



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ**  
**GISLÂNIA MARIA DE SOUZA LIMA**

**MODELAGEM MATEMÁTICA DA VOZ HUMANA:**  
**UM EXEMPLO DE APLICAÇÃO DE UM MODELO FONTE-FILTRO**

**FORTALEZA - CEARÁ**

**2010**

**GISLÂNIA MARIA DE SOUZA LIMA**

**MODELAGEM MATEMÁTICA DA VOZ HUMANA:  
UM EXEMPLO DE APLICAÇÃO DE UM MODELO FONTE-FILTRO**

Monografia apresentada ao Curso de Física do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do grau em Licenciatura em Física.

Orientação: Prof. Dr. Alexandre Araújo Costa

**FORTALEZA - CEARÁ**

**2010**

L 732m Lima, Gislânia Maria de Souza  
Modelagem matemática da voz humana: um exemplo de aplicação de um modelo fonte-filtro./ Gislânia Maria de Souza Lima. – Fortaleza, 2010.  
72p.;il.  
Orientador: Prof. Dr. Alexandre Araújo Costa  
Monografia (Graduação em Física) – Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia.  
1. Som. 2. Ressonância. 3. Forma de onda.l.  
Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia.

CDD:780.15

**GISLÂNIA MARIA DE SOUZA LIMA**

**MODELAGEM MATEMÁTICA DA VOZ HUMANA:  
UM EXEMPLO DE APLICAÇÃO DE UM MODELO FONTE-FILTRO**

Monografia apresentada ao Curso de Física do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do grau de Graduada em Licenciatura em Física.

Aprovada em: 26/03/2010

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Alexandre Araújo Costa – UECE

(Orientador)

---

Prof. Dr. Antônio Carlos Santana dos Santos– UECE

(Membro Interno)

---

Prof. Dr. Francisco Sales Ávila Cavalcante – UECE

(Membro Interno)

*Aos meus Pais Francisco de Sousa (in memoriam) e Regina Luiza. Aos meus irmãos, a toda minha família e ao meu noivo Wendel.*

*DEDICO*

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, pela graça, força, coragem, e inteligência que ele me concedeu, pois sem ele nada do que foi feito se fez.

Aos meus pais, pela formação e força que me deram para ir ao encontro dos meus objetivos e por sempre estarem comigo nos momentos difíceis, se não fosse eles eu não teria conseguido.

Aos meus irmãos, Rosângela (Titá), pelo cuidado que sempre teve comigo desde a minha infância. A Rosimar (Azinha), que sempre intercede por mim, nos momentos difíceis. Ao Benedito (Titi), pelos sábios conselhos e incentivo aos meus estudos. O Benigno (Bibi), por sempre me passar calma e tranqüilidade. A Rosilene (Leninha), pelo o carinho e atenção. A toda minha família, que apesar da ausência do convívio familiar estiveram sempre por perto.

Ao meu Noivo Wendel Macedo (Bacharelado em Física), por ser essa pessoa maravilhosa que nos momentos que pensei em desistir, estava ao meu lado me motivando a seguir em frente. Obrigado pela paciência, carinho e dedicação que teve no decorrer desse trabalho.

A minha grande amiga Kercia Alves pelo apoio, incentivo e convívio diário.

Ao Pr. Jader pelas orações e conselhos que foram muito úteis para minha vida

Ao Prof. Dr. Alexandre Costa, pela disponibilidade para me orientar neste trabalho e pela dedicação que teve durante esse tempo de estudo.

A todos os professores que contribuíram diretamente na minha formação.

A todos os meus colegas que fizeram parte dessa etapa da minha vida acadêmica.

Ao professor Manoel Saraiva (Manoelito) por me incentivar a continuar os meus estudos.

*“Graças a Deus, que sempre nos faz triunfar em Cristo, e por meio de nós manifesta em todo lugar o cheiro do seu conhecimento”.*

*II Coríntios 2.14*

## RESUMO

O presente trabalho discute a representação matemática da produção, amplificação e irradiação de sons vocálicos da voz humana, utilizando as leis da Acústica. Como o som está inserido em um fluido, o estudo da mecânica dos fluidos se torna relevante, partindo-se inicialmente de uma abordagem cinemática e depois estudando o sistema de forças ao qual eles são sujeitos, desenvolvendo assim a equação de Euler. Como o som é uma perturbação inserida em um fluido em repouso ele deve obedecer à equação de onda, o que é demonstrado em seguida. A qualidade sonora é definida através do timbre, associado a diferentes formas de ondas, descritas matematicamente através da teoria de Fourier. Esta descrição é utilizada para alimentar um modelo fonte-filtro, por meio das componentes espectrais de um pulso glótico, com vistas a representar o trato vocal como uma seqüência de filtros ressonantes. Finalmente, este modelo matemático, que combina a decomposição espectral do pulso glótico com a representação dos formantes da voz humana por filtros ressonantes é adotado para simular a vocalização da vogal “a” por um indivíduo do sexo feminino.

**Palavras-chave:** Som, ressonância, forma de onda.

## ABSTRACT

The present work presents a mathematical representation of the production, amplification and emission of human voice, using the laws of Acoustics. Since the sound is produced in the atmospheric fluid, the study of fluid mechanics becomes relevant. We start with a kinematic approach, followed by an analysis of the forces in the fluid, deducing Euler's equation. The propagation of sound follows the wave equation for a fluid in a basic state of rest; the sound quality being defined by the timbre, which is associated with different wave forms, described mathematically via Fourier's theory. Such description is used as an input for a source-filter model, through the spectral components of a vocal pulse, with the purpose of representing the vocal tract as a sequence of resonant filters. Finally, this mathematical model, which combines the spectral decomposition of the vocal pulse with the representation of the human formants is used to simulate the vocalization of the vowel "a" by a female.

**KeyWords:** sound, resonance, wave form.

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	<b>10</b>
<b>2 MECÂNICA DO MEIO CONTÍNUO</b> .....	<b>11</b>
<b>2.1 Cinemática do meio contínuo</b> .....	<b>11</b>
2.1.1 Equação da continuidade .....	11
2.1.2 Equações de movimento para um fluido ideal.....	15
<b>2.2 Ondas sonoras</b> .....	<b>17</b>
2.1.2 A Equação de Onda .....	17
2.2.2 Soluções da Equação de Onda .....	21
2.2.3 Modos Normais de Vibração da caixa retangular.....	22
2.2.4 Análise de Fourier e formas de onda: o timbre.....	26
<b>3 O TRATO VOCAL</b> .....	<b>37</b>
<b>3.1 Acústica do trato vocal</b> .....	<b>37</b>
3.1.1 O tubo uniforme.....	38
3.1.2 Tubo de seção transversal variável.....	41
3.1.3 O trato vocal com perdas .....	45
3.1.4 Representação matricial.....	52
3.1.4.1 O caso geral .....	52
3.1.4.2 O caso de um tubo uniforme .....	55
3.1.4.3 Decomposição do trato em tubos uniformes .....	56
<b>4 A VOZ HUMANA</b> .....	<b>57</b>
<b>4.1 O pulso vocal</b> .....	<b>58</b>
4.1.1 Modelagem matemática do pulso.....	59
<b>4.2 Os formantes</b> .....	<b>65</b>
4.2.1 A filtragem .....	66
<b>5 CONCLUSÕES</b> .....	<b>70</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	<b>71</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O órgão da voz pode ser considerado um dispositivo que produz sons, sendo constituído por três sistemas – aparelho respiratório, cordas vocais e trato vocal (Sundberg, 1987). A voz humana é produzida pela vibração das cordas vocais. Os movimentos de elevação e de depressão da laringe são controlados respectivamente pelos músculos extrínsecos elevadores e depressores. Por sua vez os músculos intrínsecos controlam a posição e a tensão das cordas vocais. Depois, o sinal deve ser amplificado pelo trato vocal que pode ser analisado a partir de um modelo de tubos simples. Nesse estudo desenvolvemos uma descrição matemática desses processos, utilizando ferramentas computacionais para simular a forma de onda da vogal “a”. Antes da modelagem da voz, propriamente dita, enfatizamos alguns aspectos da mecânica dos fluídos e análise de Fourier.

## 2. Mecânica do meio contínuo: o som

### 2.1 Cinemática dos Fluidos em movimento

Uma das maneiras de se descrever o movimento de um fluido é tentando seguir o movimento de cada um dos pontos do fluido, atribuindo coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$  a cada partícula do fluido e especificando estas coordenadas em função do tempo. Deve-se definir dois tipos de referenciais; o primeiro é chamado Euleriano pois nele é levado em conta a variação local da densidade com o tempo, o referencial está parado. A taxa com que a densidade varia com o tempo nesse referencial é chamada derivada local, representada por  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ . O outro é chamado Lagrangeano onde cada partícula do fluido acompanha o referencial, portanto, o referencial se movimenta. A taxa de variação da densidade em relação a um ponto que se move juntamente com o fluido será dada pela seguinte derivada total (HOLTON, 2004).

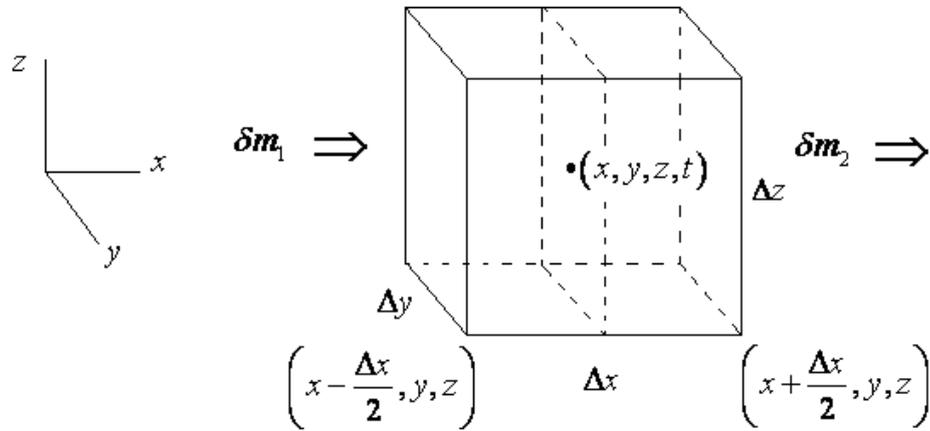
$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{dt}{dt} \quad (1)$$

Que pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} \frac{D\rho}{Dt} &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} \\ \frac{D\rho}{Dt} &= \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \rho \end{aligned} \quad (2)$$

#### 2.1.1 Equação da Continuidade

Considerando que o fluido está no referencial Euleriano, e imerso nele existe um elemento de volume retangular fixo com dimensões  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  e  $\Delta z$ , como na figura 1.



**Figura 1** – Elemento de volume imerso no fluido

Por simplicidade vamos considerar o escoamento do fluido somente na direção  $x$ , uma vez que acontece o mesmo fenômeno nas outras direções. A equação da continuidade nos fornece o balanço de massa nessa porção do fluido. Denotaremos  $\delta m_1$  a quantidade de massa que entra nessa porção fixa e  $\delta m_2$  a massa que sai. Logo a massa que fica retida nesse volume é

$$\delta m = \delta m_1 - \delta m_2 \quad (3)$$

Que pode ser escrita na forma

$$\delta m = -(\delta m_2 - \delta m_1) \quad (4)$$

Mas podemos escrever cada quantidade de massa como

$$\delta m_1 = v_x \left( x - \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) \delta t \Delta y \Delta z \rho \left( x - \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) \quad (5)$$

$$\delta m_2 = v_x \left( x + \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) \delta t \Delta y \Delta z \rho \left( x + \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) \quad (6)$$

Vamos definir uma função chamada fluxo de massa na direção  $x$ ,

$$\Phi_x = \rho v_x \quad (7)$$

Com essa definição as equações (5) e (6) se tornam

$$\delta m_1 = \Phi_x \left( x - \frac{\Delta x}{2} \right) \delta t \Delta y \Delta z \quad (8)$$

$$\delta m_2 = \Phi_x \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right) \delta t \Delta y \Delta z \quad (9)$$

Substituindo as equações (1.8) e (1.9) em (1.3) obtemos

$$\delta m = - \left[ \Phi_x \left( x + \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) - \Phi_x \left( x - \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) \right] \delta t \Delta y \Delta z \quad (10)$$

$$\frac{\delta m}{\delta t} = - \left[ \Phi_x \left( x + \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) - \Phi_x \left( x - \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) \right] \Delta y \Delta z \quad (11)$$

Expandindo em série de Taylor o segundo membro da equação (11), obtemos

$$\Phi_x \left( x \pm \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) = \Phi_x (x, y, z) \pm \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}$$

Dessa forma temos que a equação (11) se torna

$$\frac{\delta m}{\delta t} = - \left[ \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right] \Delta y \Delta z$$

$$\frac{\delta m}{\delta t} = - \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (12)$$

Onde  $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$  é o volume da parcela de fluido da figura 1. Tomando o limite quando  $\delta t \rightarrow 0$  no primeiro membro da equação (12)

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta m}{\delta t} = \frac{\partial m}{\partial t} \quad (13)$$

E então

$$\begin{aligned} \frac{\partial m}{\partial t} &= - \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} V \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{m}{V} \right) &= - \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} &= - \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} \end{aligned} \quad (14)$$

Fazendo o mesmo procedimento para as direções  $y$  e  $z$  chegamos a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi_y}{\partial y} \quad (15)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi_z}{\partial z} \quad (16)$$

Dessa maneira fizemos o estudo da taxa de variação da densidade com relação a um elemento de volume fixo em cada direção separadamente. Uma generalização disso é levando em conta que o fenômeno ocorre simultaneamente nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , ou seja,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z}\right) \quad (16)$$

O termo entre parênteses no segundo membro da equação acima é o divergente (ARFKEN, 2005) da função fluxo de massa, agora vetorial. Logo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\nabla \cdot \Phi \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

A equação (18) é a equação da continuidade na forma diferencial que pode ser colocada na forma integral com o auxílio do teorema da divergência de Gauss (ARFKEN, 2005)

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \oiint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \quad (19)$$

Integrando em ambos os membros da equação (1.18), temos

$$\begin{aligned} \iiint_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV &= -\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \\ \iiint_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV &= -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV \end{aligned} \quad (20)$$

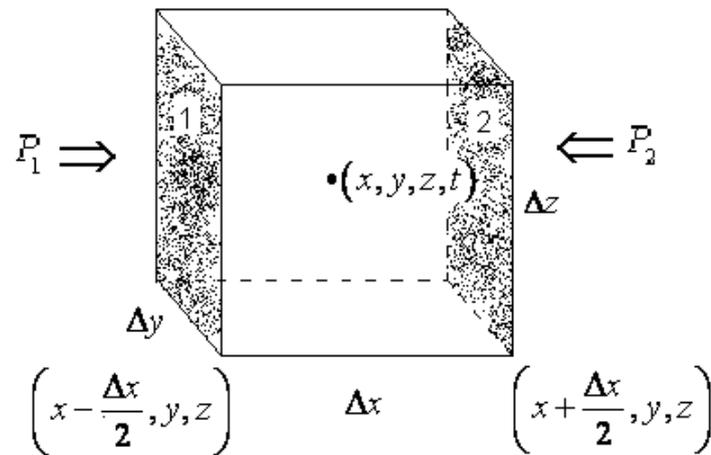
Aplicando o teorema da divergência no primeiro membro da equação (20) temos que

$$\oiint_S \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial m}{\partial t} \quad (21)$$

A equação (21) é a equação da continuidade na forma integral.

### 2.1.2 Equações de movimento para um fluido ideal

Consideremos um elemento de volume muito pequeno imerso em um fluido como na figura 2. Nossa intenção é analisar e determinar a força devido à pressão (HOLTON, 2004).



**Figura 2** – Esquema das pressões exercidas nas faces 1 e 2 do pequeno elemento de volume

O elemento de volume é sujeito a pressão nas suas faces. A força na direção  $x$  devido à pressão exercida sobre a face esquerda da caixa é  $P_1\Delta y\Delta z$  e sobre a face direita é  $P_2\Delta y\Delta z$ . Logo a força resultante na direção  $x$  é

$$\begin{aligned}
 F_x &= F_1 - F_2 \\
 F_x &= P_1\Delta y\Delta z - P_2\Delta y\Delta z \\
 F_x &= (P_1 - P_2)\Delta y\Delta z
 \end{aligned} \tag{22}$$

As pressões  $P_1$  e  $P_2$  são dadas por

$$P_1 = P\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) \tag{23}$$

$$P_2 = P\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) \tag{24}$$

Expandindo as equações (23) e (24) em serie de Taylor

$$P\left(x \pm \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) = P(x, y, z) \pm \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}$$

Substituindo na equação (22) obtemos

$$F_x = -\frac{\partial P}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (25)$$

Levando em conta as outras direções, temos também

$$F_y = -\frac{\partial P}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (26)$$

$$F_z = -\frac{\partial P}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (27)$$

Então a força total devido à pressão exercida sobre caixa é

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= F_x \hat{x} + F_y \hat{y} + F_z \hat{z} \\ \mathbf{F} &= -\left(\frac{\partial P}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial P}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial P}{\partial z} \hat{z}\right) \Delta x \Delta y \Delta z \\ \mathbf{F} &= -\nabla P \Delta V \end{aligned} \quad (28)$$

Mas pela segunda lei de Newton (HALLIDAY, 1992)

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= m\mathbf{a} \\ \mathbf{F} &= \rho \Delta V \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \end{aligned} \quad (29)$$

Igualando as equações (28) e (29)

$$\begin{aligned} -\nabla P &= \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \\ \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \nabla P \end{aligned} \quad (30)$$

Essa equação representa a aceleração do fluido. Usando a equação (2) mas em vez de usar da densidade usando a velocidade

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\right) \mathbf{v} \quad (31)$$

Colocando na forma

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \quad (32)$$

Usando a equação (30), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho} \nabla P \\ \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla P &= 0 \end{aligned} \quad (33)$$

Esta equação é válida para determinar a aceleração do fluido para o caso em que não existe uma força externa. No caso de existência de uma força externa  $\mathbf{f}$  (SYMON, 1981)

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla P = \frac{\mathbf{f}}{\rho} \quad (34)$$

Esta equação é chamada Equação de Movimento de Euler.

## 2.2 Ondas Sonoras

### 2.2.1 A Equação de Onda

Considere um fluido em repouso com pressão  $P_0$  e densidade,  $\rho_0$  em equilíbrio sob a ação de uma força de corpo  $\mathbf{f}_0$ , constante no tempo (SYMON, 1981). Nessas condições a equação de movimento desse fluido é

$$\frac{1}{\rho_0} \nabla P_0 = \frac{\mathbf{f}_0}{\rho_0} \quad (35)$$

Suponha agora que o fluido seja submetido a pequenas perturbações  $P'$  na pressão e  $\rho'$  na densidade de tal forma que as pressões e densidades totais são, respectivamente

$$P = P_0 + P' \quad (36)$$

$$\rho = \rho_0 + \rho' \quad (37)$$

Devemos ter  $\rho' \ll \rho$  e  $P' \ll P$  para que nosso sistema físico seja linear.

As equações (18) e (34), são as únicas equações de movimento que temos até agora e nos deparamos com um grande problema: temos três variáveis  $(\rho, \mathbf{v}, P)$  e apenas duas equações. Logo precisamos de mais uma equação para que o sistema seja solúvel. Deve-se Introduzir o módulo volumétrico do meio dado por (HALIDAY, 1992)

$$B = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V_0} \quad (38)$$

O módulo volumétrico  $B$  funciona como uma constante elástica em três dimensões. Por exemplo, para sólidos ele tem um valor muito elevado visto que  $\Delta V$  não é considerável como no caso dos fluídos compressíveis (gases). Dessa forma nesses fluídos devemos ter  $B$  muito pequeno, visto que agora  $\Delta V$  é considerável.

Podemos escrever a equação (38) como

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{m}{V} \Rightarrow \rho_0 = \frac{m}{V_0} \\ d\rho &= -\frac{m}{V^2} dV \\ \frac{dV}{V} &= -\frac{V}{m} d\rho \\ \frac{dV}{V} &= -\frac{d\rho}{\rho} \\ \frac{dV}{V_0} &= -\frac{B}{dp} = -\frac{d\rho}{\rho_0} \\ B &= -\frac{dP}{d\rho/\rho_0} \end{aligned} \quad (39)$$

Sabendo que  $dP$  e  $d\rho$  são as perturbações  $P'$  e  $\rho'$ . A equação (39) fica

$$\frac{\rho'}{\rho_0} = -\frac{P'}{B} \quad (40)$$

Agora temos o mesmo número de equações e variáveis. Para resolvermos o sistema composto pelas equações (18), (34) e (40) procederemos da seguinte maneira: Vamos substituir primeiramente (37) em (18)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \rho') + \nabla \cdot [(\rho_0 + \rho') \mathbf{v}'] &= 0 \\ \frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \frac{\partial \rho'}{\partial t} \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}') + \nabla \cdot (\rho' \mathbf{v}') &= 0 \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}') + \nabla \cdot (\rho' \mathbf{v}') &= 0\end{aligned}\quad (41)$$

Na equação (41)  $\mathbf{v}'$  representa a velocidade da perturbação no fluido e queremos que ela seja linear. Para tal devemos ter  $\rho' \mathbf{v}'$  igual a zero. Logo a equação se torna

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}' = 0 \quad (42)$$

Agora vamos substituir (36) em (34) obtemos

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + (\mathbf{v}' \cdot \nabla) \mathbf{v}' + \frac{1}{\rho} \nabla (P_0 + P') = \frac{\mathbf{f}}{\rho} \quad (43)$$

Da mesma forma para que a equação seja linear, qualquer produto de perturbações deve se nulo então

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \nabla P_0 + \frac{1}{\rho} \nabla P' = \frac{\mathbf{f}}{\rho} \quad (44)$$

Analisando os termos  $\frac{1}{\rho} \nabla P_0$  e  $\frac{\mathbf{f}}{\rho}$

$$\frac{1}{\rho} \nabla P_0 = \frac{1}{\rho_0 \left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0}\right)} \nabla P_0 \cong \frac{1}{\rho_0} \left(1 - \frac{\rho'}{\rho_0}\right) \nabla P_0 \cong \frac{1}{\rho_0} \nabla P_0$$

$$\frac{\mathbf{f}}{\rho} = \frac{\mathbf{f}}{\rho_0 \left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0}\right)} \cong \frac{1}{\rho_0} \left(1 - \frac{\rho'}{\rho_0}\right) \mathbf{f} \cong \frac{1}{\rho_0} \mathbf{f}$$

Dessa forma temos, levando em conta a equação (35) temos

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \nabla P' = 0 \quad (45)$$

Dessa forma temos outro sistema de equações, agora linearizado, formado pelas equações (40), (42) e (45). Vamos substituir a primeira na segunda obtendo

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho_0 \frac{P'}{B} \right) + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}' = 0$$

$$\frac{\partial P'}{\partial t} = -B \nabla \cdot \mathbf{v}' \quad (46)$$

A equação (45) pode ser escrita usando aproximação em série de Taylor em  $\frac{1}{\rho}$  na forma

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla P' \quad (47)$$

Nosso sistema agora só possui duas equações, que são (46) e (47). Como elas são equações vetoriais vamos resolver em uma direção específica e em seguida generalizarmos. As equações na direção  $x$  são

$$\frac{\partial P'}{\partial t} = -B \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad (48)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P'}{\partial x} \quad (49)$$

Vamos derivar a primeira com relação à  $t$  e a segunda com relação à  $x$ .

Obtendo

$$\frac{\partial^2 P'}{\partial t^2} = -B \frac{\partial^2 v_x}{\partial t \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 P'}{\partial x^2}$$

As funções  $P$  e  $v_x$  são bem comportadas e a ordem de diferenciação não importa. Isso leva a

$$\frac{\partial^2 P'}{\partial t^2} = \frac{B}{\rho_0} \frac{\partial^2 P'}{\partial x^2}$$

Generalizando para três dimensões temos

$$\frac{\partial^2 P'}{\partial t^2} = \frac{B}{\rho_0} \nabla^2 P' \quad (50)$$

A equação acima é conhecida como a equação tridimensional de onda.

Onde temos  $c = \sqrt{\frac{B}{\rho_0}}$  que é a velocidade de propagação do som no fluido. A equação na sua forma clássica é

$$\frac{\partial^2 P'}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 P' \quad (51)$$

A interpretação física do problema matemático resolvido nesse caso é que uma perturbação  $P'$  na pressão de um fluido em repouso é um pulso de onda se propagando no espaço. Por exemplo: Você está em uma sala de formato retangular e você bate na mesa, gerando uma perturbação no ar em repouso na sala e o resultado disso é um ruído, que obviamente é um pulso de onda. Esse problema será discutido com mais detalhes mais adiante, aonde iremos determinar os modos de vibração de uma caixa retangular.

### 2.2.2 Soluções da Equação de Onda

Um dos métodos de resolvermos a equação (51) é aplicar o método de separação de variáveis (ARFKEN, 2005) é supormos que

$$P'(x, y, z, t) = U(x, y, z) \Theta(t) \quad (52)$$

$$\frac{\partial^2 P'}{\partial t^2} = U \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 P' = \Theta \nabla^2 U$$

Substituindo esses resultados na equação (51), temos

$$U \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = c^2 \Theta \nabla^2 U \quad (53)$$

Dividindo (53) por  $U \Theta$ ,

$$\frac{1}{\Theta} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = \frac{c^2}{U} \nabla^2 U$$

Para que a igualdade seja válida, fazemos

$$\frac{1}{\Theta} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = \frac{c^2}{U} \nabla^2 U = -\omega^2$$

Onde  $-\omega^2$  é a constante de separação das duas equações diferenciais,

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2}(t) = -\omega^2 \Theta \quad (54)$$

$$\nabla^2 U = -\frac{\omega^2}{c^2} U \quad (55)$$

Fazendo  $k = \frac{\omega}{c}$  temos a famosa equação escalar de Helmholtz (ARFKEN, 2005)

$$\nabla^2 U + k^2 U = 0 \quad (56)$$

A solução geral da equação (54) é

$$\Theta(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (57)$$

### 2.2.3 Modos normais de vibração da caixa retangular

Vamos nesta seção encontrar os modos de vibração de uma caixa retangular rígida, ou seja, suas paredes não podem se mover. Para isso iremos resolver a equação (55) em coordenadas cartesianas.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -k^2 U \quad (58)$$

Aplicando o método de separação de variáveis para as coordenadas espaciais

$$U(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \quad (59)$$

$$YZ \frac{d^2 X}{dx^2} + XZ \frac{d^2 Y}{dy^2} + XY \frac{d^2 Z}{dz^2} = -k^2 XYZ \quad (60)$$

Dividindo a equação (60), por  $XYZ$ ,

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -k^2 \quad (61)$$

A equação só é verdadeira se cada termo for constante, resultando em três equações diferenciais ordinárias

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X}{dx^2} + k_x^2 X &= 0 \\ \frac{d^2 Y}{dy^2} + k_y^2 Y &= 0 \\ \frac{d^2 Z}{dz^2} + k_z^2 Z &= 0 \end{aligned} \quad (62)$$

E a equação (61) fica,

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 \quad (63)$$

E as soluções gerais das equações (62) são

$$\begin{aligned} X(x) &= C_x \cos k_x x + D_x \text{sen} k_x x \\ Y(y) &= C_y \cos k_y y + D_y \text{sen} k_y y \\ Z(z) &= C_z \cos k_z z + D_z \text{sen} k_z z \end{aligned} \quad (64)$$

Considerando que o fluido está confinado numa caixa retangular rígida de dimensões  $L_x, L_y$ , e  $L_z$  conforme a figura 3. Vamos determinar as condições de contorno apropriadas que serão aplicadas nas equações (64). Considerando os seis planos,

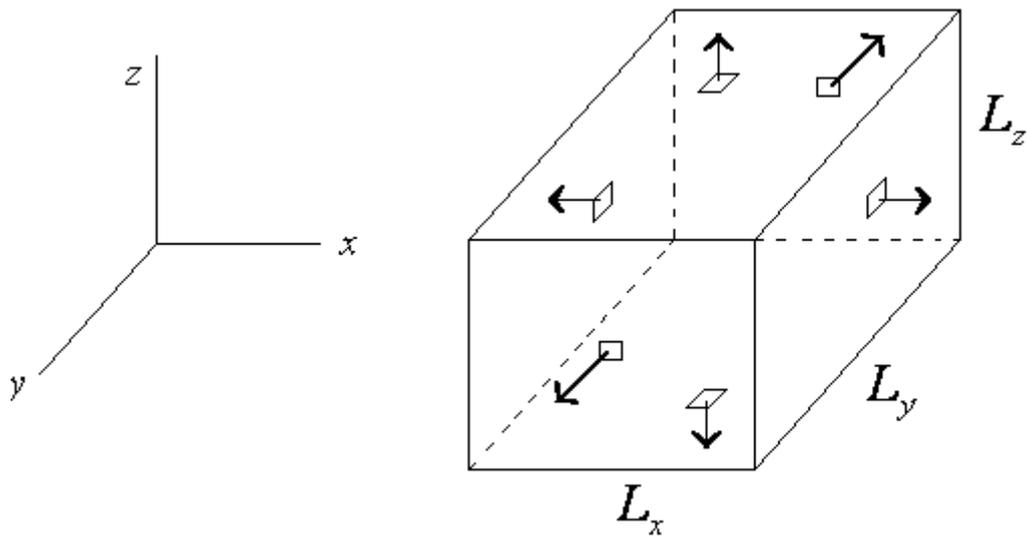
$$\begin{aligned} x &= 0, x = L_x \\ y &= 0, y = L_y \\ z &= 0, z = L_z \end{aligned}$$

Por exemplo, em  $x = 0$ ,  $v_x$  deve se anular uma vez que o fluido não vai deslocar o plano  $yz$ , pois inicialmente impomos que as paredes da caixa são rígidas. Logo de maneira geral,  $\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ .

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P'}{\partial x} = 0, \text{ onde } \frac{\partial P'}{\partial x} = 0$$

O mesmo acontece nas outras direções

$$\frac{\partial P'}{\partial y} = \frac{\partial P'}{\partial z} = 0$$



**Figura 3** – Caixa rígida com dimensões  $L_x, L_y, L_z$ . As perturbações são produzidas no interior da caixa.

Dessa forma vemos que as condições de contorno são:

$$\frac{\partial P'}{\partial x} = \frac{\partial P'}{\partial y} = \frac{\partial P'}{\partial z} = 0 \quad (65)$$

Sendo  $P' = XYZ\Theta$ , devemos fazer

$$\frac{\partial P'}{\partial x} = YZ\Theta \frac{dX}{dx} = 0 \Rightarrow \left( \frac{dX}{dx} \right)_{x=0} = 0$$

$$\frac{\partial P'}{\partial y} = XZ\Theta \frac{dY}{dy} = 0 \Rightarrow \left( \frac{dY}{dy} \right)_{y=0} = 0$$

$$\frac{\partial P'}{\partial z} = XY \Theta \frac{dZ}{dz} = 0 \Rightarrow \left( \frac{dZ}{dz} \right)_{z=0} = 0$$

Então,

$$\left( \frac{dX}{dx} \right)_{x=0} = \left( \frac{dY}{dy} \right)_{y=0} = \left( \frac{dZ}{dz} \right)_{z=0} = 0 \quad (66)$$

E em  $L_x$ ,  $L_y$  e  $L_z$  temos

$$\left( \frac{dX}{dx} \right)_{x=L_x} = \left( \frac{dY}{dy} \right)_{y=L_y} = \left( \frac{dZ}{dz} \right)_{z=L_z} = 0 \quad (67)$$

Aplicando as condições de contorno (66) nas equações (64), obtemos

$$\begin{aligned} X(x) &= C_x \cos k_x x \\ Y(y) &= C_y \cos k_y y \\ Z(z) &= C_z \cos k_z z \end{aligned} \quad (68)$$

Aplicando as condições de contorno (67) nas equações (68)

$$\begin{aligned} k_x &= \frac{l\pi}{L_x} \\ k_y &= \frac{m\pi}{L_y} \\ k_z &= \frac{n\pi}{L_z} \end{aligned} \quad (69)$$

Onde  $l$ ,  $m$  e  $n$  são números inteiros quaisquer. Dessa forma a equação (63) se torna

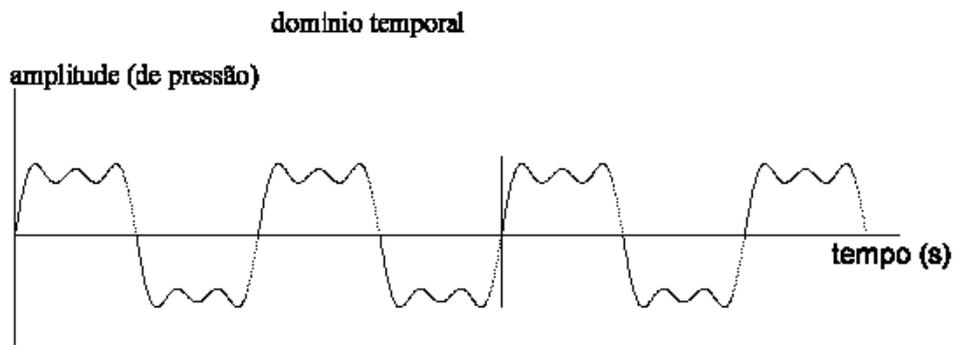
$$\omega = \pi c \sqrt{\left( \frac{l}{L_x} \right)^2 + \left( \frac{m}{L_y} \right)^2 + \left( \frac{n}{L_z} \right)^2} \quad (70)$$

A equação (70) dá a informação de como o sistema oscila. Ela é conhecida como os *modos de vibração da caixa retangular*. Para cada valor de  $l$ ,  $m$  e  $n$  existe um modo normal de vibração do fluido no interior da caixa. Logo a variação desses índices ocorre de forma independente.

#### 2.2.4 Análise de Fourier e formas de onda: o timbre

Para identificar os sons produzidos pelos diversos tipos de voz humana como também por diversos instrumentos musicais e por outras fontes, utilizamos uma qualidade auditiva que chamamos de *timbre*, ou *cor sonora*, que é um atributo muito importante da acústica. Essa qualidade está correlacionada com a forma da onda sonora. Em função disso é preciso investigar como essas ondas complexas são formadas para sabermos mais sobre os diferentes sons percebidos por nós (LAZZARINI, 1998).

Para estudar as definições de frequência, período, amplitude de uma onda, precisamos representá-la no domínio do tempo, que equivale ao quanto certa quantidade (amplitude), varia no tempo. Por exemplo, a onda quadrada (figura 6) pode ser decomposta em componentes senóidais (figura 4).



**Figura 4** – Gráfico de uma função periódica. Nesse caso temos uma onda quadrada representada através de suas componentes de Fourier.

A outra representação que podemos ter de uma onda sonora, relaciona a amplitude com a frequência. Em um eixo vertical temos a amplitude, que neste caso não é a amplitude instantânea de pressão da onda, mas o pico de amplitude, e no outro eixo temos a frequência. Essa representação é chamada de domínio espectral, das frequências ou apenas espectro. Por que precisamos dessa representação para melhor entender o timbre? A resposta está relacionada com o fato, que já foi mencionado, de que as ondas mais simples, senóides, são unidades em que ondas

complexas podem ser decompostas (Lazzarini,1998). Na figura 5 temos a representação espectral da mesma onda quadrada.

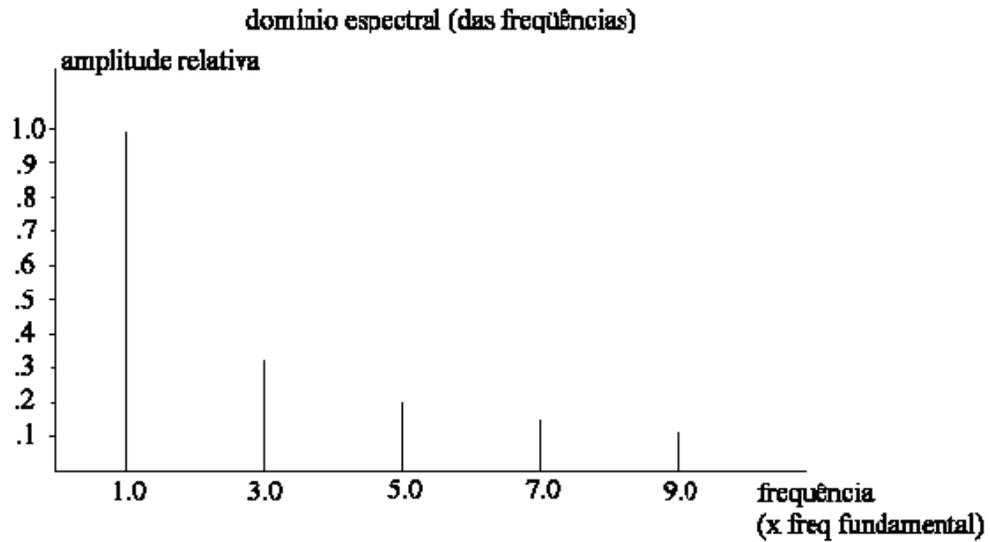


Figura 5 – Representação de uma onda em seu domínio espectral.

A relação entre formas de ondas complexas e senóides foi descoberta pelo matemático francês do séc. XVIII, Joseph Fourier. A decomposição de sons complexos em simples é uma ferramenta muito útil para o estudo da acústica. Essa decomposição se chama análise de Fourier, que transforma a representação temporal na representação espectral. Como primeiro exemplo, a senóide quando analisada revela apenas uma componente no espectro, equivalente a sua própria frequência de oscilação (LAZZARINI, 1998).

Considere uma função  $f(t)$  periódica de período  $T$  que pode ser escrita como uma combinação linear de funções senos e cossenos, chamada de série de Fourier (BUKOV, 1988).

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) + b_n \text{sen}\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) \right] \quad (71)$$

Fazendo com que a série comece de  $n = 1$

$$f(t) = A + \sum_{n=0}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) + b_n \text{sen}\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) \right] \quad (72)$$

Onde  $A$  é uma constante a ser determinada. Devemos descobrir as constantes da equação (71) em termos da função  $f(t)$ . Para tal vamos multiplicá-la por  $\cos\left(\frac{2\pi m}{T}t\right)$ , onde  $m$  é um número inteiro positivo, e em seguida integrar de 0 a  $T$

$$\int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi m}{T}t\right) dt = A + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) \cos\left(\frac{2\pi m}{T}t\right) dt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^T \text{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) \cos\left(\frac{2\pi m}{T}t\right) dt$$

Usando as identidades trigonométricas adequadas obtemos as relações de ortogonalidade (BUTKOV, 1988) das funções seno e cosseno.

$$\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) \cos\left(\frac{2\pi m}{T}t\right) dt = \frac{T}{2} \delta_{mn}$$

$$\int_0^T \text{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) \cos\left(\frac{2\pi m}{T}t\right) dt = 0$$

$$\int_0^T \text{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) \text{sen}\left(\frac{2\pi m}{T}t\right) dt = \frac{T}{2} \delta_{mn}$$

Essas relações nos ajudam a encontrar o primeiro grupo de coeficientes

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt \quad (73)$$

Para encontrar o segundo grupo devemos multiplicar a equação (72) por  $\text{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)$ , obtendo assim

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \text{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt \quad (74)$$

Para descobrir a última constante vamos integrar diretamente a equação (71) e depois fazer  $n = 0$  na equação (73), ficando com

$$A = \frac{a_0}{2} \quad (75)$$

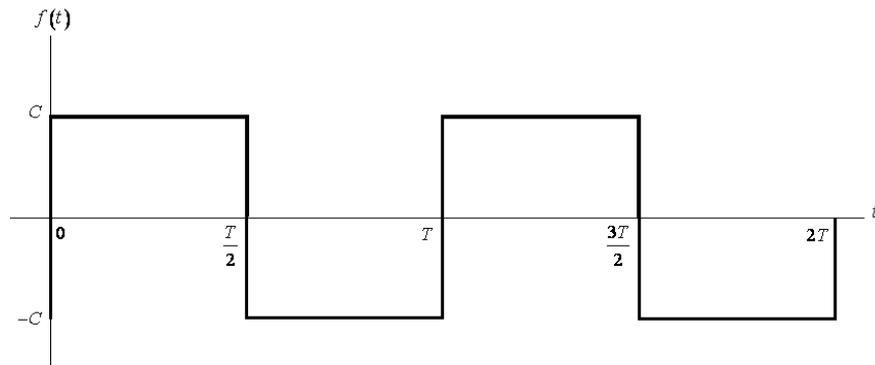
A nossa série de Fourier se torna então

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) + b_n \text{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) \right] \quad (76)$$

As amplitudes mostradas na figura 5 são os coeficientes de Fourier de cada harmônico (freqüência). Vamos expandir duas funções muito importantes em série de Fourier: a primeira será a função quadrada e a outra a triangular. A primeira é definida como

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq t < T/2 \\ C, & \text{se } T/2 \leq t < T \end{cases} \quad (77)$$

A função deve ser periódica,  $f(t+T) = f(t)$ .



**Figura 6** – Gráfico no domínio temporal de uma onda quadrada

Usando as equações (73) e (74), para calcular os coeficientes de Fourier, temos

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} C \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt + \frac{2}{T} \int_{T/2}^T (-C) \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt$$

$$a_n = \frac{2C}{T} \left[ \int_0^{T/2} \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt - \int_{T/2}^T \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt \right]$$

$$a_n = \frac{C}{\pi} \left[ \int_0^{\pi} \cos(nu) du - \int_{\pi}^{2\pi} \cos(nu) du \right]$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T} C \left[ \int_0^{T/2} \text{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt + \int_{T/2}^T \text{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt \right]$$

$$b_n = \frac{C}{\pi} \left[ \int_0^{\pi} \text{sen}(nu) du + \int_{\pi}^{2\pi} \text{sen}(nu) du \right]$$

$$b_n = \frac{4C}{n\pi}$$

Logo a série de Fourier se torna

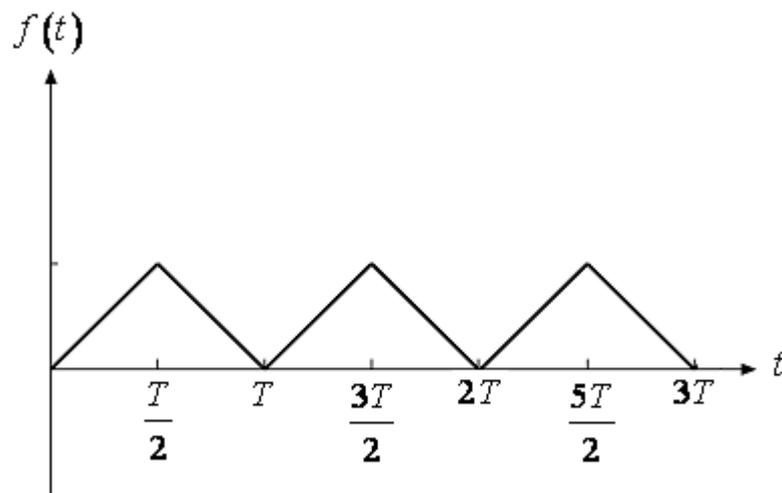
$$f(t) = \frac{4C}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \text{sen}\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) \quad (78)$$

Ou

$$f(t) = \frac{4C}{\pi} \left[ \text{sen}\left(\frac{2\pi}{T} t\right) + \frac{1}{3} \text{sen}\left(\frac{6\pi}{T} t\right) + \frac{1}{5} \text{sen}\left(\frac{10\pi}{T} t\right) + \dots \right]$$

Agora vamos determinar a série de Fourier da onda triangular. Cujas equação é

$$f(t) = \begin{cases} Ct, & \text{se } 0 \leq t < T/2 \\ -Ct, & \text{se } T/2 \leq t < T \end{cases} \quad (79)$$



**Figura 7** – Representação no domínio temporal de uma onda triangular

Novamente usando as mesmas que do problema anterior, vamos calcular os coeficientes

$$a_0 = \frac{2C}{T} \left[ \int_0^{T/2} t dt + \int_{T/2}^T (-t) dt \right]$$

$$a_0 = \frac{2C}{T} \left[ \frac{t^2}{2} \Big|_0^{T/2} - \frac{t^2}{2} \Big|_{T/2}^T \right]$$

$$a_0 = -\frac{CT}{2}$$

Os outros são

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2C}{T} \left[ \int_0^{T/2} t \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) dt + \int_{T/2}^T (-t) \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) dt \right] \\ a_n &= \frac{2C}{T} \left[ \frac{T^2}{4\pi^2 n^2} \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) \Big|_0^{T/2} + \frac{T}{2\pi n} t \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) \Big|_0^{T/2} \right] \\ &\quad + \frac{2C}{T} \left[ -\frac{T^2}{4\pi^2 n^2} \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) \Big|_{T/2}^T - \frac{T}{2\pi n} t \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) \Big|_{T/2}^T \right] \\ a_n &= \frac{CT}{\pi^2 n^2} [\cos(n\pi) - 1] \end{aligned}$$

Para valores de  $n$  par temos  $a_n$  nulo. Então devemos ter  $n$  ímpar.

$$a_n = -\frac{2CT}{\pi^2 n^2}$$

A constante  $b_n$  é dada por

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2C}{T} \left[ \int_0^{T/2} t \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) dt + \int_{T/2}^T (-t) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) dt \right] \\ b_n &= \frac{2C}{T} \left[ -\frac{T}{2\pi n} t \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) \Big|_0^{T/2} + \frac{T}{2\pi n} t \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) \Big|_{T/2}^T \right] \\ b_n &= \frac{CT}{n\pi} \left[ -\frac{T}{2} \cos(n\pi) + T \cos(2\pi) - \frac{T}{2} \cos(n\pi) \right] \\ b_n &= \frac{CT}{\pi n} [1 - \cos(n\pi)] \\ b_n &= \frac{CT}{\pi n} [1 - \cos(n\pi)] \end{aligned}$$

Logo temos que os valores de  $n$  são ímpares.

$$b_n = \frac{2C}{\pi n} T$$

A série é

$$f(t) = CT \left\{ -\frac{1}{4} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[ -\frac{1}{n^2} \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) + \frac{1}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) \right] \right\} \quad (80)$$

Vamos neste momento desenvolver a série de Fourier na forma complexa. Considerando que as funções seno e cosseno podem ser escritas na forma de exponenciais complexas da seguinte maneira

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) = \frac{e^{i\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)} - e^{-i\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)}}{2i}$$

$$\operatorname{cos}\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) = \frac{e^{i\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)} + e^{-i\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)}}{2}$$

Substituímos na equação (76) obtendo assim

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \frac{e^{i\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)} + e^{-i\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)}}{2} + b_n \frac{e^{i\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)} - e^{-i\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)}}{2i} \right] \quad (81)$$

Agrupando os termos a equação (81) se torna

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n) e^{i\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n) e^{-i\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)} \quad (82)$$

Agora chegamos a um ponto muito delicado. Vamos usar um artifício matemático para incorporar os três termos da equação acima em um só. Para tal, vamos mudar o índice do segundo somatório fazendo com que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n) e^{-i\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)} = \sum_{n=-\infty}^{-1} (a_{-n} + ib_{-n}) e^{i\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)}$$

Então a equação (82) se torna

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{-1} (a_n - ib_n) e^{i\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)} + \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{-n} + ib_{-n}) e^{i\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)}$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)} \quad (83)$$

Onde temos que os coeficientes  $c_n$  são

$$c_n = \begin{cases} \frac{a_0}{2}, & \text{se } n=0 \\ \frac{a_n - ib_n}{2}, & \text{se } n < 0 \\ \frac{a_n + ib_n}{2}, & \text{se } n > 0 \end{cases} \quad (84)$$

A equação (83) é a série de Fourier na forma complexa. É importante destacar que as equações (76) e (83) só são válidas para funções periódicas. Falta descobrir como calcular a constante  $c_n$  em termos da função  $f(t)$  dada no início do problema. Para isso iremos multiplicar a equação (83) por  $e^{-i\left(\frac{2\pi m}{T}t\right)}$  e em seguida integrando no intervalo de 0 a  $T$

$$\int_0^T f(t) e^{-i\left(\frac{2\pi m}{T}t\right)} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_0^T e^{-i\left(\frac{2\pi m}{T}t\right)} e^{i\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)} dt \quad (85)$$

Da mesma forma que as funções trigonométricas seno e cosseno são ortogonais, as exponenciais complexas também são (BUTKOV, 1988)

$$\int_0^T f(t) e^{-i\left(\frac{2\pi m}{T}t\right)} e^{-i\left(\frac{2\pi m}{T}t\right)} dt = T \delta_{mn}$$

Dessa forma a equação (85) se torna

$$\int_0^T f(t) e^{-i\left(\frac{2\pi m}{T}t\right)} dt = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta_{mn}$$

$$c_m = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\left(\frac{2\pi m}{T}t\right)} dt$$

Mudando para o índice original, obtemos

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)} dt \quad (86)$$

No caso em que tivermos uma função que não é periódica como, por exemplo, um único pulso de onda se propagando, não podemos usar essas expressões. Devemos usar a chamada Transformada de Fourier. Portanto partindo

da equação (86), onde faremos  $\omega = \frac{2\pi n}{T}$  e para a diferença entre dois números inteiros  $\Delta n$  temos

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T} \Delta n$$

Mas se os números inteiros são consecutivos, temos  $\Delta n = 1$  e a equação acima se torna

$$\Delta\omega \frac{T}{2\pi} = 1$$

Com esse resultado podemos escrever a equação (83) da seguinte forma

$$f(t) = \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} \frac{T}{2\pi} c_n e^{i\omega t} \Delta\omega$$

Escrevendo  $\frac{T}{2\pi} c_n = \frac{F(\omega)}{\sqrt{2\pi}}$  temos então

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} \Delta\omega \quad (87)$$

Com  $T \rightarrow \infty$  retiramos a periodicidade da função  $f(t)$  e  $\Delta\omega$  se torna infinitesimal. Logo o somatório se torna uma integral

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} \Delta\omega$$

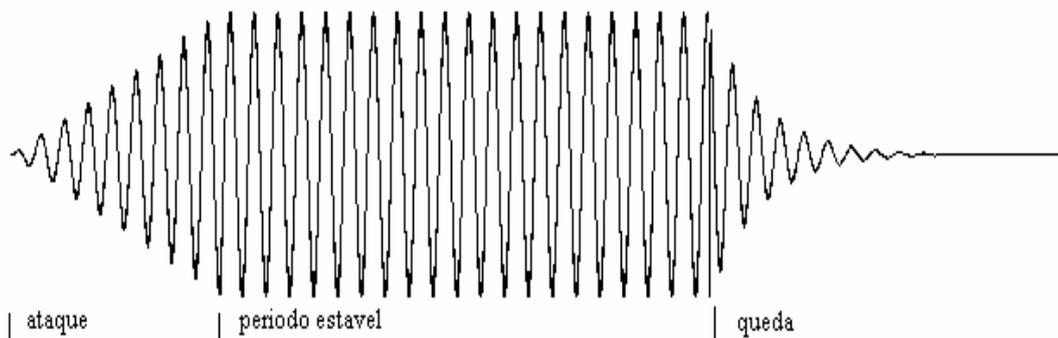
$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (88)$$

Para descobrirmos  $F(\omega)$  em termos de  $f(t)$  usaremos a equação (86) com a constante  $c_n$  redefinida. Dessa forma o resultado é

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (89)$$

As equações (88) e (89) são as transformadas Inversas e diretas, respectivamente. Podemos tomar uma função  $f(t)$  calcular sua transformada que será  $F(\omega)$ , e vice-versa.

Hermann Von Helmholtz em seu livro *On the Sensations of Tone*, montou, no final do séc.XIX, um corpo teórico que é a fundamentação do que hoje sabemos sobre o timbre. Helmholtz caracteriza os sons como consistindo de uma onda de forma arbitrária fechada em um envelope (ou envoltória) de amplitude feito de três partes: ataque (ou tempo de crescimento), período estável e queda (ou tempo de queda). O ataque é o tempo que a amplitude de um som leva para sair do zero e subir até o seu valor de pico. O período estável é onde a amplitude é idealmente constante, e o som some no período da queda (onde a amplitude cai até zero).



**Figura 8** – Representação de uma onda no chamado envelope

Helmholtz descobriu também que sons que evocam um sensação definida de freqüência correspondem a ondas periódicas (ou seja ondas que sempre se repetem em um certo período de tempo). Ele estabeleceu que a forma dessas ondas têm grande influência no timbre percebido de um som. Para relacionar melhor a maneira em que forma de onda e timbre se relacionam, ele usou o legado teórico de Fourier, já citado acima, que provava que qualquer onda periódica pode ser decomposta em um conjunto único de componentes senóidais. Portanto qualquer forma de onda pode ser descrita em termos de dessas componentes, e cada

componente senoidal será caracterizada por três parâmetros: frequência, amplitude e fase relativa à fundamental. Os dois primeiros parâmetros têm uma grande importância para a definição do timbre, enquanto as relações de fase têm um efeito menor na percepção do timbre. Foi mostrado anteriormente que um som então pode ter duas representações: a da onda (de pressão), amplitude X tempo; e a do espectro, amplitude X frequência, onde podemos observar as componentes senóidais de um som (LAZZARINI, 1998).

### 3 O Trato Vocal

O trato vocal é um termo usado para designar o conjunto das cavidades laríngea, faríngea, bucal e nasal que constituem a estrutura ressoadora do órgão da voz. Ele tem uma função acústica semelhante à dos ressonadores de instrumentos musicais como violoncelo ou fagote, com a particularidade de ser modificável. Se um instrumento de sopro a forma do ressonador é fixa podendo variar o comprimento através de orifícios laterais ou das válvulas, na voz o trato vocal praticamente não varia de comprimento, mas pode assumir formas muito diferentes. A modificação da forma do trato vocal permite a emissão de sons diversificados, e é conseguida através da língua.

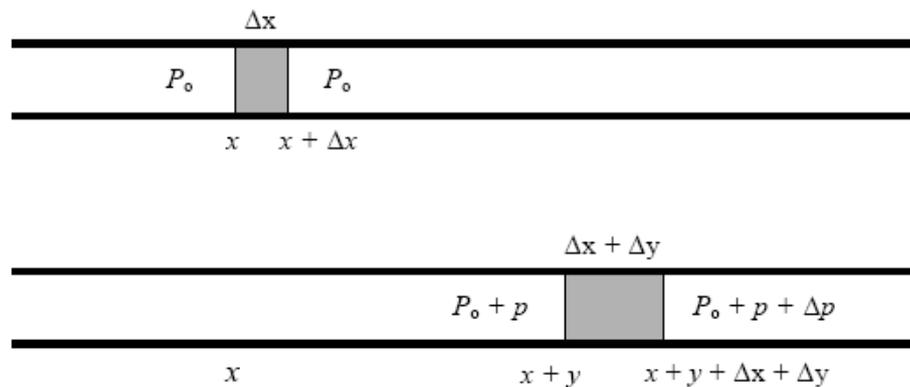
O trato vocal apresenta quatro ou cinco ressonâncias importantes - Os *formantes*. Eles são zonas em que há grande concentração de energia acústica, e podem ser vistos no domínio das frequências. A teoria dos formantes será detalhada mais a frente. (Henrique, 2002)

#### 3.1 Acústica do trato vocal

Nessa seção iremos desenvolver equações analíticas para o *trato vocal* (Frederico Miyara). Ele pode ser considerado em primeira aproximação como um cilindro cuja secção transversal varia com a posição ao longo do seu eixo. As formas e dimensões dessa secção transversal também experimentam uma evolução no tempo. Para modelar matematicamente a influência do trato vocal na síntese da voz no interior desse tubo, vamos supor que essa evolução no tempo ocorra lentamente, de modo que o sistema seja estacionário. Vamos iniciar com o caso mais simples até os mais complexos.

### 3.1.1 Tubo uniforme

A produção do som no interior de um tubo uniforme deve satisfazer a equação de onda. Nosso objetivo agora é demonstrá-la. Consideremos um tubo cilíndrico de secção transversal  $A$  e extensão infinita como o indicado nos dois instantes de tempo na figura 9. As duas regiões sombreadas correspondem à mesma porção de gás. Na parte superior da figura a pressão total é constante e igual à pressão atmosférica,  $P_0$ . Na parte inferior a porção de ar foi deslocada de uma distância  $y$ , e sua espessura passou de  $\Delta x$  a  $\Delta x + \Delta y$ . A pressão foi modificada de um valor  $p$ , no lado esquerdo e  $p + \Delta p$  no lado direito, resultando assim uma força que atua sobre o volume de gás. Tanto o deslocamento como o incremento de pressão são funções das variáveis  $x$  e  $t$ , isto é,  $y(x, t)$  e  $p(x, t)$ . Chamaremos de *Pressão Sonora* o incremento de pressão  $p(x, t)$ .



**Figura 9** – Um tubo de secção constante em dois instantes de tempo diferentes.

Considerando que a densidade do ar é  $\rho_0 = \frac{m}{A\Delta x}$ , vamos aplicar a segunda lei de Newton (Symon, 1981).

$$F = m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$F = \rho_0 A \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (90)$$

Por outro lado a força resultante é

$$\begin{aligned} F &= (P_0 + p)A - (P_0 + p + \Delta p)A \\ F &= -\Delta p A \end{aligned} \quad (91)$$

Igualando (90) a (91), obtemos

$$\begin{aligned} \rho_0 A \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -\Delta p A \\ \rho_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -\frac{\Delta p}{\Delta x} \end{aligned}$$

Tomando o limite no segundo membro quando  $\Delta x$  tende à zero

$$\rho_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (92)$$

Temos uma equação diferencial com duas funções incógnitas: a pressão e o deslocamento  $y$ . Precisamos de outra equação que as vincule para resolvermos esse problema. Podemos obter uma relação entre pressão e volume, considerando que a condutividade térmica do ar é muito baixa. Isso implica que o fluxo de calor é desprezível, e o processo é *adiabático* (HALLIDAY, 1992).

$$PV^\gamma = \text{constante} \quad (93)$$

Onde  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$  é a razão das capacidades caloríficas à pressão e volume

constantes. Para gases diatômicos  $\gamma \cong 1,4$ . Tomando a diferencial em ambos os membros na equação dos gases perfeitos,  $PV = nRT$ , (HALLIDAY, 1992) temos

$$PdV + VdP = nRdT \quad (94)$$

Mas  $PdV = -dW$  que é o trabalho realizado sobre o gás e também que é igual à energia interna, ou seja,  $dE_{\text{int}} = dW$ . Com (HALLIDAY, 1992)

$$dE_{\text{int}} = nC_v dT \quad (95)$$

Logo obtemos

$$\begin{aligned}
 -nC_V dT + VdP &= nRdT \\
 VdP &= (R + C_V)ndT \\
 VdP &= C_p ndT
 \end{aligned} \tag{96}$$

Fazendo

$$\frac{VdP}{pdV} = -\frac{C_p}{C_V} = -\gamma \tag{97}$$

A equação acima pode se colocada na forma

$$\frac{dP}{P} = -\gamma \frac{dV}{V} \tag{98}$$

Nesse caso vamos fazer  $dP = p$ ,  $P = P_0$ ,  $V = A\Delta x$  e  $dV = A\Delta y$ . Então a equação (98) se torna

$$\frac{p}{P_0} = -\gamma \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Tomando o limite no segundo membro quando  $\Delta x$  tende à zero

$$\frac{p}{P_0} = -\gamma \frac{\partial y}{\partial x} \tag{99}$$

Agora temos duas equações, (92) e (99), que vinculam as incógnitas funcionais  $p(x,t)$  e  $y(x,t)$ . Em geral estamos mais interessados na pressão do que no deslocamento. Derivando a equação (92) com respeito à  $x$  e a (99) duas vezes com respeito a  $t$ , temos

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{p}{P_0} \right)$$

Igualando essas duas equações, temos

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{p}{P_0} \right)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{P_0 \gamma}{\rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

Ou melhor

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad (100)$$

Esta equação é conhecida como *equação de onda unidimensional*. A constante  $c$  é a velocidade do som.

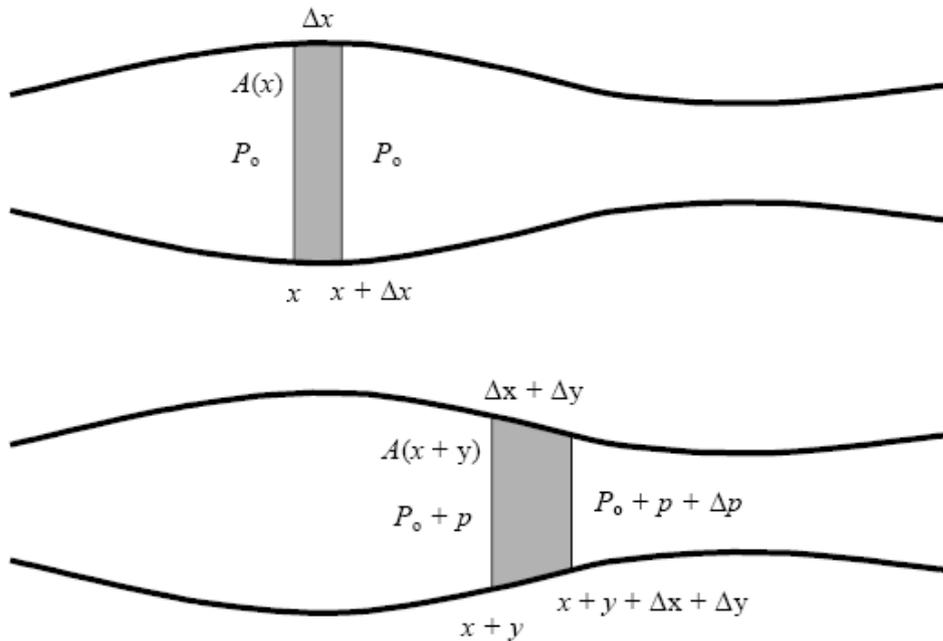
Pode-se mostrar que a solução geral dessa equação é

$$p(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

Onde  $f$  e  $g$  são funções arbitrárias diferenciáveis duas vezes.

### 3.1.2. Tubo de seção transversal variável

Consideremos agora um tubo cuja seção transversal é  $A(x)$  como o indicado em dois instantes de tempo na figura 10. Novamente, as duas regiões sombreadas correspondem à mesma porção de gás. A parte superior da figura representa a situação de equilíbrio, isto é, ausência de perturbações. A pressão total é constante e igual à pressão atmosférica,  $P_0$ . Na parte inferior a porção de ar foi deslocada de uma distância  $y$  e foi expandido de uma espessura  $\Delta x$  a uma  $\Delta x + \Delta y$ . A pressão sofreu uma variação  $p$  no lado direito e  $p + \Delta p$  no lado esquerdo, e a seção passou de  $A(x)$  para  $A(x + y)$ .



**Figura 10** – Um tubo de seção variável em dois instantes de tempo diferentes.

A força resultante que atua na direção do movimento é,

$$F = (P_0 + p)A(x + y) - (P_0 + p + \Delta p)A(x + y)$$

$$F = -\Delta p A(x + y)$$

Dado que normalmente  $y$  é pequeno, podemos aproximar  $A(x + y)$  através de uma série de Taylor até primeira ordem

$$A(x + y) \cong A(x) + \frac{\partial A}{\partial x} y$$

Logo a força resultante é

$$F = -\Delta p \left[ A(x) + \frac{\partial A}{\partial x} y \right] \quad (101)$$

Mas pela segunda lei de Newton,

$$F = \rho_0 A(x) \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (102)$$

Igualando (101) e (102), temos

$$-\Delta p \left[ A(x) + \frac{\partial A}{\partial x} y \right] = \rho_0 A(x) \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Dividindo por  $A(x)$  e por  $\Delta x$  e tomando o limite quando  $\Delta x$  tende a zero, obtemos

$$\frac{\partial p}{\partial x} \left[ 1 + \frac{1}{A(x)} \frac{\partial A}{\partial x} y \right] = \rho_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (103)$$

Esta equação diferencial parcial não é linear, o que complica sua solução. Se  $y$  é muito pequeno (o qual acontece com sons muito intensos) a variação relativa de área entre  $x$  e  $x + \Delta x$  se torna desprezível e então podemos aproximar

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (104)$$

Agora devemos particularizar a este novo caso a equação da compressão adiabática. Novamente  $dP = p$  e  $P = P_0$ . O volume inicial agora será  $V(x) = A(x) \Delta x$  e a variação de volume será

$$dV = A(x + y)(\Delta x + \Delta y) - A(x) \Delta x$$

$$dV = \left[ A(x) + \frac{\partial A}{\partial x} y \right] (\Delta x + \Delta y) - A(x) \Delta x$$

Logo pela equação (98), temos

$$\frac{p}{P_0} = -\gamma \frac{\left[ A(x) + \frac{\partial A}{\partial x} y \right] (\Delta x + \Delta y) + A(x) \Delta x}{A(x) \Delta x}$$

Tomando o limite quando  $\Delta x$  tende a zero, resulta

$$\frac{p}{P_0} = -\frac{\gamma}{A(x)} \left\{ \left[ A(x) + \frac{\partial A}{\partial x} y \right] \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial x} y \right\} \quad (105)$$

Aqui podemos fazer uma aproximação, isto é  $\frac{\partial A}{\partial x} y \ll A(x)$  devido à pequena variação relativa de área causada por um deslocamento muito pequeno  $y$  para intensidades moderadas. Resultando,

$$\begin{aligned} \frac{p}{P_0} &= -\frac{\gamma}{A(x)} \left[ A(x) \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial x} y \right] \\ \frac{p}{P_0} &= -\frac{\gamma}{A(x)} \frac{\partial}{\partial x} [A(x) y] \end{aligned} \quad (106)$$

Como estamos interessados em uma equação diferencial com a pressão  $p(x,t)$  como única incógnita funcional, devemos agora eliminar a incógnita  $y$  das equações (104) e (106). Para isso derivamos (106) duas vezes com respeito a  $t$ .

$$\frac{1}{P_0} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\frac{\gamma}{A(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left[ A(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right] \quad (107)$$

Da equação (104) temos

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Substituindo na equação (107)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} &= \frac{\gamma P_0}{A(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{A(x)}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \right] \\ \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} &= \frac{\gamma P_0}{\rho_0} \frac{1}{A(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left[ A(x) \frac{\partial p}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (108)$$

Onde  $c^2 = \frac{\gamma P_0}{\rho_0}$ . Logo, a equação (108) se torna

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{c^2}{A(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left[ A(x) \frac{\partial p}{\partial x} \right] \quad (109)$$

Esta equação é conhecida como a equação de onda para um tubo de seção variável. Veja que nessa equação precisamos saber o formato da área da seção, ou seja, precisamos saber  $A(x)$ . No caso em que  $A(x) = A$ , verificamos que se reduz ao caso do tubo cilíndrico.

### 3.1.3 O trato vocal com perdas

Um condutor real exibe ao menos dois fenômenos que obrigam a modificar as equações que obtivemos até agora. São os efeitos de viscosidade e absorção nas paredes.

No lugar de fazer a análise do deslocamento  $y(x,t)$  é fazê-lo em termos da velocidade das partículas  $v(x,t)$  e da velocidade volumétrica  $u(x,t)$ , que é o volume que atravessa uma seção de área  $A(x)$  por unidade de tempo. Supondo que a velocidade normal à seção  $u(x,t)$  é dada por

$$u(x,t) = v(x,t) A(x) \quad (110)$$

Então as equações (104) e (106) se tornam

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= -\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial x} &= -\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} \\ \frac{\partial p}{\partial x} &= -\frac{\rho_0}{A(x)} \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned} \quad (111)$$

Já derivando com respeito ao tempo (106) fica

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\gamma P_0}{A(x)} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} [A(x) y] \quad (112)$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= v(x, t) \frac{\partial A(x)}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} A(x) \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} [v(x, t) A(x)] \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ A(x) \frac{\partial y}{\partial t} \right] \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} [A(x) y] \end{aligned} \quad (113)$$

Substituindo a equação (112) em (113) obtemos

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\gamma P_0}{A(x)} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (114)$$

A incorporação dos efeitos de atrito e de absorção nas paredes nessas equações é simplificada se no lugar de continuarmos trabalhando no domínio do tempo trabalhamos agora no domínio da frequência, utilizando a transformada de Laplace (BUTKOV, 1988).

$$F \{ f(t) \} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (115)$$

Mas a transformada de Laplace só se aplica a funções de uma única variável, no entanto aqui temos funções de duas variáveis. Se considerarmos a variável espacial como um parâmetro fixo no momento da transformada, obtemos uma transformada dependente do mesmo parâmetro. Assim, as transformadas de  $p(x, t)$  e  $u(x, t)$  são respectivamente,  $P(x, s)$  e  $U(x, s)$ . Então

$$F \{ u(x, t) \} = U(x, s) = \int_0^{\infty} e^{-st} u(x, t) dt \quad (116)$$

Vamos agora encontrar a transformada de Laplace de  $\frac{\partial u}{\partial t}$

$$F \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \right\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{\partial u}{\partial t} dt$$

Usando interação por partes,

$$F \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \right\} = e^{-st} u(x, t) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} u(x, t) \frac{\partial}{\partial t} e^{-st} dt$$

$$F \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \right\} = s \int_0^{\infty} e^{-st} u(x, t) dt - u(x, 0)$$

$$F \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \right\} = sU(x, s) - u(x, 0) \quad (117)$$

Para a pressão temos

$$F \left\{ \frac{\partial p}{\partial t} \right\} = sP(x, s) - p(x, 0)$$

Supondo que em  $t = 0$ , o volume estava em repouso, temos  $u(x, 0) = 0$ .

Logo a equação (111) se torna

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\rho_0 s}{A(x)} U(x, s) \quad (118)$$

E a equação (114) se torna

$$sP(x, s) = -\frac{\gamma P_0}{A(x)} \frac{\partial U}{\partial x} \quad (119)$$

Levando em conta que  $A(x) \frac{\partial P}{\partial x} dx$  representa a força resultante sobre

uma capa de ar de espessura  $dx$  devida à mudança de pressão, no entanto

$\rho_0 s U(x, s)$  é a aceleração (força por unidade de massa) que se opõe à anterior.

Em caso de haver viscosidade se agrega uma força que é proporcional à velocidade e tende a se opor à força de pressão. O fator de proporcionalidade dessa força viscosa pode depender da frequência e da posição o que seria muito difícil de obter no domínio do tempo. Por exemplo, supomos que em uma cavidade de pequena secção (estrangulamento) o atrito seja muito maior que em uma de grande secção.

Então, a equação (118), nos leva a

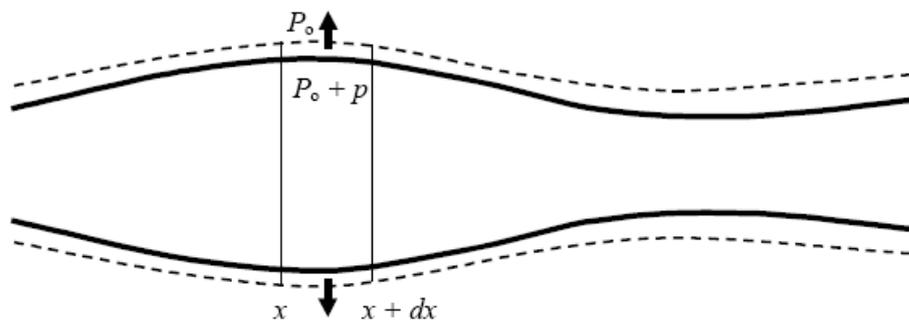
$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\rho_0 s}{A(x)} U - R(x, s) U \quad (120)$$

Para levar em conta as perdas por absorção nas paredes, reescrevemos a equação (119) da forma:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{A(x)s}{\gamma P_0} P(x, s) \quad (121)$$

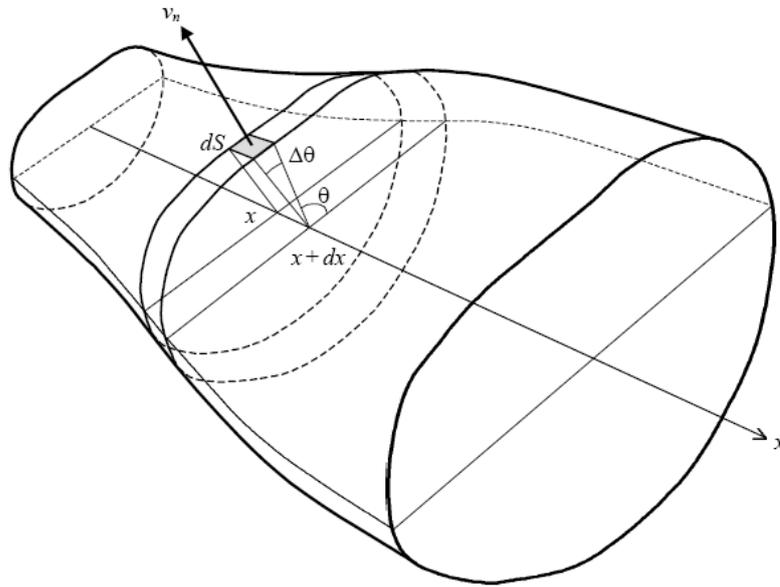
Observemos que  $\frac{\partial U}{\partial x} dx$  representa a variação de velocidade

volumétrica entre a face direita e a esquerda de um volume de ar de espessura  $dx$ . A equação (119) estabelece um dos mecanismos pelos quais se perde velocidade volumétrica: o fato de que a pressão está aumentando, faz diminuir uma dada massa ar. O outro mecanismo, que pretendemos incorporar, é o aumento da secção total devido à pressão sobre as paredes do trato quando estas não são rígidas. Fenômeno ilustrado na figura 11



**Figura 11** – O efeito da pressão sobre as paredes rígidas do trato vocal.

Para simplificar a análise devemos supor que as paredes interiores do trato respondem localmente a pressão, isto é, independe do que acontece com um ponto vizinho. Se bem que na realidade isto não sucede, pelo fato de que por continuidade, a pressão não varia bruscamente de um ponto a outro vizinho.



**Figura 12** – Geometria para o cálculo da admitância acústica das paredes do trato vocal

A reação local de uma superfície mediante a pressão, ou seja, o grau de resistência que o meio oferece ao movimento se traduz nos conceitos de *impedância acústica*, definida como quociente entre as transformadas de Laplace da pressão e a velocidade, e no conceito dual de *admitância acústica*, que por sua vez é o quociente entre as transformadas da velocidade e a pressão. Com referência a figura 12, se a pressão sobre a parede em um ponto localizado em coordenadas cilíndricas  $(\theta, x)$  com a coordenada  $\rho$  constante é  $P_{parede}(\theta, x, s)$  e a velocidade de deslocamento da parede normal a superfície é  $V_n(\theta, x, s)$ , então a admitância pontual é

$$Y^*(\theta, x, s) = \frac{V_n(\theta, x, s)}{P_{parede}(\theta, x, s)} \quad (122)$$

Dado que a longitude de onda é muito maior que as dimensões transversais do trato vocal, podemos supor que o campo sonoro é plano, pelo qual a pressão sonora é aproximadamente constante em toda a secção, isto é,

$$P_{parede}(\theta, x, s) \cong P(x, s)$$

De maneira que

$$V_n(\theta, x, s) = Y^*(\theta, x, s) P(x, s) \quad (123)$$

Propomo-nos calcular o volume que escapa pela parede por causa do escoamento desta. Consideremos para isso o volume que escapa pelo contorno da lâmina delgada de espessura  $dx$  da figura 12. Podemos escrever o elemento de área como

$$dS = S(\theta, x)d\theta dx$$

Onde  $S(\theta, x)$  depende da forma do condutor. O volume que escapa pelo referido contorno será

$$dU_{parede} = V_n(\theta, x, s)S(\theta, x)d\theta dx$$

$$dU_{parede} = dx \int_0^{2\pi} V_n(\theta, x, s)S(\theta, x)d\theta$$

$$dU_{parede} = dx \int_0^{2\pi} Y^*(\theta, x, s)P(x, s)S(\theta, x)d\theta$$

$$dU_{parede} = P(x, s)dx \int_0^{2\pi} Y^*(\theta, x, s)S(\theta, x)d\theta$$

Chamando de admitância total no ponto  $x$  a

$$Y(x, s) = \int_0^{2\pi} Y^*(\theta, x, s)S(\theta, x)d\theta \quad (124)$$

Então

$$dU = P(x, s)Y(x, s)dx$$

Podemos escrever a equação acima na forma

$$\frac{\partial U}{\partial x} dx = P(x, s)Y(x, s)dx$$

$$\frac{\partial U_{parede}}{\partial x} = P(x, s)Y(x, s) \quad (125)$$

Este valor representa as perdas de volume devido o aumento de pressão que está empurrando as paredes perimetrais da lâmina para fora, que deve ser subtraída da equação (119), que nos leva a

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{A(x)sP}{\gamma P_0} - Y(x,s) \cdot P \quad (126)$$

Temos assim incorporado, nas equações (120) e (126), os efeitos da viscosidade e absorção nas paredes internas do trato. Combinando-as obtemos uma equação que envolve unicamente a pressão  $P(x, s)$ . Da equação (120), temos:

$$U = -\left( \frac{A(x)}{\rho_0 s + A \cdot R} \frac{\partial P}{\partial x} \right)$$

Derivando esta equação com relação à  $x$ , temos

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{A(x)}{\rho_0 s + A \cdot R} \frac{\partial P}{\partial x} \right)$$

Igualando a equação acima com a equação (126)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{A(x)}{\rho_0 s + A \cdot R} \frac{\partial P}{\partial x} \right) = \left( \frac{As}{\rho_0 c^2} + Y \right) P \quad (127)$$

Onde  $\gamma P_0 = \rho_0 c^2$ . Esta é uma equação em derivadas parciais, que na prática se comporta como se fosse uma equação ordinária, já que só aparecem as derivadas com respeito a uma só variável (em  $x$ ). As derivadas com respeito à variável  $t$  ficaram absorvidas ao aplicar a transformação de Laplace. É então, uma equação homogênea de segunda ordem e coeficientes variáveis e dependentes além do parâmetro  $s$ . A solução geral é da forma

$$P(x, s) = ag(x, s) + bh(x, s) \quad (128)$$

Onde  $g$  e  $h$  são duas soluções particulares linearmente independentes, e, por aplicação da equação (120)

$$U(x, s) = \frac{-A}{\rho_0 s + A \cdot R} \left[ a \frac{\partial g}{\partial x}(x, s) + b \frac{\partial h}{\partial x}(x, s) \right] \quad (129)$$

### 3.1.4 Representação Matricial

É interessante analisar o trato vocal como uma caixa preta com uma entrada (a glote) e uma saída (os lábios). Dado que existem duas variáveis de entrada e duas de saída (as respectivas pressões e velocidades de volume), o problema é similar ao de um quadrupolo elétrico, e sua descrição pode realizar-se por meio de uma representação matricial.

#### 3.1.4.1 O Caso geral

Supondo que a entrada está em  $x = 0$  e a saída em  $x = L$ , teremos

$$P_{ent} = P(0, s) = a(0, s) + bh(0, s) \quad (130)$$

$$U_{ent} = U(0, s) = \frac{-A}{\rho_0 s + A \cdot R} \left[ a \frac{\partial g}{\partial x}(0, s) + b \frac{\partial h}{\partial x}(0, s) \right]$$

$$P_{sai} = P(L, s) = a(L, s) + bh(L, s) \quad (131)$$

$$U_{sai} = U(L, s) = \frac{-A}{\rho_0 s + A \cdot R} \left[ a \frac{\partial g}{\partial x}(L, s) + b \frac{\partial h}{\partial x}(L, s) \right]$$

Temos quatro equações e seis incógnitas  $(a, b, P_{sai}, U_{sai}, P_{ent}, U_{ent})$ . Podemos escolher duas delas como parâmetros independentes, e logo obter os restantes. Supondo conhecidas  $P_{sai}$  e  $U_{sai}$ , podemos encontrar as constantes  $a$  e  $b$  das equações (131), e das equações (130), obtemos  $P_{ent}$  e  $U_{ent}$ . Aplicando a regra de Cramer, temos

$$a = \frac{\begin{vmatrix} P_{sai} & h(L, s) \\ -\frac{\rho_0 s + A \cdot R}{A} U_{sai} & \frac{\partial h}{\partial x}(L, s) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g(L, s) & h(L, s) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(L, s) & \frac{\partial h}{\partial x}(L, s) \end{vmatrix}}$$

(132)

$$b = \frac{\begin{vmatrix} g(L, s) & P_{sai} \\ \frac{\partial g}{\partial x}(L, s) & -\frac{\rho_0 s + A \cdot R}{A} U_{sai} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g(L, s) & h(L, s) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(L, s) & \frac{\partial h}{\partial x}(L, s) \end{vmatrix}}$$

Então,

$$\begin{pmatrix} P_{ent} \\ U_{ent} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(0, s) & h(0, s) \\ \frac{-A}{\rho_0 s + A \cdot R} \frac{\partial g}{\partial s}(0, s) & \frac{-A}{\rho_0 s + A \cdot R} \frac{\partial h}{\partial s}(0, s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} P_{ent} \\ U_{ent} \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} g(0, s) & h(0, s) \\ \frac{-A}{\rho_0 s + A \cdot R} \frac{\partial g}{\partial s}(0, s) & \frac{-A}{\rho_0 s + A \cdot R} \frac{\partial h}{\partial s}(0, s) \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} g(L, s) & h(L, s) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(L, s) & \frac{\partial h}{\partial x}(L, s) \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} P_{sai} & h(L, s) \\ -\frac{\rho_0 s + A \cdot R}{A} U_{sai} & \frac{\partial h}{\partial x}(L, s) \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} g(L, s) & P_{sai} \\ \frac{\partial g}{\partial x}(L, s) & -\frac{\rho_0 s + A \cdot R}{A} U_{sai} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Ou ainda,

$$\begin{pmatrix} P_{ent} \\ U_{ent} \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} g(0, s) & h(0, s) \\ \frac{-A}{\rho_0 s + A \cdot R} \frac{\partial g}{\partial s}(0, s) & \frac{-A}{\rho_0 s + A \cdot R} \frac{\partial h}{\partial s}(0, s) \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} g(L, s) & h(L, s) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(L, s) & \frac{\partial h}{\partial x}(L, s) \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x}(L, s) P_{sai} + h(L, s) \frac{\rho_0 s + A \cdot R}{A} U_{sai} \\ -\frac{\partial g}{\partial x}(L, s) P_{sai} - g(L, s) \frac{\rho_0 s + A \cdot R}{A} U_{sai} \end{pmatrix}$$

Isto pode ser escrito na forma,

$$\begin{pmatrix} P_{ent} \\ U_{ent} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{sai} \\ U_{sai} \end{pmatrix} = \mathbf{K} \begin{pmatrix} P_{sai} \\ U_{sai} \end{pmatrix} \quad (133)$$

Onde os parâmetros  $K_{ij}$  são análogos aos parâmetros  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  das matrizes de transmissão dos quadropolos, utilizadas para descrever conexões em cascata (por exemplo, em linhas de transmissão) Os valores resultantes são

$$K_{11} = \frac{g(0,s) \frac{\partial h(L,s)}{\partial x} - h(0,s) \frac{\partial g(L,s)}{\partial x}}{\begin{vmatrix} g(L,s) & h(L,s) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(L,s) & \frac{\partial h}{\partial x}(L,s) \end{vmatrix}} \quad (134)$$

$$K_{12} = \frac{\rho_0 s + AR}{A} \frac{g(0,s)h(L,s) - h(0,s)g(L,s)}{\begin{vmatrix} g(L,s) & h(L,s) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(L,s) & \frac{\partial h}{\partial x}(L,s) \end{vmatrix}} \quad (135)$$

$$K_{21} = \frac{-A}{\rho_0 s + AR} \frac{g(0,s) \frac{\partial h(L,s)}{\partial x} - h(0,s) \frac{\partial g(L,s)}{\partial x}}{\begin{vmatrix} g(L,s) & h(L,s) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(L,s) & \frac{\partial h}{\partial x}(L,s) \end{vmatrix}} \quad (136)$$

$$K_{22} = - \frac{\frac{\partial g(0,s)}{\partial x} h(L,s) - \frac{\partial h(0,s)}{\partial x} g(L,s)}{\begin{vmatrix} g(L,s) & h(L,s) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(L,s) & \frac{\partial h}{\partial x}(L,s) \end{vmatrix}} \quad (137)$$

Os coeficientes  $K_{ij}$  são funções de  $s$ , e em geral os casos são muito complexos para seu tratamento analítico mediante fórmulas exatas.

### 3.1.4.2 Caso de um tubo uniforme

Supomos agora um caso particular de um tubo uniforme, com viscosidade e admitância constante ao longo de toda sua longitude para cada valor de  $s$ , isto é,

$$\begin{aligned} A(x, s) &= A_0(s) \\ R(x, s) &= R_0(s) \\ Y(x, s) &= Y_0(s) \end{aligned} \quad (138)$$

Então a equação (127) pode ser escrita como

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = (\rho_0 s + A \cdot R) \left( \frac{s}{\rho_0 c^2} + \frac{Y}{A} \right) P \quad (139)$$

Vamos fazer  $\sigma^2(s) = (\rho_0 s + A \cdot R) \left( \frac{s}{\rho_0 c^2} + \frac{Y}{A} \right)$ . Com isso a equação

(139) se torna

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \sigma^2 P \quad (140)$$

A equação (2.51) admite uma solução geral da forma

$$P(x, s) = C_1 \cosh(\sigma x) + C_2 \sinh(\sigma x) \quad (141)$$

Fazendo com que  $g(x, s) = \cosh(\sigma x)$  e  $h(x, s) = \sinh(\sigma x)$ , podemos calcular

$K_{ij}$

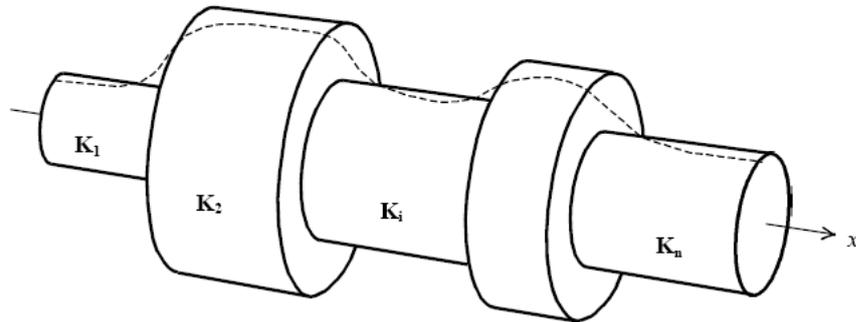
$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\sigma L) & \frac{\rho_0 s + AR}{A\sigma} \sinh(\sigma L) \\ \frac{A\sigma}{\rho_0 s + AR} & \cosh(\sigma L) \end{pmatrix} \quad (142)$$

Neste caso simples foi possível obter a expressão exata para a matriz de transmissão quando se conhecem  $A$ ,  $R$ , e  $Y$ . Em um caso ideal em que  $R = 0$  e

$Y = 0$  (resultado em  $\sigma = \frac{s}{c}$ ) os coeficientes obtidos não são funções racionais.

### 3.1.4.3 Decomposição do trato vocal em tubos uniformes

Apesar do trato vocal não ser uniforme, pode-se analisar de uma maneira simplificada, reduzindo a um certo número de componentes uniformes conectadas uma após a outra como na figura abaixo.



**Figura 13** – Aproximação do trato vocal mediante uma conexão de tubos uniformes cada um com sua matriz de transmissão  $\mathbf{K}_i$

Se chamarmos  $K_1 \dots K_n$  as matrizes de transmissão de cada segmento, podemos obter a matriz total como o produto matricial de todas elas, pois temos uma continuidade do sinal.

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{K}_2 \cdot \dots \cdot \mathbf{K}_n \quad (143)$$

Isto simplifica notavelmente a análise nos casos que seja possível decompor um condutor em seções aproximadamente constantes. A equação (143) é também aplicável quando as seções são variáveis.

## 4 A voz humana

A produção da voz se inicia com uma contração-expansão dos pulmões, criando, assim, uma diferença entre a pressão do ar nos pulmões e a pressão do ar na frente da boca, causando um escoamento de ar. O escoamento passa pela laringe e, antes homogêneo, vai se transformando em uma série de pulsos (conhecidos como *trem de pulsos* ou *sinal glotal*) de ar que chegam à boca e na cavidade nasal. Os pulsos de ar são modulados pela língua, pelos dentes e lábios; isto é, pela geometria destes órgãos, de forma a produzir o que conhecemos por voz. O sinal glotal, porém, possui propriedades importantes de difícil reprodução que estão intimamente ligadas às características anatômicas e fisiológicas da laringe (CATALDO, 2004).

Atualmente, a teoria mais aceita para a descrição do sinal glotal (isto é, o aparecimento do trem de pulsos) é a teoria chamada de aerodinâmica - mioelástica, proposta por van den Berg (1958) e Titze (1980). Esta teoria postulou que o movimento de abrir e fechar as cordas vocais são regidos pelas propriedades mecânicas dos tecidos musculares que constituem, principalmente, as cordas vocais e pelas forças aerodinâmicas que se distribuem ao longo da laringe durante a fonação. A ação neural consiste apenas em aproximar as cordas vocais de tal forma que a superfície destas vibre.

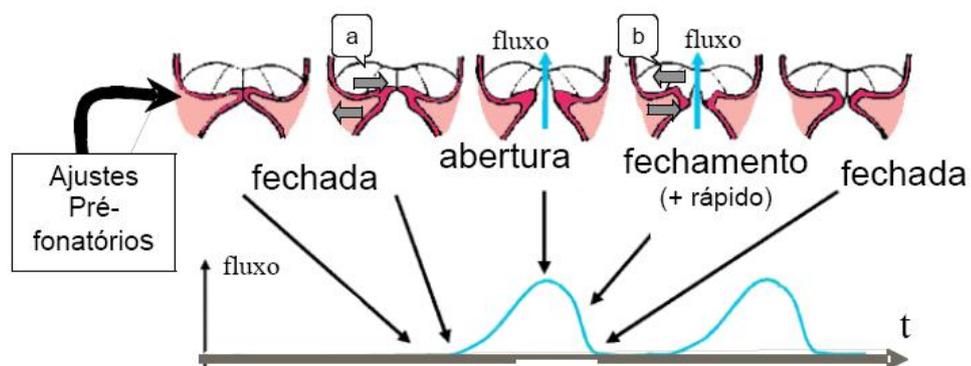
Para facilitar o estudo do sistema de produção da voz, normalmente o reduzimos a quatro grupos distintos, em relação à onda sonora que é produzida ou modificada pelos órgãos. O primeiro grupo, que chamaremos de grupo da *respiração*, corresponde à produção de um fluxo de ar; que se inicia nos pulmões e termina no final da traquéia. Na faringe, encontram-se os órgãos do segundo grupo, responsáveis pela produção do sinal glotal, que chamaremos de grupo da *vocalização*. O sinal glotal é um sinal de baixa intensidade, que necessita ser amplificado e que determinadas componentes harmônicas sofram "ênfase", de maneira que os fonemas sejam caracterizados. Chamaremos este grupo de grupo de *ressonância*. Esse fenômeno ocorre na passagem do ar pelo *trato vocal* (porção que vai da laringe até a boca). Finalmente, as ondas de pressão são irradiadas

quando chegam à boca. A esse grupo chamaremos de grupo da *irradiação*. Estaremos mais interessados em estudar a modelagem matemática do terceiro grupo, ou seja, a amplificação do sinal (CATALDO, 2004).

#### 4.1 O pulso vocal

Para compreender as características do espectro da *fonte* sonora é importante discutir a vibração das pregas vocais. Cada prega é uma dobra de tecidos que, mecanicamente, comporta-se como um *corpo* (músculo e ligamento) relativamente rígido e pesado, revestido por uma *cobertura* (tecido conjuntivo e epitelial) flexível (HIRANO, 1981). O fluxo aéreo é modulado à medida que o espaço entre as pregas vocais é aberto e fechado ciclicamente, de acordo com a deformação da camada de cobertura (Figura 14).

A vibração glótica dá-se de forma aproximadamente periódica, mas a velocidade do fechamento de cada ciclo é maior que a velocidade de abertura. Assim, o fluxo é inclinado para a direita. Se os pulsos glóticos fossem perfeitamente senoidais, haveria apenas uma componente harmônica de Fourier e não haveria excitação de múltiplos formantes, não sendo possível, por exemplo, a produção de vogais diferentes. Devido à *assimetria* do pulso, o espectro passa a possuir não apenas a componente fundamental, mas uma *série harmônica* onde a frequência de cada termo é um múltiplo inteiro.



**Figura 14** – Ciclo fonatório na voz modal adaptado por HIRANO 1981 O movimento do abrir e fechar da glote.

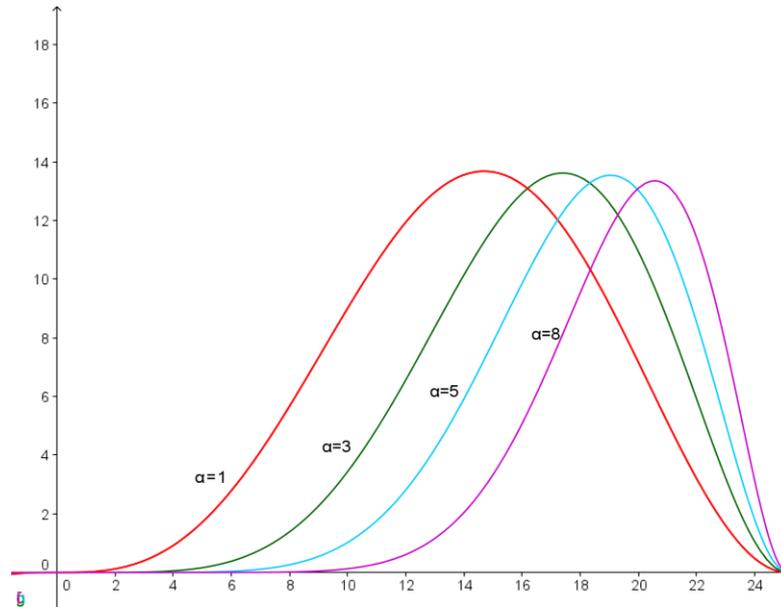
A partir da esquerda: as pregas vocais estão inicialmente fechadas e, dependendo da frequência e intensidade do som a ser produzido, têm ajustes pré-fonatórios adequados de *pressão subglótica* (pressão abaixo da glote provocada pelo ar dos pulmões, HENRIQUE, 2002), a *tensão longitudinal*, *aproximação da parte posterior das pregas vocais* e a *força de compressão na parte medial*. Com o esforço expiratório e com a glote ainda fechada, a *pressão intraglótica* aumenta enquanto as bordas inferiores afastam-se, acumulando energia potencial elástica na camada de cobertura. Com o aumento da *pressão intraglótica*, as bordas superiores finalmente separam e o ar flui pela glote. O fluxo de ar leva a uma queda na pressão intraglótica que ocorre num momento em que as bordas inferiores estão muito comprimidas. Isto resulta numa fase de fechamento mais rápida que a de abertura, causando uma assimetria na forma dos pulsos glóticos. O ciclo repete-se em uma frequência fundamental. Os detalhes (a) e (b) mostram a oposição entre os sentidos dos movimentos das bordas superiores e inferiores (VIEIRA, 2002).

#### 4.1.1 Modelagem matemática do pulso

Considerando que a cada ciclo a glote abre devagar e fecha muito rápido, isso irá fazer com que o trem de pulsos de onda de pressão tenha um ataque lento e uma queda rápida como na figura 14. No domínio do tempo, uma boa função que pode representar esse fenômeno é

$$P(t) = P_0 \left( \frac{t}{T} \right)^\alpha \operatorname{sen}^2 \left( \frac{2\pi}{T} t \right) \quad (144)$$

Onde essa função tem período  $T$ . O parâmetro  $\alpha$  nos diz se o ataque é lento ou rápido. Quanto maior  $\alpha$ , mais inclinado será o pulso, caso  $\alpha$  seja nulo a onda não terá inclinação. Vamos estudar quatro valores de  $\alpha$ .



**Figura 15** – Comparação entre as formas do pulso vocal de acordo com a variação do parâmetro  $\alpha$

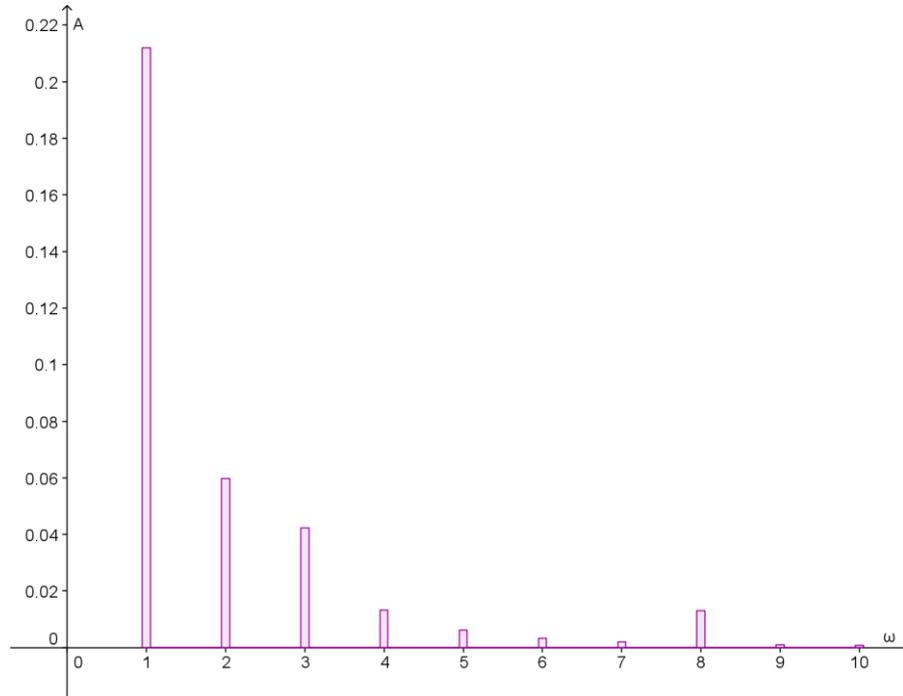
Para  $\alpha = 1$  podemos calcular os coeficientes de Fourier da equação (144)

$$a_0 = \frac{2P_0}{T^2} \int_0^T t \operatorname{sen}^2 \left( \frac{2\pi}{T} t \right) dt = 0,5P_0$$

$$a_n = \frac{2P_0}{T^2} \int_0^T t \operatorname{sen}^2 \left( \frac{2\pi}{T} t \right) \cos \left( \frac{2\pi n}{T} t \right) dt$$

$$b_n = \frac{2P_0}{T^2} \int_0^T t \operatorname{sen}^2 \left( \frac{2\pi}{T} t \right) \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi n}{T} t \right) dt$$
(145)

Os cálculos algébricos para  $a_n$  e  $b_n$  foram feitos da maneira computacional usando o software GEOGEBRA. Construímos abaixo baseado na série de Fourier, o gráfico frequência  $\omega$  versus amplitude relativa.



**Figura 16** – Gráfico obtido da série de Fourier da função  $P(t)$  para  $\alpha = 1$ . Vemos irregularidade no oitavo harmônico. No eixo horizontal temos as frequências em unidades de  $\omega$  e no eixo vertical temos as amplitudes calculadas de acordo com a equação (145)

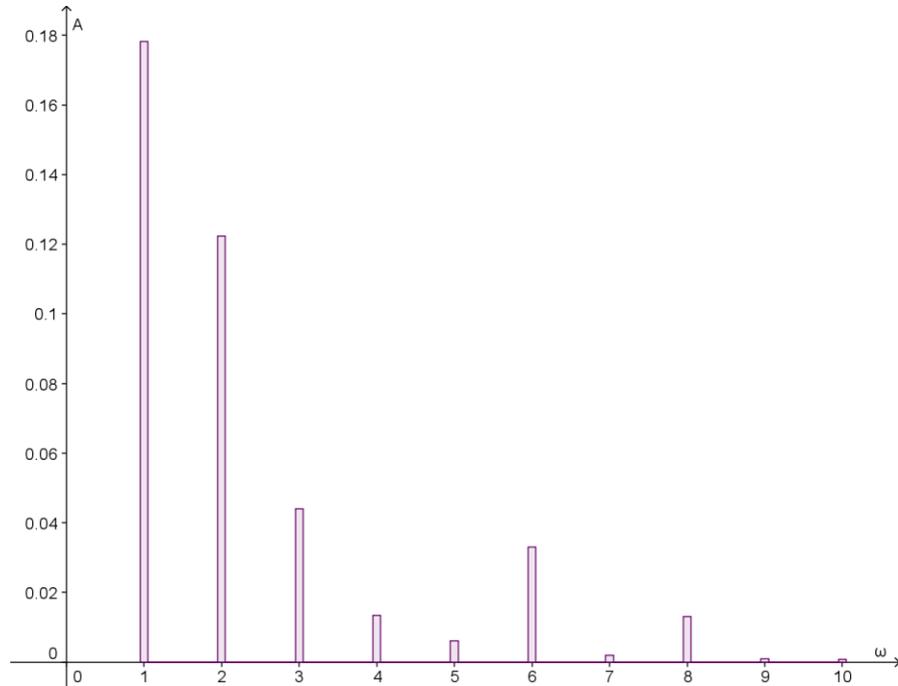
Para  $\alpha = 3$ , fazendo o mesmo procedimento

$$a_0 = \frac{2P_0}{T^4} \int_0^T t^3 \operatorname{sen}^2 \left( \frac{2\pi}{T} t \right) dt = 0,231P_0$$

$$a_n = \frac{2P_0}{T^4} \int_0^T t^3 \operatorname{sen}^2 \left( \frac{2\pi}{T} t \right) \cos \left( \frac{2\pi n}{T} t \right) dt \quad (146)$$

$$b_n = \frac{2P_0}{T^4} \int_0^T t^3 \operatorname{sen}^2 \left( \frac{2\pi}{T} t \right) \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi n}{T} t \right) dt$$

Obtemos o gráfico



**Figura 17** – Gráfico obtido da série de Fourier da função  $P(t)$  para  $\alpha = 3$ . Vemos irregularidades nos sexto e oitavo harmônicos.

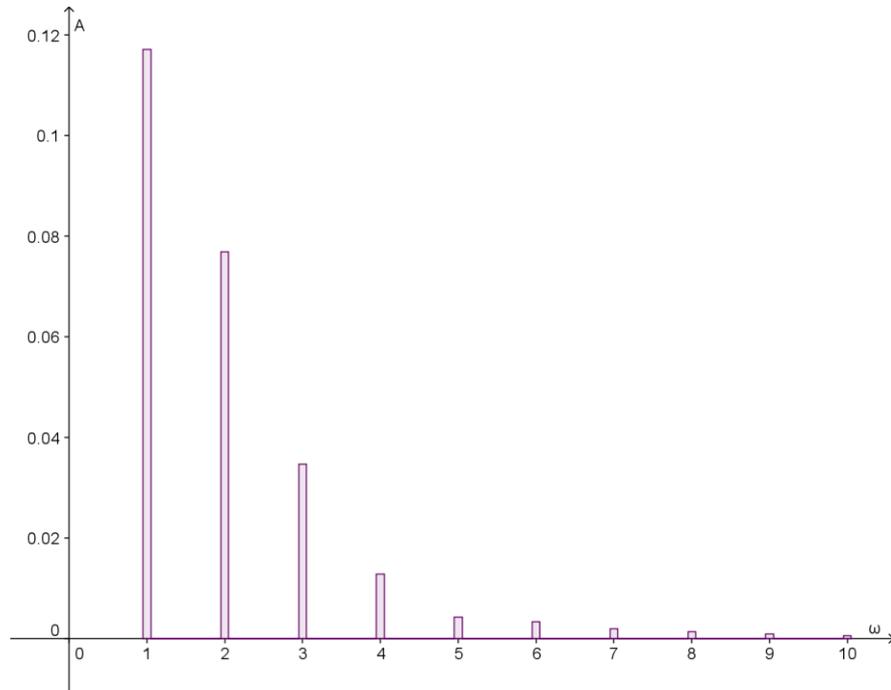
Para  $\alpha = 5$

$$a_0 = \frac{2P_0}{T^6} \int_0^T t^5 \operatorname{sen}^2\left(\frac{2\pi}{T}t\right) dt = 0,1374P_0$$

$$a_n = \frac{2P_0}{T^6} \int_0^T t^5 \operatorname{sen}^2\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt \quad (147)$$

$$b_n = \frac{2P_0}{T^6} \int_0^T t^5 \operatorname{sen}^2\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt$$

Obtendo

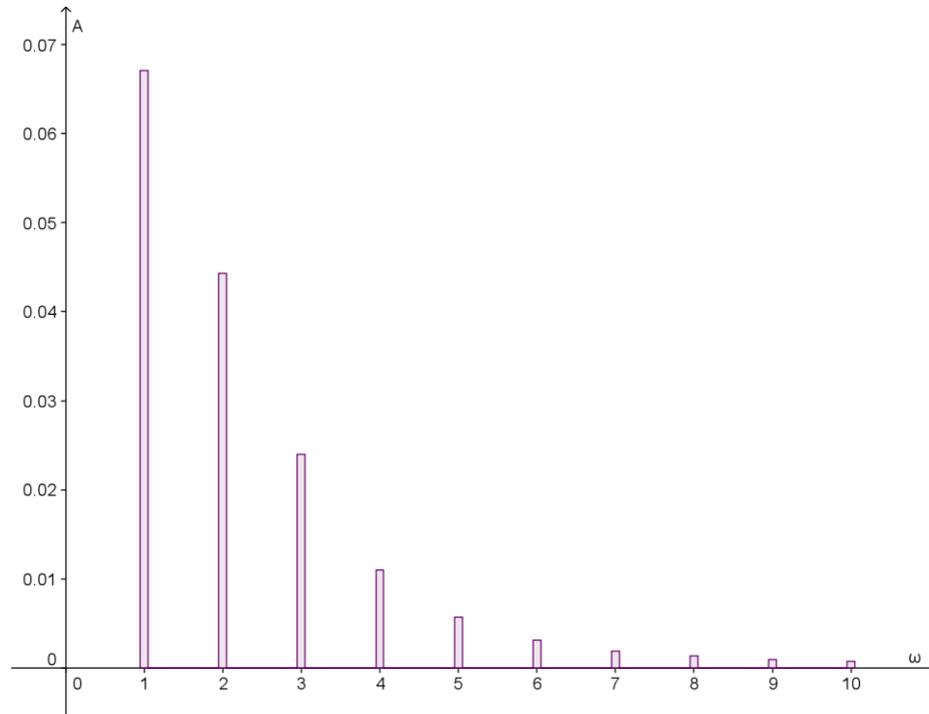


**Figura 18** – Gráfico obtido da série de Fourier da função  $P(t)$  para  $\alpha = 5$ .

Para  $\alpha = 8$

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{2P_0}{T^9} \int_0^T t^8 \operatorname{sen}^2\left(\frac{2\pi}{T}t\right) dt = 0,0723P_0 \\
 a_n &= \frac{2P_0}{T^9} \int_0^T t^8 \operatorname{sen}^2\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt \\
 b_n &= \frac{2P_0}{T^9} \int_0^T t^8 \operatorname{sen}^2\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt
 \end{aligned} \tag{148}$$

Finalmente



**Figura 19** – Gráfico obtido da série de Fourier da função  $P(t)$  para  $\alpha = 8$ .

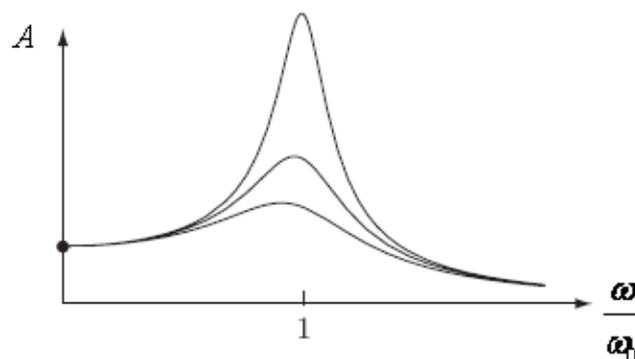
Temos quatro funções que representam o sinal glotal. As que mais se aproximam da realidade são aquelas que  $\alpha = 5$  e  $\alpha = 8$ , pois se observarmos os gráficos do domínio espectral dessas funções vemos que não há irregularidade a partir do quinto harmônico o que acontece com as funções as quais  $\alpha = 1$  e  $\alpha = 3$ . Na próxima seção vamos ver o que o efeito da ressonância faz com esse sinal.

## 4.2 Os formantes

Vamos agora partir para a amplificação do sinal glotal, que no nosso caso é a função definida pela equação (144). Entretanto para tal devemos recorrer ao modelo *fonte-filtro* (HENRIQUE, 2002), que é construído através dos *formantes* que são nada mais do que o valor nominal da frequência central da zona de ressonância em questão. Nessa zona de frequência central se encontra a maior concentração de energia. Podemos entender melhor o conceito de formante usando o exemplo do oscilador harmônico unidimensional forçado. A partir da função (HALLIDAY,1992)

$$R(\omega) = \frac{A}{\sqrt{m^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + b^2 \omega^2}} \quad (149)$$

Onde as constantes  $m$  e  $b$  são respectivamente a massa do oscilador e uma constante de amortecimento do meio. Podemos construir o gráfico de ressonância desse oscilador



**Figura 20** – A variação da amplitude de um oscilador harmônico forçado, em função da frequência angular  $\omega$  (variável) da força aplicada. As três curvas correspondem a níveis diferentes de amortecimento.

Analisando a figura 20 vemos que quanto maior é o amortecimento do meio onde se encontra o oscilador, a curva vai se tornando mais larga. Observamos

também que o gráfico possui um máximo quando a frequência da força externa é igual a da frequência natural. Esse máximo é o único formante no caso do oscilador harmônico. Para a emissão cantada da vogal ‘a’ uma mulher com voz do tipo soprando em uma frequência específica (por exemplo, uma nota musical) o trato vocal dela apresenta três ou quatro frequências importantes que são justamente os formantes do seu trato vocal.

A equação para o conjunto de formantes será a soma de três ou quatro expressões do tipo da equação (149). Logo

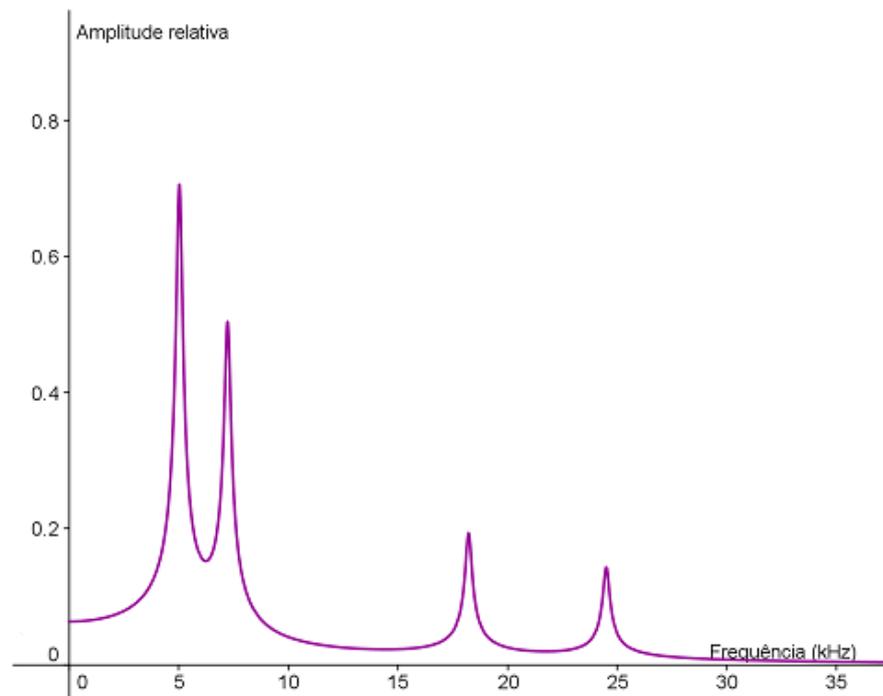
$$R(\omega) = \frac{A_1}{\sqrt{M^2(\omega^2 - \omega_1^2)^2 + B^2\omega^2}} + \frac{A_2}{\sqrt{M^2(\omega^2 - \omega_2^2)^2 + B^2\omega^2}} + \frac{A_3}{\sqrt{M^2(\omega^2 - \omega_3^2)^2 + B^2\omega^2}} + \frac{A_4}{\sqrt{M^2(\omega^2 - \omega_4^2)^2 + B^2\omega^2}} \quad (150)$$

Onde  $M$  e  $B$  são constantes que estão relacionadas com a inércia e o amortecimento, respectivamente. A primeira é um parâmetro livre, mas a segunda deve ser escolhida de forma que seu valor seja muito pequeno. Segundo FANT (1960) a teoria *fonte-filtro* considera a fonte como sendo o som laríngeo resultante da variação no tempo do fluxo glótico, e o trato vocal faz a função de um filtro “selecionando” as frequências que serão radiadas (TITZE, 1994).

#### 4.2.1 A filtragem

De toda a informação contida no som laríngeo, o trato vocal concentra a energia acústica essencialmente nas regiões espectrais correspondentes aos formantes. Este processo resulta numa grande simplificação da informação que será processada pelo sistema auditivo (TITZE, 1994). Devemos ter os valores das frequências de cada formante. Mas seus valores mudam de acordo com o tipo de voz. Por isso **vamos encontrar a forma de onda da vogal “a” cantada por uma voz feminina tipo soprano na frequência da nota lá.**

Segundo Jean Piché & Peter J. Nix, 1994-97, as freqüências dos formantes para o tipo de voz em questão são aproximadamente 800 Hz para o primeiro, 1150 Hz para o segundo, 2900 Hz para o terceiro e 3900 Hz para o quarto. Multiplicando esses valores por  $2\pi$  e substituindo esses valores na equação (150) nos valores de  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$ ,  $\omega_4$ , e os valores das amplitudes de ressonância no nosso modelo teórico são respectivamente  $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 1$ , podemos construir o gráfico de ressonância que nos mostra os quatro formantes

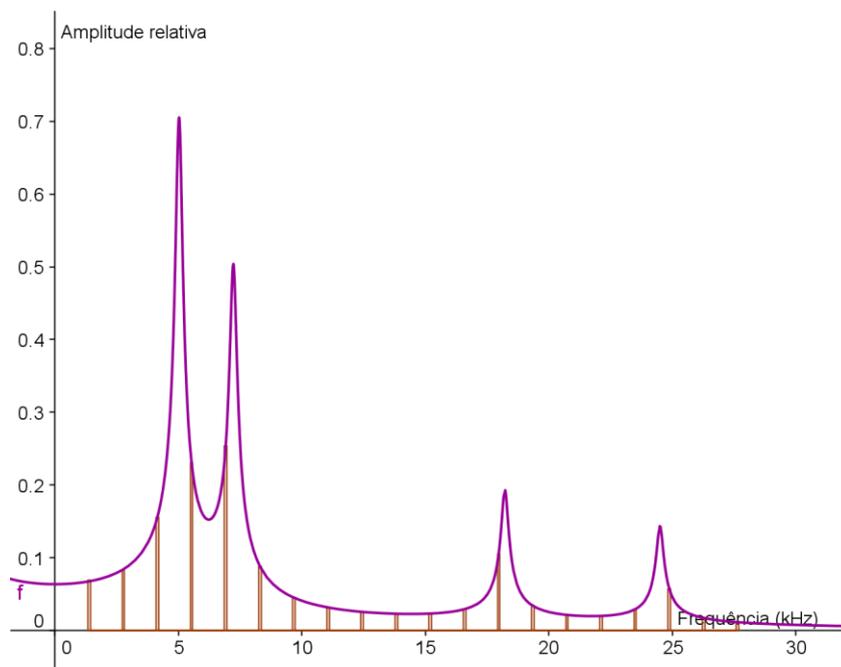


**Figura 21** – Gráfico de ressonância do trato vocal. Vemos de forma destacada os quatro formantes.

Nosso trabalho agora é filtrar as freqüências da figura 19. Para tal vamos aplicar os valores de cada uma delas individualmente na equação do filtro (eq. 150) para uma freqüência específica que segundo TELES (2008), será a da nota lá (220 Hz) e descobriremos as novas amplitudes filtradas. A seguir temos uma tabela com os valores das freqüências e amplitudes após a filtragem, a partir desses dados construímos um novo gráfico relacionando essas grandezas.

**Tabela 1** – Valores das freqüências e amplitudes relativas filtradas

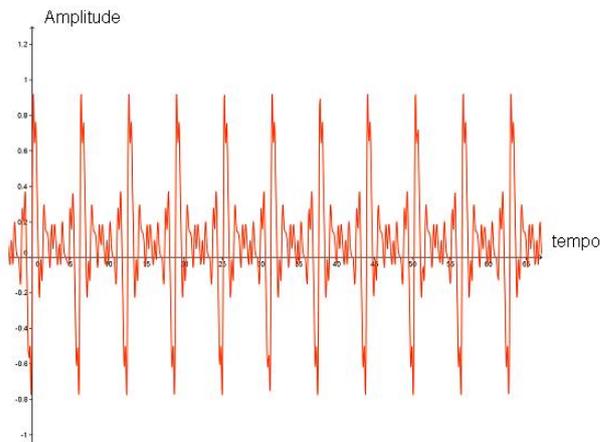
Freqüências (kHz)	Amplitudes
1,3823	0,0694
2,7646	0,0839
4,1469	0,1559
5,5292	0,231
6,9115	0,2536
8,2938	0,0883
9,6761	0,0449
11,0584	0,0314
12,4407	0,0253
13,823	0,0228
15,2053	0,0231
16,5876	0,0291
17,9699	0,1052
19,3522	0,0337
20,7345	0,0212
22,1168	0,0198
23,4991	0,0289
24,8814	0,0568
26,2637	0,017
27,646	0,0112

**Figura 22** – Gráfico das freqüências filtradas nos dando novas amplitudes dos coeficientes de Fourier.

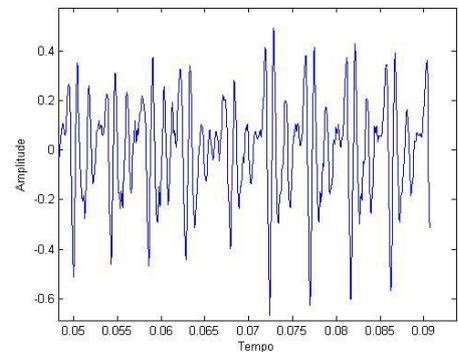
Uma vez que sabemos as novas amplitudes (filtradas) podemos determinar a forma de onda que será irradiada pela boca usando novamente a análise de Fourier. A função que iremos usar para a forma de onda é

$$P(t) = 0,0723P_0 + P_0 \sum_{n=1}^{20} a'_n \text{sen} \omega_n t \quad (151)$$

A seguir temos o gráfico no domínio do tempo que representa a forma de onda, claro que não obteremos o formato ideal até porque só tomamos vinte freqüências, que são vinte termos da série que escrevemos somente em termos de senos. Mas isso nos dá uma boa aproximação do som de um “a” cantado de uma voz feminina tipo soprano. Comparando o resultado teórico (figura 23) com o resultado experimental (figura 24), obtido por CATALDO, 2004 vemos que nosso modelo tem uma boa aproximação da realidade.



**Figura 23** – Forma de onda aproximada da vogal “a” cantada por uma voz feminina na freqüência da nota lá (220 Hz)



**Figura 24** – apenas um trecho do sinal-destaque para a periodicidade do sinal de voz correspondente à vogal ‘a’ (sustentada). Segundo Cataldo, 2004.

## 5 CONCLUSÃO

Neste trabalho, propusemos uma modelagem matemática para a produção da voz humana, incluindo uma parametrização para a forma da onda da voz humana e o uso de equações de filtros ressonantes para representar os formantes da voz humana.

Ao compararmos os quatro modelos para diferentes valores de alfa, percebemos que a forma do pulso é um pouco assimétrica devido à periodicidade de abertura e fechamento da glote. Usando a análise de Fourier foram construídos quatro gráficos amplitude versus frequência. Para  $\alpha = 1$  vemos que à medida que as frequências aumentam, as amplitudes delas caem com exceção da oitava que tem um leve aumento. Já para  $\alpha = 3$  vemos que há um aumento abrupto nas sexta e oitava frequências. Tanto para  $\alpha = 5$  e  $\alpha = 8$  as amplitudes das frequências decaem normalmente mostrando que esses são modelos mais aceitáveis para o sinal glotal.

Após encontrar uma representação adequada para a forma do pulso vocal e decompô-lo em suas componentes espectrais, foi encontrada uma representação para os formantes, baseada nas equações para filtros ressonantes. Estes filtros modificam as amplitudes originais das componentes espectrais do pulso glótico.

Como exemplo, aplicamos esse conjunto de processos à vocalização da vogal “a” por um indivíduo do sexo feminino. A forma de onda encontrada mostrou-se uma boa aproximação do som vocálico “a” sustentada em certo intervalo de tempo.

## REFERÊNCIAS

ARFKEN G. B, WEBBER H. J. **Mathematical Methods for Physicists**, 2005, Elsevier.

BUTKOV, E. **Física Matemática**, LTC Editora, RJ. 1988.

CATALDO, E. **Uma discussão sobre modelos mecânicos de laringe para síntese de vogais**, Engevista, v.6, n.1, pp.47-57, Abr. 2004.

FANT, G. (1960), **Acoustic Theory of Speech Production**, The Hague, Mouton.

FREDERICO, M. **Acústica do Trato Vocal**.

**Geogebra**. Disponível em [www.baixaki.com.br/busca.asp?q=geogebra](http://www.baixaki.com.br/busca.asp?q=geogebra)

HALLIDAY, D., RESNICK, R., KRANE, K. S., **Física** Volume 1, 6a. Edição, 1992.

HENRIQUE, L. L., **Acústica Musical**. Fundação Calouste Gulbenkian, 2002.

HIRANO, M. (1981). **Clinical Examination of Voice**, Springer-Verlag, New York.

HOLTON, J. R. **Introduction to dynamic meteorology**, 2004, Fourth edition.

Jean Piché & Peter J. Nix, 1994-97. Disponível em: [ecmc.rochester.edu/onlinedocs/C.sound/Appendices/tables3.html](http://ecmc.rochester.edu/onlinedocs/C.sound/Appendices/tables3.html)

LAZZARINI, VICTOR E. P. **Elementos da Acústica**. 1998

**Math type 6**. Disponível em [www.baixaki.com.br/busca.asp?q=math+type](http://www.baixaki.com.br/busca.asp?q=math+type)

SUNDBERG, 1987 **The Science of the Singing Voice**, Dekalb, Northern Illinois University Press.

SYMON, K. R., **Mecânica**, Editora Campus Ltda. 1981

TELES V. C. **Análise Acústica dos Formantes e das Medidas de Perturbação do Sinal Sonoro em Mulheres Sem Queixas Vocais, Não Fumantes e Não Etilista**, 2008.

TITZE, I. R, 1980, **Comments on the myoelastic-aerodynamic theory of phonation**, The Journal of the Acoustical Society of America, v.23, pp.495-510.

TITZE, Ingo R. (1994), **Principles of Voice Production**, EngleWood Cliffs, Prentice-Hall

VAN DEN BERG, 1958, **Myoelastic-aerodynamic theory of voice production**, Journal of Speech and Hearing Research, v.1, pp.227-244.

VIEIRA, N. M., I Seminário de Música, Ciência e Tecnologia: Acústica Musical, **Uma introdução à acústica da voz cantada.**