



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ

WENDEL MACEDO MENDES

**QUANTIZAÇÃO CANÔNICA DO CAMPO ESCALAR
DE KLEIN-GORDON**

**FORTALEZA - CEARÁ
2010**

WENDEL MACEDO MENDES

QUANTIZAÇÃO CANÔNICA DO CAMPO ESCALAR
DE KLEIN-GORDON

Monografia apresentada ao Curso de Física do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do grau de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho.

FORTALEZA - CEARÁ
2010

M538q Mendes, Wendel Macedo
 Quantização canônica do campo escalar de Klein-
 Gordon / Wendel Macedo Mendes . – Fortaleza, 2010.
 93 p. : il.
 Orientador: Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de
 Carvalho.
 Monografia (Graduação em Física) – Universidade
 Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia.
 1. Oscilador harmônico. 2. Transformação de
 Lorentz. 3 Tensores. I. Universidade Estadual do Ceará,
 Centro de Ciências e Tecnologia.

CDD: 530

WENDEL MACEDO MENDES

QUANTIZAÇÃO CANÔNICA DO CAMPO ESCALAR
DE KLEIN-GORDON

Monografia apresentada ao Curso de Física do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do grau de Bacharel em Física.

Aprovada em: 26/08/2010.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho (Orientador)
Universidade Federal do Ceará – UFC

Prof. Dr. Kleiton do Carmo Mendes
Universidade Estadual do Ceará – UECE

Prof. Dr. Marcony Silva Cunha
Universidade Estadual do Ceará – UECE

Aos meus Pais Edson Mendes
e Eleonita Macedo. A minha
noiva Gislânia Lima.

DEDICO

AGRADECIMENTOS

A Deus por tudo que ele tem feito na minha vida, me dando graça, capacidade e inteligência para o desenvolvimento de minhas atividades.

A meu pai Edson Mendes e minha mãe Eleonita Macedo que são de fundamental importância na minha vida, pois sem eles eu não estaria onde estou hoje. Eles são os responsáveis pelo homem que sou.

A minha noiva Gislânia Lima por ser essa pessoa maravilhosa e amável que sempre está do meu lado, seja nos momentos felizes onde sorrimos juntos, ou nos momentos tristes, onde eu encontro um ombro amigo e conselhos que sempre me faz seguir em frente.

Ao Professor Makarius pelo tema desse trabalho, e por me ajudar me direcionando com um plano de estudo que segui a risca.

Ao professor Ricardo Renan por ter aceitado esse desafio de me orientar nesse trabalho e por ter dado informações de fundamental importância.

Ao professor Silas Lenz pelas preciosas aulas de alto nível de Eletricidade e magnetismo I, Eletromagnetismo I e II que cursei que abriram meus olhos de como é realmente a Física.

Ao professor Alexandre Costa pela excelente ministração da disciplina de Mecânica Teórica III que foi vital para a realização desse trabalho.

Ao professor Kleiton do Carmo por ter me ajudado na síntese da seção que fala sobre o grupo de Lorentz.

Ao demais professores e colegas do curso de graduação em Física da UECE.

Ao professor Assis que durante o ensino médio me fez apreciar Matemática, disciplina que até então eu não gostava, e olha no que deu.

“Porque em tudo fostes enriquecidos nele, em toda palavra e em todo conhecimento”.

I Coríntios 1.5

RESUMO

O presente trabalho mostra como um formalismo típico de uma Teoria Quântica de Campos, que consiste basicamente em descrever um campo (que pode ter análogo clássico ou não), como um conjunto de osciladores harmônicos, onde cada oscilador funciona como a unidade excitadora do campo chamada de quanta do campo. A metodologia para a quantização consiste, em escrever o campo de forma clássica usando o formalismo Lagrangeano, por isso deve-se usar elementos da teoria clássica de campos para escrever o tensor Energia-momento do campo. Há uma necessidade de formular o problema de modo quântico, e essa formulação consiste em impor que o campo é um operador hermitiano, sujeito a relações de comutação canônica com seu momento conjugado. Finalmente é possível escrever o Hamiltoniano do campo em termos do operador número que possui autovalores discretos, e sua principal função é contar os autoestados, os quais podem ser construídos a partir estado fundamental chamado de vácuo, usando os operadores de criação e aniquilação. O resultado dessa quantização é o aparecimento da unidade excitadora desse campo, que recebe o nome de méson escalar.

Palavras-chave: Oscilador harmônico. Transformações de Lorentz. Tensores.

ABSTRACT

This paper shows how a formalism typical of a Quantum Field Theory, which basically consists in describing a field (which may have similar classical or not) as a set of harmonic oscillators where each oscillator acts as the unit exciter field called quanta of the field. The methodology for the quantization consists in writing the field in a classical way using the Lagrangian formalism, so one should use elements of classical theory of fields to write the energy-momentum tensor of the field. There is a need to formulate the problem of quantum way, and this formulation is to impose that the field is a hermitian operator, subject to the canonical commutation relations in conjunction with their time. Finally you can write the Hamiltonian of the field in terms of the number operator which has eigenvalues discrete, and its main function is to count the eigenstates, which can be built from the ground state called the vacuum, using the creation and annihilation operators. The result of this quantization is the emergence of this field exciter unit, which is called the scalar.

Keywords: Harmonic oscillator. The Lorentz transformations. Tensors.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	OSCILADOR HARMÔNICO	12
2.1	Descrição Clássica	12
2.2	Descrição Quântica	15
2.3	Osciladores Acoplados	24
2.3.1	Dois osciladores acoplados	24
2.3.2	N osciladores acoplados	27
3	A TEORIA CLÁSSICA DE CAMPOS	31
3.1	O formalismo Lagrangeano	31
3.2	O formalismo Hamiltoniano	36
3.3	Teoria de campos relativística	39
3.3.1	Os postulados da relatividade especial	39
3.3.2	As transformações de Lorentz e os 4-vetores	40
3.3.2.1	Intervalo invariante no espaço - tempo	42
3.3.2.2	O grupo de Lorentz	43
3.3.3	As leis Físicas na forma covariante	45
3.3.4	Dinâmica relativística	46
3.3.5	Campos relativísticos	49
3.4	Teorema de Noether	51
3.4.1	Quantidades conservadas e o Tensor Energia-momento	54
4	A TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS	57
4.1	O campo de Klein-Gordon	57
4.2	A quantização canônica do campo de Klein-Gordon	60
4.2.1	O Campo no espaço de Fourier	60
4.2.2	O Hamiltoniano e os operadores $a(\mathbf{k})$ e $a^\dagger(\mathbf{k})$	62
4.2.3	O operador N	65
4.2.4	As relações de comutação com o Hamiltoniano	66
4.3	Nova ordenação para o produto de operadores	68
4.4	A normalização dos autoestados	71
5	CONCLUSÃO	73
	REFERÊNCIAS	74
	APÊNDICE A - ELEMENTOS DA ÁLGEBRA TENSORIAL	76
	APÊNDICE B - INTRODUÇÃO À TEORIA DE GRUPOS	91

1 INTRODUÇÃO

Querendo ou não a Física clássica está sustentada em duas propriedades distintas: partículas e ondas. Pode-se pensar que partículas são pulsos de energia e matéria que estão localizados em uma porção finita do espaço. Já as ondas têm um caráter mais difuso no espaço. No entanto a teoria quântica de campos surgiu como esperança para a explicação das interações fundamentais da natureza.

Por volta dos anos que antecederam a 1925, o *quantum* foi a idéia aplicada à mecânica do movimento do movimento atômico, nascendo assim a Mecânica Quântica, que resultou na chamada dualidade onda-partícula expressada na famosa equação de Schrödinger (Ryder, 1996).

O nascimento da Teoria Quântica de Campos ocorreu no final da década de 1920 como aplicação das regras de quantização de Heisenberg ao campo de radiação. Ao escrever a energia do campo eletromagnético em termos dos modos normais de vibração, ou seja, das componentes de Fourier, nota-se que ela consiste de uma superposição de osciladores harmônicos.

Nessa teoria, as partículas surgem como resultado de campos quantizados, logo se pode pensar que as entidades básicas da natureza são campos. Esse pensamento direcionou pesquisa para as interações fortes, como fez Yukawa, para descrever as interações fortes e Fermi para as interações fracas durante a década de 1930.

Mas, no entanto uma teoria que tenta descrever a natureza deve ser compatível com a relatividade restrita de Einstein, logo ela deve ser local no sentido de que as interações são descritas por produtos dos campos no mesmo ponto.

Nesse espírito como pré-requisito é de enorme importância o conhecimento e o domínio da quantização de um sistema de osciladores harmônicos. Para o estudo de tal teoria, o campo escolhido foi o campo de Klein-Gordon que embora apresenta alguns problemas, teve uma grande importância histórica.

2 OSCILADOR HARMÔNICO

2.1 Descrição clássica

O oscilador harmônico é um sistema físico que consiste em uma massa pontual m presa a uma mola de constante elástica k . O sistema está sujeito a uma energia potencial da forma (SYMON, 1981)

$$V(x) = \frac{kx^2}{2} \quad (1)$$

Onde x é a coordenada de movimento da partícula. Ela é atraída para o ponto $x = 0$, que corresponde ao mínimo de energia potencial. Esse é um ponto de *equilíbrio estável* (figura 1), pois nele não há força sobre a partícula. A força sobre essa partícula é

$$F(x) = -\frac{dV}{dx} \quad (2)$$

Aplicando a equação (2) em (1)

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (3)$$

Fazendo $\omega = \sqrt{k/m}$ a equação (3) se torna

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0 \quad (4)$$

De acordo com SYMON (1981) a solução para a equação diferencial (4) é

$$x(t) = A \sin(\omega t + \theta) \quad (5)$$

A energia total desse sistema é

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$$

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} \quad (6)$$

Substituindo a equação (5) na equação (6)

$$v(x) = \dot{x}(t) = A\omega \cos(\omega t + \theta)$$

Logo

$$E = \frac{1}{2}m\omega A \cos^2(\omega t + \theta) + \frac{k}{2}A \sin^2(\omega t + \theta)$$

$$E = \frac{kA^2}{2} [\cos^2(\omega t + \theta) + \sin^2(\omega t + \theta)]$$

$$E = \frac{kA^2}{2} \quad (7)$$

A equação (7) revela que a energia mecânica total do oscilador harmônico é constante, portanto o sistema é conservativo (HALLIDAY, 1992). Para uma energia fixa E , o movimento da partícula fica confinado entre os extremos $(-A, A)$.

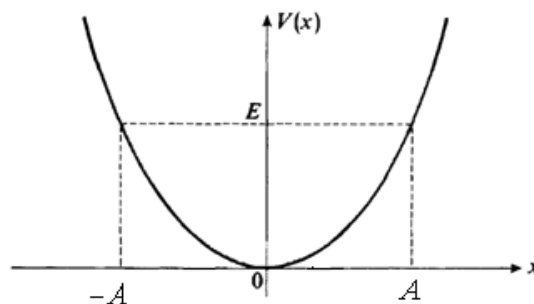


Figura 1- Gráfico da função energia potencial para um oscilador harmônico unidimensional. (COHEN TANNOUDJI)

Quando estudamos sistemas físicos sujeito a pequenas oscilações, podemos representá-lo de maneira aproximada por um modelo de osciladores

harmônicos. Daí a enorme vantagem do conhecimento desse sistema. Considerando uma energia potencial arbitrária $V(x)$ expandindo essa função em série de Taylor em torno de um ponto extremo (máximo/mínimo) x_0 temos

$$V(x) = V(x_0) + \left(\frac{dV}{dx}\right)_{x=x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x=x_0} (x - x_0)^2 + \dots \quad (8)$$

Como nos extremos $\left(\frac{dV}{dx}\right)_{x=x_0} = 0$ e estamos interessados somente nas diferenças de energia podemos aproximar

$$V(x) \cong \frac{1}{2} \left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x=x_0} (x - x_0)^2 \quad (9)$$

Vemos que a equação (9) se parece muito com a equação (1) com a exceção que deslocamos a posição de equilíbrio para o ponto x_0 . Podemos concluir que

$$k = \left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x=x_0} \quad (10)$$

A frequência desse sistema para pequenas oscilações podem ser dado por

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m} \left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x=x_0}} \quad (11)$$

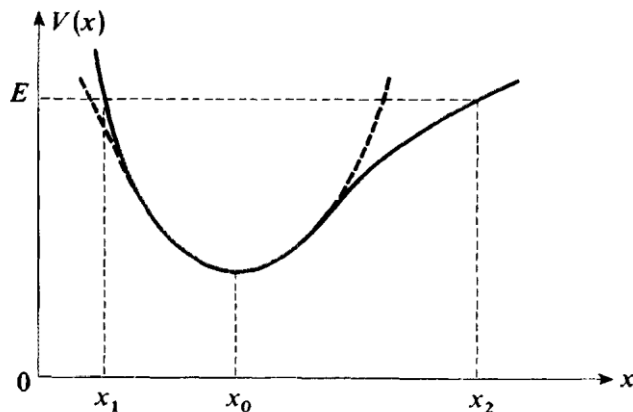


FIGURA 2 - Em torno da vizinhança do ponto x_0 pode-se aproximar $V(x)$ como a energia potencial de um oscilador harmônico

2.2 Descrição quântica

Antes de estudar o oscilador harmônico no formalismo da mecânica quântica vamos enunciar os postulados segundo SAKURAY (1994).

POSTULADO 1 - Estado de um sistema

Em cada instante de tempo, t o estado de um sistema é representado por um vetor normalizado $|\Psi\rangle$ chamado ket no espaço vetorial dos estados (espaço de Hilbert \mathcal{H}) que contém toda a informação do sistema.

POSTULADO 2 - Quantidades físicas

Qualquer quantidade física mensurável é descrita matematicamente por um operador \hat{A} que atua sobre os kets.

POSTULADO 3 - Medidas de quantidades físicas

O resultado de uma medida da quantidade física \hat{A} é um dos autovalores a_n desse operador, que são dados pela equação

$$\hat{A}|\Psi\rangle = a_n|\Psi\rangle$$

POSTULADO 4 - Decomposição espectral

A probabilidade de obter um autovalor a_n (não degenerado) numa medida um observável \hat{A} sobre o sistema no estado normalizado $|\Psi\rangle$ é

$$P(a_n) = |\langle a_n|\Psi\rangle|^2$$

Onde $|a_n\rangle$ é o autovetor normalizado de \hat{A} correspondente ao autovalor a_n .

POSTULADO 5 - Redução do pacote de onda

Imediatamente após a medida de \hat{A} , sobre o sistema no estado $|\Psi\rangle$, que resulta no autovalor a_n , o sistema se encontra em um novo estado $|\Psi\rangle$, que é a projeção

normalizada do vetor ket original no subespaço correspondente aos resultados da medida

$$|\Psi'\rangle = \frac{P_n|\Psi\rangle}{\sqrt{\langle\Psi|P_n|\Psi\rangle}}$$

POSTULADO 6 - Evolução temporal

A evolução temporal de um sistema quântico é determinada pelo operador *Hamiltoniano* ou *Energia total*, \hat{H} , através da equação de Schrödinger

$$\hat{H}|\Psi\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi\rangle$$

A descrição quântica do oscilador harmônico é aplicável no estudo oscilações de átomos numa rede cristalina, dando origem aos fônons. Esses sistemas são da ordem de grandeza do átomo. Como vimos na descrição clássica o hamiltoniano do oscilador harmônico não depende do tempo, por isso é necessário encontrar as soluções da *equação de Schrödinger independente do tempo*.

$$\hat{H}|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle \quad (12)$$

Que é uma equação de autovalor, e o que interessa nessa equação são os autovalores do operador Hamiltoniano (valores de energia). Um estado qualquer da partícula é descrito por um ket genérico $|\Psi\rangle$. Como o oscilador harmônico é unidimensional é conveniente representar na base dos autoestados de posição $\{|x\rangle\}$ representado por uma função de onda $\psi(x) = \langle x|\Psi\rangle$ tal que $|\psi(x)|^2 = \langle x|\Psi\rangle^* \langle x|\Psi\rangle$ representa a densidade de probabilidade de encontrar a partícula entre x e $x + dx$. (PEREIRA, 2002).

A quantização do movimento da partícula é feita associando-se a x e p operadores Hermitianos definidos como

$$\hat{x} = x \quad (13)$$

$$\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \quad (14)$$

Esses operadores satisfazer a seguinte relação e comutação

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \quad (15)$$

Pode-se escrever o operador Hamiltoniano em termos dos operadores de posição e momento

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{x}^2}{2} \quad (16)$$

Pode-se ainda

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2} \left(\frac{\hat{p}^2}{m\omega\hbar} + \frac{m\omega^2 \hat{x}^2}{2} \right) \quad (17)$$

Para simplificar a equação (17) definem-se os operadores adimensionais

$$\hat{P} = \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}} \hat{p} \quad (18)$$

$$\hat{X} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \hat{x} \quad (19)$$

Logo o operador Hamiltoniano se torna

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2} (\hat{P}^2 + \hat{X}^2) \quad (20)$$

Os operadores \hat{P} e \hat{X} satisfazem a relação de comutação $[\hat{X}, \hat{P}] = i$. E o Operador Hamiltoniano se torna

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2} [(\hat{X} - i\hat{P})(\hat{X} + i\hat{P}) + 1] \quad (21)$$

Nesse ponto é conveniente definir os operadores de abaixamento e levantamento, respectivamente

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{X} + i\hat{P}) \quad (22)$$

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} - i\hat{P}) \quad (23)$$

Com isso os operadores de posição e momento podem ser escritos em termos desses novos operadores

$$\hat{X} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a + a^\dagger) \quad (24)$$

$$\hat{P} = \frac{-i}{\sqrt{2}}(a - a^\dagger) \quad (25)$$

Esses operadores de abaixamento e levantamento satisfazem a relação de comutação

$$\begin{aligned} [a, a^\dagger] &= aa^\dagger - a^\dagger a \\ &= [\hat{X} + i\hat{P}, \hat{X} - i\hat{P}] \\ &= \left[\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \hat{x} + i \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}} \hat{p}, \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \hat{x} - i \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}} \hat{p} \right] \\ &= -\frac{i}{2\hbar} [\hat{x}, \hat{p}] + \frac{i}{2\hbar} [\hat{p}, \hat{x}] \\ [a, a^\dagger] &= 1 \end{aligned} \quad (26)$$

Substituindo as equações (22) e (23) na equação (21), o Hamiltoniano fica em termos desses operadores

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2}(aa^\dagger + a^\dagger a) \quad (27)$$

Usando a relação de comutação (26) na forma $aa^\dagger = 1 + a^\dagger a$ substituindo em (27)

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \right) \quad (28)$$

Onde é definido o operador número $\hat{N} = a^\dagger a$ (COHEN, 1977), que está relacionado com o número de autoestados do oscilador harmônico, através da equação de autovalor

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle \quad (29)$$

Os autovalores desse operador satisfazem algumas propriedades:

Propriedade 1: O espectro dos autovalores de N são não-negativos.

Multiplicando à esquerda a equação (29) por $\langle n|$

$$\langle n|\hat{N}|n\rangle = n$$

$$\langle n|a^\dagger a|n\rangle = n$$

Fazendo $|x\rangle = a|n\rangle$ tem-se

$$n = \langle x|x\rangle \Rightarrow n \geq 0 \quad \blacksquare$$

Propriedade 2: O espectro dos autovalores de \hat{N} são discretos

Vamos inicialmente determinar as relações de comutação do operador \hat{N} com a e a^\dagger .

$$[\hat{N}, a] = (a^\dagger a a - a a^\dagger a) = [a^\dagger, a]a = -a$$

$$[\hat{N}, a^\dagger] = (a^\dagger a a^\dagger - a^\dagger a^\dagger a) = a^\dagger [a, a^\dagger] = a^\dagger$$

Se o operador a atuar no estado fundamental $|0\rangle$ tem-se $a|0\rangle = 0$, pois esse estado é o de menor energia.

$$\langle 0|\hat{N}|0\rangle = 0\langle 0|0\rangle$$

$$\langle 0|\hat{N}|0\rangle = 0 \Rightarrow a|0\rangle = 0$$

Usando as relações de comutação $[\hat{N}, a]$ e $[\hat{N}, a^\dagger]$ pode-se determinar

$$[\hat{N}, a]|n\rangle = \hat{N}a|n\rangle - \hat{N}a|n\rangle \Rightarrow \hat{N}a|n\rangle = (n - 1)a|n\rangle$$

Da mesma forma

$$\hat{N}a^\dagger|n\rangle = (n + 1)a^\dagger|n\rangle$$

Veja que os autovetores de \hat{N} $a|n\rangle$ e $a^\dagger|n\rangle$ possuem autovalores $(n - 1)$ e $(n + 1)$, respectivamente.

Suponha inicialmente que ν é um autovalor não-inteiro de \hat{N} . Vamos mostrar que essa hipótese contradiz a propriedade 1. Se ν é não-inteiro, pode-se supor que $n < \nu < n + 1$. Então ν satisfaz

$$\hat{N}|n\rangle = \nu|n\rangle$$

$$\hat{N}a|n\rangle = (\nu - 1)a|n\rangle$$

$$\hat{N}a^2|n\rangle = (\nu - 2)a^2|n\rangle$$

⋮

$$\hat{N}a^n|n\rangle = (\nu - n)a^n|n\rangle$$

O autovalor do autoestado de \hat{N} $a^n|n\rangle$ está de acordo com nossa hipótese, pois $0 < \nu - n < 1$. Mas será que para $a^{n+1}|n\rangle$ a hipótese.

$$\hat{N}a^{n+1}|n\rangle = (\nu - n - 1)a^{n+1}|n\rangle$$

Veja que o autovalor acima viola a hipótese inicial, pois

$$-1 < \nu - n - 1 < 0 \quad \blacksquare$$

Então a negação da hipótese, nos revela que os autovalores de \hat{N} devem ser discretos, ou seja, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Agora é conveniente determinar as relações de comutação de \hat{H} com a e a^\dagger .

$$[\hat{H}, a] = \hat{H}a - a\hat{H}$$

$$\begin{aligned}
&= \hbar\omega \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \right) a - a \hbar\omega \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \right) \\
&= \hbar\omega (\hat{N}a - a\hat{N})
\end{aligned}$$

$$[\hat{H}, a] = \hbar\omega [\hat{N}, a] \quad (30)$$

Logo a equação (30) fica

$$[\hat{H}, a] = -\hbar\omega a \quad (31)$$

Da mesma forma para a^\dagger

$$[\hat{H}, a^\dagger] = \hbar\omega a^\dagger \quad (32)$$

Se $|n\rangle$ é um autovetor do operador Hamiltoniano \hat{H} , então $a^\dagger|n\rangle$ e $a|n\rangle$ também devem ser.

$$[\hat{H}, a^\dagger]|n\rangle = \hbar\omega a^\dagger|n\rangle$$

$$(\hat{H}a^\dagger - a^\dagger\hat{H})|n\rangle = \hbar\omega a^\dagger|n\rangle$$

$$\hat{H}a^\dagger|n\rangle = (E + \hbar\omega)a^\dagger|n\rangle \quad (33)$$

$$[\hat{H}, a]|n\rangle = -\hbar\omega a|n\rangle$$

$$(\hat{H}a - a\hat{H})|n\rangle = \hbar\omega a|n\rangle$$

$$\hat{H}a|n\rangle = (E - \hbar\omega)a|n\rangle \quad (34)$$

Como se vê nas equações (33) e (34) os autovalores desses novos autovetores são diferentes dos autovalores da equação (12). Daqui vem o significado físico dos operadores a e a^\dagger . O operador de abaixamento diminui um quantum de energia $\hbar\omega$ e o operador de levantamento aumenta um quantum de energia de mesmo valor. Por isso os nomes de operadores de abaixamento e levantamento, respectivamente (PEREIRA, 2002).

Aplicando a equação (28) no estado fundamental

$$\hat{H}|0\rangle = \hbar\omega\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right)|0\rangle$$

$$\hat{H}|0\rangle = \frac{\hbar\omega}{2}|0\rangle$$

Então a energia do estado fundamental do oscilador é $E = \hbar\omega/2$. De acordo com a equação (33) se o operador a^\dagger for aplicado n vezes no estado fundamental deve-se obter

$$\hat{H}(a^\dagger)^n|0\rangle = (E + n\hbar\omega)(a^\dagger)^n|0\rangle \quad (35)$$

Logo

$$E_n = E_0 + n\hbar\omega$$

$$E_n = \frac{\hbar\omega}{2} + n\hbar\omega$$

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (36)$$

Os níveis de energia do oscilador harmônico quântico são positivos e *quantizados*.

Através dos operadores de abaixamento e levantamento podemos modificar os autoestados. O n -ésimo estado excitado é construído a partir do estado fundamental aplicando o operador de criação n vezes sobre o estado fundamental

$$|n\rangle = c_n(a^\dagger)^n|0\rangle \quad (37)$$

Falta determinar a constante de normalização c_n . Para tal primeiramente

$$|n\rangle = c_n a^\dagger |n-1\rangle$$

Se o autoestado $|n\rangle$ é normalizado, então $\langle n|n\rangle = 1$

$$\langle n|n\rangle = |c_n|^2 \langle n-1|a a^\dagger|n-1\rangle = 1$$

$$|c_n|^2 \langle n-1|\hat{N} + 1|n-1\rangle = 1$$

$$|c_n|^2 \langle n-1 | \hat{N} | n-1 \rangle + |c_n|^2 = 1$$

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Agora para outro autoestado $|n-1\rangle$ deve-se ter

$$|n-1\rangle = c'_n a^\dagger |n-2\rangle$$

$$\langle n | n \rangle = |c'_n|^2 \langle n-1 | a a^\dagger | n-1 \rangle$$

$$|c'_n|^2 \langle n-2 | \hat{N} + 1 | n-2 \rangle = 1$$

$$|c'_n|^2 \langle n-2 | \hat{N} | n-2 \rangle + |c'_n|^2 = 1$$

$$c'_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}}$$

Então

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} a^\dagger |n-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{n-1}} (a^\dagger)^2 |n-2\rangle = \dots$$

Logo a aplicação sucessiva de a^\dagger no menor autoestado $|0\rangle$ é dada por

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n |0\rangle \quad (38)$$

Então a atuação dos operadores de criação e aniquilação sobre os auto estados do oscilador harmônico

$$a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \quad (39)$$

$$a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \quad (40)$$

2.3 Osciladores acoplados

2.3.1 Dois osciladores acoplados

O tratamento de problemas que envolvem mais de uma partícula usando a equação de Schrödinger independente do tempo (12) se torna simples quando ψ é função das N coordenadas que informam a posição de cada partícula, $\psi = \psi(q_1, q_2, \dots, q_N)$. Para quantizar esse sistema é necessário conhecer o Hamiltoniano clássico em função das quantidades canonicamente conjugadas e então associar operadores a essas quantidades (PEREIRA, 2002). Segundo Goldstein (1980) a função Lagrangeana desse sistema é

$$L(q_j, \dot{q}_j) = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} m_j \dot{q}_j^2 - V(q_1, \dots, q_N) \quad (41)$$

O momento canonicamente conjugado será

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = m_j \dot{q}_j \quad (42)$$

O Hamiltoniano clássico é dado em termos da transformada de Legendre

$$H(q_j, p_j) = \sum_{j=1}^N p_j \dot{q}_j - L \quad (43)$$

Associa-se às variáveis canônicas clássicas operadores de posição \hat{q}_i e momento \hat{p}_j que satisfazem a relação de comutação

$$[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar \delta_{ij} \quad (44)$$

O problema mais simples é o de um acoplamento duplo de osciladores composto por duas massas m_1 e m_2 , acopladas por uma mola de constante elástica k , ligadas pela energia potencial

$$V(q_1, q_2) = \frac{1}{2}k(q_2 - q_1)^2 \quad (44)$$

Aprender a resolvê-lo é de fundamental importância para resolver outros sistemas mais complexos, como o de um sistema de osciladores com vários graus de liberdade. O Hamiltoniano desse sistema constituído de duas massas é

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{1}{2}k(q_2 - q_1)^2 \quad (45)$$

Para um sistema de duas partículas a equação de Schrödinger se torna separável se, em vez de se trabalhar com as coordenadas individuais de cada partícula, trabalha-se com as coordenadas relativas e do centro de massa (GRIFFITHS, 1995).

$$r = q_2 - q_1 \quad (46)$$

$$R = \frac{m_1 q_1 + m_2 q_2}{m_1 + m_2} \quad (47)$$

Os momentos conjugados a r e R são

$$p_r = \frac{m_1 p_2 - m_2 p_1}{M} \quad (48)$$

$$p_R = p_1 + p_2 \quad (49)$$

Onde $M = m_1 + m_2$. Com essa transformação os momentos p_1 e p_2 são

$$p_1 = \frac{m_1}{M} p_R - p_r \quad (50)$$

$$p_2 = p_r + \frac{m_2}{M} p_R \quad (51)$$

Substituindo as equações (50) e (51) em (45), O Hamiltoniano se torna

$$H = \frac{p_r^2}{2\mu} + \frac{1}{2}kr^2 + \frac{p_R^2}{2M} \quad (52)$$

Onde $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ é a massa reduzida do sistema. Como mencionado anteriormente o Hamiltoniano na forma (52) é separável nas coordenadas r e R . Segundo GRIFFITHS (1995) isso significa que a função de onda e a energia dos estados podem ser escritos na forma

$$\psi(r, R) = \phi(r)\chi(R) \quad (53)$$

$$E = E_r + E_R \quad (54)$$

Dessa forma a equação de Schrödinger independente do tempo é

$$\left(\frac{\hat{p}_r^2}{2\mu} + \frac{1}{2} k \hat{r}^2 + \frac{\hat{p}_R^2}{2M} \right) \phi(r)\chi(R) = (E_r + E_R)\phi(r)\chi(R) \quad (55)$$

A equação em R é

$$\begin{aligned} \frac{\hat{p}_R^2}{2M} \chi(R) &= E_R \chi(R) \\ -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d^2 \chi}{dR^2} &= E_R \chi \\ \frac{d^2 \chi}{dR^2} + K^2 \chi &= 0 \end{aligned} \quad (56)$$

Onde $K = \sqrt{2ME_R/\hbar^2}$. A solução da equação (56) é uma onda plana do tipo

$$\chi(R) = ae^{iKR} + be^{-iKR} \quad (57)$$

Já para a equação em r

$$\left(\frac{\hat{p}_r^2}{2\mu} + \frac{1}{2} k \hat{r}^2 \right) \phi(r) = E_r \phi(r) \quad (58)$$

O Hamiltoniano da equação (58) é o de um oscilador harmônico unidimensional, cuja solução já é conhecida. Logo a energia total desse sistema é

$$E = \frac{\hbar^2 K^2}{2M} + \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (59)$$

O método empregado sugere uma generalização que permite tratar o caso de N corpos. No caso considerado, a coordenada r corresponde a uma forma de movimento em que tanto m_1 e m_2 vibram com frequência ω ; por sua vez, R corresponde à translação conjunta de m_1 e m_2 - o que pode ser encarado como uma vibração de frequência nula. Cada uma dessas formas de movimento, em que todas as partículas vibram com a mesma frequência, é chamada de um modo normal do sistema (PEREIRA, 2002).

2.3.2 N osciladores acoplados

A estratégia para resolver o problema quântico de N osciladores acoplados é separar a equação de Schrödinger nas coordenadas dos modos normais e reduzir o problema a N osciladores harmônicos simples, cuja solução já é conhecida. Para tal considere N massas iguais acopladas por N molas de constante k (PEREIRA, 2002).

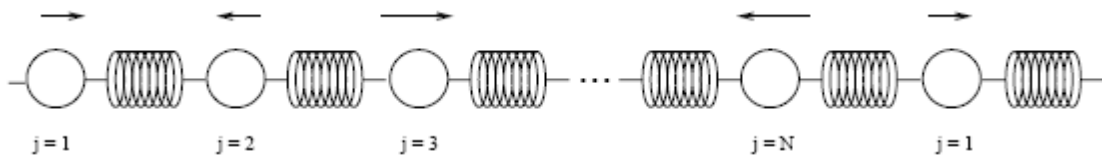


FIGURA 3 - N osciladores harmônicos acoplados com condições periódicas de contorno (PEREIRA, 2002)

Cada mola está sujeita a uma energia potencial da forma

$$V_j = \frac{1}{2}k(q_{j+1} - q_j)^2 \quad (60)$$

O sistema está sujeito a condições de contorno periódicas

$$q_{j+N}(t) = q_j(t) \quad (61)$$

A função Lagrangeana do sistema é

$$L(q_j, \dot{q}_j) = \sum_{j=1}^N \left[\frac{1}{2} m \dot{q}_j^2 - \frac{1}{2} k (q_{j+1} - q_j)^2 \right]$$

$$L(q_j, \dot{q}_j) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left[m \dot{q}_j^2 - k (q_{j+1}^2 - 2q_j q_{j+1} + q_j^2) \right] \quad (62)$$

Usando a transformada de Legendre o Hamiltoniano é

$$H(q_j, p_j) = \sum_{j=1}^N \left[\frac{p_j^2}{2m} + \frac{1}{2} k (q_{j+1} - q_j)^2 \right] \quad (63)$$

O termo de energia potencial pode ser simplificado notando que cada q_j^2 (equação 61) aparece duas vezes na soma. Então

$$L(q_j, \dot{q}_j) = \frac{1}{2} m \sum_{j=1}^N \left[\dot{q}_j^2 - \frac{k}{m} (2q_j^2 - 2q_j q_{j+1})^2 \right] \quad (64)$$

O tratamento teórico mais adequado para sistemas com vários graus de liberdade é a *teoria as pequenas oscilações*. Definindo o vetor de coordenadas

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_N \end{bmatrix} \quad (65)$$

A Lagrangeana agora é escrita na forma de um produto de matrizes

$$L = \frac{1}{2} \left[\dot{\mathbf{q}}^t \dot{\mathbf{q}} - \frac{k}{m} \mathbf{q}^t \mathbf{A} \mathbf{q} \right] \quad (66)$$

Onde \mathbf{A} é uma matriz $N \times N$ dos coeficientes a_{ij} de $q_i q_j$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 2 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ 0 & -1 & 2 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ -1 & & \cdots & & -1 \end{pmatrix} \quad (67)$$

O superíndice t denota a transposição da matriz. Como a matriz \mathbf{A} é simétrica, existe uma mudança de coordenadas dada por uma matriz ortogonal \mathbf{S} que diagonaliza \mathbf{A} (CHOW, 2000)

$$\mathbf{q} = \mathbf{S}\mathbf{u} \quad (68)$$

Com \mathbf{S} tal que

$$\mathbf{S}^t = \mathbf{S}^{-1}$$

$$\mathbf{S}^t \mathbf{A} \mathbf{S} = \mathbf{D} \quad (69)$$

A matriz \mathbf{D} é a matriz diagonal. Os elementos dessa matriz são de tal forma que

$$d_{ij} = \alpha_i^2 \delta_{ij} \quad (70)$$

Onde α_i^2 são os autovalores positivos da matriz \mathbf{A} , pois $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ é uma configuração de equilíbrio estável do sistema. Substituindo a equação (68) na (66) e usando (69)

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} m \left[\mathbf{u}^t \mathbf{u} - \frac{k}{m} \mathbf{u}^t \mathbf{D} \mathbf{u} \right] \\ L &= \sum_j \left[\frac{1}{2} m \dot{u}_j^2 - \frac{1}{2} k \alpha_j^2 u_j^2 \right] \end{aligned} \quad (71)$$

O Hamiltoniano associado é

$$H(u_j, \Pi_j) = \sum_{j=1}^N \left[\frac{\Pi_j^2}{2m} + \frac{1}{2} k \alpha_j^2 u_j^2 \right] \quad (72)$$

Onde $\Pi_j = m\dot{u}_j$. A transformação ortogonal assegura que u_j e Π_j são canonicamente conjugados

$$[u_j, \Pi_j] = i\hbar \delta_{ij} \quad (73)$$

O Hamiltoniano (72) também é separável nas coordenadas que descrevem os modos normais de vibração do sistema. Cada modo possui uma frequência

$$\omega_j = \alpha_j \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (74)$$

A equação de Schrödinger admite soluções da forma

$$\psi = Q_1^{n_1}(u_1)Q_2^{n_2}(u_2) \dots Q_N^{n_N}(u_N) \quad (75)$$

Cada $Q_j^{n_j}(u_j)$ tem autovalor

$$E_j = \hbar\omega_j \left(n_j + \frac{1}{2} \right) \quad (76)$$

Portanto a energia total do sistema é quantizada em termos das frequências dos modos normais

$$E = \sum_{j=1}^N E_j = \sum_{j=1}^N \hbar\omega_j \left(n_j + \frac{1}{2} \right) \quad (77)$$

3. A TEORIA CLÁSSICA DE CAMPOS

Partículas são pontos materiais localizados em uma posição finita do espaço. As equações de movimento de um sistema mecânico com um número finito de graus de liberdade são determinadas pelos formalismos Lagrangeano e Hamiltoniano.

Um campo está definido em todos os pontos do espaço, ou seja, ele não está localizado em uma posição específica. Por exemplo, quando associamos um valor de temperatura a cada ponto de espaço, estamos definindo um campo escalar chamado, *campo de temperatura*.

Por sorte as teorias de campo de interesse físico são descritas classicamente pelos formalismos Lagrangeano e Hamiltoniano. As interações básicas das partículas elementares, constituintes da matéria, são expressas por meio de *teorias quânticas de campo*. Por sua vez, a construção das teorias quânticas das interações fundamentais da natureza depende primeiro, da possibilidade de formulá-las como *teorias clássicas de campos*, ou seja, nas linguagens Lagrangeana e Hamiltoniana (LEMOS, 2007).

3.1 O formalismo Lagrangeano

Segundo Pereira (2002), um sistema contínuo pode ser encarado como o limite de um sistema de partículas quando o número de graus de liberdade tende ao infinito. Toma-se o cuidado de fazer a correspondência correta entre as grandezas do sistema discreto e suas análogas no contínuo.

O problema de N partículas ligadas por molas reduz-se ao problema de uma corda contínua que vibra longitudinalmente, quando $N \rightarrow \infty$ e $a \rightarrow 0$ (mantendo $L = Na$ fixo) onde a é a distância de equilíbrio entre osciladores vizinhos e L é o comprimento da associação.

Segundo Symon (1981), a dinâmica da corda depende da densidade linear de massa e de uma constante relacionada à sua elasticidade. Pode-se representar cada deslocamento longitudinal dessa corda pela coordenada generalizada $\varphi_j(t)$. O índice j está relacionado com cada partícula ligada à mola, deve-se tornar contínuo e relacionado com a coordenada x do ponto sobre a corda

$$\varphi_j(t) \rightarrow \varphi(x = ja, t) \quad (78)$$

A grandeza $\varphi(x, t)$ é uma função contínua no domínio $0 \leq x \leq L$, que define um *campo escalar unidimensional*. A propriedade de inércia da corda é dada pela densidade linear de massa (SYMON, 1981)

$$\sigma = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{m}{a} = \frac{M}{L} \quad (79)$$

Onde M é a massa total da corda. A energia cinética do sistema discreto é

$$T = \sum_j a \frac{1}{2} \frac{m}{a} \dot{\varphi}_j^2 \quad (80)$$

No limite contínuo,

$$\sum_j a = \int dx$$

Então a equação (80) se torna

$$T = \int dx \left(\frac{1}{2} \sigma \dot{\varphi}_j^2 \right) \quad (81)$$

A energia potencial desse sistema é

$$V = \sum_j a \frac{1}{2} ka \left(\frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{a} \right)^2 \quad (82)$$

Identificando que $\tau = ka$ e

$$\frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{a} \rightarrow \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\varphi(x+a) - \varphi(x)}{a} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \varphi' \quad (83)$$

Logo a energia potencial da corda é

$$V = \int dx \left[\frac{1}{2} \tau (\varphi')^2 \right] \quad (84)$$

A Lagrangeana desse sistema contínuo é

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \int dx \left(\frac{1}{2} \sigma \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} \tau \varphi'^2 \right) \end{aligned} \quad (85)$$

$$L = \int dx \mathcal{L}(\dot{\varphi}, \varphi'; x, t) \quad (86)$$

Onde \mathcal{L} é chamada de *densidade Lagrangeana*. A ação mais geral para uma teoria de campos unidimensional retirada do princípio variacional de Hamilton tem a forma

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}, \varphi'; x, t) \quad (87)$$

A equação de movimento desse campo escalar é obtida a partir do cálculo variacional. Variando a ação

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \mathcal{L} \quad (88)$$

Como estamos fazendo analogia com uma corda vibrante, supomos que seus extremos são fixos, de modo que $\delta\varphi(x, t_1) = \delta\varphi(x, t_2) = 0$ e $\delta\varphi(x_1, t) = \delta\varphi(x_2, t) = 0$. A variação na variável espacial na densidade Lagrangeana é

$$\delta \mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi + \delta\varphi, \dot{\varphi} + \delta\dot{\varphi}, \varphi' + \delta\varphi'; x, t) - \mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}, \varphi'; x, t)$$

$$\delta \mathcal{L} = \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta\varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \delta\dot{\varphi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi'} \delta\varphi' - \mathcal{L}$$

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}\delta\dot{\varphi} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi'}\delta\varphi' \quad (89)$$

De acordo com (89) a equação (88) se torna e aplicando a condição de extremo na variação da ação, ou seja, $\delta S = 0$

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}\delta\dot{\varphi} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi'}\delta\varphi' \right) = 0 \quad (90)$$

Fazendo

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}\delta\dot{\varphi} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}\delta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}\frac{\partial}{\partial t}\delta\varphi$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi'}\delta\varphi' = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi'}\delta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi'}\frac{\partial}{\partial x}\delta\varphi$$

E em seguida usando

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}\frac{\partial}{\partial t}\delta\varphi = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}\delta\varphi\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}\right)\delta\varphi$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi'}\frac{\partial}{\partial x}\delta\varphi = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi'}\delta\varphi\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi'}\right)\delta\varphi$$

Levando em conta as condições de contorno $\delta\varphi(x_1, t) = \delta\varphi(x_2, t) = 0$ e substituindo as equações acima na equação (90)

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi'}\right) \right] \delta\varphi = 0 \quad (91)$$

Como $\delta\varphi$ é arbitrário, para que a igualdade da equação (91) seja verdadeira

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi'}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = 0 \quad (92)$$

A equação (92) é a *equação de Euler-Lagrange* para o campo escalar unidimensional. Substituindo a densidade Lagrangeana (85) na equação de movimento (92)

$$\sigma \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial t} - \tau \frac{\partial \varphi'}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (93)$$

A equação obtida a partir da densidade Lagrangeana (85) é uma *equação de onda*, com $v = \sqrt{\tau/\sigma}$ sendo a velocidade de propagação dessa onda.

A equação de Euler-Lagrange para N campos com três dimensões espaciais e uma temporal, representados por $\varphi = \varphi(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$, as equações de Lagrange resultantes do princípio de Hamilton (LEMOS, 2007)

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}, \nabla\varphi; t, x, y, z) \quad (94)$$

Onde $dt dx dy dz = d^4x$. Variando essa ação com os extremos fixos

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V d^3x \delta \mathcal{L}$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V d^3x \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} \delta \varphi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_i} \delta \dot{\varphi}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \varphi_i)} \cdot \delta \nabla \varphi_i \right\} \quad (95)$$

Onde as variações dos φ_i são independentes e se anulam nos extremos de integração temporal e na superfície que limita a região tridimensional V . Usando $\delta \dot{\varphi}_i = \partial(\delta \varphi_i)/\partial t$ e uma integração por partes

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_V d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_i} \delta \dot{\varphi}_i = - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V d^3x \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_i} \right) \delta \varphi_i \quad (96)$$

Agora tomando $\delta(\nabla \varphi_i) = \nabla(\delta \varphi_i)$ e a identidade vetorial $\mathbf{B} \cdot \nabla f = \nabla \cdot (f \mathbf{B}) - f \nabla \cdot \mathbf{B}$ com

$$\mathbf{B} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \varphi_i)}, \quad f = (\delta \varphi_i)$$

DE posse do teorema da divergência levando em conta que as variações são nulas na superfície que limita V

$$\int_V d^3x \nabla \cdot \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \varphi_i)} \delta \varphi_i \right] = \int_A d\mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \varphi_i)} \delta \varphi_i = 0$$

tem-se

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_V d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \varphi_i)} \cdot \delta \nabla \varphi_i = - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V d^3x \nabla \cdot \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \varphi_i)} \right] \delta \varphi_i \quad (97)$$

Então o princípio variacional de Hamilton tem a forma

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V d^3x \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_i} \right) - \nabla \cdot \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \varphi_i)} \right] \right\} \delta \varphi_i = 0$$

E as equações de Lagrange para uma teoria de campos tridimensional são da forma

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_i} \right) + \nabla \cdot \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \varphi_i)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} = 0 \quad (98)$$

3.2 O formalismo Hamiltoniano

Uma vez construído o formalismo Lagrangeano de uma teoria clássica de campos, é possível obter a formulação Hamiltoniana para sistemas contínuos. Assim como no caso de um sistema de partículas, deve-se encontrar o momento canonicamente conjugado às coordenadas de campo $\varphi_i(x, y, z, t)$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}_i} \int d^3x \mathcal{L} = \int d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_i} \quad (99)$$

Então

$$\pi^i(x, y, z, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_i} \quad (100)$$

é o momento canonicamente conjugado a cada campo $\varphi_i(x, y, z, t)$. A transformada de Legendre para esse caso se torna

$$\begin{aligned}
 H &= \sum_{i=1}^N p_i \dot{\varphi}_i - L \\
 &= \sum_{i=1}^N \int d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_i} \dot{\varphi}_i - \int d^3x \mathcal{L} \\
 H &= \int \left(\sum_{i=1}^N \pi^i \dot{\varphi}_i - \mathcal{L} \right) d^3x \tag{101}
 \end{aligned}$$

Segundo LEMOS (2007) é conveniente definir a *densidade Hamiltoniana* \mathcal{H} , que será interpretada fisicamente como sendo a densidade de energia do campo, como

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \pi^i \dot{\varphi}_i - \mathcal{L} \tag{102}$$

Com essa definição a ação na forma Hamiltoniana pode ser escrita da seguinte maneira

$$S = \int d^4x \left\{ \sum_{i=1}^N \pi^i \dot{\varphi}_i - \mathcal{H}(\varphi_i, \nabla \varphi_i, \pi^i, \nabla \pi^i) \right\} \tag{103}$$

Em todas as teorias de interesse físico, \mathcal{H} não depende dos gradientes de π^i . As equações de Hamilton são obtidas diretamente do princípio variacional de Hamilton, $\delta S = 0$

$$\delta S = \int d^4x \sum_i \{ \delta(\pi^i \dot{\varphi}_i) - \delta \mathcal{H} \}$$

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int d^4x \sum_i \left\{ \pi^i \delta \dot{\varphi}_i + \dot{\varphi}_i \delta \pi^i - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi_i} \delta \varphi_i - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\nabla \varphi_i)} \cdot \delta (\nabla \varphi_i) - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^i} \delta \pi^i \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\nabla \pi^i)} \cdot \delta (\nabla \pi^i) \right\} \\
&\quad \int d^4x \sum_i \pi^i \delta \dot{\varphi}_i = - \int d^4x \sum_i \dot{\pi}^i \delta \varphi_i \\
&\quad \int d^4x \sum_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\nabla \varphi_i)} \cdot \nabla (\delta \varphi_i) = - \int d^4x \sum_i \delta \varphi_i \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\nabla \varphi_i)} \\
&\quad \int d^4x \sum_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\nabla \pi^i)} \cdot \nabla (\delta \pi^i) = - \int d^4x \sum_i \delta \pi^i \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\nabla \pi^i)}
\end{aligned}$$

Nas integrações por partes os termos de fronteira são descartados, pois os extremos são fixos. Logo

$$\begin{aligned}
&\int d^4x \sum_i \left\{ \left(-\dot{\pi}^i - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi_i} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\nabla \varphi_i)} \right) \delta \varphi_i + \left(\dot{\varphi}_i - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^i} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\nabla \pi^i)} \right) \delta \pi_i \right\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Para que a igualdade seja válida para quaisquer $\delta \varphi_i$ e $\delta \pi^i$ cada termo que os multiplica deve ser nulo. Isso resulta em

$$\dot{\varphi}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^i} - \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\nabla \pi^i)} \quad (104)$$

$$\dot{\pi}^i = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi_i} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\nabla \varphi_i)} \quad (105)$$

As equações (104) e (105) são as equações de campo na forma Hamiltoniana.

3.3 Teoria de campos relativística

Quando as partículas se movem com velocidades próximas à velocidade da luz no vácuo, a mecânica newtoniana entra em contradição com a experiência (RINDLER, 2006) e precisa ser reformulada à luz da *teoria da relatividade restrita*. Baseado na correspondência entre os sistemas discreto e contínuo é de pode-se adaptar elementos da mecânica relativística a uma teoria de campos. Essa teoria relativística é chamada teoria clássica de campos.

3.3.1 Os postulados da Teoria da Relatividade Especial

Na Teoria da Relatividade Especial, o elemento de estudo são as *transformações* de grandezas físicas transferidas de um referencial inercial para outro. Essa mudança é feita mediante uma *transformação de Lorentz*. Essas transformações não são feitas somente no espaço tridimensional comum (x, y, z) , pois os intervalos de tempo na mecânica relativística não são os mesmos em diferentes referenciais inerciais. Dessa forma é conveniente definir o chamado *espaço de Minkowski* onde é incluído o tempo como quarta coordenada espacial. Logo esse espaço tem um caráter quadrimensional. Então um evento qualquer no espaço-tempo é caracterizado por três dimensões espaciais e uma temporal (t, x, y, z) .

Segundo Shutz (1985) a relatividade especial é fundamentada em dois postulados:

Princípio da relatividade (Poicaré): As leis da física não variam quando são observadas por observadores inerciais em referenciais distintos. Em outras palavras, o princípio de Galileu diz que se for possível, por exemplo, montar um experimento que possa medir a velocidade absoluta de um observador em um determinado referencial, os resultados dessa experiência não dependem da velocidade relativa de outros observadores em outros referenciais.

Universalidade da velocidade da luz (Einstein): A velocidade da luz em relação a qualquer referencial inercial é imutável. No sistema internacional de unidades (S.I) essa velocidade é $c = 3 \times 10^8 m/s$.

Como o valor da velocidade da luz é fundamental, usa-se esse fato para incorporar o tempo como uma coordenada espacial. Para isso é definido um novo sistema de unidades tal que $c = 1$. Isso implica em termos dimensionais que devemos usar uma nova unidade de tempo: o comprimento. Veja

$$c = 1 \Rightarrow 1 = \frac{L}{T} \Rightarrow L = T$$

Um metro de tempo é o tempo necessário que a luz leva para viajar um metro. Com essa nova definição de unidade, grandezas como velocidade, aceleração, força, energia dentre outras irão adquirir novas unidades.

3.3.2 Transformações de Lorentz e os 4-vetores

Seja S um referencial inercial e S' outro que se move em relação ao primeiro com uma velocidade na direção x de módulo constante igual a u . Suponha que as origens dos dois referenciais coincidam no instante $t = t' = 0$. Logo segundo Eisberg, 1988 as coordenadas (x, y, z, t) e (x', y', z', t') atribuídas a um mesmo *evento* por observadores fixos nos respectivos referenciais, estão relacionados da forma

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (106)$$

$$y' = y \quad (107)$$

$$z' = z \quad (108)$$

$$t' = \frac{t - \frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (109)$$

As transformações de Lorentz acima são estão no que se chama na forma padrão, pois o movimento do referencial S' se dar ao longo do eixo x . Segundo Shutz (1985) a homogeneidade e isotropia do espaço-tempo asseguram que a transformação de Lorentz seja linear. As transformações de Lorentz ainda podem conter rotações tridimensionais, rotações no espaço-tempo e reflexões. Logo uma transformação mais geral pode ser escrita de forma geral como

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad (110)$$

Onde x^{μ} é o 4-vetor posição no espaço de Minkowski. Qualquer vetor que se transforme de acordo com a equação (110) é dito ser um 4-vetor. Para explicitar suas componentes fazemos

$$x^{\mu} = (ct, \mathbf{r}) \quad (111)$$

É comum usar uma notação de onde

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z \quad (112)$$

Genericamente as coordenadas referidas em (112) são referidas como x^{α} . Nessa convenção os índices gregos ($\alpha, \beta, \gamma, \dots$) irão assumir os valores 0,1,2,3. Enquanto os índices latinos (i, j, k, \dots) assumirão os valores 1,2,3.

A equação (110) pode ser posta na forma matricial, da forma

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad (113)$$

Onde foi definido

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad \beta = \frac{u}{c} \quad (114)$$

E segundo Lemos, 2007 define-se a *matriz de transformação de Lorentz*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (115)$$

Claro que essa matriz não é uma transformação de Lorentz geral, mas ela é apenas um “boost”.

3.3.2.1 Intervalo invariante no espaço tempo

A transformação de Lorentz e a relatividade da simultaneidade fazem com que os intervalos de tempo e as distâncias sejam diferentes para observadores em diferentes referenciais inerciais. A grandeza associada a dois eventos infinitesimalmente próximos, com coordenadas no espaço-tempo (x, y, z, t) e $(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt)$, respectivamente, é denominada *intervalo* e segundo Rindler (2006) é definida como

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} \quad (116)$$

O intervalo no referencial S' é $ds'^2 = c^2 dt'^2 - d\mathbf{r}' \cdot d\mathbf{r}'$. Substituindo as transformações de Lorentz nesse intervalo

$$ds'^2 = ds^2 \quad (117)$$

Este é um importante resultado: o intervalo de dois eventos é invariante sob transformações de Lorentz. Diz-se também que ds é um *escalar de Lorentz*. No espaço euclidiano o comprimento é invariante sob mudança no sistema de coordenadas. Entretanto, no caso da relatividade especial nem a distância espacial

nem o intervalo de tempo são separadamente invariantes. Isso reforça mais ainda a idéia de um espaço quadridimensional (LEMOS, 2007).

Dotando a notação de índices, o intervalo em sua versão infinitesimal fica da forma

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (118)$$

Onde g_{ij} representa os elementos da *métrica de Minkowski* representada por uma matriz da forma

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (119)$$

É importante salientar que os elementos $g_{\mu\nu}$ da matriz \mathbf{G} são componentes do *tensor métrico*. Pode-se definir também a matriz \mathbf{G}^{-1} que é a inversa de \mathbf{G} que por consistência é igual à própria matriz.

3.3.2.2 O grupo de Lorentz

Segundo Lemos (2007) a transformação de Lorentz mais geral possível que deixa ds^2 invariante

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\alpha dx^\alpha \Lambda^\nu_\beta dx^\beta \quad (120)$$

A fim de comparar os coeficientes dos deslocamentos no segundo e último membros de (120) e notando que

É fácil ver que

$$g_{\alpha\beta} = \Lambda^\mu_\alpha g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\beta \quad (121)$$

O grupo de Lorentz L é definido como o conjunto das matrizes $\mathbf{\Lambda}$ que satisfazem a condição

$$\Lambda^T \mathbf{G} \Lambda = \mathbf{G} \quad (122)$$

Para realmente constatar que a condição (122) forma um grupo, devemos recorrer a definição axiomática que está no apêndice B. Um elemento do Grupo de Lorentz satisfaz:

1. *Fechamento*: Se as matrizes $\Lambda_1, \Lambda_2 \in L$ então o produto $\Lambda_1 \Lambda_2 \in L$.

Demonstração:

Substituindo o produto de matrizes na definição (122) temos

$$(\Lambda_1 \Lambda_2)^T \mathbf{G} \Lambda_1 \Lambda_2 = \Lambda_2^T \Lambda_1^T \mathbf{G} \Lambda_1 \Lambda_2 = \Lambda_2^T (\Lambda_1^T \mathbf{G} \Lambda_1) \Lambda_2 = \Lambda_2^T \mathbf{G} \Lambda_2 = \mathbf{G} \quad \blacksquare$$

2. *Associatividade*: Se $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3 \in L$ então vale a relação

$$(\Lambda_1 \Lambda_2) \Lambda_3 = \Lambda_1 (\Lambda_2 \Lambda_3)$$

Essa propriedade é demonstrada automaticamente, porque o produto de matrizes é associativo.

3. *O elemento neutro*: Existe um elemento neutro, que é a matriz identidade \mathbf{I} , tal que $\mathbf{I} \in L$.

Demonstração:

Diretamente da definição

$$\mathbf{I}^T \mathbf{G} \mathbf{I} = \mathbf{I} \mathbf{G} = \mathbf{G} \quad \blacksquare$$

4. *O elemento inverso*: Existe um elemento inverso, Λ^{-1} , tal que $\Lambda \Lambda^{-1} = \mathbf{I}$.

Demonstração:

Considerando que $\mathbf{G}^2 = \mathbf{I}$

$$\mathbf{G} \Lambda^T \mathbf{G} \Lambda = \mathbf{G}^2 \Rightarrow \mathbf{G} \Lambda^T \mathbf{G} \Lambda = \mathbf{I} \Rightarrow \Lambda^{-1} = \mathbf{G} \Lambda^T \mathbf{G}$$

Então

$$(\Lambda^{-1})^T \mathbf{G} \Lambda^{-1} = (\mathbf{G} \Lambda^T \mathbf{G})^T \mathbf{G} \Lambda^{-1} = \mathbf{G} \Lambda^T \mathbf{G} \mathbf{G} \Lambda^{-1} = \mathbf{G} \Lambda \Lambda^{-1} = \mathbf{G} \quad \blacksquare$$

Ou seja, $\Lambda^{-1} \in L$.

Note que o determinante da equação (122) é

$$\det \mathbf{G} = \det (\Lambda^T \mathbf{G} \Lambda) \Rightarrow \det \Lambda = \pm 1 \quad (123)$$

Por causa dessa equação o grupo de Lorentz fica dividido em mais dois: Os grupos próprio e impróprio de Lorentz definidos, respectivamente por

$$L_+ = \{\Lambda \in L; \det \Lambda = 1\} \quad (124)$$

$$L_- = \{\mathbf{\Lambda} \in L; \det \mathbf{\Lambda} = -1\} \quad (125)$$

Esses dois conjuntos são disjuntos, ou seja, $L_+ \cap L_- = \emptyset$. Por outro lado, tomando $\alpha = \beta = 0$ em (121)

$$g_{00} = 1 = \Lambda^\mu{}_0 g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_0 = (\Lambda^0{}_0)^2 - \sum_i (\Lambda^i{}_0)^2$$

$$(\Lambda^0{}_0)^2 = 1 + (\Lambda^1{}_0)^2 + (\Lambda^2{}_0)^2 + (\Lambda^3{}_0)^2 \geq 1$$

De onde concluímos que

$$\Lambda^0{}_0 \geq +1 \text{ ou } \Lambda^0{}_0 \leq -1 \quad (126)$$

Dessa condição formam-se mais dois grupos

$$L^\uparrow = \{\mathbf{\Lambda} \in L; \Lambda^0{}_0 \geq +1\} \quad (127)$$

$$L^\downarrow = \{\mathbf{\Lambda} \in L; \Lambda^0{}_0 \leq -1\} \quad (128)$$

Que são as transformações de Lorentz *ortócrona* e *não-ortócrona*, respectivamente. No sentido físico, uma transformação de Lorentz é dita ortócrona quando ela preserva o sentido do tempo. Enquanto a transformação não-ortócrona, inverte o sentido do tempo (LEMOS, 2007).

3.3.3 Leis físicas na forma covariante

O aparato tensorial desenvolvido no apêndice A tem como objetivo a expressão matemática das leis físicas em forma *covariante*, ou seja, *válida em todos os referenciais inerciais*. Suponha que, num dado sistema de referência inercial S, uma lei da física possa ser expressa na forma

$$T^{\mu\nu} = 0$$

Onde $T^{\mu\nu}$ é um campo tensorial. Em virtude das leis de transformação homogêneas de Lorentz, se um campo tensorial é nulo em um determinado sistema inercial ele será nulo nos demais. Em outras palavras, em S'

$$T'^{\mu\nu} = 0$$

Dessa forma uma lei física descrita em S tem a mesma forma em S'. Dizemos então que tal lei esta manifestada na forma covariante. Isso dentre outras vantagens, facilita a determinação de como se transformam as grandezas físicas relevantes quando se muda o referencial.

3.3.4 Dinâmica relativística

Antes de trabalharmos com campos relativísticos é importante saber como são os elementos cinemáticos e dinâmicos de uma partícula na forma covariante. Vamos começar definindo a quadrivelocidade. A idéia mais imediata seria considerar dx^μ/dt , mas este objeto não é um quadri vetor porque segundo Lemos (2007) dt não é um escalar. O intervalo de tempo próprio $d\tau$, segundo Rindler (2006) é definido como o intervalo de tempo medido no sistema de referência em que a partícula encontra-se imediatamente em repouso.

Suponha que, no instante t de um referencial S, a partícula tenha velocidade \mathbf{u} quando vista de S. Seja S' um referencial inercial que se move com velocidade \mathbf{u} relativamente a S, de modo que, do ponto de vista de S', a partícula encontra-se em repouso no instante t de S. Seja ds o intervalo invariante definido pela equação (116). Evidentemente, $d\mathbf{r} = \mathbf{u}dt$, de sorte que, no referencial S,

$$ds^2 = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) \quad (129)$$

Mas do ponto de vista de S'

$$ds'^2 = c^2 d\tau^2 \quad (130)$$

Isso porque no intervalo de tempo $d\tau$ medido em S' a partícula permaneceu imóvel, uma vez que o referencial S' acompanhou o movimento da partícula. Mas como o intervalo é invariante

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma}, \quad (131)$$

com γ definido pela equação (114). Note que a (130) comprova que $d\tau$ é um escalar.

A *quadrivelocidade* U^μ segundo Rindler (2006) é um quadri vetor definido por

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = (\gamma c, \gamma \mathbf{v}) \quad (132)$$

Onde $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ é a velocidade tridimensional da partícula. Uma consequência imediata desta definição é que

$$U^\mu U_\mu = U^\mu g_{\mu\nu} U^\nu = g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = \gamma^2 (c^2 - v^2) \Rightarrow U^\mu U_\mu = c^2 \quad (133)$$

Analogicamente a quadriaceleração é definida por

$$\mathcal{A}^\mu = \frac{dU^\mu}{d\tau} = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = \left(\gamma^4 \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{c}, \gamma^4 \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})}{c^2} + \gamma^2 \mathbf{a} \right) \quad (134)$$

Onde $\mathbf{a} = d\mathbf{r}/dt$ é a aceleração tridimensional. Um resultado importante entre a quadrivelocidade e a quadriaceleração é que eles são vetores ortogonais. Pode-se demonstrar isso usando (132), (133) e (134)

$$\frac{d(U^\mu U_\mu)}{d\tau} = 0 \Rightarrow 2U_\mu \frac{dU^\mu}{d\tau} = 0 \Rightarrow \mathcal{A}^\mu U_\mu = 0 \quad (135)$$

Para o quadrimomento de uma partícula define-se

$$p^\mu = m_0 U^\mu = (\gamma m_0 c, \gamma m_0 \mathbf{v}) \quad (136)$$

Onde m_0 é um escalar chamado massa de repouso, ou simplesmente, massa da partícula. De (133) decorre

$$p^\mu p_\mu = m_0^2 c^2 \quad (137)$$

E $\mathbf{p} = \gamma m_0 \mathbf{v}$ é o momento linear relativístico, e para baixas velocidades ele se reduz à expressão newtoniana.

Agora podemos propor uma versão covariante da segunda lei de Newton

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = F^\mu \quad (138)$$

Onde F^μ é a quadrimforça, também chamada de força de Minkowski (LEMOS, 2007). Também se pode mostrar usando (137) e (138) que o quadrimomento e quadrimforça são ortogonais

$$\frac{d(p^\mu p_\mu)}{d\tau} = 0 \Rightarrow p_\mu \frac{dp^\mu}{d\tau} + p^\mu \frac{dp_\mu}{d\tau} = 0 \Rightarrow F^\mu p_\mu = 0 \quad (139)$$

A equação (138) não diz nada a não ser se for relacionada com a força tridimensional \mathbf{F} . O modo mais simples de fazer isso é considerar a hipótese de permanece válida a conexão newtoniana entre a força e a taxa de variação do momento linear

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(\gamma m_0 \mathbf{v})}{dt} = \mathbf{F} \quad (140)$$

Comparando (140) com as componentes espaciais de (138) e utilizando (131) encontra-se

$$F^\mu = (F^0, \gamma \mathbf{F}) \quad (141)$$

A componente temporal F^0 é obtida através de (139)

$$\gamma m_0 c F^0 - \gamma^2 m_0 \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = 0 \Rightarrow F^0 = \frac{\gamma}{c} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

Dessa forma a equação (141) se torna

$$F^\mu = \left(\frac{\gamma}{c} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}, \gamma \mathbf{F} \right) \quad (142)$$

Podemos nos perguntar: qual o significado físico da componente temporal da equação de movimento covariante? Segundo Lemos (2007) essa pergunta pode ser respondida fazendo uso de (131), (138) e (142)

$$\frac{dP^0}{d\tau} = \frac{dP^0}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma \frac{d(\gamma m_0 c)}{dt} = F^0 = \frac{\gamma}{c} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

Ou seja,

$$\frac{d}{dt}(\gamma m_0 c^2) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (143)$$

Como $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ é a potência fornecida à partícula pela força \mathbf{F} , podemos concluir que

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (144)$$

Esta é a definição da *energia relativística* da partícula, e a componente temporal da equação de movimento covariante representa a lei de conservação da energia. Com esse resultado pode-se escrever a equação (136) como

$$P^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right) \quad (145)$$

No limite não relativístico, uma expansão binomial aplicada em (144)

$$E = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8} m_0 \frac{v^4}{c^2} + \dots \quad (146)$$

Segundo Lemos (2007) o segundo termo é a energia cinética newtoniana e os termos seguintes são correções relativísticas na expressão clássica. O primeiro termo não tem análogo clássico e Einstein interpretou como sendo a *energia de repouso* de uma partícula

$$E_0 = m_0 c^2 \quad (147)$$

Logo a energia cinética relativística é

$$T = E - E_0 \Rightarrow T = (\gamma - 1) m_0 c^2 \quad (148)$$

3.3.5 Campos relativísticos

As equações de Lagrange (98) permanecem inalteradas sob uma mudança das coordenadas \mathbf{r}, t . Em particular, fazendo $x^0 = ct$ tem-se

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x^0} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \varphi_i / \partial x^0)} \right]$$

Em termos da notação covariante, as equações de Lagrange para campos relativísticos são das por

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_i)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} = 0 \quad (149)$$

Onde

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \quad (150)$$

Se para um dado valor de i , φ_i for um campo escalar, $\partial \mathcal{L} / \partial (\partial_\mu \varphi_i)$ será um quadrivetor covariante. Neste caso, se a densidade Lagrangeana \mathcal{L} for uma grandeza escalar, será um quadrivetor contravariante e o primeiro termo à esquerda será um escalar. De modo geral, para que as equações de Lagrange (149) sejam covariantes, basta impor que a densidade Lagrangeana seja um escalar. Uma vez que o elemento de volume quadrimensional d^4x é invariante sob transformações de Lorentz, a ação

$$S = \int d^4x \mathcal{L}$$

Também será um escalar se \mathcal{L} for um escalar.

3.4 Teorema de Noether

Segundo Lemos (2007) o teorema de Noether resume a relação entre simetrias e leis de conservação na Teoria Clássica de Campos. Ele diz respeito a transformações contínuas nos campos φ_i , as quais, em forma diferencial, podem ser escritas na forma

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu + \Delta x^\mu \quad (151)$$

$$\varphi_i(x) \longrightarrow \varphi'_i(x) = \varphi_i + \Delta\varphi_i(x) \quad (152)$$

A variação Δ difere da variação usual δ porque leva em conta a mudança do campo em conseqüência da alteração tanto de sua forma funcional quanto de seu argumento. A variação provocada apenas pela mudança de forma é definida por

$$\delta\varphi_i(x) = \varphi'_i(x) - \varphi_i(x) \quad (153)$$

E escrevemos a variação $\Delta\varphi_i(x)$ como

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_i(x) &= \varphi'_i(x') - \varphi_i(x) \\ &= \varphi'_i(x') - \varphi_i(x') + \varphi_i(x') - \varphi_i(x) \\ \Delta\varphi_i(x) &= \delta\varphi_i(x') + \varphi_i(x') - \varphi_i(x) \end{aligned} \quad (154)$$

Mas por outro lado

$$\varphi_i(x + \Delta x^\mu) = \varphi_i(x) + \frac{\partial\varphi_i}{\partial x^\mu} \Delta x^\mu = \partial_\mu\varphi_i \Delta x^\mu \quad (155)$$

Lembrando que a convenção de Einstein está sendo levada em conta. Dessa forma a equação (154) se torna

$$\Delta\varphi_i(x) = \delta\varphi_i(x') + \partial_\mu\varphi_i \Delta x^\mu \quad (156)$$

É importante salientar que as derivadas ∂_μ comutam com a operação δ , mas não comutam com a operação Δ . Aplicando a equação (156) em $\partial_\beta\varphi_i(x)$

$$\Delta \partial_\beta \varphi_i(x) = \delta \partial_\beta \varphi_i(x') + \partial_\mu \partial_\beta \varphi_i(x) \Delta x^\mu \quad (157)$$

A variação da ação é definida por

$$\Delta S = \int d^4x \{ \mathcal{L}'[\varphi'_i(x'), \partial_\beta \varphi_i(x'), x'] - \mathcal{L}[\varphi_i(x), \partial_\beta \varphi_i(x), x'] \} \quad (158)$$

A densidade Lagrangeana variada é

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} \Delta \varphi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi_i)} \Delta (\partial_\beta \varphi_i) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \Delta x^\mu \quad (159)$$

Usando (156) e (157) a equação (159) se torna

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} \delta \varphi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} (\partial_\mu \varphi_i) \Delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi_i)} \delta (\partial_\beta \varphi_i) \\ + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi_i)} (\partial_\mu \partial_\beta \varphi_i) \Delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \Delta x^\mu \end{aligned} \quad (160)$$

Nesse momento é conveniente definir a derivada total em relação à x^μ

$$\frac{d\mathcal{L}}{dx^\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} \partial_\mu \varphi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi_i)} \partial_\mu \partial_\beta \varphi_i + \partial_\mu \mathcal{L} \quad (161)$$

A partir dessa definição a equação (161) se torna

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \delta \mathcal{L} + \frac{d\mathcal{L}}{dx^\mu} \Delta x^\mu \quad (162)$$

A equação (161) leva em conta a dependência explícita e a dependência por intermédio dos campos. Mas por outro lado

$$d^4x' = J \left(\frac{x'}{x} \right) d^4x \quad (163)$$

Onde J é o jacobiano da transformação $x' \rightarrow x$. Da eq. (151)

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} = \delta_\lambda^\mu + \partial_\lambda \Delta x^\mu$$

Como

$$J\left(\frac{x'}{x}\right) = \det\left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}}\right) = 1 + \partial_{\lambda}\Delta x^{\mu}$$

Dessa forma (163) fica

$$d^4x' = (1 + \partial_{\mu}\Delta x^{\mu})d^4x \quad (164)$$

Levando em conta (160), (162), (164) e considerando que as variações são pequenas, os termos de $(\Delta x^{\mu})^2$ são desprezíveis e a equação (158) se torna

$$\Delta S = \int d^4x \left[\delta\mathcal{L} + \frac{d\mathcal{L}}{dx^{\mu}}\Delta x^{\mu} + \partial_{\mu}\Delta x^{\mu}\delta\mathcal{L} \right] \quad (165)$$

Entretanto pode-se observar que o segundo termo dentro do colchete é $d(\mathcal{L}\Delta x^{\mu})/dx^{\mu}$. Logo

$$\Delta S = \int d^4x \left[\delta\mathcal{L} + \frac{d}{dx^{\mu}}(\mathcal{L}\Delta x^{\mu}) \right] \quad (166)$$

Usando as equações de movimento dos campos

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_i} = \frac{d}{dx^{\mu}} \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\varphi_i)} \right]$$

Pode-se escrever

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_i}\delta\varphi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\varphi_i)}\delta(\partial_{\mu}\varphi_i) \\ &= \frac{d}{dx^{\mu}} \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\varphi_i)} \right] \delta\varphi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\varphi_i)} \frac{d}{dx^{\mu}}(\delta\varphi_i) \\ \delta\mathcal{L} &= \frac{d}{dx^{\mu}} \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\varphi_i)}(\delta\varphi_i) \right] \end{aligned} \quad (167)$$

Substituindo (167) em (166) e impondo que a ação não varia com a transformação aplicada

$$\Delta S = \int d^4x \frac{d}{dx^\mu} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_i)} (\delta \varphi_i) + \mathcal{L} \Delta x^\mu \right\} = 0$$

Para todo d^4x tem-se

$$\frac{d}{dx^\mu} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_i)} (\delta \varphi_i) + \mathcal{L} \Delta x^\mu \right\} = 0 \quad (168)$$

O que implica que a grandeza entre chaves é conservada.

3.4.1 Quantidades conservadas e o tensor energia-momento

Torna-se mais conveniente exprimir leis de conservação como a equação (168) em termos dos parâmetros infinitesimais que caracterizam a transformação. Suponha que as transformações (151) e (152) sejam especificadas em termos de R parâmetros infinitesimais independentes $\epsilon_1, \dots, \epsilon_R$ na forma

$$\Delta x^\mu = X^{\mu(r)} \epsilon_r \quad (169)$$

$$\Delta \varphi_i = Y_i^{(r)} \epsilon_r \quad (170)$$

Os índices i e r dos campos e dos parâmetros da transformação podem ou não ter caráter tensorial, e continua válido a convenção de índices repetidos indicam soma. Substituindo as equações (169) e (170) em (156)

$$\delta \varphi_i = \left[Y_i^{(r)} - \partial_\nu \varphi_i X^{\nu(r)} \right] \epsilon_r \quad (171)$$

Introduzindo as equações (169) e (171) na variação da ação

$$\Delta S = \epsilon_r \int d^4x \frac{d}{dx^\mu} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_i)} \left[Y_i^{(r)} - \partial_\nu \varphi_i X^{\nu(r)} \right] + \mathcal{L} X^{\mu(r)} \right\} = 0 \quad (172)$$

Definindo

$$\Theta^{\mu(r)} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_i)} \left[Y_i^{(r)} - \partial_\nu \varphi_i X^{\nu(r)} \right] + \mathcal{L} X^{\mu(r)} \quad (173)$$

A equação se torna

$$\Delta S = - \int d^4x \frac{d\Theta^{\mu(r)}}{dx^\mu} = 0 \quad (174)$$

Como a região de integração e os parâmetros ϵ_r são arbitrários, de (174) deduzem-se as R leis de conservação local

$$\frac{d\Theta^{\mu(r)}}{dx^\mu} = 0, \quad r = 1, \dots, R \quad (175)$$

Fazendo $\Theta^{\mu(r)} = (\Theta^{0(r)}, \Theta^{\mu(r)})$ escrevemos (175) como

$$\partial_0 \Theta^{0(r)} + \nabla \cdot \Theta^{\mu(r)} = 0 \quad (176)$$

Usando o teorema da divergência a equação (176) pode ser posta na forma integral

$$\int_V d^3x \partial_0 \Theta^{0(r)} = - \int_V d^3x \nabla \cdot \Theta^{\mu(r)} = \int_A \Theta^{\mu(r)} \cdot d\mathbf{A} \quad (177)$$

Se a região de integração V engloba todo o espaço tridimensional e os campos tendem a zero com rapidez no infinito, a integral de superfície é nula.

$$\frac{d}{dx^0} \int_V d^3x \Theta^{0(r)} = 0$$

$$C^{(r)} = \int_V d^3x \Theta^{0(r)} \quad (178)$$

E as integrais são quantidades conservadas, pois não dependem do tempo. Fica demonstrado que a cada transformação infinitesimal R -paramétrica das coordenadas e campos que deixa a ação invariante, correspondem a R quantidades conservadas $C^{(r)}$ dadas por (178) conhecidas como *cargas de Noether*. Considerando agora a translação no espaço-tempo

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \epsilon^{\mu} \quad (179)$$

Que não modifica os campos, isto é $\Delta\varphi_i = 0$. Como o jacobiano dessa transformação é um, as equações (158) e (159) mostram que a ação é invariante desde que a densidade Lagrangeana não dependa explicitamente das coordenadas espaço-temporais. Agora o r tem natureza quadrivetorial, e de acordo com (169) e (170)

$$X^{\mu(\beta)} = g^{\mu\nu} \quad (180)$$

$$Y_i^{(\beta)} = 0 \quad (181)$$

Substituindo (180) e (181) em (173)

$$\Theta^{\mu(\beta)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\varphi_i)} g^{\beta\nu} \partial_{\nu}\varphi_i - \mathcal{L}g^{\mu\beta} \quad (182)$$

Entretanto como $\partial^{\beta} = g^{\beta\nu} \partial_{\nu}$, e fazendo $\beta \rightarrow \nu$ define-se o *Tensor Energia-Momento* do campo

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\varphi_i)} \partial^{\nu}\varphi_i - \mathcal{L}g^{\mu\nu} \quad (183)$$

A partir disso as cargas de Noether conservadas compõem o quadrivetor

$$P^{\nu} = \int d^3x T^{0\nu} \quad (184)$$

A componente zero deste quadrivetor é a integral da densidade Hamiltoniana, em outras palavras, é a energia. Considerações de covariância e o fato da conservação do momento linear estão ligados á invariância sob translações espaciais estabelecem que P^{ν} é o quadrimomento ou *quadrivetor de energia-momento*, daí o nome Tensor Energia-Momento.

4. A TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS

A razão para se estudar Teoria Quântica de Campos está na esperança de que ela irá nos ajudar a entender as partículas fundamentais da matéria e suas interações. Ela nasceu da necessidade de descrever processos de criação e aniquilação de partículas, e era chamada erroneamente de segunda quantização (por razões históricas). Essa estrutura incorpora a mecânica quântica, uma vez que vamos observar fenômenos microscópicos e a relatividade especial, pois as interações demandam muita energia (RYDER, 1996).

De maneira simples essa teoria consiste em tomar campos clássicos e verificar o que é a unidade de excitação desse campo. Esse processo se chama *quantização do campo*. Essa unidade é chamada de *quanta* (partícula), e é responsável pela interação desse campo com a matéria. Um exemplo clássico disso é o campo eletromagnético, o qual o fóton é a unidade excitadora dele (LE BELLAC, 1995). Esse fóton na interação com a matéria, que é constituída de átomos, muda o seu estado quântico, ou seja, ele sai do estado fundamental e passa para um estado excitado.

4.1 O campo de Klein-Gordon

Historicamente, a primeira equação usada para descrever partículas relativísticas de spin zero foi a equação de *Klein-Gordon*. Embora de acordo com Greiner (2000) ela apresente alguns problemas como: (i) a interpretação de energia negativa que foi resolvido posteriormente por Dirac, (ii) a densidade de corrente de probabilidade não é positivo definida. Mas para o objetivo desse trabalho não será necessário entrar nesses detalhes.

Para deduzir essa equação devemos usar alguns aspectos da Relatividade Especial em conjunto com a Mecânica Quântica formando assim a *Mecânica Quântica Relativística*.

Para isso, usando a eq. (137) junto com a definição (145)

$$p^2 = p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = m^2 c^2 \quad (185)$$

Da mecânica quântica, associamos operadores Hermitianos ao momento linear e a energia, logo

$$E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad , \quad \mathbf{p} = -i\hbar \nabla \quad (186)$$

Substituindo (186) em (185) e multiplicando pela função de onda ϕ , obtemos

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \phi - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \phi = 0 \quad (187)$$

Nesse ponto é conveniente definir o operador D'Alambertiano \square

$$\square = \partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \quad (188)$$

Dessa forma

$$\left(\square + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi = 0 \quad (189)$$

Esta equação é idêntica a de um oscilador harmônico clássico da equação (4).

Usando a definição (186) em (187), temos

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \omega_{\mathbf{p}}^2 \phi = 0 \quad (190)$$

Onde

$$\omega_{\mathbf{p}} = \left(\frac{|\mathbf{p}|^2 c^2 + m^2 c^4}{\hbar^2} \right)^{1/2} \quad (191)$$

E para facilitar, vamos utilizar a convenção da clássica da teoria de campos $c = \hbar = 1$, de tal forma que as equações (189) e (191) se tornem

$$(\square + m^2)\phi = 0 \quad (192)$$

$$\omega_{\mathbf{k}} = (|\mathbf{k}|^2 + m^2)^{1/2} \quad (193)$$

Sendo ϕ uma função complexa, ela também satisfaz

$$(\square + m^2)\phi^* = 0 \quad (194)$$

As equações (192) e (193) são as equações de Klein-Gordon para um *campo escalar livre*. Vamos nos deter no decorrer desse trabalho ao campo escalar real.

Embora o campo de Klein-Gordon $\phi(\mathbf{r}, t)$ não tenha análogo clássico por ser estritamente quântico, segundo Ryder (1996) podemos tratá-lo como um campo clássico. Para simplificar a notação fazemos $\phi(\mathbf{r}, t) = \phi(x)$. Como já sabemos a equação de Klein-Gordon devemos encontrar a densidade Lagrangeana que irá gerar a equação de movimento. Segundo Ryder, ela é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 \quad (195)$$

Para descobrir a energia na forma clássica, usaremos o tensor energia-momento definido por (183) em conjunto com a eq. (184)

$$P^0 = \int d^3x T^{00} \Rightarrow H = \frac{1}{2} \int d^3x [(\partial_0 \phi)^2 + \nabla \phi \cdot \nabla \phi + m^2 \phi^2] \quad (196)$$

Agora temos uma energia positivo definida. Mas como isto está relacionado com a energia dos estados de uma única partícula? A resposta para isso é que a quantização do campo nos obriga a reinterpretar como um quantum ao invés de um sistema clássico. Para o momento, temos

$$P^i = \int d^3x T^{0i} = - \int d^3x \partial_0 \phi \partial_i \phi \Rightarrow \mathbf{P} = - \int d^3x \dot{\phi} \nabla \phi \quad (197)$$

4.2 A quantização canônica do Campo de Klein-Gordon

Nesse modo de quantização as variáveis dinâmicas do campo são interpretadas como operadores Hermitianos, sujeitos a relações canônicas de comutação (LE BELLAC, 1995). E a teoria fica quantizada encontrando os autovalores e autoestados, em analogia com o oscilador harmônico.

4.2.1 O campo no espaço de Fourier

Uma solução para a equação de Klein-Gordon é uma onda plana da forma $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t)$, onde \mathbf{k} é o número de onda e com frequência $(|\mathbf{k}|^2 - m^2)^{1/2}$. Agora por uma questão de se trabalhar com uma notação mais compacta é conveniente fazer, usando $x^\mu = (t, \mathbf{r})$ e $k^\mu = (k_0, \mathbf{k})$, de tal forma que $kx = k^\mu x_\mu = -(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$. Segundo Le Bellac (1995), pode-se definir uma transformada de Fourier quadrimensional, ou seja, invariante de Lorentz da forma.

$$\phi(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} F(k) e^{-ikx} \quad (198)$$

$$F(k) = \int d^4k \phi(x) e^{ikx} \quad (199)$$

As integrais acima são feitas com os limites infinitos, e a notação para x e k são mantidas. Substituindo a equação (198) em (190)

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} (k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2) F(k) e^{-ikx} = 0 \Rightarrow (k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2) F(k) = 0 \quad (200)$$

Segundo Le Bellac, Temos duas saídas aqui: (i) $k_0^2 = \omega_{\mathbf{k}}^2$ ou (ii) $F(k) = 0$. A primeira pode ser colocada na forma $k^2 = m^2$, e é chamada camada de massa (do

inglês *mass shell*). Outra é $F(k) = 0$ para $k_0^2 \neq \omega_{\mathbf{k}}^2$. A única solução para isso é supor que $F(k)$ é proporcional a $\delta(k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2)$.

$$F(k) = 2\pi\delta(k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2)\chi(k) \quad (201)$$

A função $\chi(k)$ pode ser dividida em duas partes, uma negativa e outra positiva, da forma

$$\chi(k) = \theta(k_0)a(\mathbf{k}) + \theta(-k_0)b(\mathbf{k}) \quad (202)$$

Com o auxílio da propriedade da função delta de Dirac, fornecida por Butkov (1988), que é dada da forma

$$\delta(k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2) = \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} [\delta(k_0 + \omega_{\mathbf{k}}) + \delta(k_0 - \omega_{\mathbf{k}})] \quad (203)$$

Dessa forma substituindo (202) e (203) em (198) tem-se

$$\phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}} [a(\mathbf{k})e^{-ikx} + b(\mathbf{k})e^{ikx}] \quad (204)$$

Que é justamente o campo escrito no espaço de Fourier. O elemento de volume invariante de Lorentz é

$$d\tilde{k} = \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}} \quad (205)$$

O campo deve ser encarado como um sendo um operador hermitiano, isso implica que $\phi(x) = \phi^\dagger(x)$. Isso conduz a

$$\phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}} [a(\mathbf{k})e^{-ikx} + a^\dagger(\mathbf{k})e^{ikx}] \quad (206)$$

Quando escreve-se o campo dessa forma estamos escrevendo o campo em termos dos modos de vibração.

4.2.2 O Hamiltoniano e os operadores $a(\mathbf{k})$ e $a^\dagger(\mathbf{k})$

Pode-se encontrar o campo densidade de momento $\pi(x)$ associado a $\phi(x)$, fazemos uso da densidade Lagrangeana de Klein-Gordon (195)

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}(x) \quad (208)$$

Onde $\dot{\phi} = \partial_0 \phi$. Logo o momento é

$$\pi(x) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}} (-i\omega_{\mathbf{k}}) [a(\mathbf{k})e^{-ikx} - a^\dagger(\mathbf{k})e^{ikx}] \quad (209)$$

Com o conceito de derivada funcional, segundo Lemos (2007) os parênteses de Poisson dos campos $\phi_i(x)$ e $\pi^i(x)$ é dado por

$$\{\phi_i(x), \pi^j(x')\} = \delta_i^j \delta^{(3)}(x - x') \quad (210)$$

Aproveitando esse resultado, postulamos as relações de comutação entre essas variáveis dinâmicas

$$[\phi(x), \pi(x')] = i\hbar \delta^{(3)}(x - x') \quad (211)$$

$$[\phi(x), \phi(x')] = [\pi(x), \pi(x')] = 0 \quad (212)$$

É conveniente escrever o campo e seu momento conjugado em termos dos operadores $a(\mathbf{k})$ e $a^\dagger(\mathbf{k})$. Para tal escrevemos as equações (206) e (208) na forma

$$\phi(x) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[\frac{a(\mathbf{k}) + a^\dagger(-\mathbf{k})}{2\omega_{\mathbf{k}}} \right] e^{-ikx} \quad (213)$$

$$\pi(x) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left(\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{i} \right) \left[\frac{a(\mathbf{k}) - a^\dagger(-\mathbf{k})}{2\omega_{\mathbf{k}}} \right] e^{-ikx} \quad (214)$$

Usando uma transformada de Fourier, vemos que as equações acima ficam

$$a(\mathbf{k}) = \int d^3x [\omega_{\mathbf{k}}\phi(x) + i\pi(x)]e^{ikx} \quad (215)$$

$$a^\dagger(\mathbf{k}) = \int d^3x [\omega_{\mathbf{k}}\phi(x) - i\pi(x)]e^{-ikx} \quad (216)$$

Segundo Lemos (2007), usando o conceito de derivada funcional, o colchete de Poisson dos campos $\phi_i(x)$ e $\pi^i(x)$ é

$$\{\phi_i(\mathbf{x}), \pi^j(\mathbf{x}')\} = \delta_i^j \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (217)$$

Mais simples

$$\{\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{x}')\} = \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (218)$$

$$\{\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{x}')\} = \{\pi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{x}')\} = 0 \quad (219)$$

A partir desse resultado clássico, podemos postular as relações de comutação

$$[\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{x}')] = i\hbar\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (220)$$

$$[\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{x}')] = [\pi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{x}')] = 0 \quad (221)$$

Um detalhe importante, é que as relações de comutação entre os campos devem ser calculadas no mesmo tempo. Uma vez que se conhecem as relações de comutação entre os campos. Pode-se com uma certa facilidade obter a relação de comutação

$$[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = a(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k}') - a^\dagger(\mathbf{k}')a(\mathbf{k}) \quad (222)$$

Usando as equações (215) e (216)

$$a(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k}') = \int d^3x d^3x' [\omega_{\mathbf{k}}\phi(\mathbf{x}) + i\pi(\mathbf{x})][\omega_{\mathbf{k}'}\phi(\mathbf{x}') - i\pi(\mathbf{x}')]e^{i(kx - k'x')}$$

$$a^\dagger(\mathbf{k}')a(\mathbf{k}) = \int d^3x d^3x' [\omega_{\mathbf{k}'}\phi(\mathbf{x}') - i\pi(\mathbf{x}')][\omega_{\mathbf{k}}\phi(\mathbf{x}) + i\pi(\mathbf{x})]e^{i(kx - k'x')}$$

$$[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = \int d^3x d^3x' \omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'}i\{[\pi(\mathbf{x}'), \phi(\mathbf{x})] + [\pi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{x}')]\}e^{i(kx - k'x')}$$

$$\begin{aligned}
[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] &= \int d^3x d^3x' i\{\omega_{\mathbf{k}}[\pi(\mathbf{x}'), \phi(\mathbf{x})] + \omega_{\mathbf{k}'}[\pi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{x}')] \} e^{i(kx - k'x')} \\
&= \int d^3x d^3x' \{\omega_{\mathbf{k}}\delta^{(3)}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) + \omega_{\mathbf{k}'}\delta^{(3)}(\mathbf{x}' - \mathbf{x})\} e^{i(kx - k'x')} \\
&= 2\omega_{\mathbf{k}} \int d^3x e^{ix(k - k')} \tag{223}
\end{aligned}$$

Onde foi feito $\omega_{\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}'}$ para simplificar os cálculos. Usando a definição integral da função delta de Dirac (Arfken, 2005)

$$\delta^{(3)}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{ix(k' - k)} d^3x$$

A equação (223) se torna

$$[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = (2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}} \delta^{(3)}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \tag{224}$$

Como temos as expressões dos campos $\phi(x)$ e $\pi(x)$ em termos dos operadores $a(\mathbf{k})$ e $a^\dagger(\mathbf{k})$, o operador Hamiltoniano dado pela equação (196) pode ser escrito na forma

$$H = \frac{1}{4} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [a(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k}) + a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k})] \tag{225}$$

Usando a relação de comutação (224), a equação (225) se torna

$$H = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} [a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k})] \right\} \tag{226}$$

Que é o Hamiltoniano em termos dos operadores $a^\dagger(\mathbf{k})$ e $a(\mathbf{k})$. Entretanto, o Hamiltoniano escrito dessa forma apresenta uma divergência. Mas isso é comum é uma teoria de campos que trata com infinitos graus de liberdade. Essa singularidade será retirada mais a frente, com um processo chamado de renormalização aditiva (GOMES, 2002).

4.2.3 O operador N

É conveniente definir o operador N que segundo McMahon (2008) é escrito da forma

$$N = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}} a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) \quad (227)$$

Os autoestados desse operador podem se usados para formar uma base, de tal forma que os autovalores $n_{\mathbf{k}}$ podem ser encontrados através de

$$N|n_{\mathbf{k}}\rangle = n_{\mathbf{k}}|n_{\mathbf{k}}\rangle \quad (228)$$

E podemos avaliar a relação de comutação $[N, a^\dagger(\mathbf{k})]$

$$\begin{aligned} [N, a^\dagger(\mathbf{k}')] &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}} [a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] \\ &= \int \frac{d^3k a^\dagger(\mathbf{k})}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}} [a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = \int \frac{d^3k a^\dagger(\mathbf{k})}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}} \delta^{(3)}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \\ [N, a^\dagger(\mathbf{k}')] &= a^\dagger(\mathbf{k}') \end{aligned} \quad (229)$$

Analogicamente

$$[N, a(\mathbf{k}')] = -a(\mathbf{k}') \quad (230)$$

Calculando $Na^\dagger(\mathbf{k})|n_{\mathbf{k}}\rangle$ usando a relação de comutação (229)

$$\begin{aligned} [N, a^\dagger(\mathbf{k})]|n_{\mathbf{k}}\rangle &= a^\dagger(\mathbf{k})|n_{\mathbf{k}}\rangle \\ Na^\dagger(\mathbf{k})|n_{\mathbf{k}}\rangle &= a^\dagger(\mathbf{k})N|n_{\mathbf{k}}\rangle + a^\dagger(\mathbf{k})|n_{\mathbf{k}}\rangle \\ Na^\dagger(\mathbf{k})|n_{\mathbf{k}}\rangle &= (n_{\mathbf{k}} + 1)a^\dagger(\mathbf{k})|n_{\mathbf{k}}\rangle \end{aligned} \quad (231)$$

Da mesma forma

$$Na(\mathbf{k})|n_{\mathbf{k}}\rangle = (n_{\mathbf{k}} - 1)a(\mathbf{k})|n_{\mathbf{k}}\rangle \quad (232)$$

Pelas equações (231) e (232) é notório que os estados $a^\dagger(\mathbf{k})|n_{\mathbf{k}}\rangle$ e $a(\mathbf{k})|n_{\mathbf{k}}\rangle$ são autoestados de N com autovalores $n_{\mathbf{k}} + 1$ e $n_{\mathbf{k}} - 1$, respectivamente. N é denominado *operador número*. Os autovalores $n_{\mathbf{k}}$ são todos positivos. Para demonstrar esse fato, multiplica-se à esquerda a equação (228) por $\langle n_{\mathbf{k}}|$

$$\langle n_{\mathbf{k}}|N|n_{\mathbf{k}}\rangle = n_{\mathbf{k}}\langle n_{\mathbf{k}}|n_{\mathbf{k}}\rangle \geq 0 \Rightarrow n_{\mathbf{k}} \geq 0 \quad (233)$$

Similar ao caso do oscilador harmônico, os autovalores desse operador são discretos. Usando a equação (228) para o estado fundamental, chamado nessa instância de *vácuo* denotado por $|0\rangle$. O resultado é

$$N|0\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}} a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k})|0\rangle = 0|0\rangle \Rightarrow a(\mathbf{k})|0\rangle = 0$$

O estado fundamental não contém partículas com momento \mathbf{k} . Da mesma forma que no oscilador harmônico os autovalores de N são inteiros não-negativos.

4.2.4 As relações de comutação com o Hamiltoniano

Fazendo a adaptação

$$\delta^{(3)}(0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x = \frac{V}{(2\pi)^3} \Rightarrow V = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) \quad (234)$$

E calculando a relação de comutação $[H, a^\dagger(\mathbf{k})]$

$$\begin{aligned} [H, a^\dagger(\mathbf{k})] &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} [a^\dagger(\mathbf{k}')a(\mathbf{k}'), a^\dagger(\mathbf{k})] \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{k}} \{a^\dagger(\mathbf{k})[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k})] + [a^\dagger(\mathbf{k}'), a^\dagger(\mathbf{k})]a(\mathbf{k}')\} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \{a^\dagger(\mathbf{k}')[a(\mathbf{k}'), a^\dagger(\mathbf{k})]\} \end{aligned}$$

$$= \int d^3k' \omega_{\mathbf{k}} \delta^{(3)}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) a^\dagger(\mathbf{k})$$

$$[H, a^\dagger(\mathbf{k})] = \omega_{\mathbf{k}} a^\dagger(\mathbf{k}) \quad (235)$$

Similarmente

$$[H, a(\mathbf{k})] = -\omega_{\mathbf{k}} a(\mathbf{k}) \quad (236)$$

Rearranjando as equações (235) e (236)

$$H a^\dagger(\mathbf{k}) = a^\dagger(\mathbf{k})(H + \omega_{\mathbf{k}})$$

$$H a(\mathbf{k}) = a(\mathbf{k})(H - \omega_{\mathbf{k}})$$

Suponha que $|\psi\rangle$ é um autoestado de H com autovalor E . Definindo $|\phi\rangle = a^\dagger(\mathbf{k})|\psi\rangle$

$$H|\phi\rangle = H a^\dagger(\mathbf{k})|\psi\rangle = a^\dagger(\mathbf{k})(H + \omega_{\mathbf{k}})|\psi\rangle$$

$$H|\phi\rangle = (E + \omega_{\mathbf{k}})|\phi\rangle \quad (237)$$

Da mesma maneira para $|\chi\rangle = a(\mathbf{k})|\psi\rangle$ tem-se

$$H|\chi\rangle = (E - \omega_{\mathbf{k}})|\chi\rangle \quad (238)$$

Mas é notório que o Hamiltoniano na equação é proporcional a $\delta^{(3)}(0)$, que é infinito. Fazendo com que H atue no estado fundamental $|0(\mathbf{k})\rangle$ ou simplesmente $|0\rangle$, denominado aqui de vácuo (RYDER 1996), temos

$$H|0\rangle = \left(\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2} \right) \delta^{(3)}(0)|0\rangle \quad (239)$$

Identificamos a grandeza entre parênteses como a energia do ponto zero. Ela é divergente porque representa a soma sobre todos os modos de energia de ponto zero, $\omega_{\mathbf{k}}/2$. No entanto isso não é detectado experimentalmente, pois mede-se apenas diferenças de energia do estado fundamental (PESKIN, 1983). O que

deve ser feito agora é um processo chamado de *renormalização aditiva*, que consiste em retirar a singularidade no Hamiltoniano (226), fazendo a diferença

$$H \rightarrow H' = H - H_{vac} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k})$$

$$H' = \omega_{\mathbf{k}}N \quad (240)$$

Tratando o momento e o Hamiltoniano em termos do 4-momento,

$$P'^\mu = p^\mu N \quad (241)$$

Com $p^\mu = (\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{p})$. Como os autovalores do operador número são discretos, nossa teoria de campo esta quantizada. Note que o procedimento foi similar ao oscilador harmônico.

4.3 Nova ordenação para o produto de operadores

De acordo com a equação (206) pode-se escrever, segundo Gomes (2002), o campo na forma

$$\phi(x) = \phi^{(-)}(x) + \phi^{(+)}(x) \quad (242)$$

Onde, de acordo com essa definição denomina-se

$$\phi^{(-)}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}} a(\mathbf{k})e^{-ikx} \quad (243)$$

$$\phi^{(+)}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}} a^\dagger(\mathbf{k})e^{ikx} \quad (244)$$

Vejamos se o produto dos campos está bem definido,

$$\begin{aligned} \phi(x)\phi(x) &= [\phi^{(-)}(x) + \phi^{(+)}(x)][\phi^{(-)}(x) + \phi^{(+)}(x)] \\ &= \phi^{(-)}(x)\phi^{(-)}(x) + \phi^{(-)}(x)\phi^{(+)}(x) \end{aligned}$$

$$+\phi^{(+)}(x)\phi^{(-)}(x) + \phi^{(+)}(x)\phi^{(+)}(x) \quad (245)$$

Usando a equação acima podemos calcular o valor esperado de $\phi(x)\phi(x)$ no estado de vácuo $|0\rangle$

$$\langle 0|\phi(x)\phi(x)|0\rangle = \langle 0|\phi^{(-)}(x)\phi^{(+)}(x)|0\rangle + \langle 0|\phi^{(+)}(x)\phi^{(+)}(x)|0\rangle$$

Como $\langle 0|\phi^{(+)} = \phi^{(-)}|0\rangle = 0$, então a equação acima se torna

$$\begin{aligned} \langle 0|\phi(x)\phi(x)|0\rangle &= \langle 0|\phi^{(-)}(x)\phi^{(+)}(x)|0\rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int \frac{d^3k}{2\omega_{\mathbf{k}}} \int \frac{d^3k'}{2\omega_{\mathbf{k}'}} e^{ix(k'-k)} \langle 0|a(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k}')|0\rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2\omega_{\mathbf{k}}} \int \frac{d^3k'}{2\omega_{\mathbf{k}'}} e^{ix(k'-k)} 2\omega_{\mathbf{k}}\delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2\omega_{\mathbf{k}}} \end{aligned} \quad (246)$$

No entanto a equação (246) é divergente, assim o produto convencional dos campos não faz sentido. Deve-se então adotar uma nova ordenação para o produto de operadores seja bem definida, como na mecânica quântica. Com essa finalidade é conveniente definir o *produto de Wick*,

$$\begin{aligned} :\phi(x)\phi(y): &:= \phi^{(-)}(x)\phi^{(-)}(y) + \phi^{(+)}(x)\phi^{(-)}(x) \\ &\quad + \phi^{(+)}(x)\phi^{(-)}(y) + \phi^{(+)}(x)\phi^{(+)}(y) \end{aligned} \quad (247)$$

Decorrente da definição segue-se em particular que

$$\langle 0|:\phi(x)\phi(y):|0\rangle = 0 \quad (248)$$

Também podemos fazer

$$\begin{aligned} :\phi(x)\phi(x): &:= \phi(x)\phi(x) - [\phi^{(-)}(x), \phi^{(+)}(x)] \\ &= \phi(x)\phi(x) - \langle 0|:\phi(x)\phi(y):|0\rangle \end{aligned} \quad (249)$$

A equação acima fornece uma nova definição para o produto de Wick. E adotando essa ordenação, o tensor energia-momento fica redefinido como

$$T^{\mu\nu} =: \{\partial^\mu \varphi \partial^\nu \varphi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}\}: \quad (250)$$

A partir da equação (241) é notório que

$$P'^\mu |0\rangle = 0 \quad (251)$$

E que um autoestado $|k\rangle$ de P'^μ é tal que

$$|n(\mathbf{k})\rangle = a^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle \quad (252)$$

Avaliando

$$\begin{aligned} P'^\mu |k\rangle &= P'^\mu a^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle \\ &= a^\dagger(\mathbf{k})(P'^\mu + k^\mu)|0\rangle \end{aligned}$$

$$P'^\mu a^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle = k^\mu a^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle \quad (253)$$

Para um estado com duas excitações, k e q

$$|n(\mathbf{k})n(\mathbf{q})\rangle = a^\dagger(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{q})|0\rangle$$

$$P'^\mu |n(\mathbf{k})n(\mathbf{q})\rangle = P'^\mu a^\dagger(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{q})|0\rangle$$

$$P'^\mu |n(\mathbf{k})n(\mathbf{q})\rangle = a^\dagger(\mathbf{k})(P'^\mu + p^\mu)a^\dagger(\mathbf{q})|0\rangle$$

$$= a^\dagger(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{q})(P'^\mu + k^\mu + q^\mu)|0\rangle$$

$$= (k^\mu + q^\mu)a^\dagger(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{q})|0\rangle$$

$$P'^\mu |k, q\rangle = (k^\mu + q^\mu)|k, q\rangle \quad (254)$$

Explicitando

$$H'|k, q\rangle = (\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{q}})|k, q\rangle \quad (255)$$

$$\mathbf{P}'|k, q\rangle = (\mathbf{k} + \mathbf{p})|k, q\rangle \quad (256)$$

Note que qualquer estado, é construído a partir do estado de vácuo, semelhante a caso do oscilador harmônico. Veja que o operador $a^\dagger(\mathbf{k})$ cria um estado com momento \mathbf{k} e energia $\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2}$. Da mesma forma um estado com mais de uma excitação é criado, como mostra a equação (256) com momentos \mathbf{k} e \mathbf{q} e energias $\omega_{\mathbf{k}}$ e $\omega_{\mathbf{q}}$.

É comum chamar tais excitações de partículas, mas não em um sentido de serem localizadas em porções finitas no espaço, mas sim no sentido de que são entidades que possuem correta relação relativística entre momento e energia.

4.4 A normalização dos autoestados

Os operadores de criação dos autoestados nos permitem escrever qualquer estado em termos do vácuo. O estado

$$|\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_m\rangle = a^\dagger(\mathbf{k}_1)a^\dagger(\mathbf{k}_2) \dots a^\dagger(\mathbf{k}_m)|0\rangle \quad (257)$$

Constitui de m partículas cada uma com momento \mathbf{k}_i . Essas partículas são indistinguíveis, ou seja, são *bósons*. Elas obedecem à estatística de Bose-Einstein.

Para normalizar os autoestados devemos assumir que o vácuo é normalizado, pois todos os demais são formados a partir dele. Seguindo o raciocínio do caso de um único oscilador de acordo com a equação (38), um estado de única excitação é tal que

$$|\mathbf{k}\rangle = c_+ a^\dagger(\mathbf{k})|\mathbf{k} - \mathbf{1}\rangle$$

E a constante de normalização c_+ se torna

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}|\mathbf{k}\rangle = 1 &= |c_+|^2 \int d^3k \langle \mathbf{k} - \mathbf{1}|a(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k})|\mathbf{k} - \mathbf{1}\rangle \\ \Rightarrow |c_+|^2 &\left\{ \int d^3k (2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}} \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') + (2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}} (n_{\mathbf{k}} - \mathbf{1}) \right\} \end{aligned}$$

$$c_+ = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}}}$$

Da mesma forma, para

$$|\mathbf{k} - \mathbf{1}\rangle = c_- a(\mathbf{k}) |\mathbf{k}\rangle$$

Temos

$$c_- = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}} (n_{\mathbf{k}} - 1)}}$$

O estado de vácuo não contém excitações, e pode ser escrito de forma abreviada,

$$|0\rangle = |0, 0, \dots\rangle$$

Somos levados a concluir que um estado generalizado, contendo $n_{\mathbf{k}_i}$ excitações com momento \mathbf{k}_i pode ser escrito da forma

$$|\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_m\rangle = \prod_j \frac{a^\dagger(\mathbf{k}_j)^{n_{\mathbf{k}_j}}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}_j}!}} |0\rangle \quad (258)$$

Esse resultado mostra que é possível descrever o estado do sistema, que é vinculado ao campo escalar ϕ , através da criação e destruição dos quanta de excitação. As mudanças de estado ocorrem quando há absorção ou emissão dessas quantidades discretas de energia por parte do sistema.

5 CONCLUSÃO

O problema da quantização de campo livre é basicamente um problema de osciladores harmônicos, embora no decorrer do tratamento tenham aparecido singularidades (como a divergência da energia do ponto zero), mas isso é natural nessa teoria, pois ela trata de infinitos graus de liberdade.

Uma teoria quântica de campo tem como objetivo, determinar os chamados *quanta de vibração*, o qual se denomina o nome de partícula. Os quanta de vibração do campo de Klein-Gordon segundo Le Bellac (1995) são os chamados *mésons escalares*, e recebem esse nome por não por não possuírem spin.

A teoria de campo desenvolvida de forma introdutória é uma teoria de campo escalar livre, pois os modos (partículas) não interagem. As interações são introduzidas através de termos não quadráticos nos campos na expressão Lagrangeana ou Hamiltoniana.

REFERÊNCIAS

- ARFKEN G. B, WEBBER H. J. **Mathematical Methods for Physicists**, 2005, Elsevier.
- BARATA, J. C. A. **Curso de Física-Matemática**, Departamento de Física-Matemática da Universidade de São Paulo, versão de 23 de maio de 2006.
- CHOW, T. L. **Mathematical Methods for Physicists: a concise introduction**. Cambridge University Press, 2000.
- COHEN-TANNOUJJI. **Quantum Mechanics**, Volume I, John Wiley & Sons, New York (1977).
- EISBERG, R., RESNICK, R. **Física Quântica**, 4ª edição, 1ª reimpressão. Editora Campus Ltda 1988.
- GOMES, M. O. C. **Teoria Quântica dos Campos**. São Paulo: Edusp, 2002.
- GREINER, W. **Relativistic Quantum Mechanics. Wave Equations**, 3rd edition Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York. (2000)
- GRIFFITHS D.J. **Introduction to Quantum Mechanics**. EUA. Editor Prentice Hall, Inc., 1995.
- H. GOLDSTEIN. **Classical Mechanics**, second edition. Addison-Wesley. Reading. Mass (1980).
- HALLIDAY, D., RESNICK, R., KRANE, K. S., **Física** Volume 2, 4a. Edição, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro 1996.
- LE BELLAC, M. **Quantum and Statistical Field Theory**. Oxford University Press, (1995).
- LE MOS, NIVALDO A. **Mecânica Analítica**. Segunda edição, Editora Livraria da Física, 2007 São Paulo.
- MCMAHON D. **Quantum Field Theory Demystified**. The McGraw-Hill companies. (2008).

MURRAY R. SPIEGEL **Análise Vetorial**, coleção Schaum, Rio de Janeiro, 1961

PEREIRA, RODRIGO GONÇALVES, MIRANDA, EDUARDO **Introdução à Teoria Quântica de Campos: do Oscilador Harmônico ao Campo Escalar Livre**, Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 24, no. 2, Junho, 2002.

PESKIN, M. E. e SCHROEDER, D. V. **An Introduction to Quantum Field Theory**, Addison Wesley, Reading, mass. (1983)

RINDLER, W., **Relativity Special, General and Cosmological**. Second Edition, OXFORD SCIENCE PUBLICATIONS, 2006.

RYDER, L. H. **Quantum Field Theory**, second edition. Cambridge. (1996)

SAKURAY, J. J. **Modern Quantum Mechanics**, revised edition. Addison-Wesley Publishing Company, Inc, (1994).

SHUTZ, B. F. **A First Course in General Relativity**. Cambridge University Press 1985.

SOKOLNIKOFF, I. S. **Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua**. Second editon, John Wiley & Sons, Inc. 1964.

SYMON, K. R. **Mecânica**, segunda edição. Editora Campus Ltda (1982).

APÊNDICE A - ELEMENTOS DA ÁLGEBRA TENSORIAL

Neste trecho os principais conceitos da álgebra são tratados com o objetivo de serem usados no estudo da relatividade restrita, principalmente os quadrivetores e quadritensores do *espaço de Minkowski*.

A transformação das componentes de um vetor sob uma rotação do sistema de coordenadas preserva o vetor como uma entidade geométrica, independente da orientação da estrutura de referência. Em um espaço tridimensional, um *escalar* é especificado por um número real e é um *tensor de ordem zero*. Já um *vetor*, que é especificado por $3 = 3^1$ números reais que correspondem a suas componentes, é dito *tensor de ordem um*. É fácil generalizar essa idéia, dizendo que um tensor de ordem n em um espaço N dimensional tem 3^n componentes que se transformam de uma maneira definida (ARFKEN, 2005).

1. A métrica do espaço

Considere o vetor posição $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2, u^3)$ definido em um sistema de coordenadas contravariante (índice em cima). Isso implica que cada componente do vetor posição pode ser escrito como $x_i = x_i(u^1, u^2, u^3)$ e

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} du^i \quad (\text{A1})$$

É o vetor posição infinitesimal. Foi usada a convenção de Einstein para omitir o somatório. O termo

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} \quad (\text{A2})$$

É o vetor de base covariante (índice em baixo) desse sistema de coordenadas. E para preservar a orientação do sistema de coordenadas, deve-se ter $\boldsymbol{\varepsilon}_1 \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}_2 \times \boldsymbol{\varepsilon}_3) > 0$.

O quadrado do elemento de linha é definido como

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} \\ &= (\boldsymbol{\varepsilon}_i du^i) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}_j du^j) \\ ds^2 &= \boldsymbol{\varepsilon}_i \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_j du^i du^j \end{aligned}$$

Segundo Arfken (2005) produto $\boldsymbol{\varepsilon}_i \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_j$ é a *métrica do sistema de coordenadas*. Logo o elemento de arco pode ser escrito como

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j \quad (\text{A3})$$

Em termos da transformação do sistema de coordenadas, a métrica pode ser escrita como

$$g_{ij} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^j} \quad (\text{A4})$$

È importante notar que a métrica é simétrica com relação aos índices i e j . Considerando um espaço N dimensional a métrica pode ser representada como uma matriz \mathbf{G} de ordem N . Como o determinante dessa matriz não é nulo, existe uma inversa \mathbf{G}^{-1} tal que $\mathbf{G}\mathbf{G}^{-1} = \mathbf{I}$. Onde \mathbf{I} é a matriz identidade de ordem N . Em outra notação

$$g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j \quad (\text{A5})$$

Onde δ_i^j é o delta de Kronecker. Um elemento infinitesimal de volume é escrito da forma

$$dV = d\mathbf{r}_1 \cdot (d\mathbf{r}_2 \times d\mathbf{r}_3) = \boldsymbol{\varepsilon}_1 \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}_2 \times \boldsymbol{\varepsilon}_3) du^1 du^2 du^3$$

$$dV = \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^3} \right) \right] du^1 du^2 du^3 \quad (\text{A6})$$

O termo entre colchetes na equação é o *jacobiano* de uma transformação tridimensional, dado por

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(u^1, u^2, u^3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u^1} & \frac{\partial x_2}{\partial u^1} & \frac{\partial x_3}{\partial u^1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u^2} & \frac{\partial x_2}{\partial u^2} & \frac{\partial x_3}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u^3} & \frac{\partial x_2}{\partial u^3} & \frac{\partial x_3}{\partial u^3} \end{vmatrix} \quad (\text{A7})$$

Onde (x_1, x_2, x_3) são as coordenadas cartesianas. O jacobiano nos informa se o sistemas de coordenadas (u^1, u^2, u^3) é válido para descrever um sistema físico (Symon, 1981). Para que isso ocorra, existe uma condição, que é $J \neq 0$, ou seja, as coordenadas são linearmente independentes.

Se $M_{ij} = \partial x_j / \partial u^i$ é um elemento da matriz jacobiana, então fazendo

$$(MM^T)_{ij} = M_{ik} M_{kj}^T = M_{ik} M_{kj} = \frac{\partial x_k}{\partial u^i} \frac{\partial x_k}{\partial u^j} = g_{ij} \quad (\text{A8})$$

Então de (A8) podemos concluir que

$$\det(\mathbf{MM}^T) = \det \mathbf{G} \Rightarrow J = \sqrt{g} \quad (\text{A9})$$

Se $g_{ij} = 0$ para $i \neq j$, o sistema de coordenadas é ortogonal. Por outro lado, se $g_{ij} = \delta_{ij}$, o sistema de coordenadas é o cartesiano.

2. A construção contravariante

O intuito dessa seção é desenvolver o que chamamos de base contravariante. Seja $\mathbf{A} = A^i \boldsymbol{\varepsilon}_i$ um vetor escrito numa base covariante, fazendo uma multiplicação escalar em ambos os membros dessa expressão por $\boldsymbol{\varepsilon}_k$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_k \cdot \mathbf{A} = A^i \boldsymbol{\varepsilon}_i \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_k$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_k \cdot \mathbf{A} = A^i g_{ik} \quad (\text{A10})$$

Multiplicando ambos os membros da equação (83) por g^{kl}

$$g^{kl} \boldsymbol{\varepsilon}_k \cdot \mathbf{A} = A^i g_{ik} g^{kl}$$

$$g^{kl} \boldsymbol{\varepsilon}_k \cdot \mathbf{A} = A^i \delta_i^l \Rightarrow A^l = (g^{kl} \boldsymbol{\varepsilon}_k) \cdot \mathbf{A}$$

Define-se

$$\boldsymbol{\varepsilon}^l = g^{kl} \boldsymbol{\varepsilon}_k \quad (\text{A11})$$

Como *vetor de base contravariante*. Um resultado importante é

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^j = \boldsymbol{\varepsilon}_i \cdot (g^{kj} \boldsymbol{\varepsilon}_k)$$

$$= \boldsymbol{\varepsilon}_i \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_k g^{kj}$$

$$= g_{ik} g^{kj}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^j = \delta_i^j \quad (\text{A12})$$

Com essa definição pode-se escrever as componentes de um vetor \mathbf{A} de duas formas: na base covariante (natural) $\mathbf{A} = A^i \boldsymbol{\varepsilon}_i$ ou na base contravariante (dual) $\mathbf{A} = A_i \boldsymbol{\varepsilon}^i$. Também é possível obter as componentes contravariantes em termos das covariantes através da métrica do espaço:

$$\mathbf{A} = A_i \boldsymbol{\varepsilon}^i = A_i g^{ij} \boldsymbol{\varepsilon}_j \Rightarrow A^j = g^{ij} A_i \quad (\text{A13})$$

$$g_{jk} A^j = g_{jk} g^{ij} A_i = \delta_j^i A_i \Rightarrow A_j = g_{jk} A^j \quad (\text{A14})$$

Um detalhe importante, é que o sistema de coordenadas cartesiano não há distinção entre componentes covariantes e contravariantes.

3. Vetores e Tensores

A definição mais formal de um tensor é aquela que o define através de uma mudança e coordenadas. A seguir são definidos os vetores contravariantes e covariantes e a generalização de um tensor, mediante uma transformação de coordenadas.

3.1 Vetores contravariantes e covariantes

Um *escalar* ϕ é uma quantidade invariante sob mudança no sistema de coordenadas, ou seja, seu valor é o mesmo independente do sistema de referencia (LEMOS, 2007).

Seja N grandezas A^i e B_i em um sistema de coordenadas (u^1, u^2, \dots, u^N) que estão ligadas a N outras A'^i e B'_i em outro sistema de coordenadas $(u'^1, u'^2, \dots, u'^N)$ pelas leis de transformação

$$A'^i = \frac{\partial u'^i}{\partial u^j} A^j \quad (\text{A15})$$

$$B'_i = \frac{\partial u^j}{\partial u'^i} B_j \quad (\text{A16})$$

Essas grandezas são ditas formar as componentes de vetores contravariantes e covariantes, respectivamente. As equações (A15) e (A16) são conhecidas como *leis contravariantes e covariantes*, respectivamente.

Demonstração:

De acordo com a equação (A2)

$$\boldsymbol{\varepsilon}'_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u'^i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^j} \frac{\partial u^j}{\partial u'^i} \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}'_i = \frac{\partial u^j}{\partial u'^i} \boldsymbol{\varepsilon}_j$$

Como

$$\delta_j^i = \frac{\partial u'^i}{\partial u^k} \frac{\partial u^k}{\partial u'^j}$$

e

$$\boldsymbol{\varepsilon}'^i \cdot \boldsymbol{\varepsilon}'_j = \delta_j^i \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}'^i \cdot \left(\frac{\partial u^k}{\partial u'^j} \boldsymbol{\varepsilon}_k \right) = \delta_j^i$$

Multiplicando por $\partial u'^j / \partial u^m$

$$\boldsymbol{\varepsilon}'^i \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_k \frac{\partial u^k}{\partial u'^j} \frac{\partial u'^j}{\partial u^m} = \delta_j^i \frac{\partial u'^j}{\partial u^m}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}'^i \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_k \delta_m^k = \frac{\partial u'^i}{\partial u^m} \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}'^i \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_m = \frac{\partial u'^i}{\partial u^m}$$

Multiplicando por $\boldsymbol{\varepsilon}^m$ fica

$$\boldsymbol{\varepsilon}'^i = \frac{\partial u'^i}{\partial u^m} \boldsymbol{\varepsilon}^m$$

Considerando que a entidade vetorial é invariante sob mudança do sistema de coordenadas, ou seja, $\mathbf{A} = A^i \boldsymbol{\varepsilon}_i = A'^i \boldsymbol{\varepsilon}'_i$

$$A^i \boldsymbol{\varepsilon}_i = A'^i \frac{\partial u^j}{\partial u'^i} \boldsymbol{\varepsilon}_j$$

Multiplicando de forma escalar por $\boldsymbol{\varepsilon}^k$

$$A^i \boldsymbol{\varepsilon}_i \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^k = A'^i \frac{\partial u^j}{\partial u'^i} \boldsymbol{\varepsilon}_j \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^k \Rightarrow A^i \delta_i^k = A'^i \frac{\partial u^j}{\partial u'^i} \delta_j^k$$

Multiplicando por $\partial u'^l / \partial u^k$

$$\frac{\partial u'^l}{\partial u^k} A^k = A'^i \frac{\partial u^k}{\partial u'^i} \frac{\partial u'^l}{\partial u^k} = A'^i \delta_i^l \Rightarrow A'^l = \frac{\partial u'^l}{\partial u^k} A^k$$

Por outro lado também $\mathbf{A} = A_i \boldsymbol{\varepsilon}^i = A'_i \boldsymbol{\varepsilon}'^i$

$$A_i \boldsymbol{\varepsilon}^i = A'_i \frac{\partial u'^i}{\partial u^j} \boldsymbol{\varepsilon}^j$$

Multiplicando por $\boldsymbol{\varepsilon}_k$

$$A_i \boldsymbol{\varepsilon}^i \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_k = A'_i \frac{\partial u'^i}{\partial u^j} \boldsymbol{\varepsilon}^j \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_k \Rightarrow A_k = A'_i \frac{\partial u'^i}{\partial u^k}$$

Multiplicando por $\partial u^k / \partial u'^l$

$$A'_l = \frac{\partial u^k}{\partial u'^l} A_k$$

3.2 Tensores

Um tensor que possui p índices contravariantes e q índices covariantes é chamado tensor do tipo (p, q) , é um objeto invariante cujas componentes obedecem a lei de transformação

$$T'^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q} = \frac{\partial u'^{i_1}}{\partial u^{l_1}} \dots \frac{\partial u'^{i_p}}{\partial u^{l_p}} \frac{\partial u^{m_1}}{\partial u'^{j_1}} \dots \frac{\partial u^{m_q}}{\partial u'^{j_q}} T_{m_1 m_2 \dots m_q}^{l_1 l_2 \dots l_p} \quad (\text{A17})$$

A equação (A17) é uma definição completa e total de um tensor. Pode-se dizer que um vetor contravariante é um tensor do tipo $(1,0)$ e um vetor covariante é um tensor do tipo $(0,1)$.

3.3 Operações com tensores

3.3.1 Soma

Sejam A_{ij}^k e B_{ij}^k dois tensores do tipo $(1,2)$. O tensor soma ou subtração S_{ij}^k é definida como

$$S_{ij}^k = A_{ij}^k \pm B_{ij}^k \quad (\text{A18})$$

Observe que só podemos somar ou subtrair tensões de mesma ordem.

3.3.2 Produto direto (multiplicação externa)

Define-se o produto direto entre dois vetores \mathbf{A} e \mathbf{B} pela notação $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$. Esse tipo de produto é linear, mas não comuta e é associativo. Se $\mathbf{A} = A^i \boldsymbol{\varepsilon}_i$ e $\mathbf{B} = B^j \boldsymbol{\varepsilon}_j$ então o produto direto entre eles são

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = A^i B^j \boldsymbol{\varepsilon}_i \otimes \boldsymbol{\varepsilon}_j \quad (\text{A19})$$

Através de uma mudança no sistema de coordenadas, o produto direto $\boldsymbol{\varepsilon}_i \otimes \boldsymbol{\varepsilon}_j$ se transforma

$$\boldsymbol{\varepsilon}'_i \otimes \boldsymbol{\varepsilon}'_j = \left(\frac{\partial u^k}{\partial u'^i} \boldsymbol{\varepsilon}_k \right) \otimes \left(\frac{\partial u^l}{\partial u'^j} \boldsymbol{\varepsilon}_l \right) \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}'_i \otimes \boldsymbol{\varepsilon}'_j = \frac{\partial u^k}{\partial u'^i} \frac{\partial u^l}{\partial u'^j} \boldsymbol{\varepsilon}_k \otimes \boldsymbol{\varepsilon}_l \quad (\text{A20})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' \otimes \mathbf{B}' &= A'^i B'^j \frac{\partial u^k}{\partial u'^i} \frac{\partial u^l}{\partial u'^j} \boldsymbol{\varepsilon}_k \otimes \boldsymbol{\varepsilon}_l \\ &= \frac{\partial u'^i}{\partial u^k} A^k \frac{\partial u'^j}{\partial u^l} B^l \frac{\partial u^k}{\partial u'^i} \frac{\partial u^l}{\partial u'^j} \boldsymbol{\varepsilon}_k \otimes \boldsymbol{\varepsilon}_l \\ &= \frac{\partial u'^i}{\partial u^m} \frac{\partial u^k}{\partial u'^i} \frac{\partial u'^j}{\partial u^n} \frac{\partial u^l}{\partial u'^j} A^m B^n \boldsymbol{\varepsilon}_k \otimes \boldsymbol{\varepsilon}_l \\ &= \delta_l^k \delta_i^n A^m B^n \boldsymbol{\varepsilon}_k \otimes \boldsymbol{\varepsilon}_l \end{aligned}$$

$$\mathbf{A}' \otimes \mathbf{B}' = A^k B^l \boldsymbol{\varepsilon}_k \otimes \boldsymbol{\varepsilon}_l$$

De acordo com a equação (A20), o produto direto $\boldsymbol{\varepsilon}_i \otimes \boldsymbol{\varepsilon}_j = \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}$ se transforma como um tensor do tipo (0,2), e forma uma base para tensores desse tipo. Conclui-se então que esse tipo de operação é usada para criar tensores de ordem mais

elevada. Então, por exemplo, se T^{ij} são as componentes de um tensor, podemos escrever o tensor em sua base apropriada

$$\vec{T} = T^{ij} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} \quad (\text{A21})$$

3.3.3 Contração (produto interno)

Para mostrar como funciona essa operação, é conveniente tomar um exemplo. Seja $T_{lm}^{ij} = R_l^i S_m^j$ um tensor do tipo (2,2). Sob mudança do sistema de coordenadas

$$R_l^i S_m^j = \left(\frac{\partial u'^i}{\partial u^k} \frac{\partial u^p}{\partial u'^l} R_p^k \right) \left(\frac{\partial u'^j}{\partial u^n} \frac{\partial u^q}{\partial u'^m} S_q^n \right)$$

Para fazer uma contração deve-se igualar índices contravariantes aos covariantes.

Por exemplo, fazendo $l = j$

$$R_j^i S_m^j = \frac{\partial u'^i}{\partial u^k} \frac{\partial u^q}{\partial u'^m} \delta_n^p R_p^k S_q^n \Rightarrow T_m^i = \frac{\partial u'^i}{\partial u^k} \frac{\partial u^q}{\partial u'^m} T_q^k \quad (\text{A22})$$

De acordo com as leis de transformação tensorial, a equação (A22) revela um tensor do tipo (1,1). Veja que uma contração diminui a ordem do tensor.

3.3.4 Regra do quociente

Suponha que não se sabe se uma grandeza U seja um tensor. Se a contração de U com um tensor arbitrário for um tensor, então U será um tensor. Por exemplo, em um sistema de coordenadas (u^1, u^2, \dots, u^N) T^i é um tensor do tipo (1,0) tal que $\phi = U(i)T^i$ onde ϕ é um invariante. Queremos saber se $U(i)$ é um tensor e de que tipo.

$$\phi' = \phi$$

$$U'(i)T'^i = U(j)T^j$$

$$\left(U'(i) \frac{\partial u'^i}{\partial u^j} - U(j) \right) T^j = 0 \Rightarrow U'(i) \frac{\partial u'^i}{\partial u^j} - U(j) = 0$$

Pode-se chegar em

$$U'(k) = U'_k = \frac{\partial u'^j}{\partial u^k} U_j$$

Logo a grandeza $U(i)$ é um tensor do tipo (0,1), pois se transforma como tal.

3.3.5 Simetria e anti-simetria

Um tensor é simétrico em relação a seus índices, se mesmo permutando eles, suas componentes continuam iguais, ou seja,

$$T_{ij} = T_{ji} \quad (\text{A23})$$

E anti-simétrico em relação aos mesmos índices se,

$$T_{ij} = -T_{ji} \quad (\text{A24})$$

A simetria e a anti-simetria é uma propriedade que independe do sistema de coordenadas.

3.4 Símbolos de Christoffel

Derivando $g_{ik} = \boldsymbol{\varepsilon}_i \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_k$ com relação à u^j

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} = \boldsymbol{\varepsilon}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_k}{\partial u^j} + \boldsymbol{\varepsilon}_k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_i}{\partial u^j} \quad (\text{A25})$$

Fazendo o mesmo com g_{ij} e g_{jk}

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \boldsymbol{\varepsilon}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_j}{\partial u^k} + \boldsymbol{\varepsilon}_j \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_i}{\partial u^k} \quad (\text{A26})$$

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} = \boldsymbol{\varepsilon}_j \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_k}{\partial u^i} + \boldsymbol{\varepsilon}_k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_j}{\partial u^i} \quad (\text{A27})$$

Mas

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_k}{\partial u^j} = \frac{\partial}{\partial u^j} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^k} \right) = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^j \partial u^k} = \frac{\partial}{\partial u^k} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^j} \right) \Rightarrow \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_k}{\partial u^j} = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_j}{\partial u^k} \quad (\text{A28})$$

Usando o resultado (101) nas equações acima e somando (A25) com (A27)

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} = 2\boldsymbol{\varepsilon}_k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_i}{\partial u^j} + \boldsymbol{\varepsilon}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_k}{\partial u^j} + \boldsymbol{\varepsilon}_j \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_k}{\partial u^i} \quad (\text{A29})$$

Subtraindo (A26) de (A29)

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} = 2\boldsymbol{\varepsilon}_k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_i}{\partial u^j} \quad (\text{A30})$$

Define-se então o símbolo de Christoffel de primeira espécie como

$$[ij, k] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} \right) \quad (\text{A31})$$

Multiplicando a equação (A31) por g^{kl} fica

$$g^{kl} \boldsymbol{\varepsilon}_k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_i}{\partial u^j} = g^{kl} [ij, k]$$

Então o símbolo de Christoffel de segunda espécie Γ_{ij}^l é definido da seguinte forma

$$\Gamma_{ij}^l = g^{kl} [ij, k] \quad (\text{A32})$$

Na prática, os símbolos de Christoffel funcional como derivadas explícitas do tensor métrico. É importante salientar que esses símbolos não são tensores, pois mediante uma transformação de sistema de coordenadas, eles não se transformam como um tensor (SOKOLNIKOFF, 1964).

3.5 Derivada covariante

Muitas vezes é importante saber a derivada de um tensor ao longo de uma curva. Isso acontece principalmente quando o espaço é curvo. Nesse caso é de extrema importância introduzir o conceito de *derivada covariante*.

Seja $\mathbf{V} = V^i \boldsymbol{\varepsilon}_i$ um vetor contravariante. Diferenciando com relação a u^j

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial u^j} = \boldsymbol{\varepsilon}_i \frac{\partial V^i}{\partial u^j} + V^i \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_i}{\partial u^j} \quad (\text{A33})$$

Usando o símbolo de Christoffel de segunda espécie, pode-se escrever

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_i}{\partial u^j} = \Gamma_{ij}^k \boldsymbol{\varepsilon}_k \quad (\text{A34})$$

Dessa forma a equação (A33) pode ser escrita na forma

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial u^j} = \boldsymbol{\varepsilon}_i \frac{\partial V^i}{\partial u^j} + V^i \Gamma_{ij}^k \boldsymbol{\varepsilon}_k \quad (\text{A35})$$

Como os índices i e k estão somados, eles são mudos. Trocando esses índices no último termo do segundo membro da equação acima

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial u^j} = \left(\frac{\partial V^i}{\partial u^j} + V^k \Gamma_{kj}^i \right) \boldsymbol{\varepsilon}_i$$

A quantidade entre parênteses é a derivada covariante do vetor contravariante V^i

$$V_{;j}^i = \frac{\partial V^i}{\partial u^j} + V^k \Gamma_{kj}^i \quad (\text{A36})$$

Considerando um vetor covariante $\mathbf{V} = V_i \boldsymbol{\varepsilon}^i$ e diferenciando-o com relação a u^j

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial u^j} = \boldsymbol{\varepsilon}^i \frac{\partial V^i}{\partial u^j} + V_i \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^i}{\partial u^j} \quad (\text{A37})$$

Diferenciando a equação (A12)

$$\frac{\partial(\boldsymbol{\varepsilon}^i \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_k)}{\partial u^j} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^i}{\partial u^j} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_k = -\boldsymbol{\varepsilon}^i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_k}{\partial u^j}$$

Usando novamente o símbolo de Christoffel de segunda espécie, pode-se escrever

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^i}{\partial u^j} = -\Gamma_{ij}^k \boldsymbol{\varepsilon}^k$$

E a equação (A37) se torna

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial u^j} = \left(\frac{\partial V_i}{\partial u^j} - V_k \Gamma_{ij}^k \right) \boldsymbol{\varepsilon}^i$$

Logo a derivada covariante de um vetor covariante é

$$V_{i;j} = \frac{\partial V_i}{\partial u^j} - V_k \Gamma_{ij}^k \quad (\text{A38})$$

Nos sistemas de coordenadas retangulares, os símbolos de Christoffel são nulos e as derivadas covariantes são as derivadas parciais usuais. As derivadas covariantes de tensores também são tensores (SPIEGEL, 1961).

3.6 Operadores diferenciais

3.6.1 Gradiente

Seja ϕ uma função escalar. Segundo SPIEGEL (1961) o gradiente dessa função em um sistema de coordenadas generalizadas como

$$\nabla \phi = \boldsymbol{\varepsilon}^i \frac{\partial \phi}{\partial u^i} \quad (\text{A39})$$

3.6.2 Divergência e Laplaciano

A divergência de um vetor $\mathbf{A} = A^i \boldsymbol{\varepsilon}_i$ é a contração de sua derivada covariante

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= A^i_{;i} \\ &= \frac{\partial A^i}{\partial u^j} + A^k \Gamma_{ki}^i \end{aligned} \quad (\text{A40})$$

Combinando as equações (A31) e (A32) vemos que

$$\Gamma_{ik}^i = \frac{1}{2} g^{im} \left\{ \frac{\partial g_{im}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{km}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^m} \right\}$$

Quando contraídos com g^{im} os dois últimos termos da chave se anulam. E fica

$$\Gamma_{ik}^i = \frac{1}{2} g^{im} \frac{\partial g_{im}}{\partial u^k} \quad (\text{A41})$$

E usando o resultado de ARFKEN (2005)

$$\Gamma_{ik}^i = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial u^k} \quad (\text{A42})$$

Onde g é o determinante métrico. Pode-se escrever (A42) como

$$\Gamma_{ik}^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{1}{2\sqrt{g}} \frac{\partial g}{\partial u^k} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u^k} \quad (\text{A43})$$

Dessa forma a equação (A40) se torna

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{\partial A^i}{\partial u^j} + A^k \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u^k} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\sqrt{g} \frac{\partial A^i}{\partial u^j} + A^k \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u^k} \right) \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g} A^i)}{\partial u^k} \end{aligned} \quad (\text{A44})$$

O operador laplaciano é definido como $\nabla \cdot \nabla \phi$. Mas o gradiente é um vetor covariante, logo devemos fazer

$$(\nabla \phi)^i = g^{ij} \frac{\partial \phi}{\partial u^j}$$

Com esta definição,

$$\nabla \cdot \nabla \phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial \phi}{\partial u^j} \right) \quad (\text{A45})$$

3.6.3 Rotacional

Considerando $\mathbf{A} = A_i \boldsymbol{\varepsilon}^i$ e aplicando o rotacional nesse vetor

$$\nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times (A_i \boldsymbol{\varepsilon}^i) = \left(\boldsymbol{\varepsilon}^i \frac{\partial A_i}{\partial u^j} \right) \times \boldsymbol{\varepsilon}^j + A_j \nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}^j$$

Por outro lado

$$\nabla u^i = \boldsymbol{\varepsilon}^j \frac{\partial u^i}{\partial u^j} = \delta_j^i \boldsymbol{\varepsilon}^j = \boldsymbol{\varepsilon}^i$$

Então $\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}^j = \nabla \times \nabla u^j = 0$. Logo

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{\partial A_i}{\partial u^j} \boldsymbol{\varepsilon}^i \times \boldsymbol{\varepsilon}^j$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \epsilon^{ijk} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial A_i}{\partial u^j} \boldsymbol{\varepsilon}_k \quad (\text{A45})$$

APÊNDICE B - INTRODUÇÃO À TEORIA DE GRUPOS

A idéia de *grupo* na Física nasceu através do advento da Teoria da Relatividade e da Mecânica Quântica. Segundo BARATA, 2006 esse conceito é relevante porque está ligado ao que se chama de *transformações de simetria*. Segundo o próprio BARATA ela é definida como uma transformação que leva um sistema físico a outro sistema físico possível que satisfaça as mesmas leis e princípios do anterior. Transladar no espaço e no tempo ou girar um sistema físico são exemplos de transformações de simetria. Nesse raciocínio, as transformações de Lorentz fazem parte desse conceito.

Existe uma definição formal de grupo, que segundo BARATA, 2006 diz que dado um conjunto G não vazio, existem funções f definidas nesse conjunto que levam pares de G em um elemento de G , matematicamente, $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Por exemplo, se dois elementos $a, b \in G$, associamos uma função binária $f(a, b) \in G$. Na teoria de grupos designa-se uma função desse tipo como $f(a, b) \equiv a \cdot b$, onde esse não é um produto ordinário, como o de dois números reais, mas uma função.

Para que um conjunto G seja um grupo, ele deve ser dotado de uma operação binária chamada produto, denotada por " \cdot " que satisfaz as seguintes propriedades:

1. *Associatividade*. Para todo $a, b \in G$ vale a relação $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
2. *Existência de um único elemento neutro*. Para todo $a \in G$, existe nesse conjunto um único elemento neutro e que satisfaz a relação

$$a \cdot e = e \cdot a = a$$

Demonstração:

Suponha que existam dois elementos neutros e e e' , então pela segunda propriedade

$$a \cdot e = e \cdot a = a$$

$$a \cdot e' = e' \cdot a = a$$

Fazendo o produto $e \cdot e' = e'$ uma vez que e é neutro. Mas por outro lado, e' também é neutro $e' \cdot e = e$, mas como a ordem do elemento neutro não importa, tem-se $e \cdot e' = e' \cdot e = e' = e$.

3. *Existência de um único elemento inverso.* Para todo $a \in G$, existe um único elemento inverso $a^{-1} \in G$ tal que

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$$

Demonstração:

Suponha que exista outro elemento inverso h , tal que $a \cdot h = h \cdot a = e$. Sabendo que

$$a^{-1} = a^{-1} \cdot e = a^{-1} \cdot (a \cdot h) = (a^{-1} \cdot a) \cdot h = e \cdot h \Rightarrow a^{-1} = h$$

Outros resultados importantes na teoria de grupos são

$$e^{-1} = e$$

$$(a^{-1})^{-1} = a$$

Demonstrações

Para o primeiro, podemos fazer $e \cdot e^{-1} = e$, como e é neutro, é fácil concluir $e^{-1} = e$.

Para o segundo, $(a^{-1})^{-1} = ((a^{-1})^{-1} \cdot a^{-1}) \cdot a = e \cdot a = a$.