



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ

KÍLVIA MARIA VIANA ÁVILA

PÊNDULOS PARAMÉTRICOS: PONTO DE
SUSPENSÃO OSCILANTE E COMPRIMENTO
VARIÁVEL

FORTALEZA - CEARÁ

2012

KÍLVIA MARIA VIANA ÁVILA

**PÊNDULOS PARAMÉTRICOS: PONTO DE SUSPENSÃO OSCILANTE E
COMPRIMENTO VARIÁVEL**

Monografia apresentada no Curso de Graduação em Física do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Marcony Silva Cunha

FORTALEZA - CEARÁ

2012

A958p

Ávila, Kílvia Maria Viana.

PÊNDULOS PARAMÉTRICOS: PONTO DE SUSPENSÃO OSCILANTE E COMPRIMENTO VARIÁVEL / Kílvia Maria Viana Ávila. – 2012.

63 f.:il.color ; enc. ; 30cm.

Monografia (Graduação) - Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Curso de Física, Fortaleza, 2012.

Orientação: Prof. Dr. Marcony Silva Cunha .

1. Pêndulo paramétrico. 2. Equação de Mathieu. 3. Equação confluyente de Heun. I. Título.

CDD:530

KÍLVIA MARIA VIANA ÁVILA

**PÊNDULOS PARAMÉTRICOS: PONTO DE SUSPENSÃO OSCILANTE E
COMPRIMENTO VARIÁVEL**

Monografia apresentada no Curso de Graduação em Física do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel.

Aprovada em: 20/07/2012

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcony Silva Cunha
Universidade Estadual do Ceará – UECE
Orientador

Prof. Dr. Kleiton do Carmo Mendes
Universidade Estadual do Ceará – UECE

Prof. Dr. Hugo R. Christiansen
Universidade do Vale do Acaraú - UVA

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me amparado em todos os momentos da minha vida, me ajudando, orientando e incentivando a seguir. A Ele meus eternos agradecimentos.

A toda a minha família, pelo incentivo e apoio durante minha graduação, em particular aos meus pais, Antônio e Mercês.

Ao professor Dr. Marcony Silva Cunha pela orientação e paciência que tanto contribuíram para realização deste trabalho.

Aos amigos e colegas que conheci na UECE ao longo destes anos, pela ajuda e amizade. Em especial, aos amigos Bruno de Abreu, Andre Victor, Daniel Lima, Otávio Lavor e Marco Antônio.

Ao meu amigo José Gadelha, pelo imprescindível auxílio técnico no emprego do LaTeX.

A Sâmia Dávila pela amizade e apoio nessa monografia.

À todos os professores que contribuíram para minha formação durante este curso. Em especial, Alexandre Araújo Costa, João Bosco Verçosa Leal Junior, Kleiton do Carmo Mendes, Marcony Silva Cunha, Monica Figueiredo Lenz César, Silas Lenz César, dentre outros.

À Universidade Estadual do Ceará, por intermédio do Departamento de Física, pela oportunidade de realizar este curso.

Agradeço a todos que colaboraram de maneira direta ou indireta para a conclusão deste trabalho.

“Algo é só impossível até que alguém duvide e acabe provando o contrário.”

Albert Einstein

RESUMO

Em sistemas oscilantes, quando um dos parâmetros característicos varia com o tempo de forma a provocar uma oscilação, dizemos que o sistema sofre uma oscilação paramétrica. Neste trabalho estudaremos a dinâmica de dois tipos de osciladores paramétricos: pêndulo com ponto de suspensão oscilante e o pêndulo com comprimento variável. Mostraremos que, para pequenas oscilações, a equação do movimento pode ser descrita pela equação de Mathieu. Adicionalmente, mostraremos que a equação de Mathieu para o movimento é um caso particular da equação confluyente de Heun. Utilizando métodos numéricos, exibiremos gráficos da equação de movimento dos pêndulos verificando que, para pequenas oscilações, a solução confluyente de Heun (ou a função de Mathieu) é satisfatória para descrever o movimento nessas condições. Dependendo dos parâmetros utilizados mostraremos que o sistema pode ser regular ou irregular.

Palavras-Chave: Pêndulo paramétrico. Equação de Mathieu. Equação confluyente de Heun. .

ABSTRACT

In oscillating systems, when one of the characteristic parameters varies with time so as to cause an oscillation, we say that the system undergoes a parametric oscillation. In this work, we study the dynamics of two types of parametric oscillators: pendulum with oscillating suspension point and the pendulum with variable length. We show that for small oscillations, the equation of motion can be described by the Mathieu equation. Additionally, we show that the Mathieu equation for the motion is a special case of confluent Heun equation. Using numerical methods, we display graphs of the motion equation of pendulums noting that for small oscillations, the solution of confluent Heun (or Mathieu function) is satisfactory to describe the movement in these conditions. Depending on the parameters used we show that the system can be either regular or chaotic.

Keywords: Parametric pendulum. Mathieu equation. Confluent Heun equation. .

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Energia potencial $U(x)$ devido a uma força conservativa $F(x)$	14
Figura 2	Sistema Massa-Mola.	15
Figura 3	Energia mecânica total do oscilador harmônico e seus constituintes U e T	17
Figura 4	Pêndulo simples.	17
Figura 5	Os três tipos de movimento do oscilador amortecido.	19
Figura 6	Movimento do oscilador amortecido subcrítico.	20
Figura 7	Movimento do oscilador amortecido crítico.	21
Figura 8	Movimentos do oscilador com amortecimento supercrítico.	22
Figura 9	Gráfico da amplitude versus frequência de um oscilador amortecido forçado.	23
Figura 10	A ação de balançar em um balanço.	24
Figura 11	Líquido em recipiente com movimento periódico na direção vertical.	25
Figura 12	Circuito LC com a capacitância variando com o tempo.	25
Figura 13	Navio APL China.	28
Figura 14	Pêndulo com comprimento variável oscilando.	28
Figura 15	Pêndulo com ponto de suspensão oscilante.	30
Figura 16	Sistema de coordenadas elíptico.	34

Figura 17	Funções de Mathieu Angular	43
Figura 18	Funções de Mathieu Radial	44
Figura 19	Funções ce_m (à esquerda) e se_m (à direita) com $q = 1$	45
Figura 20	Funções ce_1 (à esquerda) e se_1 (à direita) com $q \in \{0.1, 1, 5, 10, 15\}$.	45
Figura 21	Funções Je_0 (a direita) e Jo_1 (a esquerda) com $q \in \{1, 2, 3, 4\}$.	46
Figura 22	Estabilidade da equação de Mathieu: regiões estáveis e instáveis (hachurada).	47
Figura 23	Soluções da equação de movimento do pêndulo de comprimento variável.	49
Figura 24	Soluções da equação de movimento do pêndulo com ponto de suspensão oscilante.	50
Figura 25	Comparação entre a evolução temporal da solução numérica da equação do pêndulo com ponto de suspensão oscilante (gráfico (a)) e a solução da equação de Mathieu (gráfico (b)).	51
Figura 26	Pêndulo com ponto de suspensão oscilante	57
Figura 27	Pêndulo com comprimento variável oscilando	59
Figura 28	Evolução temporal de pêndulo com ponto de suspensão oscilante. No gráfico I temos um comportamento estável. No gráfico II temos um comportamento caótico.	61
Figura 29	Comparação entre a evolução temporal obtida através da solução de equação de Mathieu (gráfico I) e solução numérica da equação do pêndulo com comprimento variável (gráfico II).	62

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	OSCILAÇÕES HARMÔNICAS	14
2.1	Oscilações Harmônicas	14
2.1.1	Oscilador harmônico simples	15
2.1.1.1	Pêndulo simples	17
2.2	Oscilações Amortecidas	18
2.2.1	Amortecimento Subcrítico	20
2.2.2	Amortecimento Crítico	20
2.2.3	Amortecimento Supercrítico	21
2.3	Oscilações Forçadas Amortecidas	22
2.3.1	Ressonância	23
3	OSCILAÇÕES PARAMÉTRICAS	24
3.1	Equação do movimento	26
3.2	Ressonância Paramétrica	27
3.3	Pêndulo Paramétrico	28
3.3.1	Pêndulo com comprimento variável	28
3.3.2	Pêndulo com ponto de suspensão oscilante	30
4	EQUAÇÃO DE MATHIEU	33
4.1	Equação de Mathieu	33
4.2	Origem da equação de Mathieu	33
4.2.1	Forma algébrica da equação de Mathieu	36
4.3	Equação de Mathieu como um caso particular da Equação Confluente de Heun	36
4.4	Funções de Mathieu	38
4.5	Estabilidade das soluções de Mathieu	46
5	EQUAÇÃO DE MATHIEU PARA DESCREVER A DINÂMICA DOS PÊNDULOS PARAMÉTRICOS	48
5.1	Equação de Mathieu para descrever a dinâmica dos pêndulos paramétricos	48

6	CONCLUSÕES.....	52
	REFERÊNCIAS.....	53
	APÊNDICE A - A DINÂMICA DOS PÊNDULOS PARAMÉTRICOS DESCRITA PELA EQUAÇÃO CONFLUENTE DE HEUN.....	56

1 INTRODUÇÃO

As oscilações harmônicas são bastante estudadas nos cursos de mecânica básica devido sua importância e aplicabilidade em praticamente todas as áreas da Física. O pêndulo simples é o sistema ideal normalmente utilizado para explorar as oscilações amortecidas, forçadas, acopladas, entre outras. Contudo existe um outro tipo de oscilação, dificilmente abordadas em livros-texto da graduação, com exceção de Landau e Lifchitz (2004), que são as chamadas oscilações paramétricas. Este trabalho tem como objetivo estudar e divulgar essa classe de oscilações.

Uma oscilação paramétrica é caracterizada quando a ação de uma força externa sobre o oscilador harmônico resulta em uma variação temporal dos parâmetros do sistema (LANDAU; LIFCHITZ, 2004). Por exemplo, no pêndulo simples, quando aplicamos uma força que varia o comprimento periodicamente, estamos provocando oscilações paramétricas no sistema. Esse tipo de oscilação encontra-se também em circuitos elétricos investigados por Mandelstam e Papalexi (1934).

Diferente dos osciladores harmônicos, a equação de movimento dos sistemas paramétricos é formada por equações diferenciais com coeficientes variando no tempo, em geral, de forma periódica (NAYFEH; MOOK, 1995). Na maioria dos fenômenos, temos equações não lineares. Contudo, em alguns casos, podemos linearizar essas equações tornando-as mais simples, como é o caso da equação de Hill ou Mathieu.

Antes de explorar propriamente as oscilações paramétricas, no segundo capítulo, inicia-se uma revisão dos principais tipos de osciladores harmônicos estudados na literatura. São abordados os osciladores harmônicos livres, amortecidos e forçados, deduzindo as equações de movimento e enfatizando suas características principais. Essa revisão é importante para se fazer uma comparação com as oscilações paramétricas.

No terceiro capítulo se estuda de fato as oscilações paramétricas. Define-se e mostra-se diversos exemplos de osciladores paramétricos. Em seguida, são escolhidos dois exemplos principais: pêndulo com comprimento variável e pêndulo com ponto de suspensão oscilante. Utiliza-se o formalismo lagrangeano para deduzir a equação de movimento desses dois sistemas.

Já no capítulo quatro, estuda-se a equação diferencial de Mathieu. Sua formação é deduzida a partir da equação de Helmholtz em coordenadas elípticas. Mostra-se, utilizando uma mudança de variáveis, que a forma algébrica de Mathieu é um caso particular da equação de Heun. Apresenta-se o estudo de sua estabilidade pelo Teorema de Floquet e suas principais propriedades.

Para o capítulo final, transforma-se as equações de movimento dos dois pêndulos

paramétricos em uma equação de Mathieu. A dinâmica dos sistemas é apresentada através dos gráficos das soluções. No apêndice A apresenta-se um trabalho, que deu origem a essa monografia, publicado nos anais do XVII Encontro de Iniciação à Pesquisa da UNIFOR.

2 OSCILAÇÕES HARMÔNICAS

2.1 Oscilações Harmônicas

O pêndulo simples é talvez o sistema ideal mais utilizado para investigar as oscilações harmônicas. Quando retirado de sua posição de repouso e após solto ele executa um movimento oscilatório harmônico. O estudo dessas oscilações é bastante relevante para a descrição de inúmeros fenômenos físicos, uma vez que encontram-se sistemas oscilantes em todas as áreas da Física. Por exemplo, em mecânica tem-se os pêndulos e os sistemas massa-mola; descritos pela mecânica ondulatória, tem-se as vibrações de instrumentos musicais e diapasões; no eletromagnetismo, as oscilações da corrente nos circuitos elétricos.

Sendo assim, define-se um oscilador harmônico como um sistema dinâmico que realiza movimentos periódicos, para frente e para trás, seguindo a mesma trajetória (RESNICK; HALLIDAY, 1984). O exemplo mais conhecido é o pêndulo simples, como já foi mencionado.

Para uma descrição matemática da dinâmica de um sistema oscilante, considere uma partícula¹ de massa m que oscila harmonicamente sob a ação de forças conservativas, no qual podemos associar uma energia potencial $U(x)$. Na figura abaixo temos uma representação para a energia potencial.

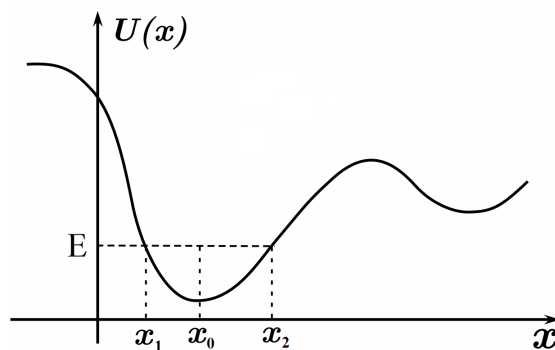


Figura 1: Energia potencial $U(x)$ devido a uma força conservativa $F(x)$.

Fonte: Própria.

Supondo que o sistema tenha uma dada energia E como ilustrado na figura acima, o movimento da partícula ficará restrito aos pontos x_1 e x_2 e sua energia potencial será mínima na posição de equilíbrio x_0 (equilíbrio estável). Entre os pontos x_1 e x_2 chamados de pontos de retorno, é possível tomar o gráfico da energia potencial $U(x)$ como

¹Neste trabalho optamos para estudar sistemas com um grau de liberdade, para simplificar os cálculos.

uma parábola e assim escrevê-la como (NUSSENZVEIG, 2002)

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2. \quad (2.1)$$

Portanto, para pequenos desvios da posição de equilíbrio x_0 , a força que atua na partícula, em módulo, é

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2}kx^2 \right) = -kx. \quad (2.2)$$

Essa força, proporcional ao deslocamento, é restauradora porque a partícula tende a retornar à posição de equilíbrio. A equação (2.2) também é conhecida como lei de Hooke.

2.1.1 Oscilador harmônico simples

Um bloco de massa m preso a uma mola ideal de constante elástica k (positiva) é um bom exemplo de oscilador harmônico simples. Quando comprimida ou esticada, a mola exerce uma força no bloco, dada pela equação (2.2), no sentido contrário ao deslocamento sempre puxando o bloco para a posição de equilíbrio. Na figura abaixo temos uma representação desse sistema (NUSSENZVEIG, 2002).

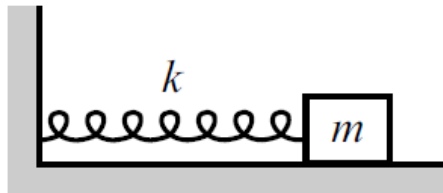


Figura 2: Sistema Massa-Mola.
Fonte: Morin (2008).

Empregando a segunda lei de Newton, a equação de movimento do sistema massa-mola é

$$m\ddot{x} = -kx \quad (2.3)$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (2.4)$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (2.5)$$

onde $\omega_0^2 = k/m$.

Além do modelo massa-mola mostrado acima, qualquer sistema pode ser denominado oscilador harmônico se sua dinâmica for representada pela equação de movimento (2.5). Então é válido dizer que tal sistema executa um movimento harmônico simples

(MHS) (RESNICK; HALLIDAY, 1984). É importante ressaltar que estamos considerando apenas pequenas oscilações próxima da posição de equilíbrio.

A solução geral de um sistema que descreve um MHS é bastante conhecida na literatura, expressa por (LANDAU; LIFCHITZ, 2004)

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (2.6)$$

onde A é a amplitude das oscilações e ω_0 a frequência angular². O termo $(\omega_0 t + \varphi)$ é denominado fase, sendo φ a constante de fase.

A substituição $t \rightarrow t + 2\pi/\omega_0$ na equação (2.6) resulta em

$$x(t) = A \cos[\omega_0(t + 2\pi/\omega_0) + \varphi] \quad (2.7)$$

$$= A \cos[\omega_0 t + 2\pi + \varphi] \quad (2.8)$$

$$= A \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (2.9)$$

Observa-se então que a equação original é restaurada. Fisicamente, o termo $2\pi/\omega_0$ é denominado período τ de oscilação, que é o tempo que o sistema leva para retorna a posição inicial, ou seja, realizar um ciclo. Para o oscilador harmônico, a fórmula é dada por

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad (2.10)$$

percebe-se que o período de oscilação é independente da amplitude.

A energia total do oscilador harmônico é

$$E = T + U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2. \quad (2.11)$$

No gráfico 3 verifica-se que a energia total é constante, conserva-se no decorrer do tempo. Quando a energia potencial $U(t)$ é zero (posição de equilíbrio), a energia cinética $T(t)$ é máxima. Quando o deslocamento é máximo, a energia cinética se anula e temos, neste instante, somente energia potencial. Portanto, de acordo com a equação (2.11), a energia total é proporcional apenas ao quadrado da amplitude.

²O subíndice zero indica a frequência natural do oscilador.

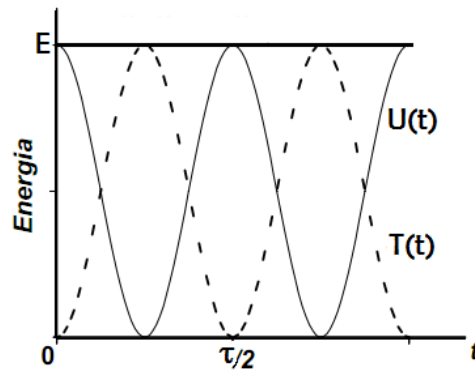


Figura 3: Energia mecânica total do oscilador harmônico e seus constituintes U e T .
Fonte: Resnick e Halliday (1984).

2.1.1.1 Pêndulo simples

O pêndulo simples é formado por uma massa m suspensa por um fio de comprimento fixo l , de massa desprezível. Quando deslocado de sua posição de equilíbrio e solto, o pêndulo executará um MHS em um plano vertical, apenas para pequenos desvios de sua posição de equilíbrio (RESNICK; HALLIDAY, 1984).

Para se encontrar a equação de movimento se escolheu o sistema de referência com eixos orientados ao longo do fio (direção radial) e ao longo de sua perpendicular (direção tangencial). Na figura abaixo tem-se uma representação desse sistema.

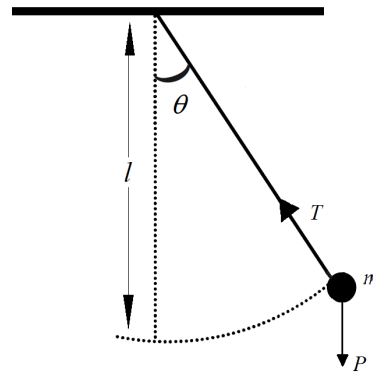


Figura 4: Pêndulo simples.
Fonte: Própria.

As forças que atuam no sistema são o peso \vec{P} e a tensão da corda \vec{T} . Então aplicando a 2ª lei de Newton, tem-se:

$$F_{tan} = ma_{tan} = ml\ddot{\theta} = -mg \sin \theta \quad (2.12)$$

$$F_{rad} = ma_{rad} = -ml(\dot{\theta})^2 = mg \cos \theta - T. \quad (2.13)$$

Usando a componente tangencial, encontra-se a equação de movimento do pêndulo simples dada por

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{l}\right) \sin \theta = 0. \quad (2.14)$$

A equação diferencial acima é não linear e sua solução analítica não se conhece. Contudo, estuda-se seu comportamento para pequenos ângulos, ou seja, $\sin \theta \approx \theta$. Assim, reescreve-se a equação (2.14) como

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0, \quad (2.15)$$

com $\omega_0^2 = g/l$. Vemos que a equação que descreve o pêndulo simples tem a mesma forma da equação (2.5), que caracteriza um MHS.

O período de oscilações do pêndulo foi descoberto por Galileu Galilei quando observava as oscilações de um candelabro, na catedral de Pisa, chegando a conclusão que o período das pequenas oscilações do pêndulo dependia somente do comprimento (isocronismo das pequenas oscilações), dado pela equação abaixo (MONTEIRO, 2006).

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (2.16)$$

É importante lembrar que o pêndulo simples só descreve um MHS para pequenas oscilações, no qual a força tangencial fica proporcional ao deslocamento, $F_{tan} = -mg\theta$, constituindo uma força restauradora.

2.2 Oscilações Amortecidas

De acordo com a seção anterior, o movimento de um oscilador harmônico seria contínuo, oscilaria sem cessar. Contudo, na prática, observa-se que o movimento diminui gradualmente. De acordo com Landau e Lifchitz (2004), isso acontece devido a interação do meio com o sistema que tende a retardar o movimento. Por exemplo, quando nos balançamos numa rede, o atrito do supote da rede com a parede e a resistência do ar tendem a reduzir o balanço até parar.

Nessa seção será estudado o movimento de sistemas com a presença de atrito que ocasiona a dissipação de energia em forma de calor. O movimento desses sistemas é amortecido por atrito e denomina-se movimento harmônico amortecido (MHA).

É válido considerar que a força de atrito ou amortecimento é proporcional a velocidade (NUSSENZVEIG, 2002). Assim, equação de movimento de um MHA é dada

por

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}, \quad (2.17)$$

em que $-b\dot{x}$ é a força de amortecimento que atua no sentido oposto ao da velocidade ($b > 0$).

Reorganizando a equação (2.17), tem-se:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (2.18)$$

sendo $\gamma = \frac{b}{2m}$ o coeficiente de amortecimento e $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ a frequência de oscilação do sistema livre de atrito (frequência natural).

A solução geral da equação (2.18) diferencial linear de 2ª ordem com coeficientes constantes é

$$x(t) = Ae^{p_1 t} + Be^{p_2 t}, \quad (2.19)$$

onde $p_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$.

Examina-se a solução, equação (2.19), apresentando uma interpretação física aos resultados. Para isso denomina-se $\omega_c^2 = \gamma^2 - \omega_0^2$ como uma nova frequência, o que possibilita 3 tipos de movimento:

$$\begin{cases} \omega_c^2 > 0 & \text{Amortecimento Supercrítico} \\ \omega_c^2 = 0 & \text{Amortecimento Crítico} \\ \omega_c^2 < 0 & \text{Amortecimento Subcrítico} \end{cases} \quad (2.20)$$

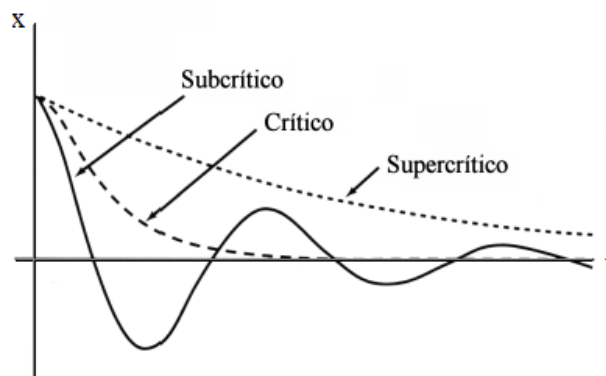


Figura 5: Os três tipos de movimento do oscilador amortecido.
Fonte: Adaptado de Thornton e Marion (2011).

2.2.1 Amortecimento Subcrítico

Neste caso, $\gamma < \omega_0$, a solução $x(t)$ dada pela equação (2.19), torna-se

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega_a t + \delta), \quad (2.21)$$

onde definimos $\omega_a = i\omega_c$ como uma quantidade real.

Comparando essa solução com a do MHS, equação (2.6), verifica-se que o termo $Ae^{-\gamma t}$ seria como uma amplitude que decresce exponencialmente, constituindo efetivamente uma oscilação amortecida (LANDAU; LIFCHITZ, 2004). A figura 6 mostra o gráfico $x(t)$.

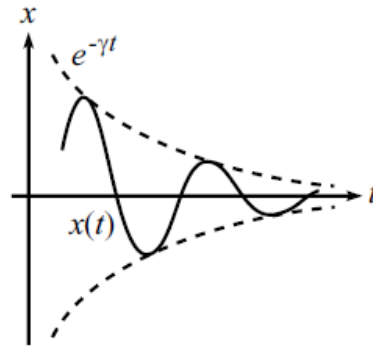


Figura 6: Movimento do oscilador amortecido subcrítico.

Fonte: Morin (2004).

Conforme foi dito, a energia do sistema que realiza MHA não é constante, ela varia com o tempo. Para se conhecer a variação temporal da energia, basta derivá-la. Então, tem-se:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \right] = -b\dot{x}^2. \quad (2.22)$$

Nota-se que o resultado é igual ao produto da força de atrito pela velocidade. Como $b > 0$, a taxa de variação da energia é sempre menor que zero, indicando a sua diminuição, como esperado.

2.2.2 Amortecimento Crítico

Quando $\gamma = \omega_0$ a equação (2.19) resulta em

$$x(t) = e^{-\gamma t}(A + Bt) \quad (2.23)$$

O oscilador amortecido criticamente retornará mais rápido para posição de equi-

líbrio, para tempos grandes, do que os outros osciladores. Esse comportamento é importante quando queremos amortecer o movimento de sistemas oscilatórios o mais depressa possível. Um exemplo desses sistemas é um conjunto mola-amortecedor instalado numa porta, para retornar a posição de equilíbrio (porta fechada) em um tempo mínimo (THORNTON; MARION, 2011). Na figura abaixo temos o gráfico $x(t)$.

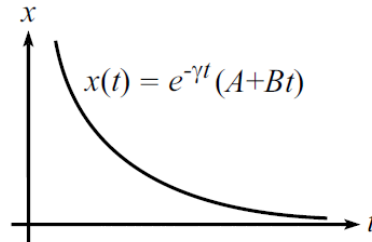


Figura 7: Movimento do oscilador amortecido crítico.
Fonte: Morin (2004).

2.2.3 Amortecimento Supercrítico

Finalmente quando $\gamma > \omega_0$ a solução é

$$x(t) = e^{-\gamma t}(Ae^{\omega_c t} + Be^{-\omega_c t}). \quad (2.24)$$

O movimento é aperiódico e sua amplitude tende assintoticamente (quando $t \rightarrow \infty$) para zero. Por isso, o oscilador retorna a posição de equilíbrio (LANDAU; LIFCHITZ, 2004).

Avaliando a dinâmica do movimento em relação as condições iniciais ($x(0) = x_0 > 0$ e $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$) tem-se três possibilidades (MARION; THORNTON, 2011).

1. $\dot{x}_0 > 0$, tem-se que $x(t)$ chega no máximo após um instante t antes de anular-se.
2. $\dot{x}_0 < 0$, neste caso $x(t)$ vai a zero monotonicamente.
3. $\dot{x}_0 < 0$ e se seu módulo for grande suficiente para que $x(t)$ mude o sinal, atinja um valor mínimo e em seguida vai a zero. Neste caso, o movimento pode ser considerado oscilatório.

Na figura abaixo destaca-se os tipos de movimento possíveis para o amortecimento supercrítico.

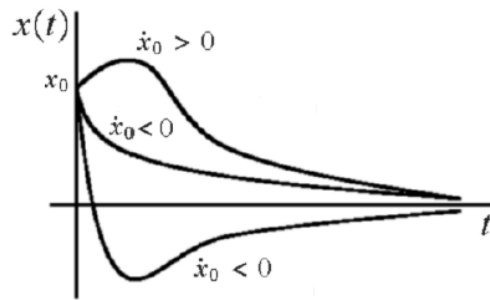


Figura 8: Movimentos do oscilador com amortecimento supercrítico.
Fonte: Adaptado de Thornton e Marion (2011).

2.3 Oscilações Forçadas Amortecidas

Uma pessoa empurrando periodicamente uma criança em um balanço seria um exemplo cotidiano de um oscilador amortecido submetido a uma força externa periódica, do tipo $F_0 \cos(\omega t)$, onde ω é a frequência dessa força externa diferente da frequência natural do oscilador livre (NUSSENZVEIG, 2002). Esse tipo de oscilação é chamado oscilação forçada amortecida.

A equação de movimento desses osciladores é dada por

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t), \quad (2.25)$$

onde $f_0 = F_0/m$.

A ação da força externa resulta em uma não homogeneidade das equações de movimento. A solução geral é dada pela soma da solução da equação homogênea e a solução particular, isto é, $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$. A solução homogênea é dada pela equação (2.19) quando foi tratado das oscilações amortecidas. Optou-se por não mostrar passo a passo o método para encontrar a solução particular, entretanto isso pode ser facilmente encontrado na literatura.

A solução particular é dada por

$$x_p(t) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \cos(\omega t - \delta), \quad (2.26)$$

sendo $\delta = \arctan\left(\frac{2\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$.

Escrevendo-se explicitamente a solução geral da equação (2.25) como

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}[e^{\omega_c t} + e^{-\omega_c t}] + A(\omega) \cos(\omega t - \delta), \quad (2.27)$$

onde se define $A(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$ como a amplitude de uma oscilação forçada.

O primeiro termo da equação (2.27) que representa a solução homogênea decai exponencialmente com o tempo e é chamada solução transiente. Assim, para um tempo longo, tem-se somente a solução particular, denominada solução estacionária.

2.3.1 Ressonância

O fenômeno da ressonância corresponde a um crescimento da amplitude de oscilação ($A(\omega)$ é máxima) quando o sistema oscila com uma determinada frequência ω_R , denominada frequência de ressonância (THORNTON; MARION, 2011).

Investiga-se o caso em que se tem somente a solução estacionária do oscilador forçado amortecido (após um longo tempo). Para se encontrar ω_R toma-se

$$\left(\frac{dA}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_R} = 0. \quad (2.28)$$

Efetuando os cálculos, obtém-se que $\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$. Ressalta-se que $2\gamma^2 \leq \omega_0^2$ para que se tenha o fenômeno da ressonância.

Segundo Landau e Lifchitz (2004) considerando-se $\gamma \ll \omega_0$, ou seja, um amortecimento fraco, a frequência de ressonância ω_R não diferirá de ω_0 a não ser por um termo infinitesimalmente pequeno. Na figura abaixo nota-se portanto que a amplitude será máxima na vizinhança de $\omega_r = \omega_0$.

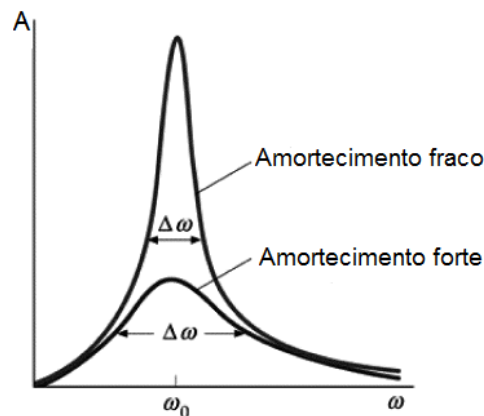


Figura 9: Gráfico da amplitude versus frequência de um oscilador amortecido forçado.
Fonte: Adaptado de Tipler (2004).

3 OSCILAÇÕES PARAMÉTRICAS

Nas seções anteriores revisou-se os principais tipos de oscilações. A seguir, abordam-se as oscilações paramétricas, que embora pouco vistas nas aulas de mecânica básica, estão presentes em vários ramos da Física.

Em sistemas oscilantes, quando um dos parâmetros característicos varia com o tempo, de forma a provocar uma oscilação, diz-se que o sistema sofre uma oscilação paramétrica (CASE, 1980; RULLI; RINO, 2007). Segundo Landau e Lifchitz (2004) este fenômeno verifica-se quando é aplicado uma força externa no oscilador que resulta em uma variação temporal dos parâmetros do sistema.

Um exemplo, bastante explorado na literatura, é o pêndulo simples cujo o ponto de suspensão é excitado periodicamente na direção vertical. Outro exemplo é de uma pessoa em um balanço de playground no movimento de levantar e agachar. Neste caso, o parâmetro que está variando é centro de gravidade, porque fisicamente o movimento consiste numa subida e descida periódica do centro de gravidade do corpo da pessoa, como mostrado na figura abaixo (MINORSKY, 1962).

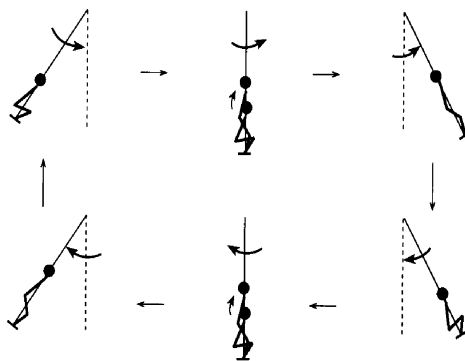


Figura 10: A ação de balançar em um balanço.

Fonte: Wirkus, Rand e Ruina (1998).

O estudo das oscilações paramétricas começou com Faraday em 1831, quando observou que as ondas de superfície de um cilindro cheio de fluido, sob excitação vertical, oscilava com metade da frequência de excitação vertical. Na experiência de Faraday, a aceleração gravitacional efetiva é o parâmetro variante. O modelo do sistema é mostrado na figura 11.

Outros como Melde e Lord Rayleigh também investigaram essas oscilações através de uma corda amarrada na extremidade de um pino do diapasão capaz de vibrar na direção da corda. Eles observaram que o pino do diapasão vibrava com frequência $2f$ enquanto a corda oscilava lateralmente com frequência f . As oscilações do diapasão produziam

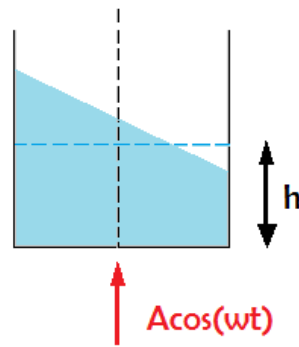


Figura 11: Líquido em recipiente com movimento periódico na direção vertical.
Fonte: Própria

variações periódicas da tensão da corda (MISES; KÁRMÁN, 1948).

As oscilações paramétricas também ocorrem em circuitos elétricos. Mandelstam e Papalexi (1934) realizaram um estudo teórico e experimental sobre oscilações em circuitos RLC variando senoidalmente a capacitância e indutância, em que fizeram uma análise das condições de estabilidade e investigaram as soluções periódicas das equações de movimento que regem tais sistemas.

Nayfeh e Mook (1995) mostram um exemplo de um circuito com indutor L e um capacitor cuja as placas podem se mover mecanicamente, como representado na figura 12. A capacitância varia segundo a função $C(t) = \epsilon S/d(t)$, em que ϵ é a permissividade dielétrica do material, S a área das placas e $d(t)$ a distância entre as placas. A equação que governa o sistema é

$$\frac{d^2q}{dt} + \frac{d(t)}{\epsilon SL}q = 0. \quad (3.1)$$

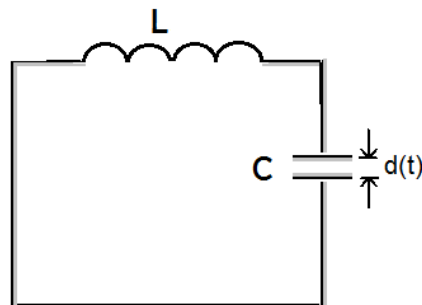


Figura 12: Circuito LC com a capacitância variando com o tempo.
Fonte: Adaptado de Nayfeh e Mook (1995).

O fenômeno de oscilação paramétrica é comum na mecânica e em vários campos

da Física. Por exemplo, na Física do Estado Sólido e na Física do Plasma. Mais especificamente, observam-se oscilações paramétricas na trajetória de partículas em bétatrons, e na dinâmica de um pêndulo com comprimento variável e do pêndulo com ponto de suspensão oscilante. (RULLI; RINO, 2007; MINORSKY, 1962)

3.1 Equação do movimento

Em termos matemáticos, as oscilações paramétricas são descritas por equações diferenciais, nas quais há variação temporal dos coeficientes. Segundo Landau e Lifchitz (2004), para o caso de um sistema em uma dimensão a equação do movimento é

$$\frac{d}{dt} (m(t)\dot{x}) + k(t)x = 0, \quad (3.2)$$

na qual os parâmetros são representados pelas funções $m(t)$ e $k(t)$, respectivamente a massa e rigidez do sistema.

Utilizando as seguintes substituições:

$$\frac{d}{dt} = \frac{1}{m(t)} \frac{d}{d\tau} \quad (3.3)$$

$$\dot{x} = \frac{1}{m(t)} \frac{dx}{d\tau}, \quad (3.4)$$

a equação do movimento resulta em

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + m(\tau)k(\tau)x = 0. \quad (3.5)$$

Define-se $\Phi^2(\tau) = m(\tau)k(\tau)$ e sem perder generalidade podemos fazer $\tau \rightarrow t$ e então reescreve-se a equação do movimento como

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \Phi^2(t)x = 0 \quad (3.6)$$

De acordo com Butikov (1999), considerando apenas mudanças periódicas dos parâmetros e aplicando a substituição de $\Phi^2(t)$ por $K(t)$ tem-se a equação de Hill

$$\frac{d^2x}{dt^2} + K(t)x = 0, \quad (3.7)$$

$$K(t) = \theta_0 + \sum_{r=1}^{\infty} 2\theta_r \cos 2rt. \quad (3.8)$$

$K(t)$ é uma função periódica par de t , com período π , representada por uma série de Fourier (ARSCOTT, 1964).

Se comparar as equações de movimento de um oscilador forçado com o oscilador paramétrico, verifica-se que no primeiro o resultado da ação externa resulta em não homogeneidades da equação diferencial e nas oscilações paramétricas aparece como equações diferenciais com coeficientes periódicos.

3.2 Ressonância Paramétrica

Como foi dito, o fenômeno da ressonância, nas oscilações forçadas, ocorre quando a frequência da força externa se aproxima da frequência natural do sistema, causando um aumento da amplitude.

Para o caso das oscilações paramétricas, segundo Butikov (1999), o fenômeno de ressonância é diferente do que acontece em osciladores forçados, principalmente a relação entre a frequência com a qual o sistema é forçado e a frequência natural.

Quando a frequência com a qual o parâmetro oscilante varia é duas vezes a frequência natural do sistema tem-se a chamada ressonância paramétrica principal, caracterizada pelo aumento progressivo da amplitude. Contudo, o fenômeno de ressonância paramétrica também ocorre para a seguinte condição (NEIMARK, 2003 ; BUTIKOV, 1999)

$$\omega = 2\frac{\omega_0}{n}, \quad (3.9)$$

sendo que ω é a frequência com a qual o parâmetro oscilante varia, ω_0 é a frequência natural do sistema e $n = 1, 2, \dots$

Um exemplo prático desse fenômeno ocorre em navios em determinadas circunstâncias. Quando um navio entra numa zona de balanço de ressonância paramétrica, ele começa a balançar até que vire ou se estabilize até um certo ângulo de rolagem, ocasionando uma situação perigosa para o navio e a tripulação (LAARHOVEN; 2009). Uma das condições para que ocorra esse balanço é que a frequência de encontro do navio e das ondas forem aproximadamente duas vezes a frequência natural do balanço do navio.

Contudo, já existem formas de detectar o balanço de ressonância paramétrica e impedir o efeito sobre o navio. Segundo Laarhoven (2009), a estabilização por barbatanas é uma forma eficiente de acrescentar amortecimento ao navio e fazer com que o balanço diminua. Na figura abaixo mostra um caso de acidente que ocorreu com um navio porta-contêiner APL China, em outubro de 1998, que sofreu o balanço de ressonância paramétrica, onde parte da carga foi perdida no mar ou danificada.



Figura 13: Navio APL China.
Fonte: Laarhoven (2009)

3.3 Pêndulo Paramétrico

Nesta seção estuda-se a dinâmica de dois sistemas paramétricos: pêndulo no qual o fio varia periodicamente com o tempo e o pêndulo com ponto de suspensão em movimento periódico na direção vertical. Escolheu-se esses dois pêndulos porque sua dinâmica é simples de calcular e possui uma riqueza de comportamentos.

3.3.1 Pêndulo com comprimento variável

O pêndulo cujo comprimento varia periodicamente com o tempo está incluso na classe de osciladores paramétricos e sua dinâmica é estudada na mecânica teórica (MINORSKY, 1962). Na figura 14 temos o modelo do pêndulo de massa m preso a um fio de massa desprezível no qual o comprimento l sofre uma variação temporal.

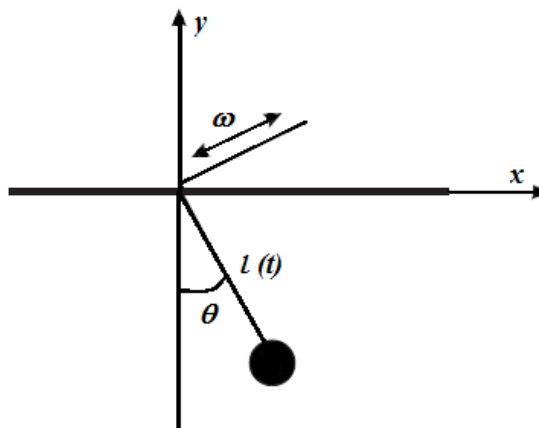


Figura 14: Pêndulo com comprimento variável oscilando.
Fonte: Adaptado de Rulli e Rino (2007)

Supondo que não exista forças dissipativas e as únicas forças atuando são a força

peso e a tração do fio, neste caso. O sistema é conservativo e está sujeito ao vínculo rheônomo:

$$x^2(t) + y^2(t) = l^2(t). \quad (3.10)$$

Encontra-se a equação do movimento desse sistema oscilante, utilizando o formalismo lagrangeano. De acordo com Rulli e Rino (2007), no sistema de referência cartesiana (x, y) a posição da massa m em um instante qualquer é descrita pelas equações abaixo:

$$x(t) = l(t) \sin \theta(t) \quad (3.11)$$

$$y(t) = -l(t) \cos \theta(t), \quad (3.12)$$

sendo $\theta(t)$ o ângulo entre a corda e o eixo vertical e $l(t)$ o comprimento do pêndulo dado por:

$$l(t) = l_0 + a \cos(\omega t). \quad (3.13)$$

Derivando as posições obtém-se a velocidade da massa do pêndulo

$$\dot{x}(t) = l(t) \dot{\theta}(t) \cos \theta(t) + \dot{l}(t) \sin \theta(t), \quad (3.14)$$

$$\dot{y}(t) = l(t) \dot{\theta}(t) \sin \theta(t) - \dot{l}(t) \cos \theta(t). \quad (3.15)$$

Calculando a energia cinética e energia potencial do sistema tem-se

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m [\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2] = \frac{1}{2}m [l(t)^2\dot{\theta}(t)^2 + \dot{l}(t)^2] \quad (3.16)$$

$$U = mgy(t) = -mgl(t) \cos \theta(t) \quad (3.17)$$

A função Lagrangiana é definida como:

$$L(\theta, \dot{\theta}, t) = T - U = \frac{1}{2}m [l(t)^2\dot{\theta}(t) + \dot{l}(t)^2] + mgl(t) \cos \theta(t). \quad (3.18)$$

Usando a equação de Euler-Lagrange para movimento

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = 0, \quad (3.19)$$

tem-se

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = ml(t)^2\ddot{\theta}(t) + 2ml(t)\dot{l}(t)\dot{\theta}(t) \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl(t) \sin \theta(t). \quad (3.21)$$

Substituindo as equações (3.20) e (3.21) na (3.19) fica-se com:

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{2\dot{l}(t)\dot{\theta}(t)}{l(t)} + \frac{g \sin \theta(t)}{l(t)} = 0. \quad (3.22)$$

Sendo $\dot{l}(t) = -a\omega \sin(\omega t)$ a equação (3.22) tem-se finalmente

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{2a\omega \sin(\omega t)}{l_0 + a \cos(\omega t)} \dot{\theta}(t) + \frac{g \sin \theta(t)}{l_0 + a \cos(\omega t)} = 0. \quad (3.23)$$

A equação (3.23) descreve o movimento do pêndulo com comprimento variável (FELDMAN, 2011; AKULENKO e NESTEROV, 2009; RULLI e RINO, 2007).

3.3.2 Pêndulo com ponto de suspensão oscilante

Considere um pêndulo de massa m e comprimento fixo l no qual o ponto de suspensão é submetido a um deslocamento vertical senoidal governado pela equação $h(t) = h_0 \cos(\omega t)$. Na figura abaixo temos um modelo desse pêndulo.

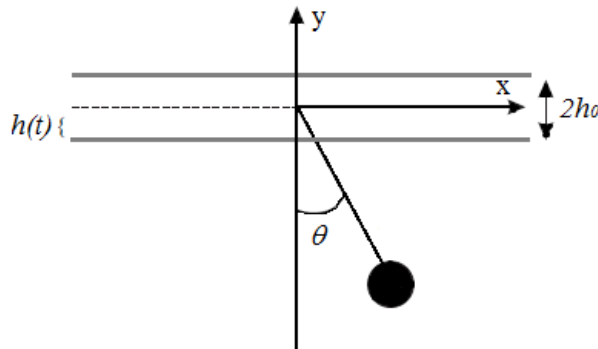


Figura 15: Pêndulo com ponto de suspensão oscilante.

Fonte: Rulli e Rino (2007)

Como no exemplo anterior, esse sistema é conservativo e as únicas forças atuando são a força peso e a tração do fio. Utiliza-se as equações de Euler-Lagrange para determinar a equação do movimento. Segundo com Rulli e Rino (2007), no sistema de referência cartesiano (x, y) a posição da massa m em um instante qualquer é descrita pelas equações abaixo:

$$x(t) = l_0 \sin(\theta(t)) \quad (3.24)$$

$$y(t) = h(t) - l_0 \cos(\theta(t)). \quad (3.25)$$

Derivando $x(t)$ e $y(t)$, tem-se:

$$\dot{x}(t) = l_0 \cos \theta(t) \dot{\theta}(t) \quad (3.26)$$

$$\dot{y}(t) = \dot{h}(t) + l_0 \sin \theta(t) \dot{\theta}(t). \quad (3.27)$$

A energia cinética e energia potencial do sistema são dados respectivamente por:

$$T = \frac{1}{2}m [\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)] = \frac{1}{2}m [l_0^2 \dot{\theta}^2 + \dot{h}(t)^2 + 2l_0 \dot{h} \dot{\theta} \sin \theta(t)] \quad (3.28)$$

$$U = mgy(t) = mg(h(t) - l_0 \cos \theta(t)). \quad (3.29)$$

Escreve-se então a função Lagrangiana como:

$$L(\theta, \dot{\theta}, t) = T - U = \frac{1}{2}m [l_0^2 \dot{\theta}^2 + \dot{h}^2(t) + 2l_0 \dot{h} \dot{\theta} \sin \theta(t)] - mg(h(t) - l_0 \cos \theta(t)). \quad (3.30)$$

Calculando as derivadas da equação de lagrange (3.19) para o movimento

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = ml_0^2 \ddot{\theta}(t) + ml_0 \dot{h} \dot{\theta}(t) \cos \theta(t) + ml_0 \ddot{h} \sin \theta(t) \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = ml_0 \dot{h} \dot{\theta} \cos \theta(t) - mgl_0 \sin \theta(t). \quad (3.32)$$

Substituindo as equações acima na equação (3.19), tem-se:

$$\ddot{\theta}(t) + \left(\frac{g}{l_0} + \frac{\ddot{h}(t)}{l_0} \right) \sin \theta(t) = 0. \quad (3.33)$$

Sendo $\ddot{h}(t) = -\omega^2 h_0 \cos(\omega t)$ a equação (3.33) resulta em

$$\ddot{\theta}(t) + \left(\frac{g}{l_0} - \frac{\omega^2 h_0 \cos(\omega t)}{l_0} \right) \sin \theta(t) = 0. \quad (3.34)$$

A equação (3.34) governa o movimento do sistema oscilante (RULLI e RINO, 2007; SUTHERLAND, 2011). Essas mesmas equações (??) e (3.34) do movimento de ambos pêndulos foram obtidas por Rulli e Rino (2007) utilizando as leis de Newton, ou seja,

$$\mathbf{F}_{tan} = \mathbf{P}_{tan} + \mathbf{T}_{tan} = m\mathbf{a}_{tan}, \quad (3.35)$$

$$a_{tan} = -g \sin(\theta(t)). \quad (3.36)$$

Para encontrar a aceleração tangencial usam a fórmula para rotação de eixos $a_{tan} = \ddot{x} \cos(\theta) + \dot{y} \sin(\theta)$, lembrando que o índice *tan* significa as forças na direção tan-

gencial, ou seja, ao longo da corda.

A dinâmica do pêndulo com ponto de suspensão submetido a um deslocamento senoidal vertical é estudado por Bartuccelli; Gentile; Georgiou (2001) utilizando métodos numéricos para obter detalhes do sistema. Eles usaram atratores, retratos de fase e expoente de Lyapunov e ressaltaram que dependendo dos parâmetros escolhidos o comportamento das oscilações podem ser complicados e caóticos.

4 EQUAÇÃO DE MATHIEU

4.1 Equação de Mathieu

Em 1868, estudando oscilações livres em uma membrana elíptica, o matemático francês Émile Léonard Mathieu obteve a equação diferencial que hoje leva seu nome (GUTIÉRREZ-VEGA; CHÁVEZ-CERDA; RODRÍGUEZ-DAGNINO, 1999). A equação de Mathieu é uma equação diferencial linear de segunda ordem com coeficiente periódico, sendo sua forma ordinária dada por:

$$\frac{d^2u}{dz^2} + (a - 2q \cos 2z)u(z) = 0. \quad (4.1)$$

Na expressão acima a e q são denominados parâmetros característicos e podem assumir tanto valores reais como valores complexos. Segundo Coisson, Vernizzi e Yang (2010), a equação possui somente uma singularidade irregular no infinito. Efetuando a substituição de z por iz tem-se a chamada equação de Mathieu modificada ou radial, dada por:

$$\frac{d^2u}{dz^2} - (a - 2q \cosh 2z)u(z) = 0. \quad (4.2)$$

A equação de Mathieu é um caso particular da equação de Hill (3.7), onde o termo $K(t) = \theta_0 + 2\theta_1 \cos 2t$ (ARSCOTT, 1964).

Em geral a equação de Mathieu não é muito vista em livros-textos de física-matemática, contudo ela possui diversas aplicações em Física. Ela aparece em problemas envolvendo geometria elíptica, por exemplo, oscilações em um lago elíptico, propagação de ondas eletromagnéticas em tubos elípticos e, como já mencionamos, oscilações de uma membrana elíptica. Também descreve oscilações paramétricas, como o pêndulo de comprimento variável e o pêndulo invertido. Em Mecânica Quântica, ela surge no problema do pêndulo quântico e como solução da equação de Schrödinger para um potencial dado por uma função cosseno (GUTIÉRREZ-VEGA et al., 2003).

4.2 Origem da equação de Mathieu

Considere o problema físico da propagação de onda em condições de contorno elíptico como, por exemplo, vibrações em um tambor de formato elíptico. Sendo assim, resolve-se a equação de onda homogênea bidimensional utilizando coordenadas elípticas (ARSCOTT, 1964). As coordenadas elípticas η e ξ são relacionadas às coordenadas

cartesianas como:

$$x = c \cosh \xi \cos \eta, \quad (4.3)$$

$$y = c \sinh \xi \sin \eta, \quad (4.4)$$

sendo ξ a coordenada radial e η a coordenada angular, definidas, respectivamente, nos seguintes intervalos:

$$0 \leq \xi < \infty ; \quad 0 \leq \eta < 2\pi. \quad (4.5)$$

Quando as variáveis ξ e η são constantes, o sistema forma uma família de elipses e hipérbolas, respectivamente, ambas centradas na origem do plano (x, y) e tendo o mesmo foco $(\pm c, 0)$, onde $c^2 = a^2 - b^2$. Fazendo $\xi = \xi_0$ e $\eta = \eta_0$, tem-se as seguintes equações (ARSCOTT, 1964; ARFKEN e WEBER, 2007)

$$\frac{x^2}{c^2 \cosh^2 \xi_0} + \frac{y^2}{c^2 \sinh^2 \xi_0} = 1, \quad (4.6)$$

$$\frac{x^2}{c^2 \cos^2 \eta_0} - \frac{y^2}{c^2 \sin^2 \eta_0} = 1. \quad (4.7)$$

Na figura abaixo as curvas são representadas no sistema de coordenadas elíptico.

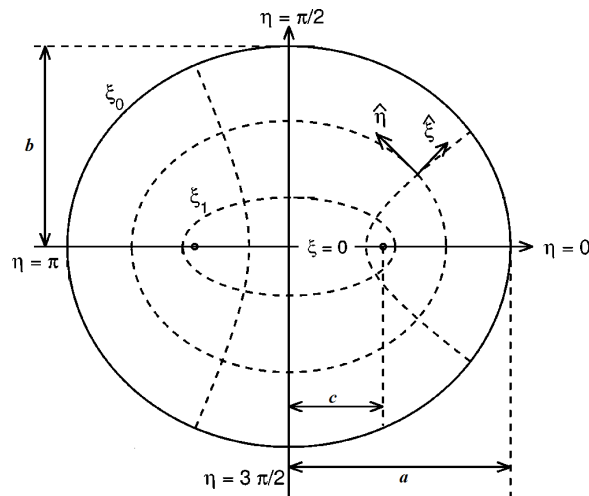


Figura 16: Sistema de coordenadas elíptico.
Fonte: Adaptado de Gutiérrez-Vega et al. (2003)

Retornando a resolução do problema, a equação de onda em coordenadas cartesianas é dada por

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}, \quad (4.8)$$

onde $\Psi = W(x, y)e^{i\omega t}$ representa o deslocamento no ponto (x, y) em um instante t , $W(x, y)$ seria os modos de vibrações e ω a frequência dos modos. Acrescente-se que v é uma constante que depende das propriedades físicas da membrana (ARSCOTT, 1964).

Calculando as derivadas e colocando $\chi = \omega/v$, tem-se a seguinte equação de Helmholtz

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = -\chi^2 W. \quad (4.9)$$

Para se transformar a equação acima em coordenadas elípticas é necessário calcular o laplaciano utilizando coordenadas generalizadas (GUTIÉRREZ-VEGA; CHÁVEZ-CERDA; RODRÍGUEZ-DAGNINO, 1999)

$$\nabla^2 W = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{h_i^2} \frac{\partial^2 W}{\partial q_i^2}, \quad (4.10)$$

em que $q_1 = \xi$ e $q_2 = \eta$ e os fatores de escala são

$$h_1 = h_2 = c (\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta)^{1/2}. \quad (4.11)$$

Substituindo os termos q_1 e q_2 e a equação (4.11) na (4.10), o laplaciano resulta em

$$\nabla^2 W = \frac{1}{c^2 (\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta)} \left[\frac{\partial W^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial W^2}{\partial \eta^2} \right]. \quad (4.12)$$

Voltando para equação de Helmholtz (4.9) e introduzindo a equação (4.12) tem-se

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + c^2 \chi^2 (\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta) W = 0 \quad (4.13)$$

Pode-se reescrever a equação (4.13) substituindo os termos $\sinh^2 \xi$ e $\sin^2 \eta$ por $\cosh(2\xi)$ e $\cos(2\eta)$:

$$\frac{\partial W^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial W^2}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2} c^2 \chi^2 [\cosh(2\xi) - \cos(2\eta)] W = 0. \quad (4.14)$$

Utilizando o método de separação de variáveis $W = R(\xi)\Phi(\eta)$ a equação acima resulta em

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{d\xi^2} + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\eta^2} + \frac{c^2 \chi^2}{2} [\cosh(2\xi) - \cos(2\eta)] = 0, \quad (4.15)$$

sendo a a constante de separação e $4q = c^2 \chi^2$, temos as seguintes equações (ARSCOTT, 1964)

$$\frac{d^2 R}{d\xi^2} + (-a + 2q \cosh 2\xi) R = 0 \quad (4.16)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\eta^2} + (a - 2q \cos 2\eta) \Phi = 0 \quad (4.17)$$

Segundo Gutiérrez-Vega et al. (2003) as equações (4.16) e (4.17) são conhecidas

como equação radial (ou modificada) e equação angular de Mathieu, respectivamente. Fazendo a substituição de variável $\xi = i\eta$, a equação (4.16) fica no mesmo formato da equação ordinária de Mathieu dada pela (4.17).

4.2.1 Forma algébrica da equação de Mathieu

A equação (4.1) é forma ordinária ou canônica da equação de Mathieu, contudo às vezes é conveniente expressá-la na forma algébrica. Para isso, efetua-se a substituição de variável $t = \cos z$

$$\frac{d}{dz} = \frac{dt}{dz} \frac{d}{dt} = -\sin z \frac{d}{dt} \quad (4.18)$$

$$\frac{d^2}{dz^2} = -\cos z \frac{d}{dt} + \sin^2 z \frac{d^2}{dt^2} \quad (4.19)$$

e com alguma manipulação matemática chegamos a seguinte equação (ARSCOTT, 1964)

$$(1 - t^2) \frac{d^2 u}{dt^2} - t \frac{du}{dt} + (a - 4qt^2 + 2q) u = 0 \quad (4.20)$$

a equação acima possui singularidades regulares nos pontos $z = 1$ e $z = -1$ e uma singularidade irregular em $z = \infty$.

De acordo com Wolf (2011) utilizando-se a substituição, $v = \sin^2 z$, tem-se

$$\frac{d}{dz} = \frac{dv}{dz} \frac{d}{dv} = -\sin 2z \frac{d}{dv} \quad (4.21)$$

$$\frac{d^2}{dz^2} = 2 \cos 2z \frac{d}{dv} + \sin^2 2z \frac{d^2}{dv^2} \quad (4.22)$$

em que é obtida outra forma algébrica da equação (4.1). Neste caso, a equação abaixo tem singularidades regulares nos pontos $z = 0$ e $z = 1$ e uma singularidade irregular em $z = \infty$.

$$v(1 - v) \frac{d^2 u}{dv^2} + \frac{1}{2}(1 - 2v) \frac{du}{dv} + \frac{1}{4}[a - 2q(1 - 2v)]u = 0 \quad (4.23)$$

4.3 Equação de Mathieu como um caso particular da Equação Confluyente de Heun

A equação de Heun é uma equação diferencial de 2ª ordem do tipo fuchsiana cuja forma padrão é

$$\frac{d^2 H}{dz^2} + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} + \frac{\varepsilon}{z-d} \right) \frac{dH}{dz} + \frac{(\alpha\beta z - q)}{z(z-1)(z-d)} H = 0. \quad (4.24)$$

Esta equação possui quatro singularidades regulares nos pontos $z = 0, 1, d, \infty$.

Os parâmetros $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, d, q\} \in \mathbb{C}$ e obedecem a relação $\alpha + \beta + 1 = \gamma + \delta + \varepsilon$, sendo que $\{d \neq 0, 1\}$. Seu conjunto de soluções pode ser expresso pelo símbolo-P de Riemann

$$P \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & d & \infty \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 1 - \gamma & 1 - \delta & 1 - \varepsilon & \beta \end{array} \begin{array}{c} z \\ z \\ z \end{array} \right\} \quad (4.25)$$

A equação (4.24) possui quatro formas confluentes. Normalmente, o processo de confluência ocorre quando leva-se um ponto singular regular para o infinito e ajusta-se alguns parâmetros da equação. Por exemplo, reorganizando a equação de Heun, tal que (EL-JAICK; FIGUEIREDO, 2011)

$$z(z-1)\left(\frac{z}{d}-1\right)y''(z) + \left[\gamma(z-1)\left(\frac{z}{d}-1\right) + \delta z\left(\frac{z}{d}-1\right) + \frac{\varepsilon}{d}z(z-1)\right]y'(z) + \left(\alpha\frac{\beta}{d}z - \frac{q}{d}\right)y(z) = 0, \quad (4.26)$$

e tomando $d, \beta, q \rightarrow \infty$ de maneira a se ter os seguintes limites

$$\frac{\beta}{d} \rightarrow \frac{\varepsilon}{d} \rightarrow -\rho, \quad \frac{q}{d} \rightarrow -\sigma, \quad (4.27)$$

resultando na equação confluyente de Heun

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \left(\rho + \frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1}\right)\frac{dy}{dz} + \frac{(\alpha\rho z - \sigma)}{z(z-1)}y = 0, \quad (4.28)$$

com com duas singularidades regulares em $z = 0$ e $z = 1$ e uma singularidade irregular no ponto $z = \infty$. Além dessa equação tem-se a equação de Heun duplamente confluyente, bi-confluyente e triconfluyente. Detalhes e soluções podem ser encontrados em Ronveaux (1995).

Uma forma mais conveniente de escrever essa equação confluyente de Heun é (HOUNKONNOU; RONVEAUX (2009)

$$\frac{d^2H}{dz^2} + \left(\alpha + \frac{\beta+1}{z} + \frac{\gamma-1}{z-1}\right)\frac{dH}{dz} + \frac{(\delta + \alpha/2(\beta + \gamma + 2))z + \eta + \beta/2 + 1/2(\gamma - \alpha)(\beta + 1)}{z(z-1)}H = 0. \quad (4.29)$$

Pode-se verificar que a equação algébrica de Mathieu possui as mesmas singularidades da equação confluyente de Heun. Portanto, pode-se afirmar que a equação de Mathieu é um caso particular da equação confluyente de Heun. Demonstra-se aplicando a

transformação na variável independente $x = \cos^2 z$ na equação (4.1)

$$\frac{d}{dz} = \frac{dz}{du} \frac{d}{dx} = -2 \cos(2u) \sin(2u) \frac{d}{dx} \quad (4.30)$$

$$\frac{d^2}{dz^2} = 2 [\sin^2 z - \cos^2 z] \frac{d}{dx} + 4 \cos^2(z) \sin^2(z) \frac{d^2}{dx^2}, \quad (4.31)$$

que resulta na seguinte equação

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \left[\frac{1/2}{x-1} + \frac{1/2}{x} \right] \frac{du}{dx} + \left[\frac{k^2 x - k^2/2 - a/4}{x(x-1)} \right] u = 0. \quad (4.32)$$

Vê-se facilmente que (4.32) e (4.29) são equações equivalentes desde que:

$$\alpha = 0, \quad \beta = -\frac{1}{2}, \quad \gamma = -\frac{1}{2}, \quad \delta = q \quad e \quad \eta = -\frac{q}{2} - \frac{a}{4} + \frac{3}{8}. \quad (4.33)$$

4.4 Funções de Mathieu

A equação (4.1) possui soluções, em geral, aperiódicas. No entanto, dependendo dos valores de a e q pode-se ter soluções periódicas. Para problemas de interesse físico, as soluções da equação de Mathieu devem ser de valor único, portanto, devem ser periódicas com período 2π .

Neste trabalho considera-se apenas as soluções periódicas. Segundo Whittaker e Wayson (1927) denomina-se funções de Mathieu somente as soluções da equação (4.1) que são periódicas. Contudo, na literatura, alguns autores se referem a funções de Mathieu qualquer solução da equação (4.1).

Iniciamente, examina-se o caso mais simples, quando $q = 0$ na equação (4.1). Nesse caso, a equação de Mathieu torna-se uma equação diferencial dos oscilador harmônico simples

$$u''(z) + au(z) = 0, \quad (4.34)$$

cujas soluções são conhecidas, dada por

$$u(z) = c_1 \cos(\sqrt{a}z) + c_2 \sin(\sqrt{a}z). \quad (4.35)$$

Para que a solução seja periódica, de período 2π , isto é, $u(z) = u(z + 2\pi)$, deve-se impor que $\sqrt{a} = n$, onde n é um número inteiro arbitrário (HOCHSTADT, 1961; WHITTAKER; WATSON, 1927). Assim, as soluções periódicas para $q = 0$, são:

$$u(z) = c_1 \cos(nz) + c_2 \sin(nz). \quad (4.36)$$

Avalia-se um caso mais geral, por exemplo, a equação de Hill (3.7), onde reescreve-se como

$$u''(z) + K(z)u(z) = 0 \quad (4.37)$$

em que, como foi visto, $K(z)$ é uma função periódica de período π .

Sejam u_1 e u_2 duas soluções que obedecem as seguintes condições iniciais (WANG; GUO, 1989 ; HOCHSTADT, 1961)

$$u_1(0) = 1, \quad u_1'(0) = 0; \quad u_2(0) = 0, \quad u_2'(0) = 1. \quad (4.38)$$

Tais soluções são linearmente independente, porque o Wronskiano é unitário, isto é, $W[u_1, u_2](z) = u_1(z)u_2'(z) - u_2(z)u_1'(z) = 1$. Pode-se afirmar que $u_1(z + \pi)$ e $u_2(z + \pi)$ também são soluções da equação (4.37), uma vez que a equação diferencial não muda com a substituição de variável $\tau = z + \pi$.

Escreve-se $u_1(z + \pi)$ e $u_2(z + \pi)$ como uma combinação linear de u_1 e u_2

$$u_1(z + \pi) = a_1u_1(z) + a_2u_2(z) \quad (4.39)$$

$$u_2(z + \pi) = b_1u_1(z) + b_2u_2(z) \quad (4.40)$$

e calcula-se $z = 0$ nas duas equações acima. Utilizando as condições iniciais contidas na equação (4.38), chega-se ao seguinte resultado:

$$u_1(z + \pi) = u_1(\pi)u_1(z) + u_1'(\pi)u_2(z) \quad (4.41)$$

$$u_2(z + \pi) = u_2(\pi)u_1(z) + u_2'(\pi)u_2(z). \quad (4.42)$$

Nota-se que devido a paridade de $K(z)$, $u_1(-z)$ e $u_2(-z)$ também constitui solução da equação. Portanto, escreve-se como uma combinação linear das soluções fundamentais

$$u_1(-z) = c_1u_1(z) + c_2u_2(z) \quad (4.43)$$

$$u_2(-z) = d_1u_1(z) + d_2u_2(z). \quad (4.44)$$

Nas equações acima realiza-se o procedimento anterior de substituir as condições iniciais, equação (4.38), logo tem-se

$$u_1(-z) = u_1(z) ; \quad u_2(-z) = -u_2(z). \quad (4.45)$$

Isto nos revela que dentre as soluções fundamentais, uma deve ser par e a outra ímpar, nunca ambas devem ter a mesma paridade. Para prosseguirmos vamos utilizar o seguinte teorema de Floquet

Teorema 1. *Em uma equação diferencial do tipo $y''(t) + \Phi(t)y(t) = 0$, onde $\Phi(t) = \Phi(t + T)$ existe uma solução não trivial $y(t)$ tal que $y(t + T) = \rho y(t)$, onde ρ é uma constante, denominada multiplicador de Floquet.*

Novamente escreve-se a solução $u(z)$ do teorema de Floquet como uma combinação linear das soluções fundamentais

$$u(z) = e_1 u_1(z) + e_2 u_2(z) \quad (4.46)$$

Substituindo $z = z + \pi$ na equação acima, tem-se

$$u(z + \pi) = e_1 u_1(z + \pi) + e_2 u_2(z + \pi) = \rho u(z) \quad (4.47)$$

$$e_1 u_1(z + \pi) + e_2 u_2(z + \pi) = \rho [e_1 u_1(z) + e_2 u_2(z)] \quad (4.48)$$

Introduzindo as equações (4.41) e (4.42) na equação (4.48) chega-se a duas equações que podem ser escritas como um sistema homogêneo

$$\begin{bmatrix} u_1(\pi) - \rho & u_2(\pi) \\ u_1'(\pi) & u_2'(\pi) - \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (4.49)$$

Para que esse sistema tenha solução não nula é necessário que o determinante seja igualmente zero. Assim, obtém-se a equação

$$\rho^2 - [u_1(\pi) + u_2'(\pi)]\rho + 1 = 0. \quad (4.50)$$

Acima tem-se uma equação de segundo grau cujas soluções dependem do valor do discriminante (Δ) da equação. Como $\rho_1 \rho_2 = 1$ e $\rho_1 + \rho_2 = u_1(\pi) + u_2'(\pi)$, existem três casos possíveis para equação (4.50), a saber:

$$|u_1(\pi) + u_2'(\pi)| \begin{cases} = 2 \\ > 2 \\ < 2 \end{cases} \quad (4.51)$$

No primeiro caso em que $\Delta = 0$, tem-se a condição $\rho_1 + \rho_2 = \pm 2$. Para $\rho_1 = \rho_2 = 1$ tem-se que a solução é periódica de período π

$$u(z + \pi) = u(z), \quad (4.52)$$

e $\rho_1 + \rho_2 = -1$, a solução é periódica de período 2π

$$u(z + \pi) = -u(t) = -u(z + 2\pi). \quad (4.53)$$

No segundo caso tem-se que os multiplicadores de Floquet são reais, sendo que $|\rho_1| < 1$ e $|\rho_2| > 1$. E por último, quando $\Delta < 0$, temos que ρ_1 e ρ_2 são números complexos conjugados com módulo igual a 1.

Examina-se agora apenas soluções periódicas de paridade par ou ímpar. Supõe-se que a solução $u_1(z)$ seja par, periódica de período π . Logo, sua derivada será periódica e ímpar, isto é:

$$u_1(z + \pi) = u_1(z) = u_1(-z), \quad (4.54)$$

$$u_1'(z + \pi) = u_1'(z) = -u_1'(-z). \quad (4.55)$$

Tomando-se $z = -\pi/2$ na equação (4.55) é obtido

$$u_1'(\pi/2) = u_1'(-\pi/2) = -u_1'(\pi/2), \quad (4.56)$$

de onde se conclui que $u_1'(\pi/2) = 0$.

Comprova-se que para a solução $u_1(z)$ ser par e periódica de período π deve-se ter necessariamente que $u_1'(\pi/2) = 0$ seja verdade. Foi mostrado parte do seguinte teorema (MAGNUS; WINKLER, 1979)

Teorema 2. *Se $u_1(z)$ e $u_2(z)$ são soluções da equação (4.37), então existem soluções periódicas não triviais desta equação, a saber*

- i) par e de período π se e somente de $u_1'(\pi/2) = 0$*
- ii) ímpar e de período π se e somente de $u_2'(\pi/2) = 0$*
- iii) par e de período 2π se e somente de $u_1(\pi/2) = 0$*
- iv) ímpar e de período 2π se e somente de $u_2(\pi/2) = 0$.*

Retornando a equação de Mathieu faz-se $K(z) = a - 2q \cos 2z$ na equação (4.37). Para encontrar soluções periódicas dessa equação deve-se ressaltar que o parâmetro $a = a(q)$ depende de q , essa dependência dificulta o estudo das funções de Mathieu que segundo Arfken e Weber (2007) é uma das funções especiais mais difíceis da Física.

Anteriormente foi resolvido a equação para caso em que $q = 0$, ou seja, encontrou-se os valores de $a(0) = n^2$ que satisfazem a equação. Para um dado valor de n temos um conjunto infinito de valores a_0, a_1, a_2, \dots . Logo, para se encontrar uma solução $u_1(z)$ que seja par e periódica de período π , pelo teorema (2), deve-se ter que

$$u_1' \left(\frac{\pi}{2}; a_{2n}(q), q \right) = 0. \quad (4.57)$$

A solução da equação de Mathieu que satisfaz a condição acima é definida pelo símbolo $ce_{2n}(z; q)$, uma abreviação de co-senoidal-elíptica. Essa função periódica e par

pode ser expressa em termos da série de Fourier. Sendo assim tem-se (GUTIÉRREZ-VEGA, 2008; HILLE, 1976):

$$ce_{2n}(z; q) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2n,2r}(q) \cos(2rz) \quad (4.58)$$

Para se encontrar os coeficientes $A_{2n,2r}(q)$ deve-se substituir a série acima na equação de Mathieu, ou seja, equação (4.1). Efetuando os cálculos matemáticos tem-se que (HOCHSTADT, 1961)

$$\begin{aligned} & [a_{2n}(q)A_{2n,0}(q) - qA_{2n,2}(q)] - [[4 - a_{2n}(q)] A_{2n,2}(q) + q(2A_{2n,0}(q) + A_{2n,4}(q))] \cos 2t \\ & - \sum_{r=2}^{\infty} [[4r^2 - a_{2n}(q)] A_{2n,2r}(q) + q(2A_{2n,2r+2}(q) + A_{2n,2r-2}(q))] \cos 2rt = 0 \end{aligned} \quad (4.59)$$

Pela equação acima encontra-se um sistema de equações ou relações de recorrência entre os coeficientes de Fourier para um dado valor de a_{2n} .

$$a_{2n}(q)A_{2n,0}(q) - qA_{2n,2}(q) = 0 \quad (4.60)$$

$$[a_{2n}(q) - 4] A_{2n,2}(q) - q[2A_{2n,0}(q) + A_{2n,4}(q)] = 0 \quad (4.61)$$

$$qA_{2n,2r-2}(q) + [4r^2 - a_{2n}(q)] A_{2n,2r}(q) + qA_{2n,2r+2}(q), \quad r = 2, 3, \dots \quad (4.62)$$

Segundo Gutiérrez-Vega et al. (2003) existem duas formas de calcular os coeficientes da série de Fourier, a primeira consiste em transformar as relações de recorrência em uma matriz infinita. Os a_{2n} e os $A_{2n,2r}(q)$ são os autovalores e autovetores da matriz respectivamente. Hochstadt(1961) utiliza esse método para calcular os coeficientes. A outra forma consiste em transformar as relações de recorrência em frações contínuas e aplicar métodos algébricos para encontrar as raízes. Os resultados desse método podem ser encontrados em Abramovitz (1964). As outras soluções periódicas da equação de Mathieu, conforme o teorema (2), podem ser analisadas de forma equivalente.

As quatro solução periódicas da equação de Mathieu são (HOCHSTADT, 1961)

$$ce_{2n}(z; q) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2n,2r}(q) \cos(2rz), \quad \text{par de período } \pi \quad (4.63)$$

$$se_{2n}(z; q) = \sum_{r=1}^{\infty} B_{2n,2r}(q) \sin(2rz), \quad \text{ímpar de período } \pi \quad (4.64)$$

$$ce_{2n+1}(z; q) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2n+1,2r+1}(q) \cos(2r+1)z, \quad \text{par de período } 2\pi \quad (4.65)$$

$$se_{2n+1}(z; q) = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2n+1,2r+1}(q) \sin(2r+1)z, \quad \text{ímpar de período } 2\pi. \quad (4.66)$$

A solução ímpar definida pelo símbolo $se(z; q)$ é abreviatura de senoidal-elíptica. A solução que encontrou-se anteriormente para $q = 0$ é obtida quando se faz o seguinte limite:

$$\lim_{q \rightarrow 0} ce_n(z; q) = \cos(nz), \quad \lim_{q \rightarrow 0} se_n(z; q) = \sin(nz). \quad (4.67)$$

Essas soluções são chamadas funções de Mathieu angular porque são periódicas. Contudo, além dessas existem as soluções aperiódicas $fe_m(z; q)$ e $ge_m(z; q)$, que não serão abordadas nesse trabalho. Na figura abaixo tem-se todas as soluções esquematizadas.

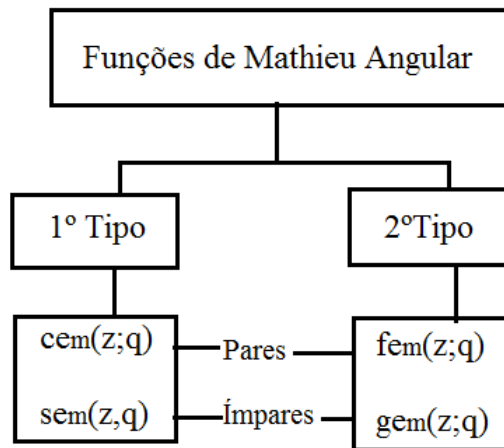


Figura 17: Funções de Mathieu Angular
Fonte: Adaptado de Gutiérrez-Vega (2008).

De acordo com Gutiérrez-Vega et al. (2003), os valores de $a_m(q)$ na equação de Mathieu, dada por (4.1), que satisfazem a condição de periodicidade são chamados de autovalores. Ressaltando que m deve ser par para função de período π e ímpar para período 2π . Em Abramovitz (1964) encontram-se as séries de potência para $a_m(q)$ e as funções $ce_m(z; q)$ e $se_m(z; q)$.

Para obter a solução da equação de Mathieu modificada, equação (4.2), deve-se fazer a transformação $z \rightarrow iz$ nas funções de Mathieu, equações (4.63)-(4.66). Assim tem-se (ARSCOTT, 1964):

$$Je_{2n}(z; q) = ce_{2n}(iz; q) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2n,2r}(q) \cosh(2rz), \quad (4.68)$$

$$Je_{2n+1}(z; q) = ce_{2n+1}(iz; q) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2n+1,2r+1}(q) \cosh[(2r+1)z], \quad (4.69)$$

$$Jo_{2n+2}(z; q) = -ise_{2n+1}(iz; q) = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2n+2,2r+2}(q) \sinh[(2r+1)z], \quad (4.70)$$

$$Jo_{2n+1}(z; q) = -ise_{2n+1}(z; q) = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2n+1,2r+1}(q) \sinh[(2r+1)z]. \quad (4.71)$$

As soluções $Je_m(z; q)$ e $Jo_m(z; q)$ são denominadas funções de Mathieu modificada (ou radial) de primeiro tipo e são oscilatórias. Arcostt (1964) utiliza a notação $Ce_m(z; q)$ e $Se_m(z; q)$ para representar essas funções. As demais soluções da equação radial de Mathieu são apresentadas na figura abaixo.

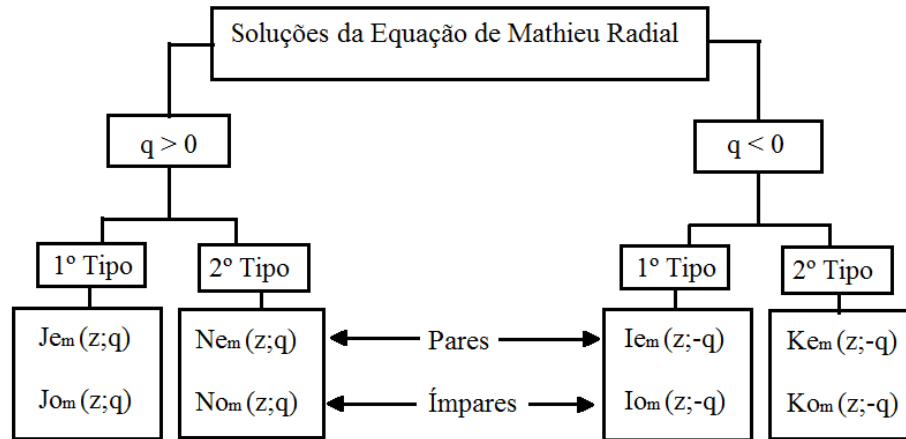


Figura 18: Funções de Mathieu Radial
Fonte: Adaptado de Gutiérrez-Vega (2008).

Para finalizar representa-se graficamente as funções de Mathieu. Na literatura é possível encontrar diversos trabalhos sobre isso. Funada et al (2005) mostram o comportamento gráfico das soluções de Mathieu utilizando o método de integração numérica de Runge-Kutta. Através do teorema de Floquet ele calcula os valores dos parâmetros para os quais a solução é estável ou instável e apresenta os gráficos. Além disso, acrescenta um termo dissipativo na equação e também a resolve numericamente.

Para o presente caso utiliza-se um programa computacional de matemática que possui pacote da função de Mathieu pronto. Na figura 19 são representadas as funções $ce_m(z; q)$ e $se_m(z; q)$ para $q = 1$ e m variando de 0 a 3. Pode-se perceber facilmente a periodicidade das funções.

Na figura 20 tem-se as funções ce_1 e se_1 para diversos valores de q . Quando $q = 0.1$, as funções se aproximam de $\cos(z)$ e $\sin(z)$, respectivamente. Gráficos semelhantes podem ser encontrados em Gutiérrez-Vega (2008) e Abramovitz (1964).

As funções de Mathieu radial, $Je_m(z; q)$ e $Jo_m(z; q)$, são representadas na figura 21. Verifica-se que as funções são oscilatórias, decrescentes e aperiódicas. Observa-se que elas oscilam mais rápido quando o valor de q aumenta.

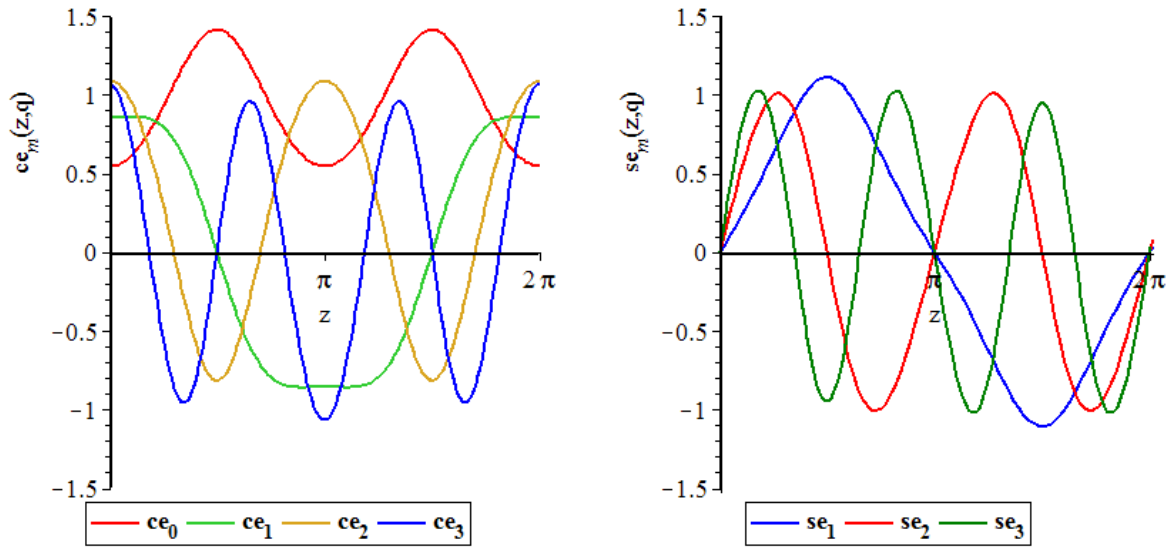


Figura 19: Funções ce_m (à esquerda) e se_m (à direita) com $q = 1$

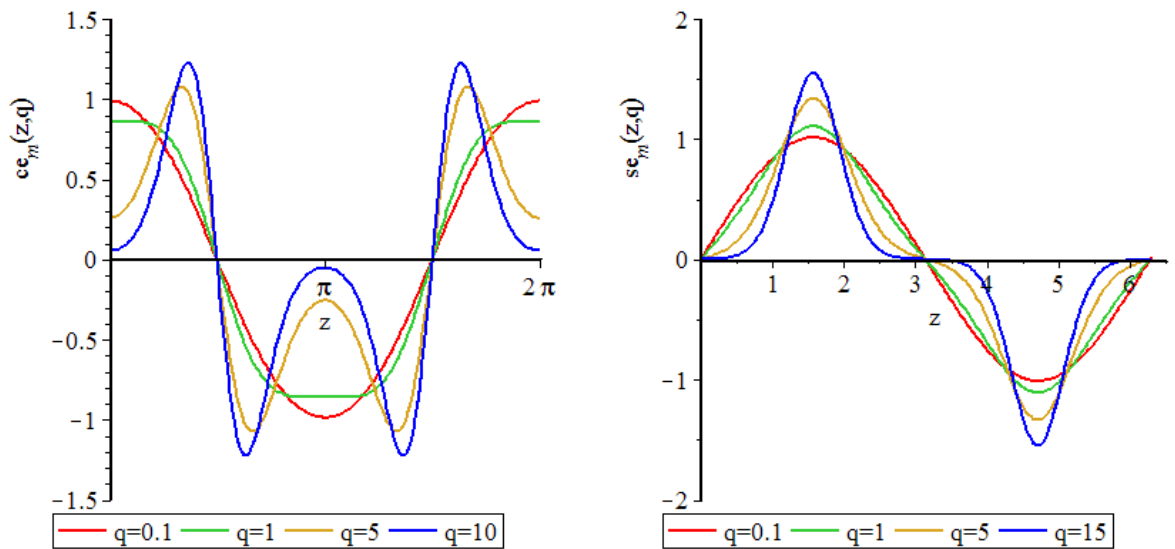


Figura 20: Funções ce_1 (à esquerda) e se_1 (à direita) com $q \in \{0.1, 1, 5, 10, 15\}$.

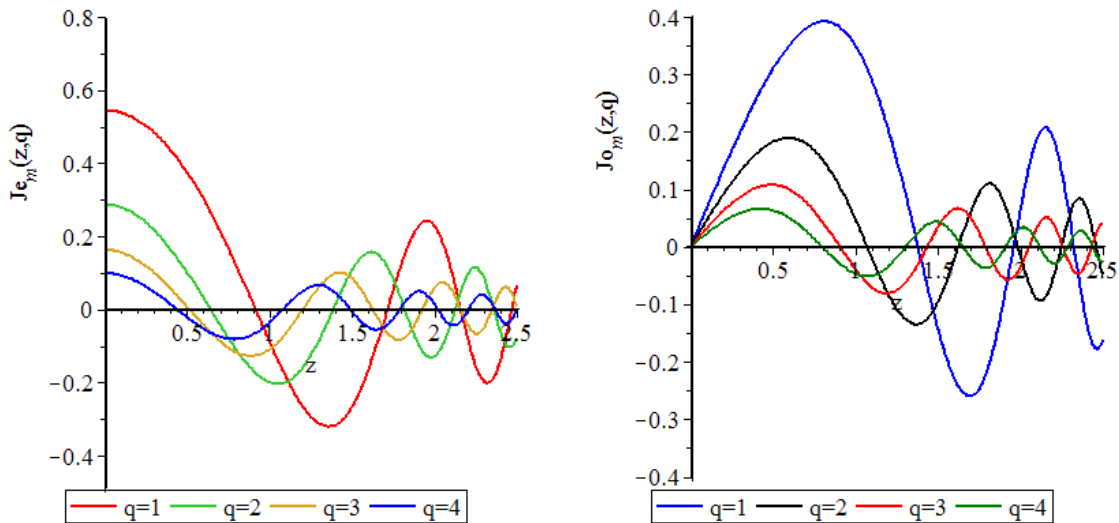


Figura 21: Funções J_{e_0} (a direita) e J_{o_1} (a esquerda) com $q \in \{1, 2, 3, 4\}$.

4.5 Estabilidade das soluções de Mathieu

Para se estudar a estabilidade das soluções utiliza-se os multiplicadores de Floquet mostrados na seção anterior. De acordo com a teoria de Floquet, pode-se definir o multiplicador como $\rho = e^{(\sigma\pi)}$, onde σ é conhecido como expoente característico. Sendo assim, a solução completa da equação de Mathieu é expressa como

$$u(z) = Ae^{\sigma z}\phi(z) + Be^{-\sigma z}\phi(-z), \quad (4.72)$$

sendo $\phi(z)$ uma função periódica de período π (WHITTAKER; WATSON, 1927).

Os valores dos multiplicadores de Floquet vão depender da resolução da equação (4.50). Assim, pode-se expressar os multiplicadores como

$$\rho_{1,2} = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}, \quad (4.73)$$

onde $\alpha = u_1(\pi) + u_2'(\pi)$.

Conforme já mencionado existem três possibilidades para os valores dos multiplicadores de Floquet (KELLEY; PETERSON, 2010)

1. $|\alpha| > 2$: Temos que ρ_1 e ρ_2 são reais e $|\rho_1| < 1$ e $|\rho_2| > 1$. Nesse caso tem-se na solução um termo que tende ao infinito e o outro que tende a zero. Portanto a solução é instável em $[0, \infty)$. Em termos físicos isso significa que para um sistema paramétrico, um pequeno deslocamento da posição de equilíbrio ($z = 0$) causaria uma grande oscilação com amplitude aumentando progressivamente, ou seja, o fenômeno da ressonância paramétrica.

2. $|\alpha| < 2$: Nesse caso ρ_1 e ρ_2 são complexos conjugados. A solução é limitada e oscila com período diferente de π ou 2π . Sendo assim, é estável no intervalo $[0, \infty)$.
3. $|\alpha| = 2$: As soluções são periódicas de período π ($\rho_1 = \rho_2 = 1$) ou de período 2π ($\rho_1 = \rho_2 = -1$). Essas soluções estão numa região de transição entre a fase estável e instável.

Percebe-se que a estabilidade está relacionado com o valor de α , sendo que este depende dos parâmetros da equação de Mathieu, isto é, $\alpha = \alpha(a, q)$. A questão principal é saber para quais valores de (a, q) a solução terá um comportamento estável ou instável. Em Nayfeh e Mook (1995) encontra-se o diagrama de estabilidade (ou de Strutt) que apresenta as regiões estáveis e instáveis da equação de Mathieu, como mostrado na figura abaixo.

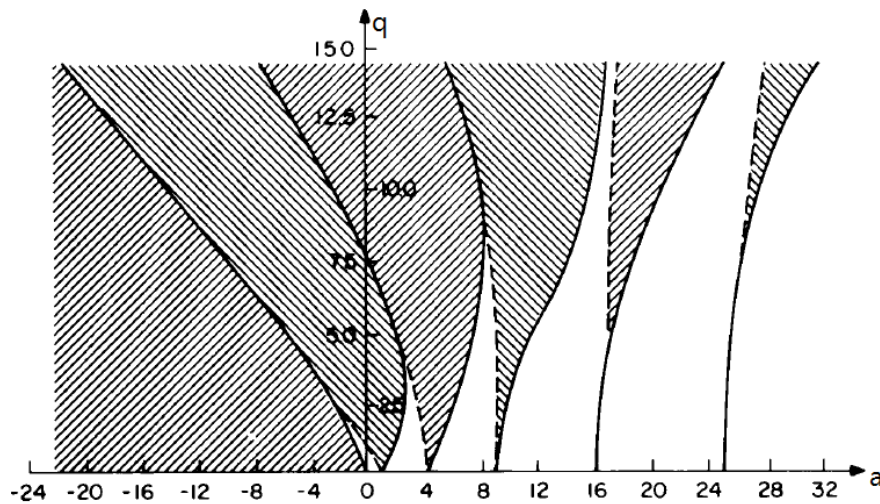


Figura 22: Estabilidade da equação de Mathieu: regiões estáveis e instáveis (hachurada).
Fonte: Nayfeh e Mook (2007)

Normalmente utiliza-se técnicas numéricas para calcular os multiplicadores ou expoentes de Floquet e portanto determinar as zonas de estabilidade. Coisson, Vernizzi e Yang (2009) utilizam um programa computacional e mostram como construir o diagrama de Strutt. Outra forma de calcular o diagrama de estabilidade é através de técnicas analíticas, tais como o método das perturbações.

5 EQUAÇÃO DE MATHIEU PARA DESCREVER A DINÂMICA DOS PÊNDULOS PARAMÉTRICOS

5.1 Equação de Mathieu para descrever a dinâmica dos pêndulos paramétricos

Na seção (3.3) foi obtida as equações de movimento de dois pêndulos paramétricos. No entanto, essas equação diferenciais são não lineares e complicadas de trabalhar. Para resolver esse problema lineariza-se as equações restringindo o movimento dos sistemas para pequenas oscilações.

Se inicia com a equação (3.23) do pêndulo com comprimento variável introduzindo alguns parâmetros dimensionais, a saber

$$\lambda = \frac{a}{l_0}, \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l_0}. \quad (5.1)$$

e para facilitar escreve-se a frequência em unidades de ω_0 e o tempo em unidades do inverso de ω_0 , isto é, fazendo $\omega \rightarrow \omega/\omega_0$ e $t \rightarrow \omega_0 t$. Assim, a equação (3.23) de movimento do pêndulo é reescrita como:

$$\ddot{\theta}(t) - \frac{2\lambda\omega \sin(\omega t)}{1 + \lambda \cos(\omega t)} \dot{\theta}(t) + \frac{1}{1 + \lambda \cos(\omega t)} \sin \theta(t) = 0. \quad (5.2)$$

Para que a equação acima tenha a mesma forma da equação de Mathieu, faz-se a seguinte substituição $z(t) = (1 + \lambda \cos \omega t)\theta(t)$ na equação acima, resultando em:

$$\ddot{z}(t) + \frac{\lambda\omega^2 \cos(\omega t)}{1 + \lambda \cos(\omega t)} z(t) + \sin \left(\frac{z(t)}{1 + \lambda \cos(\omega t)} \right) = 0. \quad (5.3)$$

Considerando que se $\lambda \ll 1$ tem-se $\sin z(t) \approx z(t)$, logo a equação obtém a forma de

$$\ddot{z}(t) + (1 + 3\lambda \cos \omega t)z(t) = 0. \quad (5.4)$$

A equação (5.4) e a equação (4.1) tem formas equivalentes, sendo que $a = 1$ e $q = -3\lambda/2$.

Novamente aplica-se esse método de linearizar as equações, para o caso do pêndulo com ponto de suspensão oscilante, também restringindo o movimento para pequenas oscilações. Na equação (3.34) emprega-se os seguintes parâmetros dimensionais, a saber

$$\lambda = \frac{h_0}{l_0}, \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l_0}. \quad (5.5)$$

acrescenta-se que, como no caso anterior, a frequência é escrita em unidades de ω_0 e o tempo em unidades do inverso de ω_0 .

Com essas modificações a equação do pêndulo resulta em:

$$\ddot{\theta}(t) + (1 - \lambda\omega^2 \cos \omega t) \sin \theta(t) = 0. \quad (5.6)$$

Como foi dito, para pequenas oscilações, $\sin \theta(t) \approx \theta(t)$ e $\omega \sim 2$, tem-se

$$\ddot{\theta}(t) + (1 - 4\lambda \cos \omega t)\theta(t) = 0. \quad (5.7)$$

Nota-se claramente que a equação acima é equivalente a uma equação de Mathieu, sendo $a = 1$ e $q = 2\lambda$.

Investiga-se a dinâmica dos pêndulos paramétricos utilizando as soluções numéricas das equações diferenciais que a governam. Inicialmente integra-se a equação (5.2) que descreve o pêndulo com comprimento variável, para alguns valores de posição e velocidade iniciais e também alguns valores de parâmetros.

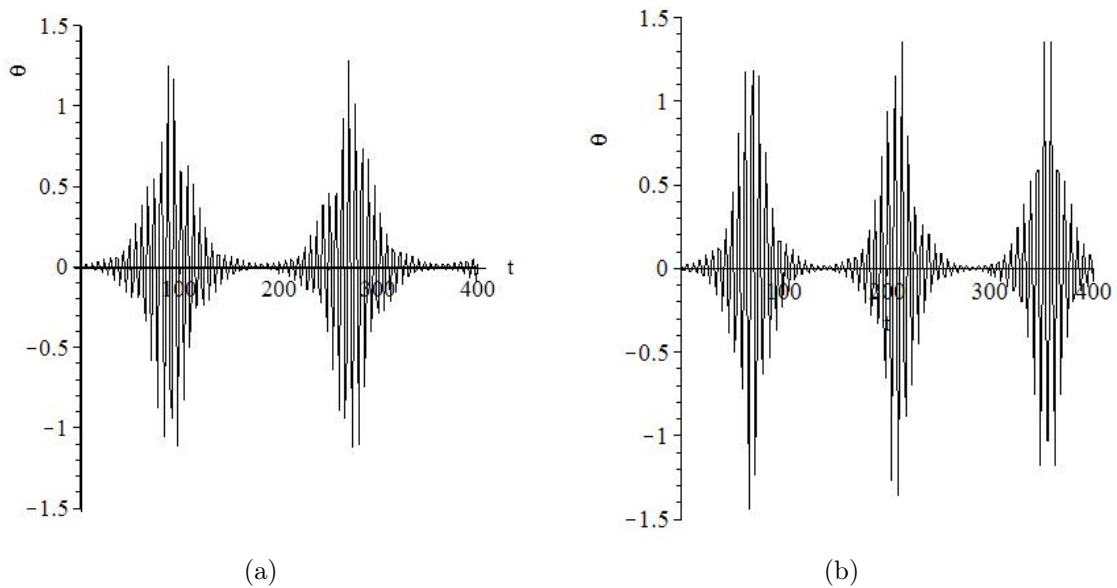


Figura 23: Soluções da equação de movimento do pêndulo de comprimento variável.

Na figura 23 apresenta-se a evolução temporal da equação (5.2), ou seja, do pêndulo com comprimento variável. No gráfico (a) foi usado o parâmetro $\lambda = 0.07$ e em (b) escolheu-se $\lambda = 0.095$. Em ambos os gráficos tem-se $\omega = 2$ e as seguintes condições iniciais $\theta(0) = 0.02$ e $\dot{\theta}(0) = 0$. Em ambos tem-se um comportamento estável com amplitude variável e com período determinado. Aumentando o valor de λ no segundo gráfico, percebe-se que o período diminuiu.

Repete-se o mesmo procedimento para pêndulo com ponto de suspensão oscilante,

integrando a equação (5.6). O gráfico (a) da figura 24 é semelhante ao do pêndulo com comprimento variável, ele apresenta também um comportamento estável e escolhemos $\omega = 2$, $\lambda = 0.06$ e como condições iniciais $\theta(0) = 0.02$ e $\dot{\theta}(0) = 0$. No entanto, no gráfico (b) foi escolhido $\theta(0) = 1.0$ e $\dot{\theta}(0) = 0$ e já verifica-se um comportamento irregular.

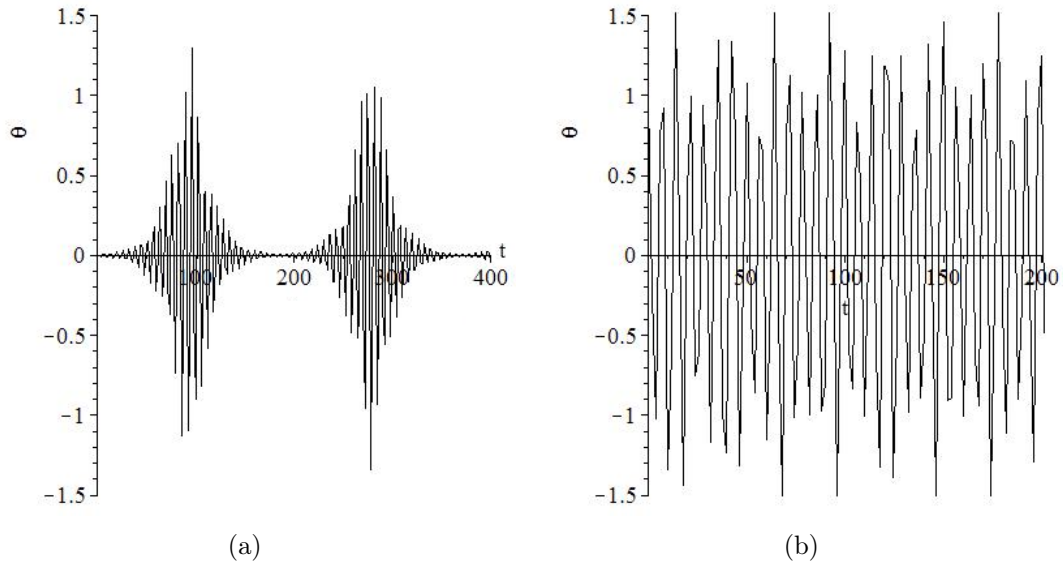


Figura 24: Soluções da equação de movimento do pêndulo com ponto de suspensão oscilante.

Comparando a equação de movimento do pêndulo com ponto de suspensão oscilante, equação (5.6), e sua aproximação para pequenos ângulos, que torna-se a equação de Mathieu, equação (5.7). Usa-se $\lambda = 0.06$ e $\theta(0) = 1.0$ e $\dot{\theta}(0) = 0$. Na figura 25 (a) temos a solução numérica da equação (5.6) e em (b) a solução da equação de Mathieu (5.7). Verifica-se que o resultado da equação de Mathieu concorda com a equação do pêndulo apenas para pequenos ângulos.

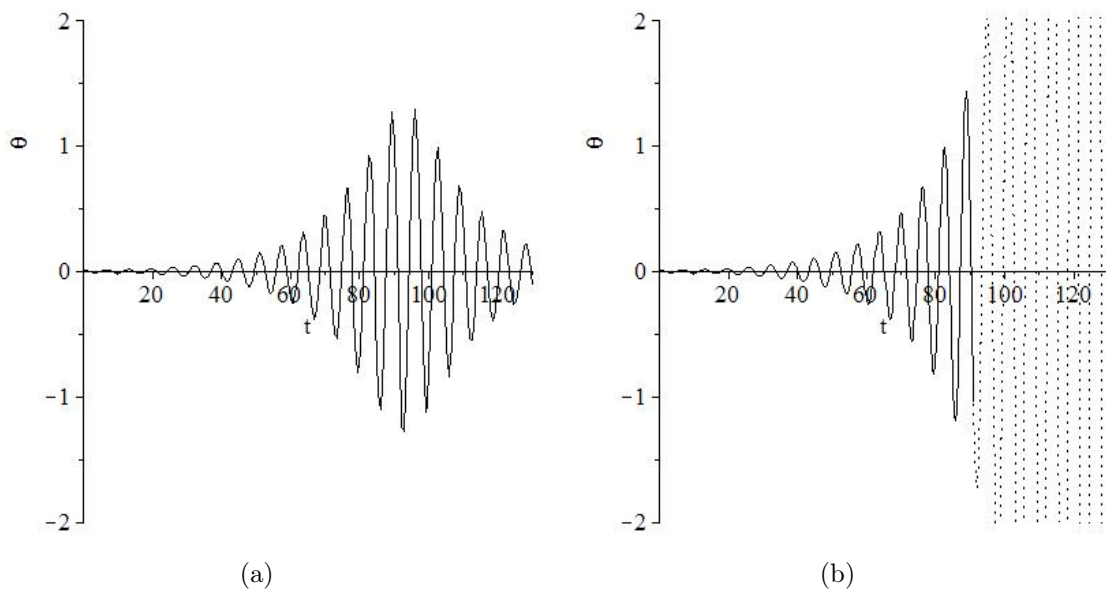


Figura 25: Comparação entre a evolução temporal da solução numérica da equação do pêndulo com ponto de suspensão oscilante (gráfico (a)) e a solução da equação de Mathieu (gráfico (b)).

6 CONCLUSÕES

Neste trabalho, apresenta-se uma introdução aos osciladores paramétricos, explica-se suas definições, alguns exemplos presentes na Física e suas principais características. Escolhem-se dois osciladores paramétricos: pêndulo com ponto de suspensão oscilante e pêndulo com comprimento variável e utiliza-se o formalismo lagrangeano para deduzir as equações de movimento de ambos os sistemas. Através de uma mudança de variáveis, mostra-se que a equação de movimento pode ser descrita por uma equação de Mathieu, para pequenas oscilações. Mostra-se também que a equação de Mathieu para o movimento é um caso particular da equação confluyente de Heun.

Apresentam-se alguns gráficos das soluções da equação de movimento dos pêndulos paramétricos e observa-se que, dependendo dos parâmetros e das condições iniciais do sistema, podem existir um comportamento estável ou irregular. Além disso, verifica-se que a função de Mathieu (ou a solução confluyente de Heun) é satisfatória para descrever o movimento, para pequenas oscilações.

REFERÊNCIAS

- ABRAMOWITZ, Milton; STEGUN, Ireen. **Handbook of Mathematical Functions**, Applied Mathematics Series-55. New York: Dover, 1964. 1046p.
- AKULENKO, L. D; NESTEROV S. V. The stability of the equilibrium of a pendulum of variable length. **Journal of Applied Mathematics and Mechanics**, v.73, p.642-647, 2009.
- ARFKEN, George B.; WEBER, Hans J.. **FÍSICA MATEMÁTICA: Métodos Matemáticos para Engenharia e Física**. 6. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007. 900 p.
- ARSCOTT, F. M. **PERIODIC DIFFERENTIAL EQUATIONS: An Introduction to Mathieu, Lamé, and Allied Functions**. Londres: Pergamon Press, 1964. 66 v. (International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics).
- BARTUCCELLI, M. V.; GENTILE, G.; GEORGIOU, K. V. On the dynamics of a vertically driven damped planar pendulum. **Royal Society of London Proceedings Series A**, vol. 457, p.3007 - 3022. 2001.
- BUTIKOV, Eugene. Parametric Resonance. **Computing In Science e Engineering (CiSE)**, Russia, p.76-83, maio 1999.
- CASE, William. Parametric Instability: An Elementary Demonstration and Discussion. **American Journal Of Physics**, New York, v. 48, n. 3, p.218-221, mar. 1980.
- COISSON, R.; VERNIZZI, G.; XIAOKE Yang. Mathieu Functions and Numerical Solutions of the Mathieu Equation. Open-source Software For Scientific Computation (OSSC), Guiyang, p.3-10, set. 2009.
- EL-JAICK, L.J., FIGUEIREDO, B.D.B. Transformations of Heun's equation and its integral relations. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**, v.44, cap. 7, fevereiro 2011.
- FELDMAN, Joel. **The Variable Length Pendulum**. Disponível em: <http://www.math.ubc.ca/~feldman/apps/vlPendulum.pdf>. Acesso em: 27 maio 2011.
- FUNADA, T; WANG, J; JOSEPH, D.D; TASHIRO, N; SONODA, Y. **Solution of Mathieu's equation by Runge-Kutta integration**. 2005.
- GUTIÉRREZ-VEGA, J. C. et al. Mathieu functions, a visual approach. **American Journal Of Physics**, Nova York, v. 71, n. 3, p.233-242, mar. 2003.
- GUTIÉRREZ-VEGA, J.; CHÁVEZ-CERDA, S.; RODRÍGUEZ-DAGNINO, Ramón. Free

- oscillations in an elliptic membrane. **Revista Mexicana de Física**, Mexico, v. 6, n. 45, p.613-622, dez. 1999.
- GUTIÉRREZ-VEGA, Julio C. **Theory and numerical analysis of the Mathieu functions**. 2008. Disponível em: <http://optica.mty.itesm.mx/pmog/Papers/Mathieu.pdf>. Acesso em: 25 jan. 2012.
- HILLE, Einar. **Ordinary Differential Equations in the Complex Domain**. New York: John Wiley, c1976. 484p.
- HOCHSTADT, Harry. **Special Functions of Mathematical Physics**. New York: Holt, Rinehart And Winston, 1961. 81 p.
- HOUNKONNOU, Mahouton; RONVEAUX, André. About derivatives of Heun's functions from polynomial transformations of hypergeometric equations. **Applied Mathematics And Computation**, Benin, p.421- 424, 2009.
- KELLEY, Walter G.; PETERSON, Allan C. **The Theory of Differential Equations: Classical and Qualitative**. Springer, 2010. p 423.
- LAARHOVEN, van B.J.H. **Stability Analysis of Parametric Roll Resonance**. DCT 2009.062. Eindhoven, 2009.
- LANDAU, L.; LIFCHITZ, E. **Mecânica**. São Paulo: Hemus, 2004. 235 p.
- LEÃO, Salviano A. **Notas de Aula: Mecânica Clássica**. Instituto de Física. Universidade Federal de Goiás. Disponível em: <http://www.ebah.com.br/content/ABAAAArLQAF/mecanica-classica>. Acesso em: 17 out 2011.
- MAGNUS, Wilhelm; WINKLER, Stanley. **Hill's equation**. New York: Dover, c1979. 129p.
- MANDELSTAM, L.; PAPALEXI, N. Parametric excitation of electric oscillations. **Technical Physics Journal**, v.4, n.1, 1934.
- MINORSKY, Nicholas. **Nonlinear Oscillations**. New York: D. Van Nostrand Company, 1962. 714 p.
- MISES, R. KÁRMAN, T. **Advances in applied mechanics**. New York, Academic Press, v.1, 1948.
- MONTEIRO, Luis Henrique Alves. **Sistemas dinâmicos**. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2006. 625 p.
- MORIN, David. **Introduction to Classical Mechanics: With Problems and Solution**. Cambridge: University Press, 2008. 719p.
- NAYFEH A.H.; MOOK D.T. **Nonlinear Oscillations**. Wiley Classics Library Edition,

New York. 1995

NEIMARK, Juri.I. **Mathematical Models in Natural Science and Engineering**. Springer, 2003

NUSSENZVEIG, Moysés H. **Curso de Física Básica 2**. 4. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2002. 2 v.

RESNICK, Robert; HALLIDAY, David. **Física**. v.2. 3.ed. RIO DE JANEIRO: Ao Livro Técnico, 1984. 398p.

RONVEAUX, A. **Heun's differential equations**. Oxford: Oxford University Press, 1995. 384 p.

ROTHMAN, D.H. **Nonlinear Dynamics I: Chaos**. Massachusetts Institute of Technology. 2004. Disponível em: <http://ocw.mit.edu/courses/earth-atmospheric-and-planetary-sciences/12-006j-nonlinear-dynamics-i-chaos-fall-2006/lecture-notes/course.pdf>. Acesso em: 17 jul 2012

RULLI, Clodoaldo Cordeiro; RINO, José Pedro. Oscilações paramétricas: uma simulação numérica. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, Brasil, v. 29, n. 1, p.71-78, mar. 2007. Disponível em: <http://www.sbfisica.org.br/rbef/pdf/050906.pdf>. Acesso em: 15 jun. 2011.

SUTHERLAND, Mark. **The driven plane pendulum**. Disponível em: <http://www.physics.brocku.ca/fun/NEWT3D/PDF/PENDCHAO.PDF>. Acesso em: 25 maio 2011

THORNTON, Stephen T.; MARION, Jerry B. **Dinâmica clássica de partículas e sistemas**. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

TIPLER, Paul A.; MOSCA, Gene. **Physics for scientists and engineers**. 5 ed. W. H. Freeman, 2004.

VON MISES, Richard; VON KÁRMÁN, Theodore. **Advances in Applied Mechanics**. London: Academic Press, 1964. 1 v.

WANG, Z.X.; GUO, D.R. **Special Functions**. Singapore: World Scientific, 1989.

WHITTAKER, Edmund Taylor; WATSON, George Neville. **A course of modern analysis**. 4. ed. Cambridge: University Press, 1927. 608 p.

WIRKUS, S. RAND, R. RUINA, A. How to pump a swing. **College Mathematics Journal**, 29(4):266-275, 1998.

WOLF, Gerhard. **Mathieu Functions and Hill's Equation**. Chapter 28. Disponível em: <http://dlmf.nist.gov/28>. Acesso em: 15 maio 2011.

APÊNDICE A – A DINÂMICA DOS PÊNDULOS PARAMÉTRICOS DESCRITA PELA EQUAÇÃO CONFLUENTE DE HEUN

O estudo dessa monografia resultou em um trabalho apresentado no XVII Encontro de Iniciação à Pesquisa da UNIFOR, realizado no período de 17 a 21 de outubro de 2011 e encontra-se publicado nos Anais do Evento. Segue-se o trabalho na íntegra

A dinâmica dos pêndulos paramétricos descrita pela equação confluyente de Heun

Kilvia Maria Viana Ávila¹ (IC), Marco Antonio Bezerra Diniz² (IC), Marcony Silva Cunha³ (PQ)

1. *Universidade Estadual do Ceará - UECE*
2. *Universidade Estadual do Ceará - UECE, ICT FUNCAP*
3. *Grupo de Física Teórica - GFT, UECE*

kilvia_ avila@yahoo.com.br

Palavras-chave: *Pêndulo paramétrico. Equação confluyente de Heun. Equação de Mathieu*

Resumo

Neste trabalho, estudamos a dinâmica de dois tipos de osciladores paramétricos: o pêndulo com ponto de suspensão oscilante e o pêndulo com comprimento variável. Mostramos que, para pequenas oscilações, a equação do movimento pode ser descrita pela equação confluyente de Heun. Adicionalmente, verificamos que a equação de Mathieu para o movimento é um caso particular da equação confluyente de Heun. Utilizando softwares gráficos, apresentamos as soluções da equação de movimento dos pêndulos. Verificamos que, para pequenas oscilações, a solução confluyente de Heun (ou a função de Mathieu) é satisfatória para descrever o movimento nessas condições.

Introdução

Em sistemas oscilantes, quando os parâmetros característicos variam com o tempo, de forma periódica ou não, de maneira a interferir na oscilação inicial desses sistemas, dizemos que o sistema sofre uma oscilação paramétrica [1]. Um exemplo simples desse tipo de oscilação é um brinquedo bastante conhecido das crianças, o balanço, que pode entrar em movimento devido somente ao movimento de subida e descida periódica do centro de gravidade do corpo de quem está no balanço [2]. Isso pode ser conseguido jogando as pernas para o alto. Oscilações paramétricas também ocorrem em circuitos elétricos, como por exemplo, em um circuito RLC quando variamos o valor da capacitância ou da indutância periodicamente [3].

Neste trabalho estudamos a dinâmica de dois tipos de osciladores paramétricos: o pêndulo com ponto de suspensão oscilante e o pêndulo com comprimento variável. Deduzimos a equação de movimento para os pêndulos e mostraremos que, para pequenas oscilações, a equação do movimento pode ser descrita pela equação confluyente de Heun ou pela equação de Mathieu.

Metodologia

Utilizamos o formalismo lagrangeano para deduzir a equação de movimento dos dois osciladores paramétricos estudados neste trabalho. Através de uma substituição de variáveis, mostramos que a equação do movimento pode ser descrita pela equação confluyente de Heun, para pequenas oscilações. Adicionalmente, mostraremos que a equação de Mathieu para o movimento é um caso particular da equação confluyente de Heun. Concluímos o presente trabalho apresentando as soluções gráficas.

Resultados e Discussão

Considere um pêndulo de massa m e comprimento fixo l no qual o ponto de suspensão é submetido a um deslocamento vertical governado pela equação $h(t) = h_0 \cos(\omega t)$. Na fig.(26) abaixo temos uma representação desse tipo de pêndulo [8].

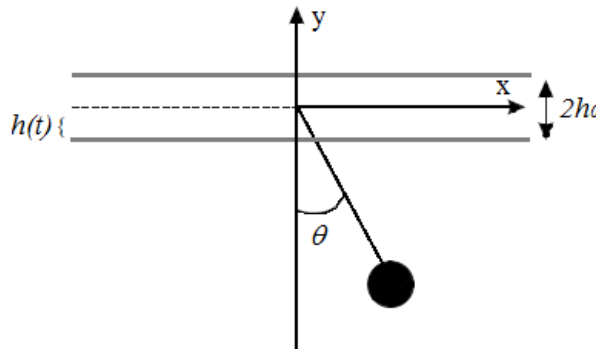


Figura 26: Pêndulo com ponto de suspensão oscilante
Fonte: Adaptado de Rulli e Rino (2007)

O sistema é conservativo e as únicas forças que atuam na partícula são a força peso e a tração do fio. Utilizando as equações de Euler-Lagrange, podemos determinar sua equação do movimento. No sistema de referência cartesiana (x, y) , a posição da partícula de massa m em um instante qualquer é descrita pelas equações abaixo [8]:

$$x(t) = l_0 \sin \theta \quad (\text{A.1})$$

$$y(t) = h(t) - l_0 \cos \theta \quad (\text{A.2})$$

A lagrangeana deste problema pode ser escrita como:

$$L = T - U = \frac{1}{2}m \left[l_0^2 \dot{\theta}^2 + \dot{h}^2 + 2l_0 \dot{h} \dot{\theta} \sin \theta \right] - mg(h - l_0 \cos \theta) \quad (\text{A.3})$$

onde o ponto sobre a variável θ representa uma derivada em relação a t . Aplicando as equações de Euler-Lagrange, chegamos a equação de movimento:

$$\ddot{\theta}(t) + \left(\frac{g}{l_0} + \frac{\ddot{h}(t)}{l_0} \right) \sin \theta(t) = 0 \quad (\text{A.4})$$

Introduzindo os seguintes parâmetros dimensionais, a saber, $\lambda = \frac{h_0}{l_0}$ e $\omega_0^2 = \frac{g}{l_0}$. Para facilitar os cálculos, escrevemos a frequência em unidades de ω_0 e o tempo em unidades do inverso de ω_0 . Assim, a equação de movimento fica agora dada por:

$$\ddot{\theta}(t) + (1 - \lambda \omega^2 \cos(\omega t)) \sin \theta(t) = 0 \quad (\text{A.5})$$

Considerando que, para pequenos ângulos, $\sin \theta \approx \theta(t)$ e $\omega \approx 2$, temos:

$$\ddot{\theta}(t) + (1 - 4\lambda \cos \omega t) \theta(t) = 0 \quad (\text{A.6})$$

Fazendo uma substituição de variável, $x = \cos^2(\omega t/2)$, encontramos a seguinte equação:

$$\theta''(x) + \left[\frac{1/2}{x} + \frac{1/2}{x-1} \right] \theta'(x) + \frac{-8k\lambda x + 4k\lambda + k}{x(x-1)} \theta(x) = 0 \quad (\text{A.7})$$

onde $k = -\frac{1}{\omega^2}$.

Consideremos agora um pêndulo cujo comprimento varia periodicamente com o tempo. Também neste caso, este tipo de pêndulo pertence à classe de osciladores paramétricos e sua dinâmica estuda em alguns livros didáticos de Mecânica Teórica [2]. Na fig. (27) abaixo temos uma representação do pêndulo de massa m preso a um fio de massa desprezível no qual o comprimento sofre uma variação temporal.

Para encontramos a equação do movimento desse sistema oscilante, utilizamos novamente as equações de Euler-Lagrange. No sistema de referência cartesiana (x, y) a posição da massa m em um instante qualquer é descrita então pelas equações abaixo [8]:

$$x(t) = l(t) \sin \theta(t) \quad (\text{A.8})$$

$$y(t) = -l(t) \cos \theta(t) \quad (\text{A.9})$$

sendo θ o ângulo entre a corda e o eixo vertical e $l(t) = l_0 + a \cos(\omega t)$ o comprimento do pêndulo.

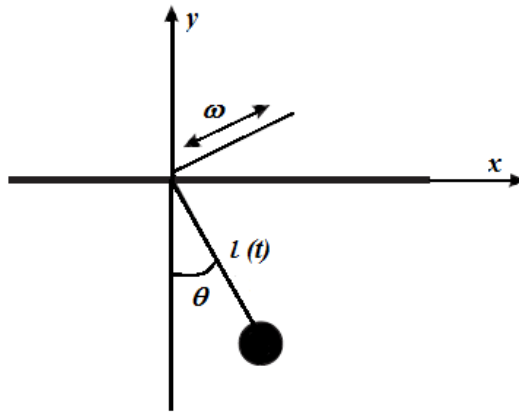


Figura 27: Pêndulo com comprimento variável oscilando
Fonte: Adaptado de Rulli e Rino (2007)

A função Lagrangeana pode ser definida como

$$L = T - U = \frac{1}{2}m \left(l^2 \dot{\theta} + \dot{l}^2 \right) + mgl \cos \theta \quad (\text{A.10})$$

Aplicando as equações de Euler-Lagrange, encontramos a seguinte equação de para o movimento do pêndulo, i. e.,

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{2\dot{l}\dot{\theta}(t)}{l} + \frac{g \sin \theta(t)}{l} = 0 \quad (\text{A.11})$$

Como dito anteriormente, escrevemos a frequência em unidades de ω_0 e o tempo em unidades do inverso de ω_0 . Fazendo as substituições $\dot{l} = -a\omega \sin \omega t$, $\lambda = a/l_0$ e $\omega_0^2 = \frac{g}{l_0}$ chegamos a equação de movimento do pendulo com comprimento variável, a saber,

$$\ddot{\theta}(t) - \frac{2\lambda\omega \sin(\omega t)}{1 + \lambda \cos(\omega t)} \dot{\theta}(t) + \frac{\sin \theta(t)}{1 + \lambda \cos(\omega t)} = 0 \quad (\text{A.12})$$

Fazendo a substituição de variável $z(t) = (1 + \lambda \cos \omega t)\theta(t)$ e considerando que $\sin(z(t)) \approx z(t)$, a equação que governa o pêndulo resulta em:

$$\ddot{z}(t) + [1 + 3\lambda \cos(\omega t)]z(t) = 0 \quad (\text{A.13})$$

Fazendo uma substituição de variável, $x = \cos^2(\omega t/2)$, encontramos a seguinte equação:

$$z''(x) + \left[\frac{1/2}{x} + \frac{1/2}{x-1} \right] z'(x) + \frac{(6k\lambda x - 3k\lambda + k)}{x(x-1)} z(x) = 0 \quad (\text{A.14})$$

onde $k = -1/\omega^2$.

Equação Confluente de Heun

A equação diferencial confluyente de Heun em sua forma canônica simétrica é dada por [4]:

$$\frac{d^2 H}{dz^2} + \left(\alpha + \frac{\beta + 1}{z} + \frac{\gamma - 1}{z - 1} \right) \frac{dH}{dz} + \frac{(\delta + \alpha/2(\beta + \gamma + 2))z + \eta + \beta/2 + 1/2(\gamma - \alpha)(\beta + 1)}{z(z - 1)} H = 0. \quad (\text{A.15})$$

Esta equação possui singularidades regulares nos pontos $z = 0$ e $z = 1$ e uma singularidade irregular no infinito. Ela tem sido objeto de muitos trabalhos nos últimos anos devido a um grande número de aplicações em física matemática, mecânica quântica e relatividade geral.

A equação (A.7), que descreve o movimento do pêndulo com ponto de suspensão oscilante, é uma equação confluyente de Heun para os seguintes parâmetros:

$$\alpha = 0, \quad \beta = -\frac{1}{2}, \quad \gamma = -\frac{1}{2}, \quad \delta = -8\lambda k \quad e \quad \eta = 4\lambda k + k + \frac{3}{8} \quad (\text{A.16})$$

Também podemos escrever a equação (A.14) como uma equação confluyente de Heun para os seguintes parâmetros:

$$\alpha = 0, \quad \beta = -\frac{1}{2}, \quad \gamma = -\frac{1}{2}, \quad \delta = 6\lambda k \quad e \quad \eta = -3\lambda k + k + \frac{3}{8} \quad (\text{A.17})$$

Equação de Mathieu

A equação de Mathieu é uma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem com coeficientes periódicos, introduzida pelo matemático francês É. Mathieu quando estudava oscilações livres em uma membrana elíptica [5]. Sua forma ordinária é

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + (a - 2q \cos 2z)u(z) = 0 \quad (\text{A.18})$$

Contudo, é conveniente, às vezes, expressá-la na forma algébrica. Isso é feito a partir de uma substituição na variável independente, $x = \cos(2z)$ na equação (A.18) resultando em:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \left[\frac{1/2}{x - 1} + \frac{1/2}{x + 1} \right] \frac{du}{dx} + \left[\frac{-a/4 + qx/2}{(x + 1)(x - 1)} \right] u(x) = 0 \quad (\text{A.19})$$

A equação acima possui dois pontos singulares regulares em $x = 1$ e $x = -1$ e um ponto singular irregular no infinito. Sendo assim, fazendo outra mudança de variável, $x = 2z - 1$, chegamos à seguinte equação:

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \left[\frac{1/2}{z} + \frac{1/2}{z-1} \right] \frac{du}{dz} + \left[\frac{-a/4 + qz - q/2}{z(z-1)} \right] u(z) = 0 \quad (\text{A.20})$$

Comparando a eq. (A.20) acima com a eq. (A.15), podemos ver que a equação de Mathieu é um caso particular da equação confluyente de Heun para valores particulares dos parâmetros, a saber:

$$\alpha = 0, \quad \beta = -\frac{1}{2}, \quad \gamma = -\frac{1}{2}, \quad \delta = q \quad e \quad \eta = \frac{-4q - 2a + 3}{8} \quad (\text{A.21})$$

Se $u(z) = M(a, q; z)$ é solução da equação de Mathieu e $H(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta; z)$ é solução da equação confluyente Heun, relacionamos por:

$$M(a, q; z) = H\left(0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, q, \frac{-2a - 4q + 3}{8}; z\right) \quad (\text{A.22})$$

Gráficos

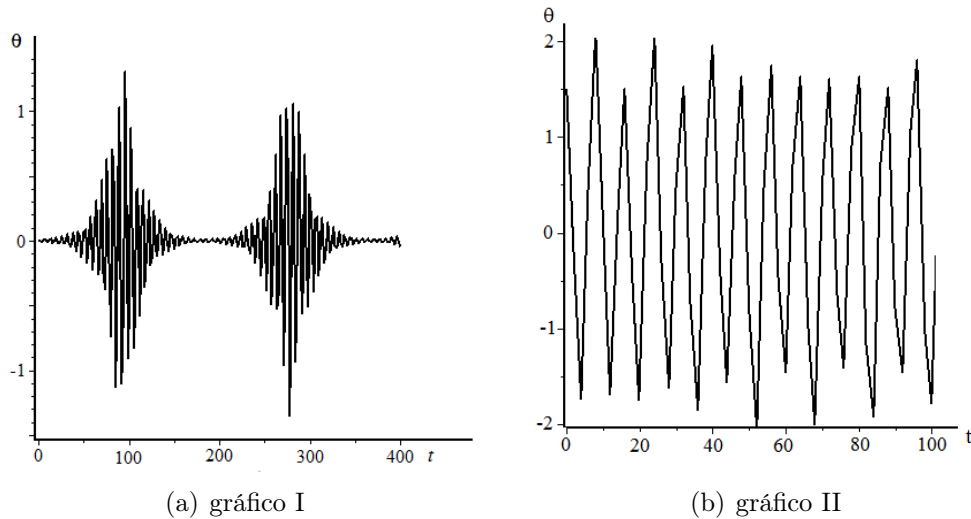


Figura 28: Evolução temporal de pêndulo com ponto de suspensão oscilante. No gráfico I temos um comportamento estável. No gráfico II temos um comportamento caótico.

Na figura (28) integramos numericamente a equação (A.5), isto é, a equação do pêndulo com ponto de suspensão oscilante. Para o gráfico (I) usamos $\omega = 2$; $\lambda = 0.06$; $\theta_0 = 0.01$; $\dot{\theta} = 0$. Podemos perceber um comportamento estável com amplitude variável com período bem determinado. Para o gráfico (II) utilizamos $\omega = 2$; $\lambda = 0.06$; $\theta_0 = 0.06$; $\dot{\theta} = 0$, onde verificamos um comportamento caótico.

Na fig. (29), gráfico II, integramos numericamente a equação (A.12), que é equação do pêndulo com comprimento variável para os valores $\omega = 2$; $\lambda = 0.08$; $\theta_0 = 0.01$; $\dot{\theta} = 0$ e comparamos com a solução da equação de Mathieu (A.13), verificando que a solução só é válida para pequenos valores de z .

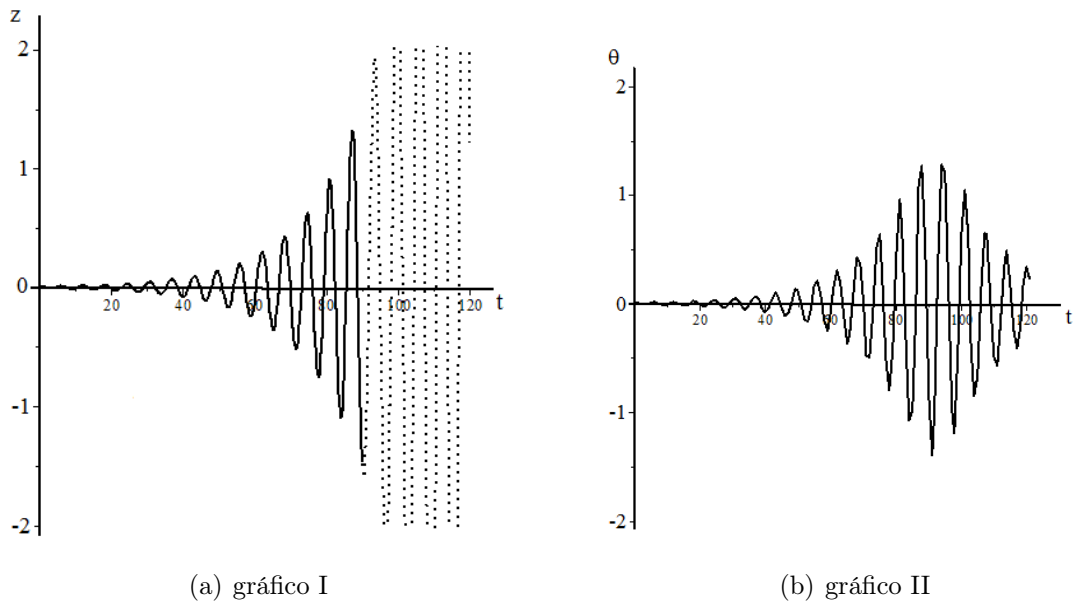


Figura 29: Comparação entre a evolução temporal obtida através da solução de equação de Mathieu (gráfico I) e solução numérica da equação do pêndulo com comprimento variável (gráfico II).

Conclusão

Neste trabalho estudamos a dinâmica de osciladores paramétricos para pequenas oscilações. Mostramos que suas soluções são descritas pela equação de Mathieu, sendo esta um caso particular da equação confluyente de Heun. Apresentamos as soluções da equação de movimento dos pêndulos e verificamos que, para pequenas oscilações, a solução confluyente de Heun (ou a função de Mathieu) é satisfatória para descrever o movimento nessas condições.

Referências

- [1] LANDAU, L.; LIFCHITZ, E. Mecânica. São Paulo: Hemus, 1970. 235 p.
- [2] MINORSKY, Nicholas. Nonlinear Oscillations. New York: D. Van Nostrand Company, 1962. 714 p.
- [3] BUTIKOV, Eugene. Parametric Resonance. Computing In Science e Engineering (CiSE), Russia, n. ,p.76-83, maio 1999.
- [4] HOUNKONNOU, Mahouton; RONVEAUX, André. About derivatives of Heun's functions from polynomial transformations of hypergeometric equations. Applied Mathematics And Computation, Benin, n. , p.421- 424, 2009.
- [5] GUTIÉRREZ-VEGA, J.; CHÁVEZ-CERDA, S.; RODRÍGUEZ-DAGNINO, Ramón. Free oscillations in an elliptic membrane. Revista Mexicana de Física, Mexico, v. 6, n. 45, p.613-622, dez. 1999.

- [6] COISSON, R.; VERNIZZI, G.; XIAOKE Yang. Mathieu Functions and Numerical Solutions of the Mathieu Equation. Open-source Software For Scientific Computation (ossce), Guiyang, n. , p.3-10, set. 2009.
- [7] GUTIÉRREZ-VEGA, J.; CHÁVEZ-CERDA, S.; RODRÍGUEZ-DAGNINO, Ramón. Free oscillations in an elliptic membrane. Revista Mexicana de Física, Mexico, v. 6, n. 45, p.613-622, dez. 1999.
- [8] RULLI, Clodoaldo Cordeiro; RINO, José Pedro. Oscilações paramétricas: uma simulação numérica. Revista Brasileira de Ensino de Física, Brasil, v. 29, n. 1, p.71-78, mar. 2007. Disponível em: <<http://www.sbfisica.org.br/rbef/pdf/050906.pdf>>. Acesso em: 15 jun. 2011.
- [9] SUTHERLAND, Mark. The driven plane pendulum. Disponível em: <<http://www.physics.brocku.ca/fun/NEWT3D/PDF/PENDCHAO.PDF>>. Acesso em: 25 maio 2011.