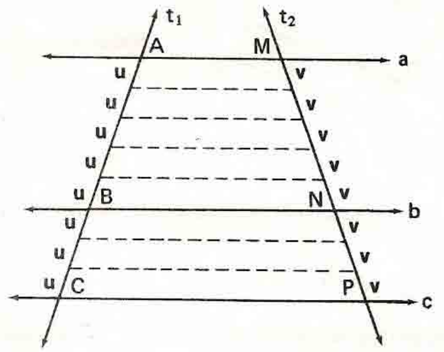
Portanto: $DE \cong EF$

Figura 42

Verifica-se que, na demonstração da propriedade, os autores, fazem um tratamento formal, indicando a hipótese, a tese, trabalhando-as passo a passo, justificando-as.

Finalmente, apresentamos o teorema de Thales:

> Um feixe de paralelas determina em duas transversais, quaisquer, segmentos proporcionais.



$\left[\begin{array}{l} a \parallel b \parallel c \\ t_1 \text{ e } t_2 \text{ são transversais} \end{array}\right] \Rightarrow \left[\frac{AB}{BC} = \frac{MN}{NP}\right]$

Figura 43

Demonstração

1. Suponha que AB e BC sejam comensuráveis e seja **u** a unidade padrão de medida. Logo: $\begin{array}{l}\overline{AB} = 5u \\ \overline{BC} = 3u\end{array} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{5}{3}$
2. Tracemos pelos pontos de divisão de AB e BC as paralelas à reta $a = \overleftrightarrow{AM}$ do feixe, que vão interceptar t_2 em segmentos congruentes (v), de acordo com a propriedade do feixe de paralelas. Então: $\begin{array}{l}\overline{MN} = 5u \\ \overline{NP} = 3u\end{array} \Rightarrow \frac{\overline{MN}}{\overline{NP}} = \frac{5}{3}$

3. Comparando 1 e 2, temos:

$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{NP}} \rightarrow$ AB, BC, MN, NP são proporcionais.

(GIOVANNI e CASTRUCCI, 1985d: 119)

Observamos que os autores demonstram o teorema apenas para o caso particular, em que AB = 5u, CD = 3u e u é a unidade padrão de medida, ficando uma observação para o caso dos segmentos incomensuráveis: "Se AB e CD forem incomensuráveis, o teorema também é verdadeiro, fato que aceitamos sem demonstração" (GIOVANNI e CASTRUCCI, 1985: 119). Contudo, não encontramos, na coleção, o conceito de segmentos comensuráveis e incomensuráveis.

Nos exercícios referentes ao teorema, quase todos são apresentados como uma aplicação imediata do resultado. Além disso, os exercícios envolvem apenas segmentos comensuráveis, uma vez que os autores enfatizam mais esse caso.

Outros exercícios posicionados no final do capítulo, alguns são mecânicos, outros tentam relacionar com o cotidiano do aluno; porém, a experiência dele é pouco valorizada, isto é, faltam atividades que envolvam o conteúdo e o universo cultural do aluno. Seguem-se alguns exercícios (GIOVANNI e CASTRUCCI, 1985d: 121-122):

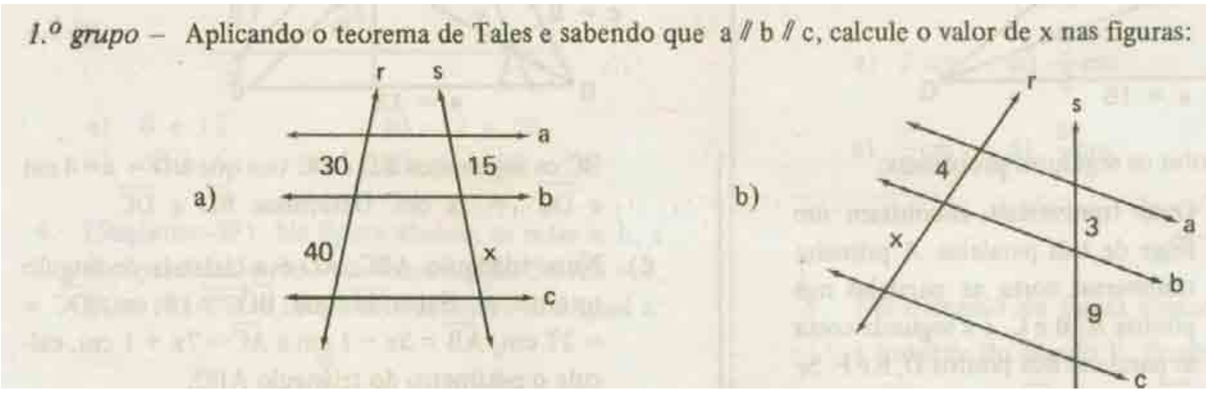


Figura 44

Duas avenidas partem de um mesmo ponto A e cortam duas ruas paralelas. Na primeira avenida, os quarteirões determinados pelas ruas paralelas medem 50m e 80m, respectivamente. Na segunda avenida, os quarteirões determinados medem 60m e xm, respectivamente. Calcule o valor de x. (Exercício do 4º grupo)

É pertinente ressaltar que no final da unidade, na seção leituras, o livro traz um texto tratando das "descobertas de Thales", em que os autores citam a história da medição da altura da pirâmide de Quéops, por Thales.

Conclusões

A analise a coleção L6, mostrou que o livro mantém um tratamento formal (hipótese, tese e demonstração), com apresentação linear do conteúdo. Os autores abordam conceitos como razão e proporção de segmentos, segmentos proporcionais e feixe de paralelas, itens que antecedem a exposição do teorema de Thales. Com isso, a prova se reduz à demonstração do caso em que os segmentos são comensuráveis com uma unidade padrão. Há uma observação que a demonstração também é valida para o caso geral, e que essa prova não se constitui objetivo da obra. Ressaltamos que a demonstração do teorema é bastante semelhante à encontrada na coleção L5.

Menção à comensurabilidade de segmentos, exposta na prova do teorema de Thales, não foi encontrada na coleção, o que pode causar certa dificuldade em relação aos conceitos.

Notamos que muitos dos exercícios tratam apenas de atividades que envolvem segmentos comensuráveis, mostrando coerência do foi afirmado no texto. Entretanto, a maioria dos exercícios é realizada como uma aplicação imediata do resultado. Os exercícios são do mesmo tipo encontrado na obra L5.

4.7. Obra L7: Matemática

Descrição da obra

A coleção *Matemática* de autoria de Luiz Márcio Pereira Imenes[35] e Marcello Lellis[36], novos personagens no mercado de livros didáticos de Matemática, na

---

[35] Luiz Márcio Pereira Imenes (1945 -) é engenheiro Civil pela Escola Politécnica da USP, em 1968. Licenciado em Matemática pela FFCL em Moema, em 1985 e mestre em Educação Matemática pela UNESP - Rio Claro, 1989. Professor e assessor na Educação Fundamental, Média e Superior desde 1964. Co-autor de várias coleções tais como: Vivendo a Matemática (7 vol, 1986), Matemática ao Vivo (4 vol, 1992), P'ra que serve Matemática (9 vol, 1992), Matemática (4 vol, 1996), Matemática-Novo Caminho (4 vol, 1997), Matemática Paratodos (4vol. – 5ª a 8ª Séries, 2002), Matemática Paratodos (4 vol. – 1ª a 4ª Séries, 2004) entre outros. É também co-autor dos livros e apresentador dos programas de Matemática do Telecurso 1º e 2º grau, e dos programas de Matemática em vídeo, do curso Livre de Atualização de Conhecimento, para professores da rede pública do Estado do Rio de Janeiro.

[36] Marcelo Lellis formou-se em Matemática pelo IME-USP é co-autor de várias coleções de Matemática no ensino fundamental, autor das Aulas de Matemática da complementação Pedagogia do Telecurso 2º Grau e consultor do ministério e do Desporto, para o projeto TV-Escola. Tem atuado

época, influenciados por grandes discussões em torno do ensino da Matemática, principalmente a partir do lançamento dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) em 1997, e pela avaliação dos livros didáticos promovida pelo MEC como parte integrante Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), o que exigiu dos autores um ensino mais contextualizado.

Assim, destaca-se nesse novo movimento de atualização da Matemática no Brasil, situações-problemas mais bem elaboradas, seleção de conteúdo mais direcionado ao dia-a-dia do aluno e abordagens baseadas na resolução de problemas, no uso de jogos, na história da Matemática e no uso de computadores, o que vêm contribuindo para uma melhora desse recurso didático.

A coletânea de livros escolhidos para a análise foi publicada, pela primeira vez em 1996, considerada inovadora para os parâmetros da época. Isso lhe garantiu, nas duas primeiras avaliações do MEC (1997 e 2002), a classificação de Recomendável com Distinção[37] (RD), conquistando, assim, o titulo de livro didático de Matemática mais indicado por professores nas escolas de todo país. Essa obra foi reeditada em 2001 com o titulo *Matemática Paratodos*, que segundo o autor,

> NÃO se trata de nova proposta. Apesar do novo nome, trata-se apenas de um aperfeiçoamento do estágio anterior. Fizemos a atualização dos dados, a correção das falhas, acrescentamos novas seções e atividades, e avançamos na abordagem de alguns tópicos (por ex: uso da calculadora), melhoramos a seqüência didática. Tudo isso com base no acompanhamento de algumas escolas que trabalham com nossos livros. Portanto, respondendo sua pergunta, não se trata de nova obra. As concepções norteadoras são as mesmas da edição anterior. (Informação pessoal[38])

A coleção *Matemática*, datada em 1999, 1ª edição (5ª impressão) é organizada em quatro volumes, divididos em capítulos, subdivididos em tópicos, dedicados a um tema matemático. Os volumes da coleção têm, em média, 12 capítulos e 44 tópicos. Cada capítulo é iniciado com uma seção de explanação do subtópico matemático a ser estudado, seguido da seção “conversando sobre o texto”, com grupos de questões que surgem após o texto, e que, segundo os autores, “devem ser formulados e respondidos oralmente” (Manual do Professor,

---

como professor de Matemática nos Ensino Fundamental, Médio e Superior e assessorado o Ensino de Matemática da Educação Infantil ao Ensino Médio em várias escolas publicas e particulares.

[37] Os livros didáticos que fazem parte da categoria Recomendável com Distinção, “são os que se destacam pelo esforço em se aproximar o mais possível do ideal representado pelos princípios e critérios. Constituem propostas pedagógicas elogiáveis, criativas e instigantes” (Guia, 2001: 13).

[38] Informação adquirida através do e-mail enviado no dia 8 de abril de 2005 às 12:08 pelo Professor Luiz Márcio Imenes (imenes@uol.com.br) em resposta a algumas dúvidas relacionadas à coleção Matemática Paratodos

1999: 11). Outro recurso é “Ação”, apresentado no livro em alguns capítulos, que pode constituir-se de jogos, construção com papel e tesoura, atividades de medidas, entre outros.

Nos capítulos ainda encontraremos no final de cada tópico “exercícios” e “exercícios para casa” ambos visando à comprovação de conceitos e técnicas aprendidas em sala de aula pelo aluno.

O livro oferece um “Dicionário ilustrado”, recurso que, no decorrer do livro, é utilizado sob o titulo: “O que é o que é?”. Porém os autores ressaltam que “(...) o dicionário não pretende expor definições puras. Seu objetivo é explicar os conceitos num nível adequado ao jovem aluno. É, portanto, um dicionário para a série a que se destina e não um dicionário de Matemática de caráter geral” (Manual do Professor, 1999: 12).

O livro do aluno encerra-se com “100 Supertestes” que propiciam a auto-avaliação do aluno, “Blocos de folhas especiais”, que auxiliam o aluno em vários exercícios, e, finalmente as respostas aos exercícios propostos no livro.

Os livros da coleção *Matemática* revela um estilo inovador em relação às coleções estudadas anteriormente, havendo um equilíbrio entre a intuição e a formalidade. Sua contribuição para a educação, segundo os autores, é que “basicamente, ele elimina as principais falhas do ensino tradicional, propondo uma nova organização dos conteúdos, a partir de um ‘currículo em espiral’ (Manual do Professor, 1999; 07)”, isto é, os assuntos são abordados mais de uma vez, conforme a série e a experiência do aluno, para que as retomadas de conteúdo não garantam somente a memorização, mas também diversas reelaborações do conhecimento adquirido, que vão aprofundar a compreensão.

A seleção de conteúdos apresentada na coleção contém tópicos usualmente trabalhados com alunos de 5ª a 8ª séries. Os temas são inovadores, sempre articulados com atividades do dia-a-dia dos alunos.

Os autores propõem um estudo da geometria partindo sempre do experimental para depois formalizar os conteúdos. Segundo Maria Ignez S. V. Diniz na apresentação do Manual do Professor (1999: 04), “(...) os alunos não só aprendem geometria, em todas as séries, como também dão um passo além no sentido de representar e compreender as figuras planas e as tridimensionais, bem como se engajar pouco a pouco no mundo das deduções lógicas”.

Enfim, segundo o Guia dos Livros Didático (2002):

> A coleção distingue-se em virtude de um conjunto de excelentes escolhas tanto com relação aos conteúdos, como no que diz respeito à metodologia de ensino. Nela, incluem-se os principais tópicos de Matemática que, em geral, são tratados no Ensino Fundamental, com destaque a itens que aproximam a coleção, de forma evidente, das propostas curriculares mais inovadoras em discussão na comunidade de educação Matemática. A organização dos assuntos reflete uma concepção não-linear de currículo, na qual um tema é tratado em vários pontos da coleção e de diferentes formas, respeitando-se, dessa maneira, o prolongado processo de aquisição do conhecimento dos conceitos e procedimentos matemáticos. Destacam-se as atividades e exercícios propostos com situações-problema significativas, que valorizam uma aprendizagem por compreensão.
> Assim, o desenvolvimento cognitivo do aluno é levado em conta, estimulando-se sua participação ativa no processo de aquisição do conhecimento matemático. Ele é, na verdade, o personagem central na escolha didática dos autores da obra (MEC, 2001: 21).

Segue-se na tabela abaixo, uma síntese da estrutura da obra analisada.

TABELA VIII: SINOPSE DA COLEÇÃO *MATEMÁTICA* DE IMENES E LELLIS

LIVROS	CAPÍTULOS E CONTEÚDOS
5ª SÉRIE	Cap. 1- Formas Geométricas, Cap. 2 - Operações fundamentais, Cap. 3 - Múltiplos e divisores, Cap. 4 - Construções geométricas, Cap. 5 – Frações, Cap. 6 - Números decimais e medidas, Cap. 7 – Simetria, Cap. 8 – Linguagem Matemática, Cap. 9 – Área e perímetro, Cap. 10 – Possibilidades e estatística, Cap. 11 – Porcentagens, Cap. 12 – Generalizações
6ª SÉRIE	Cap. 1 - Números naturais, Cap. 2 - Números decimais e frações, Cap. 3 - Formas geométricas, Cap. 4 – Medidas, cap. 5 – Proporcionalidade, Cap. 6 - Números negativos ou positivos, cap. 7 Construções geométricas, Cap 8 - Usando letras em Matemática, Cap. 9 – Equações, Cap. 10 – Porcentagens, Cap 11 – Estatísticas e gráficos, Cap. 12 – Áreas e volumes
7ª SÉRIE	Cap. 1 – Aplicações da Matemática, Cap 2 – Números Primos, Cap. 3 – Operações com Frações, Cap. 4 – Construções Geométricas, Cap. 5 – Potencias e raízes, Cap. 6 – Ângulos e polígonos, Cap. 7 - Cálculo algébrico, Cap. 8 - Estatística e possibilidades, Cap. 9. - Perímetros, áreas e volumes, Cap. 10- Equações e sistemas de equações, Cap. 11 - Geometria e proporcionalidade, Cap. 12 - Desenhando figuras espaciais
8ª SÉRIE	Cap. 1 - Semelhança, Cap. 2 - Números e cálculos, Cap. 3 - Equações e sistemas de equações, Cap. 4 - Trigonometria, Cap. 5 - Medidas, Cap. 6 - Classificação dos números, Cap. 7 - Estatística, Cap. 8 - Propriedades geométricas, Cap. 9 - Matemática, comércio e industria, Cap. 10 - Funções, Cap. 11 - Técnica algébrica, Cap. 12 - Construções geometrias.

Análise do conteúdo específico

Essa coleção aborda o teorema de Thales no livro da 8ª série, capítulo 8, intitulada “Propriedades Geométricas”, no tópico “Paralelismo”, páginas 203 a 208.

O teorema é apresentado com uma propriedade do paralelismo de retas. Veja as propriedades que antecedem o teorema de Thales:

1. Se as retas **r** e **s** são paralelas, os ângulos correspondentes **a** e **b** são iguais.
2. Se duas retas paralelas são cortadas por outras duas paralelas, formou-se um paralelogramo e seus lados opostos têm medidas iguais.

3. Se r//s, então os triângulos ABC e ADE são semelhantes. Por isso, as medidas de seus lados são proporcionais $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} = \frac{AC}{AE}$.

(IMENESE LELLIS, 1999: 203)

Em seguida, observa-se que: “dessas propriedades decorrem outras. Há uma famosa, dizem que descoberta pelo matemático grego Tales de Mileto (século VII a.C.)” (IMENES E LELLIS, 1999:204). Para esse resultado, os autores propõem-se verificar empiricamente, a partir da medição com uma régua, os segmentos correspondentes. Notamos que, apesar dos resultados serem aproximados, pois são decorrentes de medições, nada foi mencionado a respeito. Assim, possíveis diferenças de valores decorrentes da medição poderiam causar confusões[39].

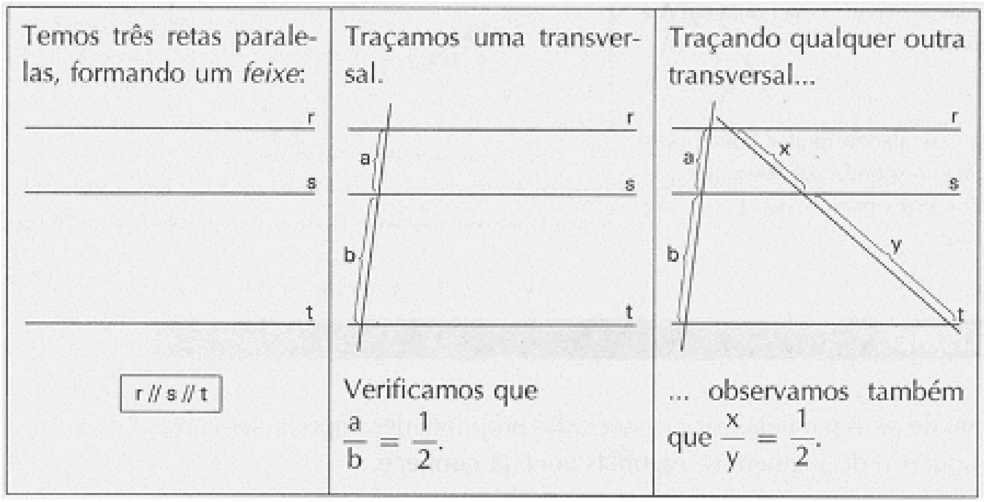


Figura 45

Embora não tenha sido mencionado, esse exemplo trata da demonstração do caso particular do teorema de Thales, em que os segmentos são comensuráveis.

Em seguida, é dada continuidade ao trabalho com o caso geral do exemplo mostrado acima. Vejamos como foi feita da dedução:

Vamos ver por que isso acontece. Acompanhe a dedução:

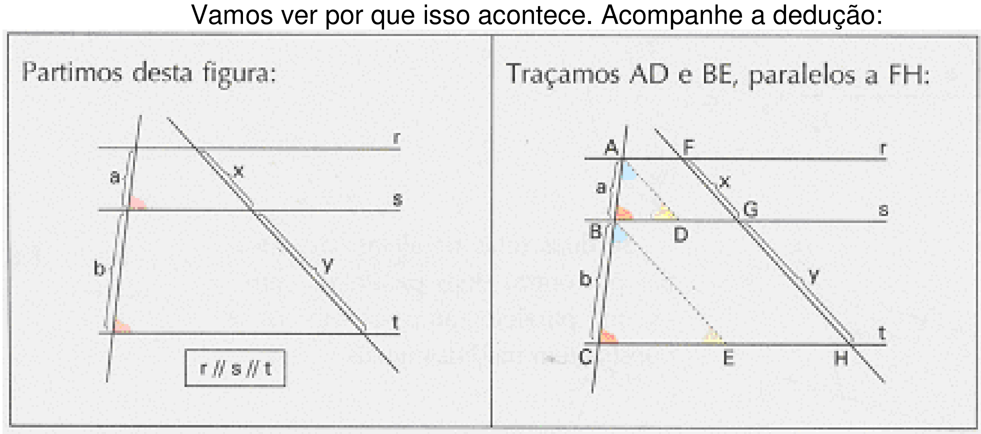


Figura 46

[39] Observamos que na edição de 2003 foram efetuadas correções visando a consertar esses problemas.

Os triângulos ABD e BCE são semelhantes porque têm ângulos iguais. Logo: $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{BE}$ OU $\frac{a}{b} = \frac{AD}{BE}$

Como os quadriláteros ADGF e BEHG são paralelogramos, resulta: AD = x e BE = y.

Portanto:

Figura 47

Em uma análise mais detalhada, percebemos que algumas questões podem não ter respostas evidentes para os alunos. Dentre elas destacamos: "Por que os ângulos de ABD e BCE são iguais?" Percebemos, também, que a figura pode influenciar a resposta do aluno, levando-o a concluir que AB cabe duas vezes dentro de BC, o que induziria, novamente, ao caso particular do teorema.

Alguns exercícios encontrados nesse livro merecem destaque, embora a maioria se trata apenas de aplicação imediata do resultado.

Na atividade de número 306, (página 206), o aluno deverá realizar uma demonstração bastante simples que, com certeza, estimulará sua habilidade de demonstração e argumentação. Nela encontra-se um ícone com a pergunta: "O que é o que é?", sugerindo que o aluno consulte, no dicionário contido no livro, definições de termos relacionados aos conteúdos, evitando, com isso, a inclusão, no texto, de conceitos "desnecessários" para o momento.

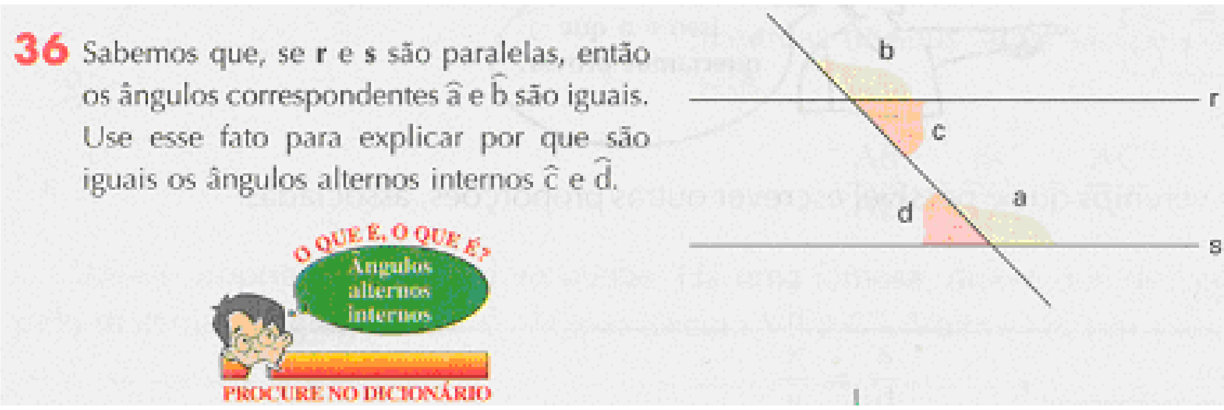
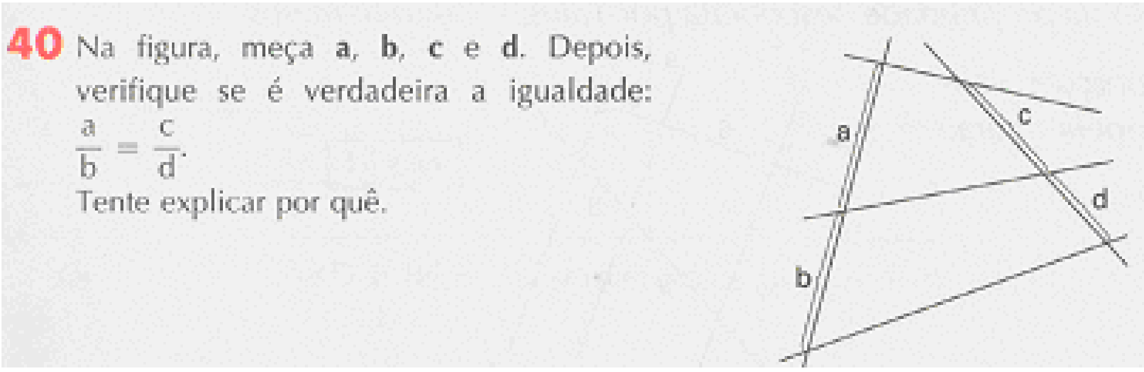


Figura 48

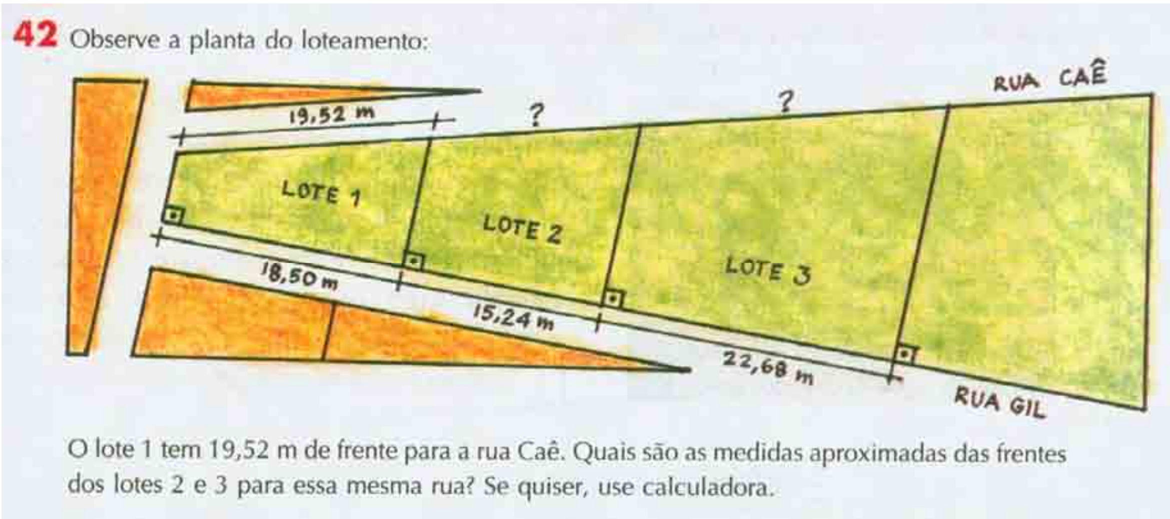
Na atividade de número 40 (página 206), o aluno terá oportunidade de argumentar, para justificar uma situação em que o teorema de Thales não é válido.



40 Na figura, meça **a**, **b**, **c** e **d**. Depois, verifique se é verdadeira a igualdade: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.
Tente explicar por quê.

Figura 49

Finalmente, na atividade 24, (página 207), encontra-se uma situação bastante comum, nos livros didáticos, mas que serve para mostrar uma aplicação do teorema de Thales em situação do cotidiano do aluno.



42 Observe a planta do loteamento:

O lote 1 tem 19,52 m de frente para a rua Caê. Quais são as medidas aproximadas das frentes dos lotes 2 e 3 para essa mesma rua? Se quiser, use calculadora.

Figura 50

Em todos os itens do exercício 41, com exceção do item **a**, pode possibilitar ao professor fazer uma relação entre o números irracionais e segmentos incomensuráveis. Verifique:

41. Em cada figura temos r//s//t. Use o teorema de Tales e calcule x:

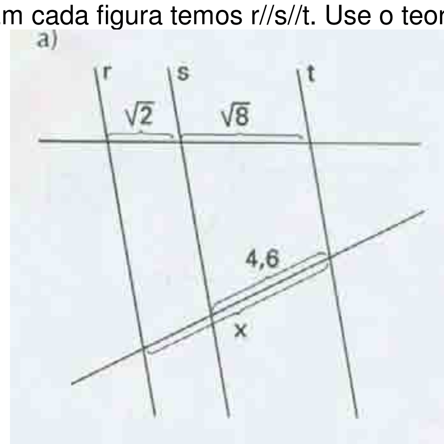


Figura 51

(IMENES e LELLIS, 1999: 207)

Conclusões

A análise da coleção L7 mostra que o assunto é abordado como uma propriedade do paralelismo de retas em que a demonstração do caso particular é proposta como uma prova empírica, a partir da medição, com régua e compasso, dos segmentos correspondentes. Para a demonstração que os segmentos são incomensuráveis os autores utilizam o conceito de semelhança de triângulos, tratado no capítulo 1 do livro, deixando algumas dúvidas quanto ao processo de dedução para o caso de semelhança. Entretanto, não há menção ao conceito de comensurabilidade de segmentos, isto é, medição de grandezas geométricas, que não é trabalhada na coleção, com a justificativa do uso de semelhança de triângulos na demonstração.

Com relação aos exercícios propostos, notamos que a maioria privilegia a abordagem de novos conceitos. Encontramos alguns exercícios de aplicação imediata do teorema, porém um exercício, possibilita o estudo de segmentos incomensuráveis.

DISCUSSÕES GERAIS

Este trabalho teve o intuito de estudar a abordagem dada ao tratamento geométrico dos números reais, isto é, a comensurabilidade de grandezas, por meio do teorema de Thales, em alguns livros didáticos de Matemática, que marcaram o ensino da disciplina durante a segunda metade do século XIX e do século XX. Tentamos configurar o estilo da escrita das obras antigas e modernas dessa área, contribuindo para estudos que envolvam o desenvolvimento de conceitos matemáticos no ensino escolar no Brasil.

A análise dos livros didáticos de Matemática constitui numa rica fonte de informações sobre o próprio ensino de Matemática, pois eles fazem parte de todo um processo de ensino e aprendizagem. Preferimos estudar obras antigas e contemporâneas que tiveram grande importância no cenário nacional. Por isso, durante nossa pesquisa, optamos por acrescentar algumas características importantes das obras para época, como a estrutura dos textos, quando possível, notas de rodapé, a biografia dos autores.

Na análise dos livros didáticos percebemos, também, várias mudanças durante o período selecionado. Podemos citar, por exemplo, a quantidade de exercícios, as ilustrações, a apresentação dos conteúdos, a estrutura das obras etc. Foi possível perceber, também, o desenvolvimento da escrita da Matemática voltada para o ensino e as características de cada fase pela qual a educação vem passando.

No que se refere ao teorema de Thales, a nomenclatura utilizada nos livros didáticos, relacionado ao teorema das Linhas Proporcionais, só se estabeleceu em nossa pesquisa, partir da coleção L5. No caso da coleção L4, essa nomeclatura está relacionada ao teorema sobre triângulos semelhantes.

Com relação ao estudo da comensurabilidade de grandezas, os livros L1, L2, L3 e L5 estudam esse assunto no mesmo volume, em capítulos que antecedem a demonstração do teorema. O livro L4 aborda o assunto nos volumes da 2ª e 4ª séries ginasiais, nos dois casos, é apresentado da mesma maneira. O livro L6, embora apresente, na demonstração do teorema, o termo incomensurável, não foi encontrado na coleção a exposição desse conteúdo. E o livro L7 não utiliza o conceito na demonstração e, portanto, não o estuda.

Um fato importante a ressaltar é que as coleções L4 e L5 relacionam o estudo de comensurabilidade de grandezas com os números racionais e irracionais, porém, na obra L5, o estudo é apresentado com certa confusão conceitual.

Quanto ao conteúdo analisado, o primeiro manual escolar, L1, há, no desenvolvimento do teorema, a preocupação em estudar tanto a comensurabilidade quanto a incomensurabilidade de segmentos. Uma característica desse manual é o formato de “volume único”, isto é, o mesmo livro pode ser estudado em todos os níveis de escolaridade, justificando, talvez, o aparecimento completo da abordagem do assunto. Ressaltamos mais uma vez que os conteúdos expostos nos livros didáticos envolvem opções didáticas, diretamente ligados ao curso a ele destinado. Portanto, o fato de encontrarmos a demonstração completa do teorema de Thales nesse livro, e a ausência do assunto em outras coleções, é reflexo dessas opções didáticas.

No livro L2, embora em volume único, o teorema não é demonstrado de forma completa, com prova, somente, do caso comensurável. A partir do período em que são editados livros seriados, no Brasil desde o Movimento de Modernização do Ensino, nos livros analisados, L3, L4, L5, L6 e L7 apresentam a demonstração voltada apenas para o caso em que os segmentos são comensuráveis. Nesses livros alguns autores fazem observações sobre o fato do teorema ser aplicado ao caso em que os segmentos sejam incomensuráveis.

Na parte de exercícios, a maioria dos exercícios se resume a aplicações diretas do resultado do teorema. Em todos os livros didáticos analisados, os autores apresentam atividades que podem possibilitar ao professor explorar o estudo de segmentos comensuráveis; porém, apenas as obras L2, L3 e L4 oferecem exercícios que possibilitam o estudo de segmentos incomensuráveis. É importante lembrar que em nenhum momento esses exercícios evolvem explicitamente conceitos de comensurabilidade de segmentos. Consideramos que o estudo envolvendo esse assunto, por meio desses exercícios, fica a cargo do professo explorar.

Veja-se, na tabela abaixo uma síntese das análises dos livros didáticos de Matemática selecionados para esta pesquisa.

TABELA IX: SÍNTESE DAS ANÁLISES DOS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA:

	L1	L2	L3	L4	L5	L6	L7
Nomeia com teorema de Thales o teorema das linhas proporcionais							
Estuda comensurabilidade de grandezas							
Demonstra o caso comensurável do teorema							*
Demonstra o caso incomensurável do teorema							*
Utiliza o termo comensurável(is) e/ou incomensurável(is) na demonstração							
Relaciona comensurabilidade a número racional e irracional							
Contém exercícios que possibilitam estudar segmentos comensuráveis							
Contém exercícios que possibilitam estudar segmentos incomensuráveis							

Com relação ao estilo da demonstração do teorema de Thales, todas as obras analisadas demonstram o caso em que os segmentos são comensuráveis de forma semelhante à apresentada no capítulo 3, páginas 39 e 40, com o uso do conceito de número da época dos pitagóricos. Eles apresentam a demonstração de forma bastante organizada, desprendendo-se de algumas particularidades visuais das figuras.

Quanto ao estilo da demonstração para o caso em que os segmentos são incomensuráveis, há duas demonstrações diferenciadas. O autor Ottoni (1904), da obra L1, que trabalha na demonstração com aproximações sucessivas de "números comensuráveis" (a relação numérica entre duas grandezas comensuráveis), utilizando conceitos usados na Aritmética e a Álgebra.

Os autores Imenes e Lellis (1999), da colação L7, como não utilizam para a demonstração de conceitos sobre comensurabilidade de grandezas, ele se

* Os autores dessa coleção, embora demonstrem o teorema para os casos particular e geral, não utilizam a teoria da comensurabilidade de grandezas em sua demonstração.

apropriam de conceitos de semelhança de triângulos para demonstrar o teorema para o caso geral.

Assim, não encontramos nos livros didáticos de Matemática analisados, conexão entre os aspectos algébrico e geométrico referente ao teorema de Thales. Os autores das obras não fazem essa relação. Em alguns momentos observamos uma tentativa desse feito, principalmente nas coleções L4 e L5, porém com uma certa confusão conceitual.

De maneira holística, foi possível perceber que, ao longo dos anos, houve um certo "movimento de simplificação do conteúdo" que implicou na forma de abordagem. Isso se deve as opções didáticas de cada autor, em época diferenciadas, direcionando a série a qual o livro é destinado. Os livros didáticos analisados abordaram o teorema de Thales condizente com a proposta apresentada pelos autores, porém consideramos que deve haver mais uma conexão entre a apresentação do assunto e os conceitos adquiridos anteriormente pelos alunos, para que os mesmos possam explorar o mínimo sua existência e dificuldade.

Assim, é plausível crer que a idéia subjacente ao teorema de Thales, ligada às condições de proporcionalidade de segmentos, isto é, medição de segmento, pode ser uma forma de introduzir números reais positivos. E essa aplicação geométrica dada aos números reais pelo teorema de Thales poderia ser uma forma de abordar o conceito. Nos livros didáticos analisados esse fato não ocorre.

Enfatizar o tratamento de comensurabilidade de segmentos no desenvolvimento da demonstração do teorema de Thales possibilita estabelecer relação com a construção dos números reais, retomando-se o conceito de números com uma conotação geométrica, como uma forma de retorno às origens gregas.

Propostas de trabalho com os números reais, via medição, já podem ser encontradas. No trabalho de Baroni & Nascimento (2005), há uma proposta de tratamento para os números reais, via medição, que pode ser considerada uma proposta concreta visando à melhoria do ensino dos números reais.

Consideramos a história da Matemática um meio de abordar o teorema de Thales, principalmente se estudarmos os conceitos que permeiam sua demonstração e que podem ser estudados por meio da busca de sua origem na Matemática grega, desse modo que a história da Matemática possa ser integrada às aulas da disciplina.

Parece-nos que, na história da Matemática, o estudo do teorema de Thales está diretamente ligado ao conceito de comensurabilidade de grandezas, favorecendo, assim, a utilização desse tema para realizar um trabalho com o conjunto dos números reais.

Dificuldades foram apresentadas no decorrer da pesquisa, principalmente na aquisição dos livros didáticos de Matemática selecionados. Muitas vezes viajamos horas para encontrar um volume da coleção, e ao encontrá-lo observamos que as páginas com o conteúdo alvo da pesquisa estavam rasgadas. Recomeçava, então, a busca.

O trabalho não se esgota aqui, pois novos anseios surgiram no decorrer da pesquisa; uns ligados aos livros didáticos de Matemática, outros, sobre a possibilidade de trabalhar com a história da Matemática como um recurso didático, principalmente em relação a conteúdos em que há dificuldades de aprendizagem.

Assim, esperamos que o trabalho, no aspecto que concerne à história da educação Matemática, venha contribuir para pesquisas voltadas ao ensino da Matemática, na medida em que estamos fazendo uma reflexão sobre a forma como o conteúdo abordado pode estimular a aprendizagem do aluno dentro das propostas atuais de educação.

BIBLIOGRAFIA

AABOE, A. **Episódios da História antiga da matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 1984.

ALVEZ-MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. **O Método nas Ciências Naturais e Sociais:** pesquisa quantitativa e qualitativa. São Paulo: Pioneira, 1998.

ÁVILA, G. Eudoxo, Dedekind, números reais e ensino de Matemática. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, v. 7, p. 5-10, 1989.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Rio de Janeiro: Edições 70, 1977.

BARONI, R. L. S; NOBRE, S. A pesquisa em História da Matemática e suas relações com a Educação Matemática.In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática**: Concepções e Perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 129-136.

BARONI, R. L. S.; TEIXEIRA, M. V.; NOBRE, S. R. A Investigação Cientifica em História da Matemática e suas Relações com o Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. de C. (Org). **Educação Matemática**: Pesquisa em Movimento. São Paulo: Cortez, 2004. p. 164-185.

BARONI, R. L. S.; NASCIMENTO, V. M. do. **Um Tratamento, via Medição, para os Números Reais.** São Paulo: SBHMat, 2005. (Coleção História da Matemática para professores).

BATISTA, A. A. G. **Recomendações para uma política de livros didáticos**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria da Educação Fundamental, 2001.

BELTRAME, J. **Os programas de Ensino de Matemática do Colégio Pedro II**: 1837 – 1932. 2000. 259 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro, 2000.

BENITO, A. E. El Libro Escolares como Espacio de Memória. In: OSSENBACH, G. O.; SOMOZA, M.(Org.). **Los Manuales Escolares como Fuente para la Historia**

de la Educación em América Latina. Madri: Universidad Nacional de Educacion a Distancia, 2001. p. 46-66.

BIOGRAPHICAL Dictionary of Mathematicians: reference biographies from the Dictionary of scientific biography. New York: Charles Scrinber's Sons; 1991. v. 4. p. 2432-2438.

BIRAL, A. C. Trigonometria: **Uma Abordagem Histórica e uma Análise de Livros Didáticos.** 2000. 217f. Dissertação (Mestrado em Matemática), Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro, 2000.

BITTENCOUURT, C. M. F. **Livro Didático e conhecimento histórico**: uma história do saber escolar. 1993. 369f. Tese (Doutorado em História) – Faculdade de Filosofia, Letras e Ciencias Humanas, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1993.

BOURBAKI, N. **Elements of the history of Mathematics**. New York: Springer-Velag, 1994.

BOYER, C. **História da Matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros **Curriculares Nacionais** – Matemática (5ª a 8ª série). Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. MEC. Secretaria de Educação Fundamental. Programa Nacional do Livro Didático. **Guia de Livros Didáticos de 5ª a 8ª série**. Brasília: MEC/SEF, 2002.

CARAÇA, B. de J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Gradiva, 2002.

CARRAHER, D. W. Lines of Thought: A ratio and operator model of rational number. **Educational Studies in Mathematics**, v. 24, n. 4, p. 281-305 1993.

CHERVEL, A. História das Disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. **Teoria Educação**, Porto Alegre, n. 2, p. 177-229, 1990.

CHOPPIN, A. História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 30, n. 3, p. 549-566, set./dez. 2004.

CHOPPIN, A. O Historiador e o livro escolar. **História da Educação**, Pelotas, n. 11, p. 5-24, abr.2002.

CHOPPIN, A. Pasado y Presente de los Manuales Escolares. In: BERRIO, J. R. (Ed.). **La Cultura Escolar de Europa**: Tendências históricas emergentes. Madri: Biblioteca Nueva, 2000. p. 107-141.

COBIANCHI, A. S. **Estudos de Continuidade e Números Reais**: Matemática, Descobertas e Justificativas de Professores. 2001. 433f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2001.

COSTA, G. M. L. da. **Os Livros Didáticos de Matemática no Brasil do século XIX**. 2000. 108f. Dissertação (Mestrado em Matemática), Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro, 2000.

ENCICLOPEDIA Universal Ilustrada: Europeo– Americana. Madrid: Espasa-Calpe, S.A.; 1928. p. 39-42.

EVES, F. **Introdução à História da Matemática**. Campinas, SP: Editara da UNICAMP, 2004.

F.I.C. **Elementos de Geometria**. Rio de Janeiro: Livraria Garnier, sd.

FISCHBEIN, E; JEHIAM, R; COHEN, D. The Concept of Irrational Numbers in High-School Students and Prospective Teachers. **Educational Studies in Mathematics**, vol. 29, p. 29-44, 1995.

FOWLER, D. H. Anthyphairetic Ratio and Eudoxan Proportion. **Archives for History of Exact Sciences**, v. 22, p. 69-72, 1980.

FOWLER, D. H. Book II of Euclid's Elements and a pré-Eudoxan Theory of Ratio – Part 2: Sides and Diameters. **Archives for History of Exact Sciences**, n. 26, p. 193-209, 1982.

FOWLER, D. H. Book II of Euclid's Elements and a pré-Eudoxan Theory of Ratio. **Archives for History of Exact Sciences**, v. 22, p. 5-36, 1980.

FOWLER, D. H. **The Mathematics of Plato's Academy** – a New Reconstruction. 2. ed. Oxford: Claredon Press, 1999.

FREITAG, B.; MOTTA, V. R.; COSTA, W. F. da. **O livro didático em questão**. 3. ed. São Paulo: Cortez, 1997.

GARNICA, A. V. M. História Oral e Educação Matemática. In: BORBA, M. C.; ARAUJO, J. L.(Org.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

GIOVANNI, J. R.; CASTRUCCI, B. **A conquista da Matemática** – 5ª série. São Paulo: FTD, 1985.

GIOVANNI, J. R.; CASTRUCCI, B. **A conquista da Matemática** – 6ª série. São Paulo: FTD, 1985.

GIOVANNI, J. R.; CASTRUCCI, B. **A conquista da Matemática** – 7ª série. São Paulo: FTD, 1985.

GIOVANNI, J. R.; CASTRUCCI, B. **A conquista da Matemática** – 8ª série. São Paulo: FTD, 1985.

GOLDENBERG, M. **A arte da Pesquisa**. Rio de Janeiro: Record, 1997 .

HARUNA, N. C. A. **Teorema de Thales**: uma abordagem do processo ensino-aprendizagem. 2000. 230f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2000.

HEATH, T. A. **A history of Greek Mathematics.** New York: Oxford, 1921. v. 1.

HEATH, T. L. **The Thirteen Books of Euclid's Elements.** v.1, 2nd. Ed, New York: Dover Publications, 1956a.

HEATH, T. L. **The Thirteen Books of Euclid's Elements**. v.2, 2nd. Ed, New York: Dover Publications, 1956b.

HEATH, T. L. **The Thirteen Books of Euclid's Elements.** v.3, 2nd. Ed, New York: Dover Publications, 1956c.

HÖFLING, E. de M. notas para discussão quanto à implementação do programa de governo: Em foco o Programa nacional do Livro Didático. **Educação & Sociedade**, Campinas, v. 21, n. 70, p. 159-170, 2000.

IMEMES, L. M. P.; LELLIS, M. C. T. **Matemática** - 5ª série. São Paulo: Scipione, 1999.

IMEMES, L. M. P.; LELLIS, M. C. T. **Matemática** - 6ª série. São Paulo: Scipione, 1999.

IMEMES, L. M. P.; LELLIS, M. C. T. **Matemática** - 7ª série. São Paulo: Scipione, 1999.

IMEMES, L. M. P.; LELLIS, M. C. T. **Matemática** - 8ª série. São Paulo: Scipione, 1999.

KATZ, V. J. **A History of Mathematics:** an introduction. New York: HaperCollins College Publishers, 1993.

KNORR. W. Aristotle and Incommensurability: Some Further Reflections. **Archives for History of Exact Sciences**, v. 24, p. 1-9, 1981.

LIMA, E. L. **Meu Professor de Matemática e outras histórias**. 4ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2004. (Coleção Professor de Matemática).

LINTZ, R. G. **História da Matemática**. Blumenal: Editora FURB, v. 1, 1999.

LORENZ, K. M.; VECHIA, A. Os livros Didáticos de Matemática na escola secundária brasileira no século XIX. **História da Educação**, Pelotas, n. 154, p. 53-72, 2004.

MASSOT, C. **Autour de Thales**. Commission Inter–IREM Premier Cycle, l'Imprimerie CRIRAT, 1995.

MAURO, S. **Uma História da Matemática Escolar Desenvolvida por Comunidade de Origem Alemã no Rio Grande do Sul no Final do século XIX e início do século XX.** 251f. 2005. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual paulista, Rio Claro, 2005.

MELO, S. B. A compreensão do conceito de números irracionais e sua história: Uma estudo junto a alunos dos cursos de ciências exatas. **Revista Symposium**, UNICAP – PE, n. 1, pp. 27-36, 1999.

MIGUEL, A. Reflexões acerca da Educação Matemática Contemporânea. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, n. 2, , p. 53-60, 1994.

MIORIM, M. A. **Introdução à História da Educação Matemática**. São Paulo: Editora Atual, 1998.

MOISE, E. E.; DOWRS, F. L. **Geometria Moderna** – Parte I. Renata G. Watanabe e Dorival A. Mello. São Paulo: Edgard Blücher, 1971.

MOLINA, O. O livro Didático. **Comunicações e Artes**, São Paulo n. 11, p. 125-138, 1982.

MOLINA, O. **Quem engana quem**: professor x livro didático. 2. ed. Campinas, SP: Papirus, 1988.

MOREIRA, P. C; DAVID, M.M.M.S. Números racionais: Conhecimentos da Formação Inicial e Prática Docente na Escola Básica. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, n. 21, p.1-19, 2004.

MUNAKATA, K. **Produzindo livros didáticos e paradidáticos**. 1997. 218f. Tese de (Doutorado em História e Filosofia da Educação), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1997.

NEUGEBAUER, O. **The exact sciences in antiquity**. 2. ed. New York: Dover Publications, 1969.

NIVEN, I. **Números:** Racionais e Irracionais. Tradução de Renate Watanabe. Rio de Janeiro: SBM, 1984. (Coleção Fundamentos da Matemática Elementar).

NOGUEIRA, R. G. **Introduçao ao Ensino da Álgebra Elementar**: o simbolismo algébrico nos livros-textos. 1996. 185f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1996.

OLIVEIRA, J. B. A.; GUIMARÃES, S. D. P.; BOMÉNY, H. M. B. **A política do livro didático**. São Paulo: Summus, 1984.

OSSENBACH, G.; SOMOZA, M. Introducción. . In: OSSENBACH, G. O.; SOMOZA, M.(Org.). **Los Manuales Escolares como Fuente para la Historia de la Educación em América Latina**. Madri: Universidad Nacional de Educacion a Distancia, 2001. p. 13-45.

OTTONI, C. B. **Elementos de Geometria e Trigonometria Rectilínea.** 10. ed. Rio de Janeiro: Livraria Clássica de Francisco Alves, 1904.

QUINTELLA, A. **Matemática para primeira série ginasial**. Curso Ginasial. 70. ed. Rio de Janeiro: Companhia Editora Nacional, 1961.

QUINTELLA, A. **Matemática para quarta série ginasial**. Curso Ginasial. 56. ed. Rio de Janeiro: Companhia Editora Nacional, 1965.

QUINTELLA, A. **Matemática para segunda série ginasial**. Curso Ginasial. 57. ed. Rio de Janeiro: Companhia Editora Nacional, 1960.

QUINTELLA, A. **Matemática para terceira série ginasial**. Curso Ginasial. 59. ed. Rio de Janeiro: Companhia Editora Nacional, 1963.

ROBINET, J. Les Réels: Quels modèles em ont les élèves? **Educational Studies in Mathematics**, v. 17, n. 4, p. 359-386, 1986,.

ROXO, E.; THIRÉ, C.; MELLO e SOUZA, J.C. de. **Curso de Matemática** – 1º Ano. 13. ed. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1941a.

ROXO, E. THIRÉ, C.; MELLO e SOUZA, J.C. de. **Curso de Matemática** – 2º Ano. 9. ed. Rio de Janeiro, Francisco Alves, 1941b.

ROXO, E.; THIRÉ, C.; MELLO e SOUZA, J.C. de. **Curso de Matemática** – 3º Ano. 4. ed. Rio de Janeiro, Francisco Alves, 1941c.

ROXO, E., THIRÉ, C., MELLO e SOUZA, J.C. de. **Curso de Matemática** – 4º Ano. 6. ed. Rio de Janeiro, Francisco Alves, 1942.

RUGGIERO, M. A.; BASSO, I. S. A Matemática no Livro Didático: Uma Reflexão Critica na Perspectiva histórico-cultural **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, n. 20, p. 17 – 36, 2003.

SANGIORGI, O. **Matemática**: Curso Moderno para os ginásios. 15. ed. revista e ampliada. São Paulo: Companhia Editora Nacional, v. 1, 1970.

SANGIORGI, O. **Matemática:** Curso Moderno para os ginásios. 3. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, v. 2, 1966.

SANGIORGI, O. **Matemática:** Curso Moderno para os ginásios. 5. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, v. 3, 1968.

SANGIORGI, O. **Matemática:** Curso Moderno para os ginásios. 4. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, v.4, 1969.

SANGIORGI, O. Nascimento, paixão e vivencia de novas tecnologias no livro didático de matemática. **Comunicações e Artes**, São Paulo, n. 11, p. 189-197, 1982.

SANTOS, I. I. de C. P. História das disciplinas escolares: perspectivas de análise. **Teoria Educação**, Porto Alegre, n. 2, p. 21-29, 1990.

SCHUBRING, G. **Análise histórica de Livros de Matemática**: notas de aula. Tradução Maria Laura Magalhães Gomes. Campinas, SP: Autores Associados, 2003.

SILVA, C. M. S. da. O Livro Didático de Matemática do Brasil no século XIX. In: FOSSA, J. A. (Org.). **Facetas do diamante**: Ensaios sobre educação Matemática e história da Matemática. Rio Claro, SP: SBHMat, 2000, p. 109-162.

SOARES, E. F. E; FERREIRA, C. C; MOREIRA, P. C. Números reais: Concepções dos Licenciados e Formação Matemática na Licenciatura. **ZETETIKÉ**, Campinas, v. 7, n.12, 1999, p. 95-117.

SOARES, M. B. Um olhar sobre o livro didático. **Presença pedagógica**. Belo Horizonte, v. 2, n. 12, 1996, p. 52-64.

THIENGO, E. R. **A Matemática de Ary Quintela e Osvaldo Sangiorgi**: Um Estudo Comparativo. 2001. 153f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal Espírito Santo, Vitória, 2001.

VALENTE, W. R. (Org). **Euclides Roxo e a modernização do Ensino de Matemática no Brasil**. São Paulo: SBEM, 2003.

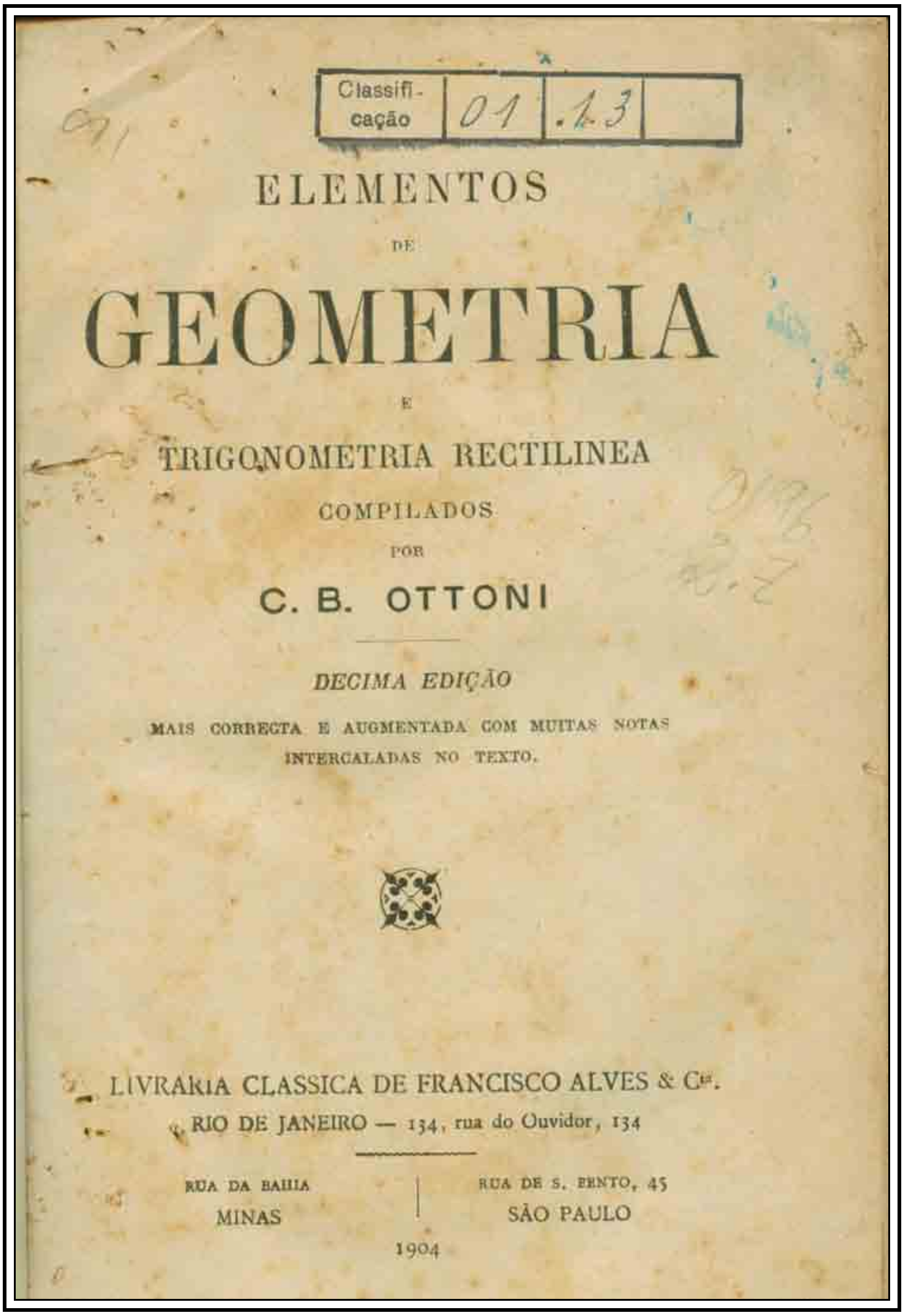
VALENTE, W. R. Positivismo e Matemática Escolar dos Livros Didáticos no Advento da República. **Cadernos de Pesquisa**, São Paulo, n. 109, 2000, p. 201-212.

VALENTE, W. R. **Uma história da Matemática escolar no Brasil (1730-1930)**. São Paulo: Annablume, 2002.

VARIZO, Z. C. M. O Livro Didático. Ontem e Hoje. **Cadernos de pesquisa,** Vitória, v. 1, n. 1, 1995, p. 125-140.

ZÚÑIGA, N. O. C. **O Processo de Avaliação e Escolha de Livros Didáticos de Matemática no Brasil.** 2001. 132f. (Dissertação Mestrado em Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro, 2001.

ANEXO 1: Contra-capa do livro *Elementos de Geometria e Trigonometria Rectilínea* de Cristiano Benedito Ottoni



ELEMENTOS

DE

GEOMETRIA

E

TRIGONOMETRIA RECTILINEA

COMPILADOS

POR

C. B. OTTONI

DECIMA EDIÇÃO

MAIS CORRECTA E AUGMENTADA COM MUITAS NOTAS INTERCALADAS NO TEXTO.

LIVRARIA CLASSICA DE FRANCISCO ALVES & C^{ia}.

RIO DE JANEIRO — 134, rua do Ouvidor, 134

RUA DA BAHIA
MINAS

RUA DE S. BENTO, 45
SÃO PAULO

1904

ANEXO 2: Contra-Capa do livro *Elementos de Geometria* por F.I.C.

Curso de mathematicas elementares.

ELEMENTOS
DE
GEOMETRIA

CONTENDO NOÇÕES SOBRE AS CURVAS USUAES
E
NUMEROSOS EXERCICIOS NUMERICOS

POR F. I. C.

REVISTOS E ADAPTADOS Á INSTRUCÇÃO SECUNDARIA DO BRAZIL

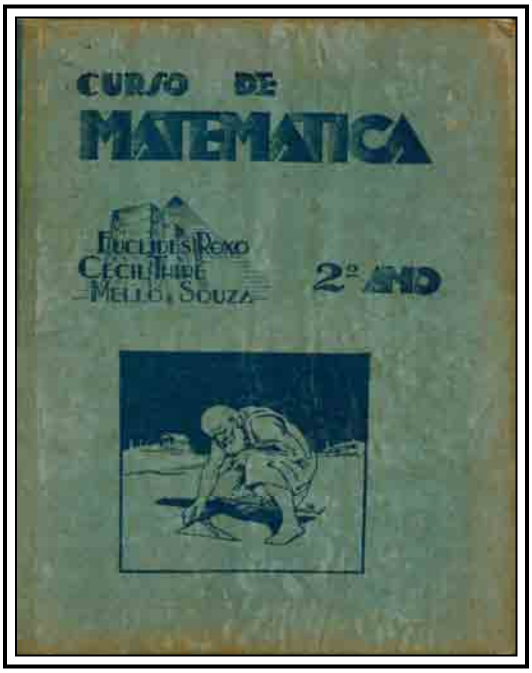
PELO

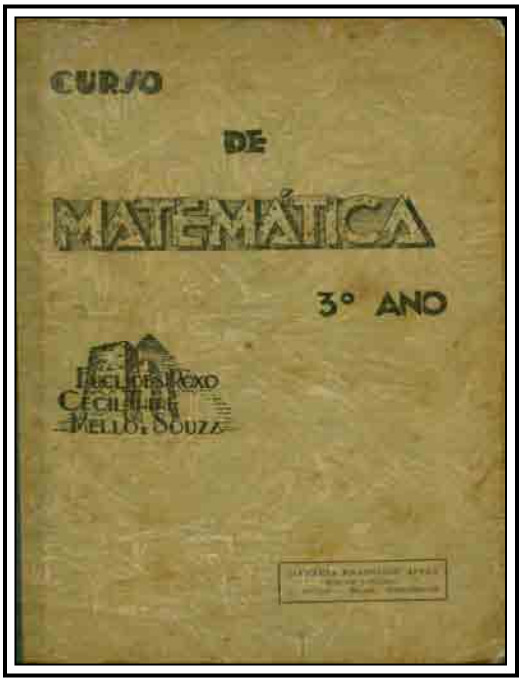
Dr EUGENIO DE BARROS RAJA GABAGLIA
Lente do Gymnasio Nacional

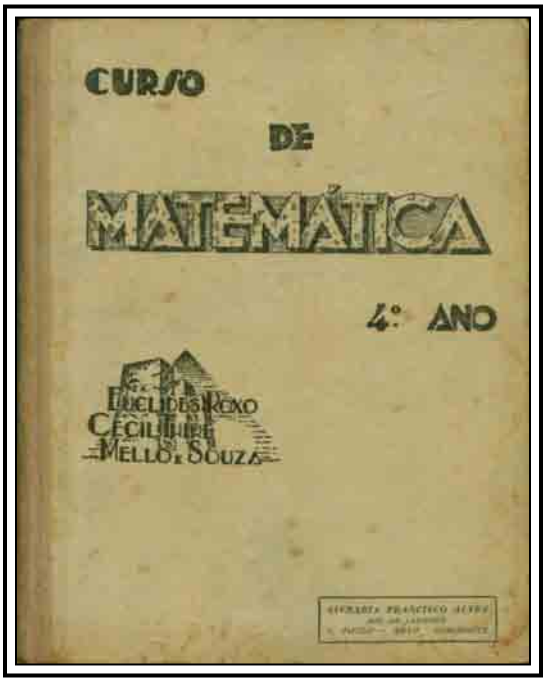
LIVRARIA GARNIER

109, RUA DO OUVIDOR, 109 | 6, RUE DES SAINTS-PÈRES, 6
RIO DE JANEIRO | PARIS

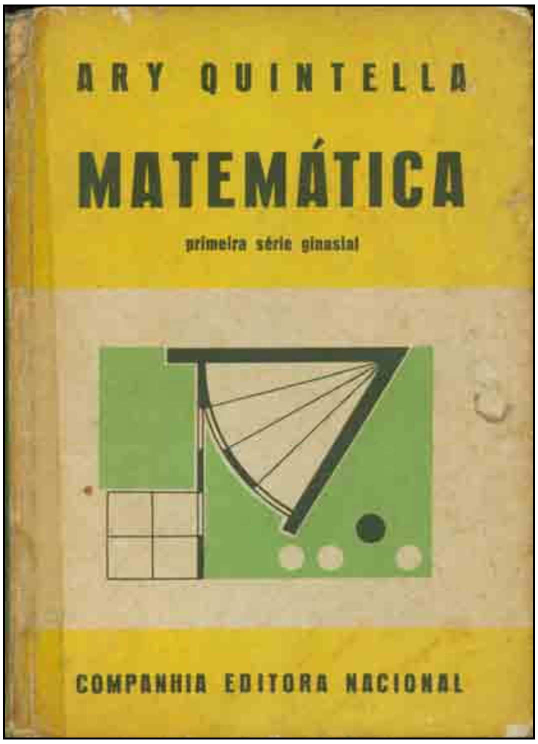
ANEXO 3: Algumas capas da coleção *Curso de Matemática* de Euclides Roxo, Cecil Thiré e Melo e Souza

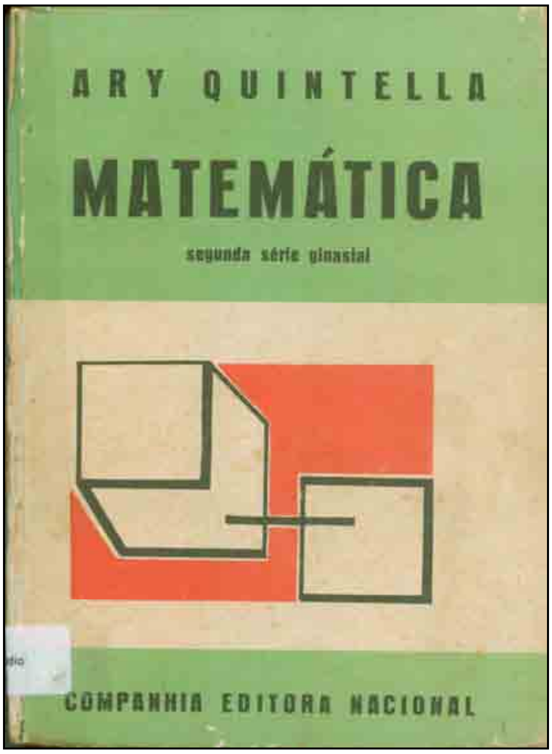


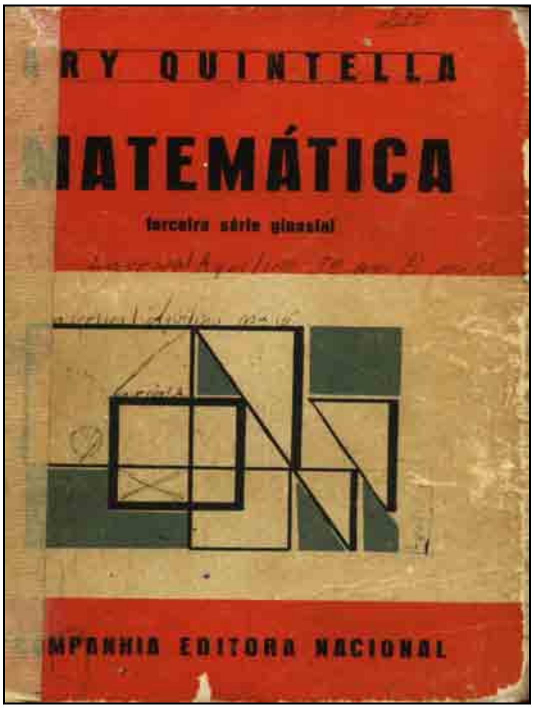


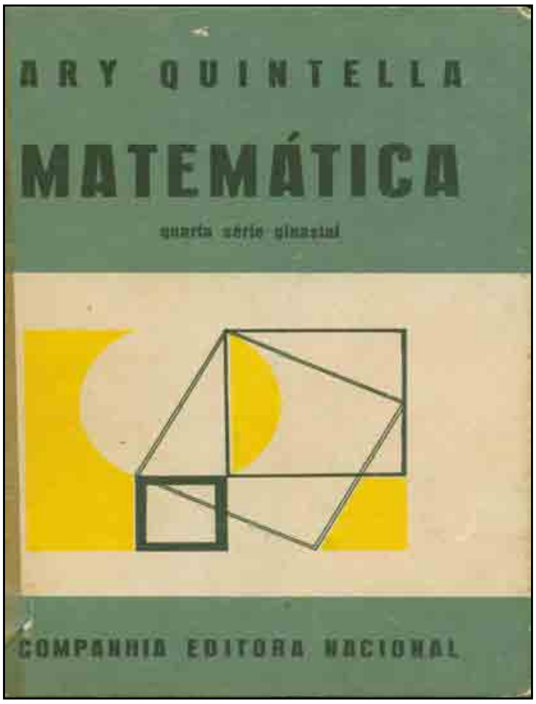


ANEXO 4: Capas da coleção *Matemática – Curso Ginasial* de Ary Quintella

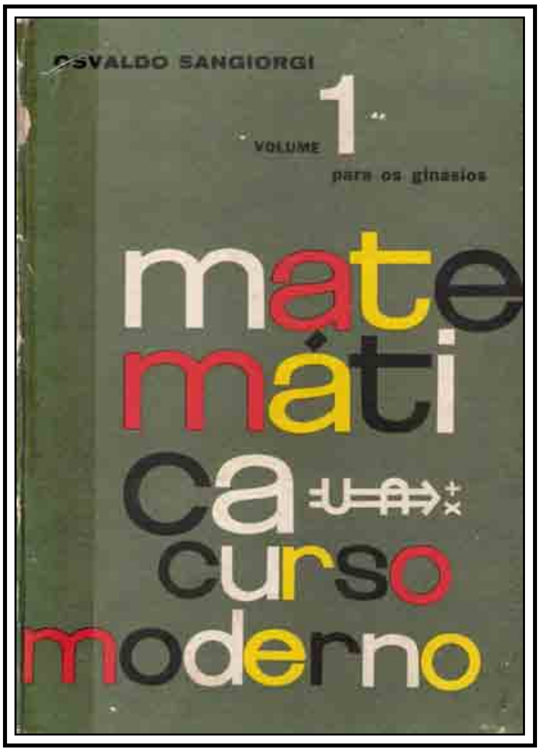


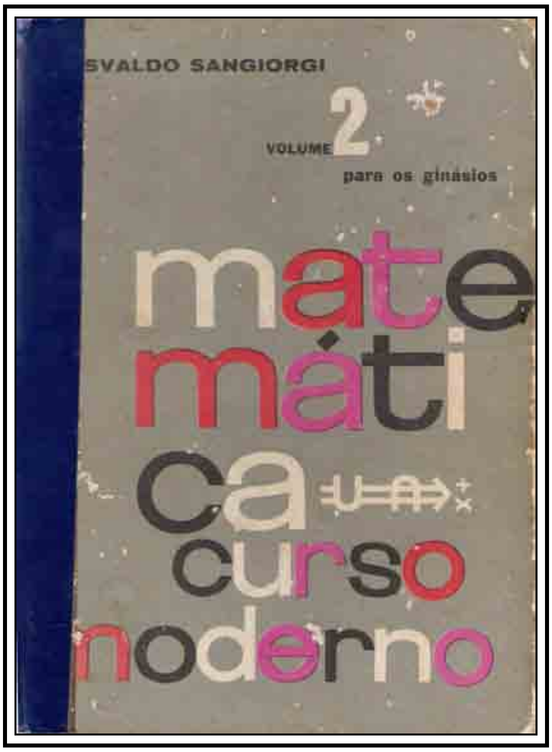






ANEXO 5: Capas da coleção *Matemática – Curso Moderno* para os ginasiais de Osvaldo Sangiorgi





ANEXO 6: Capas da coleção *A Conquista da Matemática*: José Ruy Giovanni e Benedito Castrucci

ANEXO 7: Capas da coleção *Matemática* de Luiz Mário Pereira Imenes e Marcello Lellis