



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ**  
**INGRYD CÂNDIDO MELO**

**ANÁLISE NUMÉRICA DO OSCILADOR HARMÔNICO CLÁSSICO**  
**PELO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS.**

**FORTALEZA, CEARÁ**

**2012**

INGRYD CÂNDIDO MELO

ANÁLISE NUMÉRICA DO OSCILADOR HARMÔNICO CLÁSSICO  
PELO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS.

Monografia apresentada ao Curso de Graduação em Física do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciada em Física.

Orientador: Prof. Me Francisco de Assis Leandro Filho

**FORTALEZA, CEARÁ**

**2012**

MXXXX Melo, Ingryd Cândido

Análise numérica do oscilador harmônico clássico pelo método de elementos finitos/Ingryd Cândido Melo. – Fortaleza, 2012.

Orientador: Prof. Me. Francisco de Assis Leandro Filho.

Monografia (Graduação em Física) – Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologias.

1. Elementos Finitos. 2. Oscilador Harmônico. 3. Mecânica Clássica. Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia.

CCD: XXX.XX

INGRYD CÂNDIDO MELO

ANÁLISE NUMÉRICA DO OSCILADOR HARMÔNICO CLÁSSICO  
PELO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS.

Monografia apresentada ao Curso de Graduação em Física do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciada em Física.

Orientador: Prof. Me Francisco de Assis Leandro Filho

Aprovada em: \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_\_\_

Conceito Obtido: \_\_\_\_\_

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Me. Francisco de Assis Leandro Filho (Orientador)  
Universidade Estadual do Ceará – UECE  
Orientador

---

Prof. Me. Ítalo Pereira Bezerra  
Universidade Estadual do Ceará – UECE

---

Prof. Me. Anderson Pereira Rodrigues  
Universidade Estadual do Ceará – UECE

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado saúde e forças necessárias para enfrentar os obstáculos impostos na feitoria deste trabalho.

A meus pais, Cristiane Cândido e F<sup>co</sup> Isauton Melo, por ter dado apoio incondicional nos momentos que pensei em desistir, estavam ao meu lado me motivando a seguir em frente.

Agradeço em especial ao Francisco de Assis Leandro Filho, pela importante orientação acadêmica neste trabalho com atenção, paciência, confiança e profissionalismo.

Ao José Régis Vieira Coutinho por ter me mostrado a sala L5, pois sem isso eu não teria o conhecimento e título que tenho hoje, pela dedicação integral em todos os problemas que enfrentei, e por ter disponibilizado parte do seu “corrido” tempo em tirar dúvidas relativas na realização deste trabalho monográfico.

Agradeço também à Universidade Estadual do Ceará e aos seus docentes pelo ensino de qualidade oferecido, que possibilitou o meu conseqüente aprendizado.

“Transportai um punhado de terra todos os dias e fareis uma montanha.”

(Confúcio)

## RESUMO

Dentre os métodos utilizados para obtenção numérica de soluções de equações diferenciais, o método de Elementos Finitos recebe um grande destaque devido a sua precisão nas soluções. O presente trabalho visa à aplicação do método de Elementos Finitos para solucionar alguns problemas da Mecânica Clássica cuja solução analítica se faz de difícil derivação. Para tanto, é aplicado o método de Resíduos Ponderados, aplicando-se três tipos de solução para cada problema: o método da Colocação Pontual, o método dos Mínimos Quadráticos e o método de Galerkin. Determina-se para cada uma das três maneiras as soluções das equações do Oscilador Harmônico Simples, Amortecido e Forçado. Além de comparar a solução analítica e a solução numérica, determinadas pelas três maneiras, faz-se o teste de convergência para obter a exatidão das soluções, ou seja, para ter o quão à solução numérica se aproxima da solução correta. Para a construção dos gráficos e obtenção do erro, utiliza-se o programa SCILAB.

**Palavras-chave:** Elementos Finitos, Oscilador Harmônico, Mecânica Clássica.

## **ABSTRACT**

Among the methods used for calculating numerical solutions of differential equations, the method of finite elements receives a large prominence because of its accuracy in the solutions. This work aims at applying the finite element method to solve some problems of classical mechanics whose analytical solution becomes to difficult derivation. Therefore, the applied method is the Weighted Residuals by applying three types of solution for each problem: the Collocation method, the method of Least Squares and Galerkin Method. Is determined using for each of the three ways the solutions of equations of Simple Harmonic Oscillator, Damped and Forced. Besides comparing the analytical solution and numerical solution, is determined using by three ways. The convergence is tested for solutions correctness, in other words, how to get solutions approaches the correct solution. For the construction of graphics construction and for obtaining the error, use is made of the program SCILAB is used.

**Keywords:** Finite Elements, Harmonic Oscillator, Classical Mechanics.

## SUMÁRIO

<b>1. Introdução.....</b>	<b>9</b>
<b>2. Fundamentação Teórica .....</b>	<b>10</b>
<b>2.1. Métodos dos Elementos Finitos .....</b>	<b>10</b>
2.1.1 Fundamentação Matemática.....	12
2.1.2. Método dos Resíduos Ponderados .....	17
<b>2.2. Movimento Harmônico .....</b>	<b>22</b>
2.2.1. Oscilador Harmônico Simples.....	22
2.2.2. Oscilador Harmônico Amortecido.....	27
2.2.3. Oscilador Harmônico Forçado.....	32
<b>3. Metodologia.....</b>	<b>37</b>
<b>4. Resultados .....</b>	<b>85</b>
<b>5. Conclusão .....</b>	<b>107</b>
<b>6. Referências.....</b>	<b>108</b>

## 1. Introdução

Oscilações são encontradas em todas as áreas da física. Exemplos de sistemas mecânicos vibratórios incluem pêndulo, um sistema massa-mola, diapasões, cordas de instrumentos musicais, colunas de ar em instrumentos de sopro, dentre outros. Sendo o comportamento dessas oscilações explicado através de equações diferenciais.

Na resolução de equações diferenciais é imprescindível a utilização de métodos auxiliares para a obtenção mais eficiente de resultados numéricos. Dentre esses artifícios estão o método de Elementos Finitos. O aumento abrupto de sua aplicabilidade tanto em problemas de campo na Física quanto em programas computacionais permitiu um amadurecimento e necessidade de seu uso. Dentre as suas aplicações de campo, destacam-se: descobrir tensões sofridas por barras, o modo de vibração de uma estrutura e o deslocamento de um corpo.

A técnica consiste na geração de funções admissíveis, as quais são aproximações da solução analítica obtidas pelos métodos tradicionais. Haja vista o surgimento de erros é necessário escolher um método dos Elementos Finitos para estimação de valores numéricos com o intuito de reduzir quaisquer erros, utilizando dentre outros, o método de Resíduo Ponderado.

O presente trabalho monográfico tem como objetivo avaliar o desempenho de soluções aproximadas obtidas pela aplicação de Métodos de Resíduos Ponderados, especificamente o Método da Colocação Pontual, Método dos Mínimos Quadrados e o Método de Galerkin, à análise de osciladores harmônicos clássicos.

Desenvolve-se, em seguida, um estudo comparativo de soluções aproximadas obtidas pelo emprego de bases de funções lineares e polinomiais de grau superior para a geração das funções de admissível, cujas são funções que possuem as mesmas características da solução analítica.

Nesse sentido o trabalho apresenta uma combinação de técnicas de enriquecimento da aproximação sobre Métodos de Resíduos Ponderados, e para a resolução do problema, apodera-se dos métodos dos Mínimos Quadrados, da Colocação Pontual e de Galerkin.

## 2. Fundamentação Teórica

### 2.1. Métodos dos Elementos Finitos

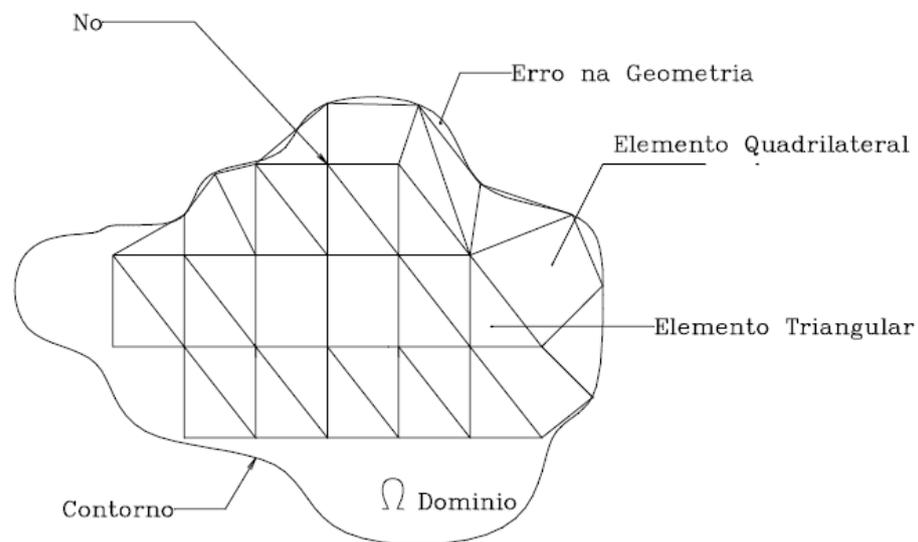
O Método dos Elementos Finitos (MEF) é uma metodologia de diagnóstico numérico para obtenção de soluções aproximadas em problemas de valor de contorno (HUEBNER et al., 1995).

Este método consiste em discretizar o domínio de soluções do contínuo em uma quantidade finita de subdomínios simples, denominados elementos finitos (GORDON et al., 1991), ou seja, a ideia é transformar um problema complexo na soma de diversos problemas simples.

Na Figura 2.1 pode ser visto um esboço de alguns elementos básicos de um modelo de elementos finitos e sua nomenclatura.

Figura 2.1: Esquema de um modelo genérico de Elementos Finitos.

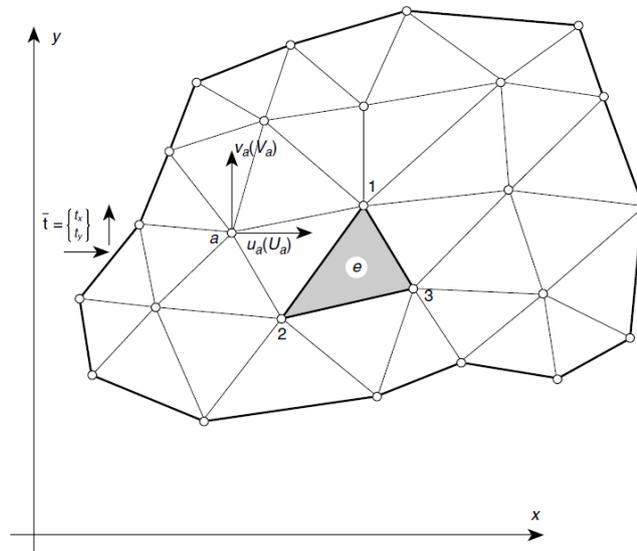
Fonte: PAVANELO, 2005.



Essencialmente, na análise por elementos finitos não só resulta na geração de uma malha por meio da sua divisão em pequenas, porém finitas, regiões chamadas elementos, mas também em determinar a estrutura a ser analisada (DE ALBUQUERQUE, 1999).

Figura 2.2 - Uma região de tensão plana dividida em elementos finitos.

Fonte: ZIENKIEWICZ e MORGAN, 2083.



De acordo com Zienkiewicz e Morgan (1983) quando se usa o MEF o problema não consiste em buscar uma solução aproximada que satisfaça as condições de contorno para todo o domínio, o que pode ser praticamente impossível em um problema complexo, e sim buscar estas soluções em cada elemento separadamente. Suponha que o funcional para um elemento seja  $\psi_i$ , sua soma sobre a malha com  $n$  elementos corresponde ao funcional de todo o domínio:

$$\psi = \sum_{i=1}^n \psi_i \quad \text{equação 2.1}$$

Para cada um dos elementos  $i$  existe uma função de interpolação (função aproximadora)  $u$  de ordem  $m$  descrita em função dos nós dos elementos (parâmetros nodais  $\alpha_j$ ) e por funções de forma ( $\phi$ ) (DA SILVA, 2009). A função de interpolação é descrita como:

$$u = \sum_{j=1}^m \alpha_j \phi_j \quad \text{equação 2.2}$$

O funcional é descrito por:

$$\psi(\alpha_j) = \sum_{i=1}^n \psi(\alpha_j)_i \quad \text{equação 2.3}$$

Conforme Da Silva (2009) para se obter um sistema de equações algébricas lineares basta aplicar as condições de estacionariedade geral. Os valores dos parâmetros nodais  $\alpha_j$  são fornecidos pela solução do sistema de equações, os quais podem estar integrados tanto a deslocamentos, forças internas, tensões, temperaturas, pressão, quanto dependerem da formulação do elemento usado.

Segundo Rade (2003) em comparação com outras técnicas numéricas, as principais vantagens do método dos elementos finitos são as seguintes:

- Elementos de diferentes formas e tamanhos podem ser associados para discretizar domínios de geometria complexa.
- A divisão do contínuo em regiões facilita a modelagem de problemas envolvendo domínios não homogêneos, onde as propriedades físicas variam em função das coordenadas espaciais.
- O método pode ser todo formulado matricialmente, facilitando sua implementação computacional.

Para o entendimento do método de Elementos Finitos, são necessárias algumas fundamentações matemática.

### **2.1.1 Fundamentação Matemática.**

#### **a) Produto Escalar**

De acordo com Steinbruch e Winterle (1987) o produto escalar (ou produto interno usual) de dois vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ , e se representa por  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  ou  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ , ao número real, é definido por:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \quad \text{equação 2.4}$$

O resultado da operação de produto escalar é um escalar.

#### **b) Produto Vetorial**

O produto vetorial entre dois vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ , nesta ordem, é representado por  $\vec{a} \times \vec{b}$  e é definido por (STEINBRUCH E WINTERLE, 1987):

$$\vec{a} \times \vec{b} = (y_1 z_2 - z_1 y_2) \hat{i} - (x_1 z_2 - z_1 x_2) \hat{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \hat{k} \quad \text{equação 2.5}$$

Os autores mencionam que cada componente deste vetor, além disso, pode ser expresso na forma de um determinante de 2ª ordem:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \hat{k} \quad \text{equação 2.6}$$

Sendo  $\hat{i}, \hat{j}$  e  $\hat{k}$ , os vetores unitários do sistema cartesiano tridimensional, nota-se que  $\hat{i} \times \hat{i} = 0$  e que  $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$ , vale ressaltar que  $\hat{i} \times \hat{j} \neq \hat{j} \times \hat{i}$ . O resultado do produto vetorial é um vetor perpendicular ao plano onde estão contidos os vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  (SILVA, 2009).

### c) Produto Interno

De acordo com Da Silva (2009) sendo  $f(x, y, z)$  e  $g(x, y, z)$  funções contínuas por partes em  $D$ , o produto interno sobre  $D$  é definido como,

$$f(x, y, z) \text{ e } g(x, y, z) \in D$$

$$\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle = \int_D f(x, y, z) \cdot g(x, y, z) dD \quad \text{equação 2.7}$$

### d) Integral por partes

Segundo Leithold (1994) uma das técnicas de integração mais amplamente utilizadas é a integração por partes, que é obtida a partir da derivada do produto de duas funções. Se  $f$  e  $g$  são funções diferenciáveis, então,

$$D_x[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

$$f(x)g'(x) = D_x[f(x)g(x)] - g(x)f'(x) \quad \text{equação 2.8}$$

Ao integrar cada membro se obtém:

$$\int f(x)g'(x)dx = \int D_x[f(x)g(x)]dx - \int g(x)f'(x)dx \quad \text{equação 2.9}$$

A equação 2.9 recebe o nome equação de integração por partes. Para os propósitos do cálculo, uma forma mais conveniente desta equação é considerar (LEITHOLD, 1994):

$$u = f(x) \text{ e } v = g(x) \quad \text{equação 2.9}$$

Assim,

$$du = f'(x)dx \text{ e } dv = g'(x)dx \quad \text{equação 2.10}$$

De modo que a equação se transforma em:

$$\int u dv = uv - \int v du \quad \text{equação 2.11}$$

### e) Norma

Segundo Silva (2009) a norma de uma função  $f(x, y, z)$ , denomina-se  $\|f(x, y, z)\|$  e é expressa por:

$$\|f\| = \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}} = \int_D f^2(x, y, z)^{\frac{1}{2}} dD \quad \text{equação 2.12}$$

### f) Norma Ponderada

A norma ponderada de uma função  $f(x, y, z)$  denomina-se  $\|f\|_w$  é dada por:

$$\|f\|_w = \langle f, wf \rangle^{\frac{1}{2}} = \left[ \int_D f^2(x, y, z)w(x, y, z) dD \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{equação 2.13}$$

Onde  $w(x, y, z)$  é uma função quadraticamente integrável, real, não negativa, conforme Da Silva (2009), o que provoca em:

$$\|f\|_w \geq 0$$

### g) Delta de Dirac

Segundo Griffiths (2011) a função delta de Dirac unidimensional, também conhecida como função generalizada ou distribuição, pode ser esboçada como um pico infinitamente alto e infinitesimalmente estreito, deste modo,

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ \infty & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad \text{equação 2.14}$$

E

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad \text{equação 2.15}$$

Tecnicamente,  $\delta(x)$  não é uma função, visto que seu valor não é finito em  $x=0$ , e sim, o limite de uma sequência de funções como retângulos  $R_n(x)$ , de altura  $n$  e largura  $1/n$ , ou triângulos isósceles  $T_n(x)$ , de altura  $n$  e base  $1/n$  (GRIFFITTS, 2011).

Se  $f(x)$  for uma função ordinária e contínua, que não seja outra função delta, o produto de  $f(x)\delta(x)$  é zero em qualquer lugar, exceto em  $x=0$ . Como o produto é zero de qualquer maneira, exceto em  $x=0$ , substitui-se  $f(x)$  por um valor que assume de origem (GRIFFITTS, 2011).

$$\begin{aligned} f(x)\delta(x) &= f(a)\delta(x) \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x) dx &= f(a) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = f(a) \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(a) dx &= f(a) \end{aligned} \quad \text{equação 2.16}$$

Assim, segundo Griffitts (2011) a equação 2.16 é chamada função delta, sob uma integral, que é definida sendo o valor de  $f(x)$  em  $x = a$ , sendo  $a$  um ponto qualquer.

## h) Problemas de Valores de Contorno

Segundo Pavanello (1997) existem dois tipos de condições de contorno:

✓ Condições de Contorno Essenciais: também denominada de condição de contorno de Dirichlet ou de primeira espécie, indica o valor da variável básica ao longo do contorno do domínio físico do problema.

$$u(x) \text{ e } \bar{u}(x) \quad \text{equação 2.17}$$

✓ Condições de Contorno Naturais: também denominada de condição de contorno de Neumann ou de segunda espécie, indica o valor da derivada primeira da variável básica com relação à direção normal externa ao contorno do domínio físico do problema.

$$q(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial n} = \frac{\bar{q}(x)}{K} \quad \text{equação 2.18}$$

Sendo  $n$  a direção normal externa ao contorno.

### i) Funções Admissíveis

Uma função  $\varphi(x, y, z)$  é admissível para o problema se ela for contínua e diferencial em todos os pontos e se ela satisfizer as condições de contorno do problema, afirma Pavanello (1997), dada na forma:

$$\varphi_{j(0,n)} = \varphi_0 + \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j \quad \text{equação 2.19}$$

Sendo  $\alpha_j$  uma constante. As funções  $\varphi_0$  e  $\varphi_{j(1,n)}$  além de ser contínua e diferencial, a função  $\varphi_0$  têm que satisfazer todas as condições de contorno essenciais, já as funções  $\varphi_{j(1,n)}$  tem que satisfazerem as condições de contorno homogêneas associadas (PAVANELO, 1997).

### j) Função Resíduo

Conforme Pavanello (1997) a função resíduo é a solução admissível aplicada na equação diferencial do problema.

$$R(x, y, z) = \frac{d^m}{dt^m} \left( \varphi_0 + \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j \right) + \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} \left( \varphi_0 + \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j \right) + \dots + \frac{d}{dt} \left( \varphi_0 + \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j \right) + \varphi_0 + \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j \quad \text{equação 2.20}$$

### k) Resíduo Ponderado

O resíduo ponderado é dado por:

$$\langle R, W_i \rangle = \int_D R(x, y, z) \cdot W_i(x, y, z) dD = 0 \quad \text{equação 2.21}$$

Onde  $W_i(x, y, z)$  é uma função ponderadora (PAVANELLO, 1997).

### 2.1.2. Método dos Resíduos Ponderados

O Método dos Resíduos Ponderados (MRP) estabelece uma condição natural para a aquisição de soluções aproximadas de vários problemas de engenharia. Segundo Assan (2003), o Método dos Resíduos Ponderados distingue dos métodos ditos variacionais por não carecer da existência de um funcional, utilizando diretamente a equação diferencial (forma forte) do problema a ser resolvido.

A metodologia básica de aplicação dos Métodos de Resíduos Ponderados pode ser separada em seis etapas (DE LEMOS, 2007). Primeiramente se escolhe uma sequência de Funções Admissíveis, para a montagem da função resíduo. Em seguida, escolhe-se uma sequência de Funções Ponderadoras para a montagem dos Resíduos Ponderados. Finalmente, obtém-se a solução aproximada com a substituição dos coeficientes.

O critério de escolha das funções admissíveis, segundo De Lemos (2007), é de ampla importância para o fato do Método de Resíduos Ponderados, visto que a escolha está relacionada à precisão e à velocidade com que a solução numérica é obtida. Definem-se as funções admissível sendo uma aproximação polinomial de caráter geral, pois com a aplicação das condições de contorno e as condições de simetria de forma, a aproximação proposta satisfaz ambas as restrições.

Escolhe-se uma sequência de funções admissíveis para um problema, dependendo do sistema de coordenadas adotado, que podem ser (PAVANELLO, 1997):

$$\{\psi_0(x, y, z), \psi_1(x, y, z), \dots, \psi_j(x, y, z), \dots, \psi_n(x, y, z)\} \quad \text{equação 2.22}$$

Sujeita as seguintes restrições:

- I.  $\psi_j(x, y, z) (j = 0, n)$  necessitam ser contínuas e diferenciáveis até ordem  $2m$ , as derivadas de ordem  $2m$  devem ser contínuas por partes no mínimo.
- II.  $\psi_0(x, y, z)$  deve atender todas as condições de contorno  $B_i(\psi_0) = g_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  em  $C$ .
- III.  $\psi_j(x, y, z)$  devem satisfazer todas as condições de contorno homogêneas associadas  $B_i(\psi_i(x, y, z)) = 0$  com  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Uma função admissível pode  $\psi(x, y, z)$  pode ser expressa por (PAVANELO, 1997):

$$\psi(x, y, z) = \psi_0(x, y, z) + \sum_{j=1}^n \alpha_j \psi_j(x, y, z) \quad \text{equação 2.23}$$

Onde, segundo Pavanello (1997), os operadores  $B_i()$  lineares é uma função admissível, já que deriva de uma combinação linear de funções admissíveis.

Se  $\psi(x, y, z)$  satisfizer todas as condições de contorno, a formulação para o Método dos Resíduos Ponderados é chamado de Forte. Já se a função satisfizer somente as condições de contorno naturais, o Método dos Resíduos Ponderados é chamado de forma Fraca (REDDY, 1993).

Conforme Pavanello (1997) a função resíduo pode ser formulada substituindo a função admissível na equação diferencial do problema, obtendo-se:

$$R(x, y, z) = L_{2m}(\psi(x, y, z)) - f(x, y, z) \text{ em } D$$

Ou seja,

$$R(x, y, z) = L_{2m} \left( \psi_0 + \sum_{j=1}^n \alpha_j \psi_j \right) - f(x, y, z) \quad \text{equação 2.24}$$

Para se obter a equação integral, necessita-se de um conjunto de funções ponderadoras linearmente independentes (PAVANELLO, 1993), dado por:

$$\{W_1(x, y, z), W_2(x, y, z), \dots, W_n(x, y, z)\}$$

Onde  $W_i(x, y, z)$  devem ser quadraticamente integráveis em  $D$ .

Para cada função ponderadora Pavanello (1993) estabelece uma equação integral para o Resíduo Ponderado no domínio e no contorno. Dada por:

$$\langle R(x, y, z), W_i(x, y, z) \rangle = \int_D R(x, y, z) \cdot W_i(x, y, z) dD = 0 \quad \text{equação 2.25}$$

para  $i = 1, n$

Segundo Reddy (1993), existem diferentes opções para a função de ponderação  $W_i$ , e os modelos resultantes recebem os nomes dos cientistas originais que as sugeriram. As escolhas mais conhecidas para  $W_i$  são:

O método da Colocação:  $W_i = \delta(x - x_i)$ , a função de Dirac.

O método dos Mínimos Quadrados:  $W_i = \frac{\partial R(\alpha_i)}{\partial \alpha_i}$

O método de Petrov – Galerkin:  $W_i = \phi_i$  e  $\phi \neq W_i$

O método de Bubnov – Galerkin:  $W_i = \psi_i$

O método do Subdomínio:  $W_i = \delta_{if}$ , no  $i$ -ésimo subdomínio.

A seguir será descrito, resumidamente, três dos mais usais critérios existentes, referenciando seus criadores e a expressão matemática adotada na sua ponderação.

### a) Método da Colocação Pontual

O método da colocação foi desenvolvido em 1937 por Frazer, Jones e Skan (FINLAYSON e SCRIVEN, 1966). Este método apresenta como função de ponderação a função delta de Dirac, tendo o argumento pertencente ao domínio do problema a ser estudado.

Neste método os coeficientes  $\alpha_i$  são determinados impondo a anulação do resíduo em distintos pontos do domínio, (PAVANELLO, 1997):

Assim a função ponderada é dada por:

$$W_i = \delta(x - \xi_i) = \begin{cases} 1 & x = \xi_i \\ 0 & x \neq \xi_i \end{cases} \rightarrow \xi \in D \quad \text{equação 2.25}$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

Logo, a integral do resíduo ponderado estendido ao domínio D é dada por:

$$\langle R(x).W_i(x) \rangle = \int R(x).W_i(x)dx = 0 \quad \text{equação 2.25}$$

$$\int R(x).\delta(x - \xi_i)dx = R(\xi_i) = 0 \quad \text{equação 2.26}$$

Sendo  $R(x)$  a função resíduo. A solução da equação 2.26 são os coeficientes da função admissível proposta.

### b) Método de Mínimos Quadrados

Segundo Finlayson e Scriven (1966) o método dos mínimos quadrados foi desenvolvido em 1928 por Picone. Este método apresenta como funções de ponderações as

derivadas dos resíduos em relação a cada um dos coeficientes, assim, implicando a minimizar o resíduo médio quadrático ao longo do domínio do problema.

O método consiste em adotar como função de ponderação a variação dos Resíduos com respeito aos parâmetros da aproximação, ou seja, (PAVANELLO, 1997):

$$W_i(x) = \frac{\partial R(\alpha_i)}{\partial \alpha_i} \quad \text{equação 2.27}$$

Substituindo na integral do resíduo ponderado estendido ao domínio D, tem-se:

$$\langle R(x).W_i(x) \rangle = \int R(x).W_i(x)dx = 0$$

$$\int R(x).\frac{\partial R(\alpha_i)}{\partial \alpha_i} dx \quad \text{equação 2.28}$$

### c) Método de Galerkin

Galerkin para estudar o equilíbrio elástico e a estabilidade de varas e pratos, utilizou uma função admissível com coeficientes constantes e desconhecidos, sendo esta a primeira utilização registrada da metodologia referente ao Método de Resíduos Ponderados em 1915. Mesmo que em seu trabalho original Galerkin tenha feito somente uso de coeficientes constantes, este trabalho originou o conhecido método de Galerkin (FINLAYSON e SCRIVEN, 1966).

Atualmente o método de Galerkin apresenta como funções pesos as derivadas das funções tentativas em relação a cada um dos coeficientes. Sendo esta variante caracterizada pela adoção de funções de ponderação  $W$  igual à função admissível  $\psi_0$ , para obter o modelo do Elemento Finito (REDDY, 1993).

$$W = \psi_i \quad \text{equação 2.29}$$

$$\langle R(x).W_i(x) \rangle = \int R(x).W_i(x)dx = 0$$

$$\int R(x).\psi_i dx = 0 \quad \text{equação 2.30}$$

Reddy (1993) nota que não só no método dos mínimos quadrados dá-se uma matriz de coeficientes simétrica para uma equação Forte de uma única ordem, mas também é possível obter uma matriz de coeficientes simétrica no modelo Galerkin.

Para todos os métodos mencionados, Pavanello (1993) nota que o emprego de bases polinomiais mais "ricas" implica a resultados mais precisos, do mesmo modo como o uso de um número maior de pontos, para o caso do método de Colocação Pontual, acarreta em erros menores. Segundo Finlayson e Scriven (1966), a precisão da solução numérica obtida é mais sensível a mudanças na função tentativa do que a mudanças no critério de ponderação.

WEDEL *et al.* (1977) compararam o método da colocação ao método de Galerkin. Segundo os autores, o método da colocação é muito mais fácil de ser aplicado, já que o esforço computacional necessário à integração é evitado e os resultados obtidos não apresentam uma diferença significativa.

BECKER (1964) classifica o método dos mínimos quadrados como melhor critério de ponderação para aplicação dos Métodos de Resíduos Ponderados, embora toda a dificuldade encontrada para sua aplicação limite consideravelmente a utilização da metodologia.

Segundo SNYDER *et al.* (1964), a convergência do método de Galerkin com o aumento do número de termos da expansão é mais rápida, comparada ao método da colocação e dos mínimos quadrados.

Segundo Pavanello (1997) considerando a complexidade de se escolher as funções admissíveis que satisfaçam as condições de contorno, sobretudo as condições naturais, e as condições de continuidade exigidas pelo operador diferencial estudado, utilizam-se assiduamente artifícios matemáticos que admitem sintetizar as condições sobre estas funções, um deles é transformar o problema para sua forma fraca.

Pavanello (1997) afirma que na forma fraca, as funções admissíveis  $\psi_0(x)$  devem atender todas as condições de contorno essenciais existentes, e as funções  $\psi_i(x)$  devem atender todas as condições de contorno essenciais homogêneas associadas. Contudo,  $\psi_0(x)$  e  $\psi_i(x)$  devem ser diferenciáveis até ordem  $m$  para o caso da equação diferencial ter ordem  $2m$ .

Para admitir a forma fraca implica em partir-se da forma de resíduos ponderados e aplicar-se o artifício de integração por partes (teorema de Green), sendo esta mais conhecida como o gradiente e teorema de divergência. A integração por partes é dada por (REDDY, 1993):

$$\int_a^b W \frac{dv}{dx} dx = (wv)|_a^b - \int_a^b vdw = 0 \quad \text{equação 2.31}$$

$$\langle R(x), W_i(x) \rangle = \int_D R(x, y, z). W_i(x, y, z) dD = 0 \quad \text{equação 2.32}$$

Assim, o Resíduo Ponderado na sua forma fraca apresenta algumas características que torna a aplicação do Método dos Resíduos Ponderados mais conveniente, já que se reduz a ordem do polinômio das funções admissíveis e as condições de contorno naturais (não essenciais) aparecem explicitamente no Resíduo Ponderado modificado, não precisando mais ser consideradas na formação de  $\psi_0(x)$  e  $\psi_i(x)$ , de tal modo, facilitando a aplicação do Método dos Elementos Finitos (PAVANELLO, 1997).

Quando se resolve a equação 2.25, segundo Pavanello (1997), obtêm-se os valores das constantes  $\alpha_i$ , implicando em uma solução aproximada  $\psi(x, y, z)$  (Função Admissível) para o problema,

$$\psi(x, y, z) = \psi_0(x, y, z) + \sum_{j=1}^n \alpha_j \psi_j(x, y, z) \quad \text{equação 2.33}$$

Assim, a função resíduo fica:

$$R(x, y, z) = L_{2m}(\psi(x, y, z)) - f(x, y, z) \quad \text{equação 2.34}$$

E o resíduo, que é a norma da função resíduo, caracterizada por  $\|R(x, y, z)\|$ ,

$$\|R(x, y, z)\| = \langle R(x, y, z), R(x, y, z) \rangle^{\frac{1}{2}} = \int_D R^2(x, y, z)^{\frac{1}{2}} dD \quad \text{equação 2.35}$$

Fornecem indicadores da precisão da solução obtida.

## 2.2. Movimento Harmônico

Considera-se o movimento oscilatório de uma partícula quando esta se move em uma dimensão, entorno de uma posição de equilíbrio estável, denominado também como origem. Se a partícula é deslocada da origem, em qualquer direção, certa força tende a deslocar a partícula para sua posição inicial. Sendo esta força restauradora, em geral, em função do deslocamento e, às vezes, da velocidade da partícula, ou mesmo de alguma derivada de ordem mais alta da coordenada posição (MARION e THORNTON, 2004).

### 2.2.1. Oscilador Harmônico Simples

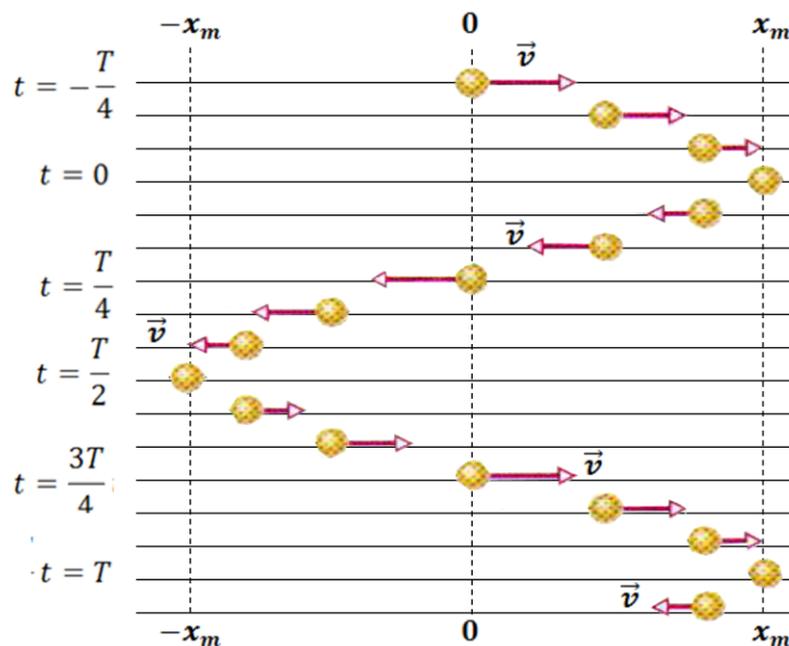
Segundo Tipler e Mosca (2009), oscilações ocorrem quando um sistema é alterado de sua posição de equilíbrio. Um exemplo de movimento oscilatório comum é o movimento

harmônico simples, assim como o de um corpo de massa  $m$  preso a uma mola como mostra a figura 2.4.

A figura 2.3 mostra uma sequência de momentos de um sistema oscilatórios simples, uma partícula que se move em torno de um ponto de equilíbrio em tempos iguais entre  $x_m$  e  $-x_m$ , suas amplitudes. Os comprimentos dos vetores são proporcionais à velocidade escalar da partícula em cada instante.

Figura 2.3: Deslocamento de uma partícula em torno do ponto  $x=0$ . As setas indicam a velocidade da partícula numa determinada posição.

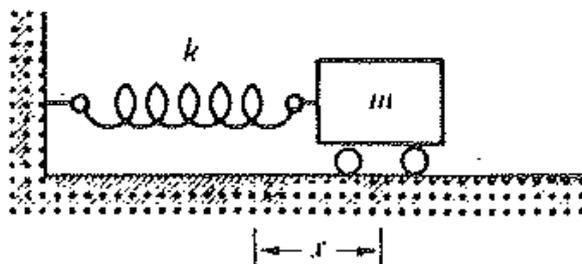
Fonte: adaptada de HALLIDAY, RESNICK e WALKER (2008).



Considerando uma massa  $m$  presa a uma mola cuja constante elástica é  $k$  (de acordo com a figura 2.4), admitindo-se que a partícula saia com velocidade  $v_0$  no tempo  $t = 0$ s e o espaço é  $x = x_0$ .

Figura 2.4: Modelo de um oscilador harmônico simples

Fonte: SYMON, 1996



Segundo Marion e Thornton (2004) a equação do movimento para o Oscilador Harmônico Simples pode ser obtida substituindo a força elástica dada pela Lei de Hooke. Segundo Tipler e Mosca (2009), esta força é obtida quando uma mola é esticada de uma distancia  $x$ , a partir da posição em que esta relaxada, verificando-se experimentalmente que a força que ela exerce é dada por  $F = -kx$ , onde  $k$  é a constante positiva, chamada constante elástica da mola, denominada a medida da rigidez da mola, e o sinal de negativo indica que a força é restauradora. Esta relação é conhecida como Lei de Hooke.

Pela 2ª lei de Newton  $F_R = m \frac{d^2x}{dt^2}$ , substituindo a força elástica e medindo  $x$ , a partir da posição do ponto de equilíbrio, tem-se:

$$-kx = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{equação 2.36}$$

A equação 2.36, admitindo-se que nenhuma outra força age sobre o corpo, pode ser escrita como (SYMON, 1996):

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad \text{equação 2.37}$$

Segundo Barcelos (2004) a equação acima é classificada como uma equação diferencial linear e homogênea, a solução dessa equação cujos coeficientes são constantes, deve ser do tipo  $e^{pt}$ , pois derivadas da função exponencial gera-na novamente, o parâmetro  $p$  deve ser determinado favoravelmente a fim de que  $e^{pt}$  seja realmente solução da equação diferencial. Fazendo  $x(t) = e^{pt}$  e sabendo que  $\frac{dx}{dt} = pe^{pt}$  e  $\frac{d^2x}{dt^2} = p^2e^{pt}$ . Substituindo na equação 2.37, encontramos:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} + kx &= 0 \\ m(p^2e^{pt}) + ke^{pt} &= 0 \\ (mp^2 + k)e^{pt} &= 0 \end{aligned} \quad \text{equação 2.38}$$

Essa relação será válida para qualquer valor de tempo  $t$  se,

$$mp^2 + k = 0 \rightarrow p = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Onde  $i = \sqrt{-1}$ . Fazendo  $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ , tem-se:

$$p = \pm \sqrt{-\omega_0^2} = \pm i\omega_0 \quad \text{equação 2.39}$$

Há dois valores de  $p$  que fazem com que  $e^{pt}$  seja solução da equação diferencial, portanto, a mesma terá duas soluções, pois  $x(t) = e^{pt} = e^{\pm i\omega_0 t}$ , sendo elas  $x_1 = e^{i\omega_0 t}$  e  $x_2 = e^{-i\omega_0 t}$ , como o operador é linear combinam-se as duas soluções em uma geral (BARCELOS, 2004):

$$x(t) = c_1 e^{i\omega_0 t} + c_2 e^{-i\omega_0 t} \quad \text{equação 2.40}$$

Sendo  $c_1$  e  $c_2$  duas constantes que devem ser determinadas de acordo com as condições iniciais do problema. Barcelos (2004) propõe reescrever a expressão acima através de duas novas constantes que serão mais adequadas para o movimento. Como  $e^{\pm i\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) \pm i \text{sen}(\omega_0 t)$ , temos:

$$x_1 = e^{i\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + i \text{sen}(\omega_0 t) \text{ e } x_2 = e^{-i\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) - i \text{sen}(\omega_0 t)$$

Sabendo que em virtude da linearidade da equação:

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \cos(\omega_0 t)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2i}(x_1 - x_2) = \text{sen}(\omega_0 t)$$

As soluções  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  são linearmente independentes e qualquer solução da equação 2.37 é da forma:

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_0 t) + A_2 \text{sen}(\omega_0 t), \quad A_1, A_2 \in \mathbb{R} \quad \text{equação 2.41}$$

Com as condições iniciais do problema, podem-se encontrar as constantes  $A_1$  e  $A_2$ , isto é,

$$x(0) = A_1 = x_0 \quad \text{equação 2.42}$$

$$\frac{dx(0)}{dt} = A_2 \omega_0 = v_0 \rightarrow A_2 = \frac{v_0}{\omega_0} \quad \text{equação 2.43}$$

Substituindo os valores de  $A_1$  e  $A_2$  na equação 2.41, obtém-se:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \text{sen}(\omega_0 t) \quad \text{equação 2.44}$$

Fazendo

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2} \text{ e } \theta \in [0, 2\pi] \text{ tal que } \cos\theta = \frac{x_0}{A} \text{ e } \sin\theta = \frac{v_0}{A\omega_0}$$

Assim tem-se,

$$x(t) = A\cos\theta \cdot \cos(\omega_0 t) + A\sin\theta \cdot \sin(\omega_0 t)$$

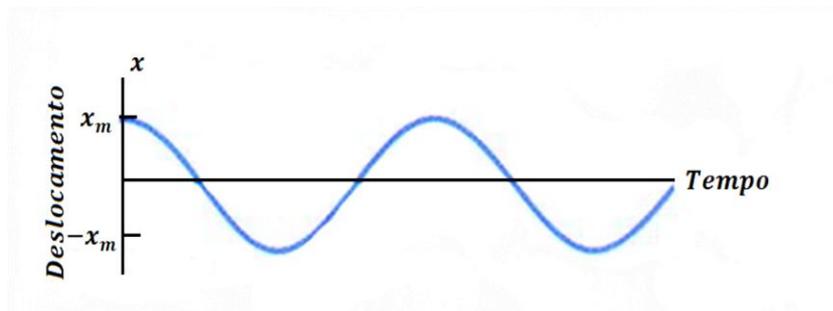
$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t - \theta) \quad \text{equação 2.45}$$

As equações acima são soluções da equação do movimento de um oscilador harmônico simples, e descrevem um movimento oscilatório em torno da posição central  $x(0) = x_0$  de amplitude  $A$ , sendo esta uma constante positiva cujo valor depende do movimento produzido, e ângulos de fases  $\theta$ , que dependem das condições iniciais do problema e diferem por um fator  $\frac{\pi}{2}$  (MARION e THORNTON, 2004).

A figura 2.5 mostra um gráfico de um deslocamento em função do tempo de um movimento oscilatório simples para uma massa presa a uma mola, com amplitude  $x_m$ , frequência angular  $\omega_0$  e fase  $\theta = 0^\circ$ .

Figura 2.5: Gráfico de  $x$  em função do tempo para o movimento da equação  $x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t)$ .

Fonte: adaptada de Halliday, Resnick e Walker (2008).



Marion e Thornton (2004) definem o período  $\tau_0$  do movimento como o intervalo de tempo entre repetições consecutivas da posição e direção do movimento da partícula. Tal intervalo ocorre quando o argumento da função seno na que aumenta  $2\pi$ :

$$\omega_0 \tau_0 = 2\pi \rightarrow \tau_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Onde  $\omega_o$  representa a Frequência Angular do movimento, que esta relacionada com a frequência  $\nu_o$  por,

$$\omega_o = 2\pi\nu_o = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow \nu_o = \frac{1}{\tau_o} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Segundo Marion e Thornton (2004) o período do oscilador harmônico simples é independente da amplitude, chamado um sistema isócrono.

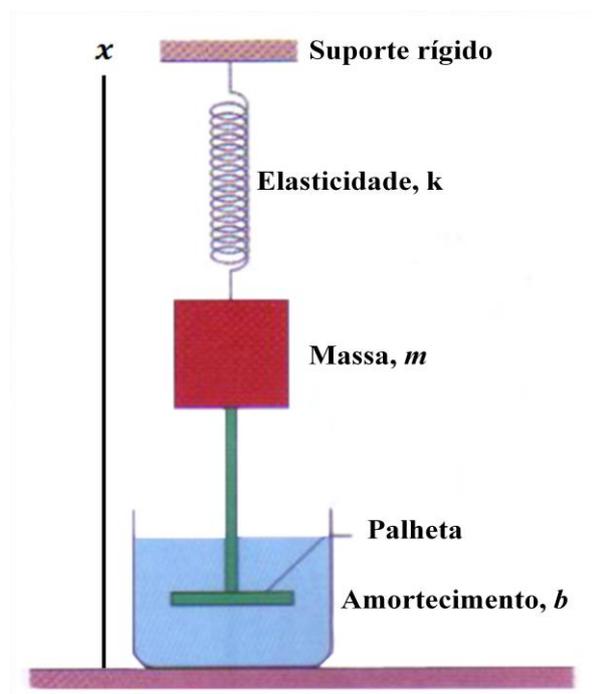
### 2.2.2. Oscilador Harmônico Amortecido

Marion e Thornton (2004) define oscilador harmônico simples, sendo um movimento que dado o inicio da oscilação o movimento jamais para. Contudo, no caso físico real, forças dissipativas casualmente amortecem o movimento, deste modo, o movimento cessa e é denominado oscilador harmônico amortecido.

A figura 2.6 mostra um oscilador harmônico amortecido no qual um bloco de massa  $m$  oscila verticalmente preso a uma mola de constante elástica  $k$ , ligado a uma palheta imersa em um liquido, com massas desprezíveis. Quando a palheta se move para cima e para baixo o liquido exerce uma força de resistência sobre a mesma e, deste modo, sobre todo o sistema.

Figura 2.6. Um Oscilador Harmônico Simples Amortecido ideal.

Fonte: adaptada de Halliday, Resnick e Walker (2008).



Considerando um movimento unidimensional de uma partícula submetida a uma força linear restauradora  $-kx$  e uma força de amortecimento  $-b \frac{dx}{dt}$ , sendo  $b$  uma constante de amortecimento que depende das características do agente que origina a força de amortecimento e tem unidade de quilogramas por segundo no SI, a aplicação da 2ª Lei de Newton fornece (SYMON, 1996):

$$\begin{aligned} -b \frac{dx}{dt} - kx &= m \frac{d^2x}{dt^2} \\ m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx &= 0 \end{aligned} \quad \text{equação 2.46}$$

Que pode ser escrita como:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2x = 0 \quad \text{equação 2.47}$$

Onde os pontos representam derivadas em relação ao tempo, e segundo Marion e Thornton (2004)  $\gamma = \frac{b}{2m}$  é o parâmetro de amortecimento e  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$  é a frequência angular característica na ausência do amortecimento. Supondo que a solução seja dada do mesmo oscilador harmônico simples, tem-se:

$$x(t) = e^{pt}$$

Sendo  $p$  uma constante e as derivadas em relação ao tempo  $\frac{dx}{dt} = pe^{pt}$  e  $\frac{d^2x}{dt^2} = p^2e^{pt}$ , ao substituir tem-se:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2x &= 0 \\ (p^2e^{pt}) + 2\gamma(pe^{pt}) + \omega_0^2e^{pt} &= 0 \\ p^2 + 2\gamma p + \omega_0^2 &= 0 \end{aligned}$$

Precisa-se encontrar o  $\Delta$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \Delta &= (4\beta^2 - 4\omega_0^2) \rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \\ p &= \frac{-2\gamma \pm \sqrt{\Delta}}{2} \\ p &= -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \end{aligned} \quad \text{equação 2.48}$$

Assim, as raízes da equação 2.48 são dadas por:

$$\begin{cases} p_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \\ p_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \end{cases}$$

A solução geral da equação 2.47 é, portanto,

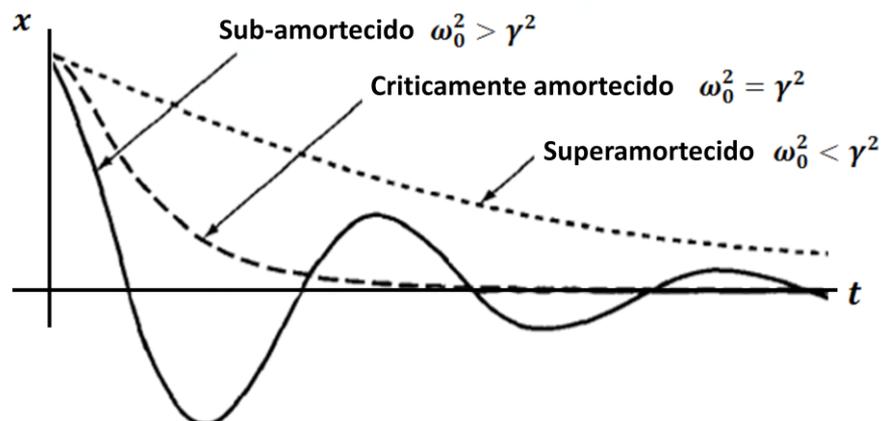
$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}, \quad A_1, A_2 \in \mathbb{R} \\ x(t) &= A_1 e^{\left(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\right)t} + A_2 e^{\left(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\right)t} \\ x(t) &= e^{-\gamma t} \left[ A_1 e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}t} + A_2 e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}t} \right] \end{aligned} \quad \text{equação 2.49}$$

Mario e Thornton (2004) afirmam que existem três casos gerais para a solução da equação diferencial de oscilador harmônico amortecido:

- i) Caso subamortecido ( $\omega_0^2 > \gamma^2$ ) é quando um oscilador tem o seu movimento oscilatório, mas a força de atrito suaviza a amplitude, fazendo a partícula parar na sua posição de equilíbrio.
- ii) Caso criticamente amortecido ( $\omega_0^2 = \gamma^2$ ).
- iii) Caso superamortecido ( $\omega_0^2 < \gamma^2$ ) é quando um oscilador não tem um movimento periódico e a partícula tende pausadamente a parar na sua posição de equilíbrio sem oscilar.

Figura 2.7 – Gráfico comparativo dos movimentos: Subamortecido, criticamente amortecido e superamortecido.

Fonte: adaptada de MARION E THORNTON, 2004.



### i) Movimento Subamortecido

Para o caso do movimento subamortecido, Marion e Thornton (2004) definem  $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$ , onde  $\omega_1^2 > 0$ . A equação pode ser escrita desta forma:

$$x(t) = e^{-\gamma t} [A_1 e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{-i\omega_1 t}] \quad \text{equação 2.50}$$

Fazendo  $A_1 = \frac{1}{2} A e^{i\theta}$  e  $A_2 = \frac{1}{2} A e^{-i\theta}$ , tem-se:

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left[ \frac{1}{2} A e^{i\theta} e^{i\omega_1 t} + \frac{1}{2} A e^{-i\theta} e^{-i\omega_1 t} \right]$$

$$x(t) = A e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t - \theta) \quad \text{equação 2.51}$$

A solução acima corresponde a uma oscilação de frequência ( $\omega_1$ ) com amplitude  $A e^{-\gamma t}$ , decrescendo exponencialmente com o tempo (Fig. 8), as constantes  $A$  e  $\theta$  dependem das condições iniciais (SYMON, 1996).

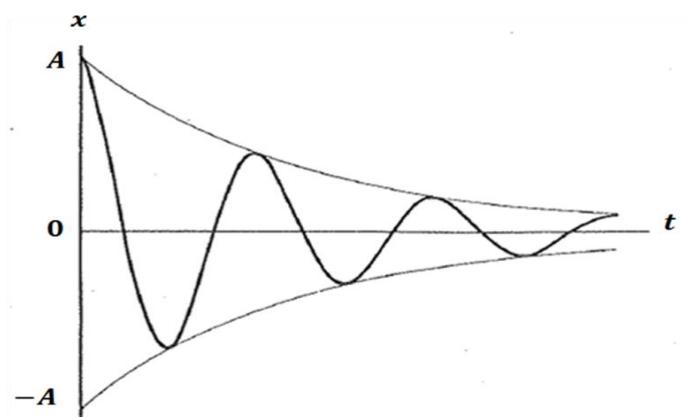
Segundo Marion e Thornton (2004), como o movimento de oscilador amortecido é NÃO PERIODICO, isto é, o oscilador não passa duas vezes através de um dado ponto com a mesma velocidade, então não se pode definir uma frequência angular.

A amplitude máxima do movimento do oscilador subamortecido decresce com o tempo por causa do fator  $e^{-\gamma t}$ , onde  $\gamma > 0$  e a curva denominada envelope (Figura 2.8) do deslocamento em função do tempo é dada por (MARION e THORNTON, 2004):

$$x(t) = \pm A e^{-\gamma t} \quad \text{equação 2.52}$$

Figura 2.8 – Movimento do oscilador harmônico subamortecido. Curva deslocamento:  $x(t) = A e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t)$ ,  $\gamma = \omega_1/8$ . Curva envelope:  $x(t) = \pm A e^{-\gamma t}$ .

Fonte: adaptada de SYMON, 1996.



## ii) Movimento Criticamente Amortecido

Segundo Symon (1996), o caso criticamente amortecido ocorre quando  $\gamma^2$  é exatamente igual a  $\omega_0^2$ . Assim,  $p = -\gamma$ . A solução correspondente para  $x$  é:

$$x(t) = e^{-\gamma t} \quad \text{equação 2.53}$$

Symon (1996) sugere neste caso, a outra solução dada por:

$$x(t) = te^{-\gamma t} \quad \text{equação 2.54}$$

Assim a solução geral no movimento criticamente amortecido é dada por:

$$x(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\gamma t} \quad \text{equação 2.55}$$

Para um dado conjunto de condições iniciais, um oscilador criticamente amortecido aproxima-se do equilíbrio a uma taxa mais rápida que aquela para os osciladores superamortecidos ou subamortecido (MARION e THORTON, 2004).

## iii) Movimento Superamortecido

Segundo Marion e Thornton (2004) tem-se um movimento harmônico superamortecido quando o parâmetro de amortecimento  $\gamma$  for muito maior que  $\omega_0$ . Porque  $\omega_0^2 < \gamma^2$ , assim  $p$  terá duas soluções:

$$\begin{cases} p = -\gamma_1 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \\ p = -\gamma_2 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \end{cases}$$

Assim, a solução será dada por:

$$x(t) = A_1 e^{-\gamma_1 t} + A_2 e^{-\gamma_2 t} \quad \text{equação 2.56}$$

Symon (1996) nota que os dois termos da solução decrescem exponencialmente com o tempo, porem um com taxa de decrescimento maior que a do outro. Lembrando que as constantes  $A_1$  e  $A_2$  dependem das condições iniciais

### 2.2.3. Oscilador Harmônico Forçado

Segundo Tipler e Mosca (2009) para manter um sistema amortecido oscilando indefinidamente basta a energia mecânica ser injetada no sistema, transformando em um oscilador Forçado. Um exemplo de oscilador forçado é mostrado na figura 2.9, que consiste em uma mola que está sendo excitada movendo-se o ponto de apoio para cima e para baixo, em movimento harmônico simples de frequência  $w$ .

Figura 2.9 – Um corpo preso a uma mola vertical pode ser forçado movendo-se o suporte na vertical.

Fonte: TIPLER e MOSCA, 2009.



O oscilador harmônico forçado consiste em um oscilador harmônico (simples ou amortecido) sujeito a uma força externa, tratando-se de uma força que varia senoidalmente com o tempo (SYMOM, 1996).

Sua equação geral dada por:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos(\omega t) \quad \text{equação 2.57}$$

Onde a força aplicada oscila com frequência angular  $\omega$  e amplitude  $F_0$ ;

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = F_0 \cos(\omega t) \quad \text{equação 2.58}$$

Onde os pontos representam derivadas em relação ao tempo, e segundo Marion e Thornton (2004)  $\gamma = \frac{b}{2m}$  é o parâmetro de amortecimento e  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$  é a frequência angular, também chamada de frequência natural.

Segundo Marion e Thornton (2004) a solução dessa equação é obtida com a teoria das equações diferenciais, que consiste em duas partes: uma função complementar  $x_h(t)$ , que é a solução homogênea associada, e uma solução particular  $x_p(t)$ .

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad \text{equação 2.59}$$

A solução homogênea é descoberta quando se iguala a equação do movimento do oscilador harmônico forçado a zero. Então, a solução homogênea pode ser dada por:

$$x_h(t) = e^{-\gamma t} \left[ A_1 e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} + A_2 e^{\left(-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\right) t} \right] \quad \text{equação 2.60}$$

A solução particular é dada por uma equação:

$$x_p(t) = D \cos(\omega t - \delta) \quad \text{equação 2.61}$$

Onde a amplitude  $D$  e a fase  $\delta$  das oscilações de  $x$  terá que ser determinada pela substituição da equação da solução particular na equação do movimento.

Fazendo a derivadas, temos:

$$\begin{aligned} \dot{x}_p(t) &= -D\omega_1 \text{sen}(\omega_1 t - \delta) \\ \ddot{x}_p(t) &= -D\omega_1^2 \cos(\omega_1 t - \delta) \end{aligned}$$

Substituindo:

$$\begin{aligned} -D\omega^2 \cos(\omega t - \delta) + 2\gamma[-D\omega \text{sen}(\omega t - \delta)] + \omega_0^2 D \cos(\omega t - \delta) &= A \cos(\omega t) \\ (-D\omega^2 + \omega_0^2 D) \cos(\omega t - \delta) - 2\gamma D\omega \text{sen}(\omega t - \theta_s) &= A \cos(\omega t) \quad \text{equação 2.62} \end{aligned}$$

Onde  $A = F_0/m$ . Considerando que,

$$\begin{aligned} \cos(\omega t - \delta) &= \cos \omega t \cos \delta + \text{sen} \omega t \text{sen} \delta \\ \text{sen}(\omega t - \delta) &= \text{sen} \omega t \cos \delta - \text{sen} \delta \cos \omega t \end{aligned}$$

Obtemos,

$$\begin{aligned} D(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \delta + 2\gamma D\omega \text{sen} \delta &= A \\ D(\omega_0^2 - \omega^2) \text{sen} \delta - 2\gamma D\omega \cos \delta &= 0 \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema de equações, temos,

$$D(\omega_0^2 - \omega^2) \operatorname{sen} \delta = 2\gamma D\omega \operatorname{cos} \delta \rightarrow \operatorname{tg} \delta = \frac{2\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Assim,

$$D = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \quad \text{equação 2.63}$$

Assim a solução particular é dada por,

$$x_p(t) = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \operatorname{cos}(\omega t - \delta) \quad \text{equação 2.64}$$

Com

$$\delta = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \quad \text{equação 2.65}$$

A quantidade  $\delta$  representa a diferença de fase entre a força motriz e o movimento resultante. Para um dado  $\omega_0$ , quando  $\omega$  aumenta, de  $\omega = 0$  até  $\omega = \omega_0$ , a fase aumenta de  $\delta = 0$  até  $\delta = \pi/2$  e a fase atinge o valor de  $\pi$ , quando  $\omega \rightarrow \infty$ , assim como mostra a Fig.11 (MARION THORNTON, 2004).

Lembrando que a solução geral é dada por (SYMON, 1996):

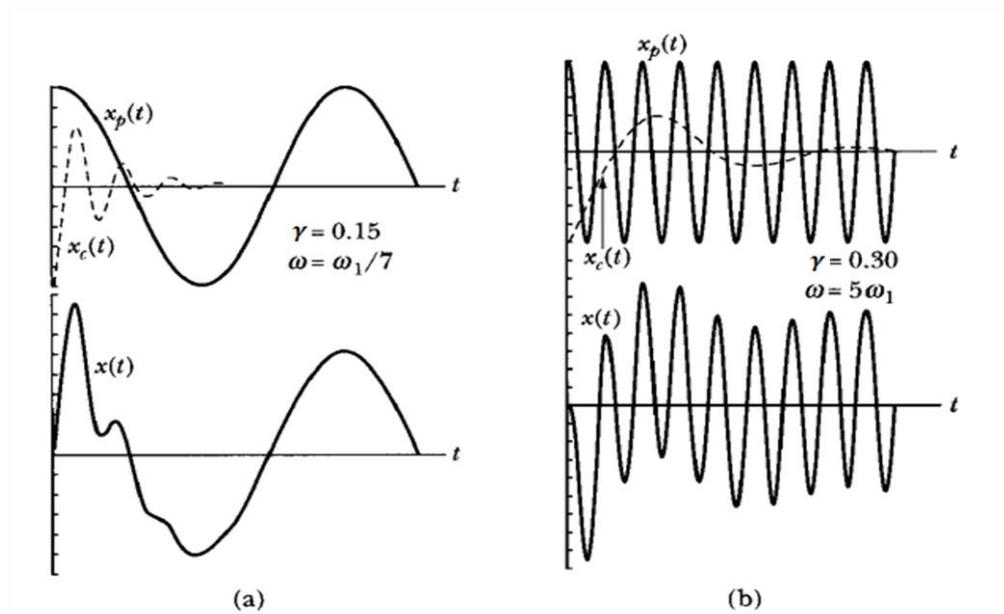
$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

Segundo Symon (1996) o termo  $x_h(t)$  decresce exponencialmente com o tempo e é chamado de transiente, pois depende das condições iniciais, e o  $x_p(t)$  é chamado estado estacionário, pois oscila com amplitude constante, e permanece mesmo depois que o transiente desaparece.

A figura 2.10 ilustra o movimento transiente de um oscilador subamortecido quando frequências motrizes menores e maiores que  $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$  são aplicadas.

Figura 2.10 – Exemplo de um movimento oscilatório forçado, a solução do estado estacionário e do transiente é mostrada em (a)  $\omega < \omega_1$  ( $\omega > \omega_1$ ) e em (b)  $\omega < \omega_1$ .

Fonte: Marion e Thornton, 2004.



Segundo Marion e Thornton (2004) para encontrar a frequência angular  $\omega_R$  para a qual a amplitude  $D$  é máxima, isto é, frequência da amplitude ressoante, calcula-se:

$$\left. \frac{dD}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_R} \quad \text{equação 2.65}$$

Como  $D$  é dada pela equação 2.63, assim,

$$\frac{dD}{d\omega} = \frac{4\omega(\omega_0^2 - \omega^2) + 8\omega\gamma^2}{((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2)^2} = 0$$

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} \quad \text{equação 2.66}$$

Do mesmo modo, a frequência de ressonância  $\omega_R$  diminui quando o coeficiente de amortecimento  $\gamma$  aumenta.

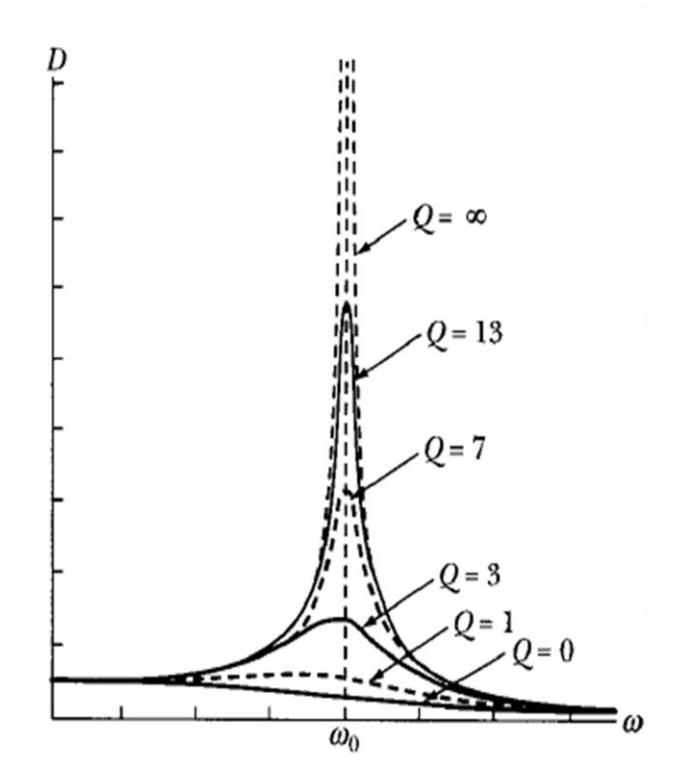
Marion e Thornton (2004) descrevem o grau de amortecimento em um sistema oscilante em termos do Fator de Qualidade  $Q$ , do sistema, sendo:

$$Q = \frac{\omega_R}{2\gamma} \quad \text{equação 2.67}$$

Se o amortecimento for pequeno  $Q$  é muito grande e a curva de ressonância aproxima-se de um oscilador simples, porém a ressonância pode ser zero se o amortecimento for muito grande. A figura 2.11 mostra as curvas de ressonância para vários valores de  $Q$ .

Figura 2.11: A amplitude  $D$  é apresentada como uma função da frequência  $\omega$  para vários valores do Fator de Qualidade.

Fonte: MARION e THORNTON, 2004.



### 3. Metodologia

O trabalho consiste em validar um modelo analítico de um movimento harmônico clássico, através de um modelo numérico computacional utilizando o método dos elementos finitos, pelo método dos Resíduos Ponderados.

Da mesma forma que o procedimento tradicional, o procedimento proposto se inicia com a aproximação polinomial das variáveis dependentes do problema. A seguir, substitui-se a aproximação proposta nas equações diferenciais do problema gerando as expressões dos resíduos. A fim de quantificar estes resíduos globalmente, calculam-se seus valores médios ponderados utilizando um método de quadratura conveniente no cômputo das integrais.

A metodologia desenvolvida foi sistematizada para os três tipos de osciladores harmônicos clássicos. Neste capítulo será demonstrada a aplicação da metodologia proposta a problemas do oscilador harmônico simples, amortecido e forçado.

#### 3.1. Estudo da solução aproximada do Movimento Harmônico Simples

O problema de um oscilador harmônico simples pode ser resolvido pelo Método de Resíduos Ponderados. Desta forma, o problema proposto, que consiste em encontrar a função do deslocamento de um corpo sob um movimento harmônico simples, será estudado por três métodos diferentes: Colocação Pontual, Mínimos Quadrados e Galerkin.

Considere um oscilador harmônico simples, composto por uma mola de constante  $k = 27N/m$  e massa  $m = 3,0kg$ . Quando a mola é distendida em  $0,20m$ , o sistema é solto a partir do repouso e quando o  $t = 1,0s$ , a posição do corpo será  $x(1) = -0,1980m$ . Determina-se a solução do oscilador pelos métodos tradicionais.

A solução analítica da equação do movimento,

$$3 \frac{d^2x}{dt^2} + 27x = 0 \quad \text{equação 3.1}$$

É dada por:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta) \quad \text{equação 3.2}$$

Onde amplitude do movimento é representada por  $A$ , a frequência angular é dada por  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  e  $\theta$  é definido como fase.

Substituindo os dados, quando o tempo é  $t = 0s$ , tem-se:

$$0,20 = A \cos \left( \sqrt{\frac{27,0}{3,0}} (0) + \theta \right)$$

$$0,20 = A \cos(\theta) \quad \text{equação 3.3}$$

Através da expressão da velocidade (definida pela derivada primeira do deslocamento em função do tempo), obtém-se a segunda equação:

$$v(t) = -\omega_0 A \operatorname{sen}(\omega_0 t + \theta) \quad \text{equação 3.4}$$

Levando os valores da velocidade para  $t = 0$  e de  $\omega_0$  nessa expressão, obtém-se:

$$0 = -3,0 \cdot A \operatorname{sen}(3,00 + \theta)$$

Então, resolvendo o sistema:

$$0,20 = A \cos(\theta)$$

$$0 = -3,0A \operatorname{sen}(\theta)$$

Da segunda equação, nota-se que  $\theta = 0 \text{ rad}$ , pois  $A$  não pode ser nulo. Da primeira, então, com o valor  $\theta = 0$ , adquire-se que  $A = 0,20 \text{ m}$ . Assim, a equação de movimento do oscilador é:

$$x(t) = 0,20 \cos(3t) \quad \text{equação 3.5}$$

### i) **O problema do Movimento Harmônico Simples formulado pelo método da Colocação Pontual.**

A base para a aplicação do Método de Resíduos Ponderados consiste em definir a função resíduo, após a escolha de uma sequência de funções admissíveis e de funções ponderadoras que dependem de quais métodos a serem utilizados.

A partir de então, far-se-á um estudo mais apurado da obtenção da função admissível mais próxima da função analítica adquirida pelos métodos tradicionais.

Escolhe-se a função admissível da forma:

$$\psi(t) = \psi_0 + \alpha_1 \psi_1 \quad \text{equação 3.6}$$

Sabendo que  $\psi_0$  deve atender a todas as condições de contorno não homogêneas sendo estas as condições iniciais, que  $\psi_1$  deve satisfazer todas as condições de contorno

homogêneas associadas, sendo estas as condições iniciais iguais a zero, e que  $\alpha_1$  é uma constante.

As condições de contorno do problema proposto definem que a massa  $m$  saia do repouso, ou seja,  $v(0) = 0 \text{ m/s}$ , e que a posição  $x$  seja igual a  $0,20\text{m}$  no instante inicial. Já quando o  $t = 1,0\text{s}$ ,  $x(1) = -0,1980$ .

Fazendo  $\psi_0 = at + b$ , sendo  $a$  e  $b$  constantes e as condições de contorno  $x(0) = 0,20$  e  $x(1) = -0,1980$ , substituindo-as, tem-se:

$$\begin{aligned}\psi_0(0) &= a \cdot 0 + b = 0,2 \rightarrow b = 0,2 \\ \psi_0(1) &= a \cdot 1 + b = -0,1980 \rightarrow a + 0,2 = -0,1980 \rightarrow a = -0,398\end{aligned}$$

Logo,

$$\psi_0 = (-0,398t + 0,2) \quad \text{equação 3.7}$$

Para descobrir a função  $\psi_1 = t(t + d)$ , sendo  $d$  uma constante e as condições de contorno associadas  $x(0) = 0$  e  $x(1) = 0$ , tem-se,

$$\begin{aligned}\psi_1(1) &= t(t + d) = 0 \rightarrow 1 + d = 0 \rightarrow d = -1 \\ \psi_1(0) &= t(t + d) = 0\end{aligned}$$

Então a função  $\psi_1$  fica:

$$\psi_1 = t(t - 1) \quad \text{equação 3.8}$$

Substituindo as equações 3.9 e 3.8 na equação 3.7, tem-se:

$$\psi(t) = (-0,398t + 0,2) + \alpha_1 t(t - 1) \quad \text{equação 3.9}$$

É necessário que seja conhecido o valor da constante  $\alpha_1$  para que seja obtida a função admissível. Como a função admissível é uma aproximação, cabe saber o erro entre esta e a solução exata. O erro total é denominado Resíduo, sendo obtido pela substituição da função admissível na equação diferencial do problema, dada por:

$$R(t) = 3 \frac{d^2\psi}{dt^2} + 27\psi \quad \text{equação 3.10}$$

Para se ter a função acima é necessária a integração abaixo:

$$\langle R(t), W(t) \rangle = \int R(t)W_i(t)dt = 0$$

Mas para isso, é preciso definir a função ponderadora,  $W_i(t)$ , a qual depende do método utilizado, dado pelo método da Colocação Pontual, pela função de Dirac  $W(t) = \delta(t - \zeta)$ , sendo  $0 < \zeta < 1,05$  o domínio.

Fazendo  $\zeta = 0,1$ , obtém-se  $W_1(t) = \delta(t - 0,1)$ . A integral do resíduo ponderado é dada por:

$$\begin{aligned} \langle R(t), W(t) \rangle &= \int R(t)W_1(t)dt = 0 \\ \int R(t) \cdot \delta(t - 0,1)dt &= 0 \end{aligned} \quad \text{equação 3.11}$$

Interpretando a função acima, para todo e qualquer limite,

$$\int R(t) \cdot \delta(t - \zeta)dt = R(\zeta) \quad \text{equação 3.12}$$

Ou seja,

$$R(0,1) = 0$$

Aplicando o ponto 0,1 na função resíduo, obtém-se a constante,  $\alpha_1 = -1.2116$ .

Assim sendo, substituindo o valor de  $\alpha_1$  na função admissível, tem-se:

$$\psi(t) = (-0,398t + 0,2) - 1,2116t(t - 1) \quad \text{equação 3.13}$$

Advertindo que a função admissível acima é uma função aproximada, é necessário saber o quanto ela convergiu com a função analítica, sendo  $x(t) = 0,20 \cos(3t)$ . Desta forma, calcula-se a norma da função resíduo, dada por:

$$\|R(t)\| = \langle R(t), R(t) \rangle^{\frac{1}{2}} = \int_{-0,2}^{0,2} R^2(t)^{\frac{1}{2}}dt = 5,3122 \quad \text{equação 3.14}$$

Observa-se que a norma deu maior que zero. Isso implica que quanto maior for a aproximação da norma ao valor zero, mais precisa será a função admissível. Sabendo da impossibilidade em assumir valor zero, necessita-se que haja a realização de um novo parâmetro com o intuito de diminuir a norma. Porém, atrelado a isso, dependendo da precisão esperada e do tipo de solução correta é imprescindível um polinômio de grau muito elevado para diminuir significativamente o erro de aproximação.

Escolhendo uma função admissível da forma:

$$\psi(t) = \psi_0 + \alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2 \quad \text{equação 3.15}$$

Lembrando que  $\psi_0$  deve atender a todas as condições de contorno não homogêneas, que  $\psi_1$  e  $\psi_2$  devem satisfazer a todas as condições de contorno homogêneas associadas e que  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são constantes. Aplicando da mesma forma anteriormente, as condições de contorno, obtêm:

$$\psi_0 = (-0,398t + 0,2) \quad \text{equação 3.16}$$

$$\psi_1 = t(t - 1) \quad \text{equação 3.17}$$

$$\psi_2 = t((t - 1)^2) \quad \text{equação 3.18}$$

Substituindo as equações 3.16, 3.17 e 3.18 em 3.15, tem-se:

$$\psi(t) = (-0,398t + 0,2) + \alpha_1 t(t - 1) + \alpha_2 t((t - 1)^2) \quad \text{equação 3.19}$$

A função resíduo é dada pela substituição da função admissível na equação diferencial do problema, tem-se:

$$R(t) = 3 \frac{d^2\psi}{dt^2} + 27\psi$$

Definindo a função ponderadora, duas novas funções,  $W_1(t)$  e  $W_2(t)$ , para que sejam descobertos os valores das constantes. Para isso, define-se que  $\zeta_1 = 0,1$  e que  $\zeta_2 = 0,2$ . Resolvendo a integral não só com  $W_1(t) = \delta(t - 0,1)$  mas também com  $W_2(t) = \delta(t - 0,2)$ , adquire-se o sistema abaixo,

$$\begin{cases} \int R(t)W_1(t)dt = 0 \\ \int R(t)W_2(t)dt = 0 \end{cases}$$

Onde, respectivamente, obtêm-se a seguinte equivalência:

$$\begin{cases} \int R(t). \delta(t - 0,1)dt = R(0,1) = 0 \\ \int R(t). \delta(t - 0,2)dt = R(0,2) = 0 \end{cases}$$

Resolvendo facilmente o sistema são obtidos os valores das constantes,  $\alpha_1 = 1,1136$  e  $\alpha_2 = 1,0359$ . Portanto, substituindo na função admissível, tem-se,

$$\psi(t) = (-0,398t + 0,2) + 1,1136t(t - 1) + 1,0359t((t - 1)^2) \quad \text{equação 3.20}$$

Para saber o quanto a função admissível acima divergiu da função analítica, que é dada por  $x(t) = 0,20 \cos(3t)$ , faz-se a norma da função resíduo, novamente,

$$||R(t)|| = \langle R(t), R(t) \rangle^{\frac{1}{2}} = \int_{-0,2}^{0,2} R^2(t)^{\frac{1}{2}} dt = 2,8991$$

De tal modo que ainda é observado o longínquo valor da norma a zero. Assim, é preciso aumentar o grau do polinômio da função admissível para que se aproxime da solução correta.

Para três parâmetros constituindo a função, da forma:

$$\psi(t) = (-0,398t + 0,2) + \alpha_1 t(t - 1) + \alpha_2 t((t - 1)^2) + \alpha_3 (t^2)(t - 1)^2 \quad \text{equação 3.21}$$

Obtêm-se os valores das constantes,

$$\alpha_1 = 1,6647, \alpha_2 = 0,3935 \text{ e } \alpha_3 = 1,6017.$$

Portanto, substituindo na função admissível, tem-se,

$$\psi(t) = (-0,398t + 0,2) - 1,6647t(t - 1) + 0,3935t((t - 1)^2) + 1,6017(t^2)(t - 1)^2 \quad \text{equação 3.22}$$

E o resíduo é 2,0754.

Para quatro parâmetros constituindo a função, da forma:

$$\psi(t) = (-0,398t + 0,2) + \alpha_1 t(t - 1) + \alpha_2 t(t - 1)^2 + \alpha_3 (t^2)(t - 1)^2 + \alpha_4 (t^2)(t - 1)^3 \quad \text{equação 3.23}$$

Obtêm-se os valores das constantes,

$$\alpha_1 = 0,5200, \alpha_2 = 0,7585, \alpha_3 = -0,2489 \text{ e } \alpha_4 = -0,3507.$$

Portanto, substituindo na função admissível, tem-se,

$$\psi(t) = (-0,398t + 0,2) + 0,5200t(t - 1) + 0,7585t((t - 1)^2) - 0,2489(t^2)(t - 1)^2 - 0,3507t^2(t - 1)^3 \quad \text{equação 3.24}$$

E o resíduo é 0,3583.

Para cinco parâmetros constituindo a função, da forma:

$$\psi(t) = (-0,398t + 0,2) + \alpha_1 t(t - 1) + \alpha_2 t(t - 1)^2 + \alpha_3 (t^2)(t - 1)^2 + \alpha_4 (t^2)(t - 1)^3 + \alpha_5 t^4(t - 1)^3 \quad \text{equação 3.25}$$

Obtêm-se os valores das constantes,

$$\alpha_1 = 0,3990, \alpha_2 = 0,7395, \alpha_3 = -0,1060, \alpha_4 = -0,2847 \text{ e } \alpha_5 = 0,1211.$$

Portanto, substituindo na função admissível, tem-se,

$$\begin{aligned} \psi(t) = & (-0,398t + 0,2) + 0,3990t(t - 1) + 0,7395t((t - 1)^2) - 0,1060(t^2)(t - 1)^2 \\ & - 0,2847t^2(t-1)^3 + 0,1211t^4(t - 1)^3 \end{aligned} \quad \text{equação 3.26}$$

E o resíduo é 0,3106.

Para seis parâmetros constituindo a função, da forma:

$$\begin{aligned} \psi(t) = & (-0,398t + 0,2) + \alpha_1 t(t - 1) + \alpha_2 t(t - 1)^2 + \alpha_3 (t^2)(t - 1)^2 + \alpha_4 (t^2)(t - 1)^3 \\ & + \alpha_5 t^4(t - 1)^3 + \alpha_6 t^4(t - 1)^4 \end{aligned} \quad \text{equação 3.27}$$

Obtêm-se os valores das constantes,

$$\alpha_1 = 0,3498, \alpha_2 = 0,7256, \alpha_3 = -0,0923, \alpha_4 = -0,2944, \alpha_5 = 0,1451 \text{ e } \alpha_6 = 0,0580.$$

Portanto, substituindo na função admissível, tem-se:

$$\begin{aligned} \psi(t) = & (-0,398t + 0,2) + 0,3498t(t - 1) + 0,7256t((t - 1)^2) - 0,0923 t^2(t - 1)^2 \\ & - 0,2944t^2(t - 1)^3 + 0,1451t^4(t - 1)^3 + 0,0580t^4(t - 1)^4 \end{aligned} \quad \text{equação 3.28}$$

O resíduo é 0,1998.

Para sete parâmetros constituindo a função, da forma:

$$\begin{aligned} \psi(t) = & (-0,398t + 0,2) + \alpha_1 t(t - 1) + \alpha_2 t(t - 1)^2 + \alpha_3 (t^2)(t - 1)^2 + \alpha_4 (t^2)(t - 1)^3 \\ & + \alpha_5 t^3(t - 1)^3 + \alpha_6 t^3(t - 1)^4 + \alpha_7 t^4(t - 1)^4 \end{aligned} \quad \text{equação 3.29}$$

Obtêm-se os valores das constantes,

$$\alpha_1 = -0,3970, \alpha_2 = 0,7122, \alpha_3 = 0,2090, \alpha_4 = -0,3384, \alpha_5 = 0,0405, \alpha_6 = 0,0877 \text{ e } \alpha_7 = 0,0115.$$

Substituindo na função admissível, tem-se,

$$\begin{aligned} \psi(t) = & (-0,398t + 0,2) - 0,3970t(t - 1) + 0,7122t((t - 1)^2) + 0,2090t^2(t - 1)^2 \\ & - 0,3384t^2(t - 1)^3 + 0,0405t^3(t - 1)^3 + 0,0877t^3(t - 1)^4 \\ & + 0,0115t^4(t - 1)^4 \end{aligned} \quad \text{equação 3.30}$$

O resíduo é 0,0155.

Para oito parâmetros constituindo a função, da forma:

$$\begin{aligned}\psi(t) = & (-0,398t + 0,2) + \alpha_1 t(t-1) + \alpha_2 t(t-1)^2 + \alpha_3 (t^2)(t-1)^2 + \alpha_4 (t^2)(t-1)^3 \\ & + \alpha_5 t^3(t-1)^3 + \alpha_6 t^3(t-1)^4 + \alpha_7 t^4(t-1)^4 + \alpha_8 t^5(t-1)^5\end{aligned}$$

equação 3.31

Obtêm-se os valores das constantes:

$$\alpha_1 = -0,3977, \alpha_2 = 0,7116, \alpha_3 = -0,1311, \alpha_4 = -0,3408, \alpha_5 = 0,0386, \alpha_6 = 0,0840, \alpha_7 = 0,0234 \text{ e } \alpha_8 = 0,0206.$$

Portanto, substituindo na função admissível, tem-se,

$$\begin{aligned}\psi(t) = & (-0,398t + 0,2) - 0,3977t(t-1) + 0,7116t((t-1)^2) - 0,1311t^2(t-1)^2 \\ & - 0,3408t^2(t-1)^3 + 0,0386t^3(t-1)^3 + 0,0840t^3(t-1)^4 \\ & + 0,0234t^4(t-1)^4 + 0,0206t^5(t-1)^5\end{aligned}$$

equação 3.32

O resíduo é 0,0082.

Para nove parâmetros constituindo a função, da forma:

$$\begin{aligned}\psi(t) = & (-0,398t + 0,2) + \alpha_1 t(t-1) + \alpha_2 t(t-1)^2 + \alpha_3 (t^2)(t-1)^2 + \alpha_4 (t^2)(t-1)^3 \\ & + \alpha_5 t^3(t-1)^3 + \alpha_6 t^3(t-1)^4 + \alpha_7 t^4(t-1)^4 + \alpha_8 t^4(t-1)^5 \\ & + \alpha_9 t^5(t-1)^5\end{aligned}$$

equação 3.33

Obtêm-se os valores das constantes:

$$\alpha_1 = -0,3980, \alpha_2 = 0,7113, \alpha_3 = 0,2093, \alpha_4 = -0,3430, \alpha_5 = 0,0259, \alpha_6 = 0,0761, \alpha_7 = -0,0032, \alpha_8 = -0,0104 \text{ e } \alpha_9 = -2,2324.$$

Portanto, substituindo na função admissível, tem-se,

$$\begin{aligned}\psi(t) = & (-0,398t + 0,2) - 0,3980t(t-1) + 0,7113t((t-1)^2) + 0,2093t^2(t-1)^2 \\ & - 0,3430t^2(t-1)^3 + 0,0259t^3(t-1)^3 + 0,0761t^3(t-1)^4 \\ & + 0,0032t^4(t-1)^4 - 0,0104t^4(t-1)^5 - 2,2324 \cdot 10^{-4}t^5(t-1)^5\end{aligned}$$

equação 3.34

O resíduo é  $2,4499 \cdot 10^{-4}$ .

Para dez parâmetros constituindo a função, da forma:

$$\begin{aligned}\psi(t) = & (-0,398t + 0,2) + \alpha_1 t(t-1) + \alpha_2 t(t-1)^2 + \alpha_3 (t^2)(t-1)^2 + \alpha_4 (t^2)(t-1)^3 \\ & + \alpha_5 t^3(t-1)^3 + \alpha_6 t^3(t-1)^4 + \alpha_7 t^4(t-1)^4 + \alpha_8 t^4(t-1)^5 \\ & + \alpha_9 t^5(t-1)^5 + \alpha_{10} t^5(t-1)^6\end{aligned}$$

equação 3.35

Obtêm-se os valores das constantes:

$$\alpha_1 = 0,3134, \alpha_2 = 0,7113, \alpha_3 = -0,1337, \alpha_4 = -0,3430, \alpha_5 = 0,0260, \alpha_6 = 0,0763, \alpha_7 = -0,0029, \alpha_8 = -0,0097, \alpha_9 = 2,0448 \cdot 10^{-4} \text{ e } \alpha_{10} = 8,5544 \cdot 10^{-4}.$$

Portanto, substituindo na função admissível, tem-se:

$$\begin{aligned} \psi(t) = & (-0,398t + 0,2) + 0,3134t(t-1) + 0,7113t((t-1)^2) - 0,1337t^2(t-1)^2 \\ & - 0,3430t^2(t-1)^3 + 0,0260t^3(t-1)^3 + 0,0763t^3(t-1)^4 \\ & - 0,0029t^4(t-1)^4 - 0,0097t^4(t-1)^5 + 2,0448 \cdot 10^{-4}t^5(t-1)^5 \\ & + 8,5544 \cdot 10^{-4}t^5(t-1)^6 \end{aligned} \quad \text{equação 3.36}$$

O resíduo é  $1,7493 \cdot 10^{-4}$ .

Nota-se que a norma diminuiu consideravelmente. Assim, não é necessário fazer outro parâmetro, pois a função admissível é satisfatória.

## ii) O problema do Movimento Harmônico Simples formulado pelo método dos Mínimos Quadrados:

Fazendo o mesmo procedimento, para a escolha da função admissível da forma:

$$\psi(t) = \psi_0 + \alpha_1 \psi_1$$

Sabendo que  $\psi_0(t)$  deve atender todas as condições de contorno,  $\psi_1(t)$  e  $\psi_2(t)$  deve satisfazer todas as condições de contorno homogêneas associadas e  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são constantes.

$$\psi_0 = (-0,398t + 0,2)$$

$$\psi_1 = t(t-1)$$

Substituindo:

$$\psi(t) = (-0,398t + 0,2) + \alpha_1 t(t-1)$$

A função resíduo é dada substituindo a função admissível na equação diferencial do problema, assim tem-se:

$$R(t) = 3 \frac{d^2\psi}{d^2t} + 27\psi$$

É preciso definir a função ponderadora,  $W_i(t)$ , a qual depende do método utilizado, que é dada, pelo Método dos Mínimos Quadrados, sendo:

$$W_i(t) = \frac{\partial R(\alpha_i)}{\partial \alpha_i} \quad \text{equação 3.37}$$

Fazendo  $i = 1$ , tem-se que integral resíduo ponderado:

$$\begin{aligned} \langle R(t).W_1(t) \rangle &= \int R(t).W_1(t)dt = 0 \\ \int R(t).\frac{\partial R(\alpha_1)}{\partial \alpha_1} dt &= 0 \end{aligned} \quad \text{equação 3.38}$$

Resolvendo a integração por partes, obtém-se a constante  $\alpha_1 = 0,2155$ . Substituindo na função admissível, tem-se:

$$\psi(t) = (-0,398t + 0,2) + 0,2155t(t - 1) \quad \text{equação 3.39}$$

Lembrando que a função admissível acima é uma função aproximada é necessário saber o quanto ela o quanto convergiu com a função analítica. Desta forma, faz-se a norma da função resíduo, dada por,

$$\|R(t)\| = \langle R(t), R(t) \rangle^{\frac{1}{2}} = \int_{-0,2}^{0,2} R^2(t)^{\frac{1}{2}} dt = 3,2869$$

Nota-se que a norma deu diferente de zero, assim, é necessário fazer mais outro parâmetro para diminuir o resíduo, assim aproximando mais da solução correta.

Fazendo o mesmo procedimento, escolhendo uma função admissível da forma:

$$\psi(t) = \psi_0 + \alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2$$

Sabendo que  $\psi_0(t)$  deve atender todas as condições de contorno,  $\psi_1(t)$  e  $\psi_2(t)$  deve satisfazer todas as condições de contorno homogêneas associadas e  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são constantes.

$$\psi_0 = (-0.398t + 0,2)$$

$$\psi_1 = t(t - 1)$$

$$\psi_2 = t^2(t - 1)$$

Substituindo:

$$\psi(t) = (-0,398t + 0,2) + \alpha_1t(t - 1) + \alpha_2t^2(t - 1)$$

A função resíduo é dada substituindo a função admissível na equação diferencial do problema, assim tem-se:

$$R(t) = 3 \frac{d^2\psi}{d^2t} + 27\psi$$

A função ponderadora será  $W_1(t)$  e  $W_2(t)$ , sendo definidas,

$$W_1(t) = \frac{\partial R(\alpha_1)}{\partial \alpha_1} \text{ e } W_2(t) = \frac{\partial R(\alpha_2)}{\partial \alpha_2}$$

Assim, tem-se o sistema de equações:

$$\begin{cases} \int R(t) \cdot \frac{\partial R(\alpha_1)}{\partial \alpha_1} dt = 0 \\ \int R(t) \cdot \frac{\partial R(\alpha_2)}{\partial \alpha_2} dt = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtêm-se as constantes  $\alpha_1 = -0,3825$  e  $\alpha_2 = 0,6751$ . Assim, substituindo na função admissível, tem-se,

$$\psi(t) = (-0,398t + 0,2) - 0,3825t(t - 1) + 0,6751t^2(t - 1) \text{ equação 3.40}$$

O resíduo é dado por,

$$\|R(t)\| = \langle R(t), R(t) \rangle^{\frac{1}{2}} = \int_{-0,2}^{0,2} R^2(t)^{\frac{1}{2}} dt = 0,4120$$

Observa-se que o resultado do resíduo ainda é considerável. Assim, é necessário fazer mais outros parâmetros para diminuir a norma, aproximando mais da solução correta.

Para três parâmetros constituindo a função, da forma:

$$\psi(t) = (-0,398t + 0,2) + \alpha_1 t(t - 1) + \alpha_2 t^2(t - 1) + \alpha_3 t^2(t - 1)^2$$

Obtêm-se os valores das constantes:

$$\alpha_1 = -0,3126, \alpha_2 = 0,6763 \text{ e } \alpha_3 = -0,0765.$$

Assim, substituindo na função admissível, tem-se:

$$\begin{aligned} \psi(t) = & (-0,398t + 0,2) - 0,3126t(t - 1) + 0,6763t^2(t - 1) \\ & - 0,0765t^2(t - 1)^2 \end{aligned} \quad \text{equação 3.41}$$

O resíduo é 0,4096.

Para quatro parâmetros constituindo a função, da forma:

$$\psi(t) = (-0,398t + 0,2) + \alpha_1 t(t - 1) + \alpha_2 t^2(t - 1) + \alpha_3 t^2(t - 1)^2 + \alpha_4 t^3(t - 1)^2$$

Obtêm-se os valores das constantes:

$$\alpha_1 = -0,3983, \alpha_2 = 0,7116, \alpha_3 = 0,2175 \text{ e } \alpha_4 = -0,3514.$$

Assim, substituindo na função admissível, tem-se,

$$\begin{aligned} \psi(t) = (-0,398t + 0,2) - 0,3983t(t - 1) + 0,7116t^2(t - 1) + 0,2175 t^2(t - 1)^2 \\ - 0,3514t^3(t - 1)^2 \end{aligned} \quad \text{equação 3.42}$$

O resíduo é 0,0149.

Para cinco parâmetros constituindo a função, da forma:

$$\begin{aligned} \psi(t) = (-0,398t + 0,2) + \alpha_1 t(t - 1) + \alpha_2 t^2(t - 1) + \alpha_3 t^2(t - 1)^2 + \alpha_4 t^3(t - 1)^2 \\ + \alpha_5 t^3(t - 1)^4 \end{aligned}$$

Obtêm-se os valores das constantes:

$$\alpha_1 = -0,4019, \alpha_2 = 0,7116, \alpha_3 = 0,2132, \alpha_4 = -0,3443 \text{ e } \alpha_5 = 0,0463.$$

Assim, substituindo na função admissível, tem-se,

$$\begin{aligned} \psi(t) = (-0,398t + 0,2) - 0,4019t(t - 1) + 0,7116t^2(t - 1) + 0,2132 t^2(t - 1)^2 \\ - 0,3443t^3(t - 1)^2 + 0,0463t^3(t - 1)^4 \end{aligned} \quad \text{equação 3.43}$$

O resíduo é 0,0097.

Para seis parâmetros constituindo a função, da forma:

$$\begin{aligned} \psi(t) = (-0,398t + 0,2) + \alpha_1 t(t - 1) + \alpha_2 t^2(t - 1) + \alpha_3 t^2(t - 1)^2 + \alpha_4 t^3(t - 1)^2 \\ + \alpha_5 t^3(t - 1)^3 + \alpha_6 t^3(t - 1)^4 \end{aligned}$$

Obtêm-se os valores das constantes:

$$\alpha_1 = -0,3980, \alpha_2 = 0,7113, \alpha_3 = 0,2092, \alpha_4 = -0,3429, \alpha_5 = -0,0524 \text{ e } \alpha_6 = 0,0788.$$

Assim, substituindo na função admissível, tem-se,

$$\begin{aligned} \psi(t) = (-0,398t + 0,2) - 0,3980t(t - 1) + 0,7113t^2(t - 1) + 0,2092 t^2(t - 1)^2 \\ - 0,3429t^3(t - 1)^2 - 0,0524t^3(t - 1)^3 + 0,0788t^4(t - 1)^3 \end{aligned} \quad \text{equação 3.44}$$

O resíduo é  $2,3098 \cdot 10^{-4}$ .

Para sete parâmetros constituindo a função, da forma:

$$\psi(t) = (-0.398t + 0,2) + \alpha_1 t(t-1) + \alpha_2 t^2(t-1) + \alpha_3 t^2(t-1)^2 + \alpha_4 t^3(t-1)^2 + \alpha_5 t^3(t-1)^3 + \alpha_6 t^3(t-1)^4 + \alpha_7 t^4(t-1)^4$$

Obtêm-se os valores das constantes:

$$\alpha_1 = -0,3980, \alpha_2 = 0,7113, \alpha_3 = 0,2091, \alpha_4 = -0,3429, \alpha_5 = -0,0525, \alpha_6 = 0,0788 \text{ e } \alpha_7 = -1,2759 \cdot 10^{-4}.$$

Assim, substituindo na função admissível, tem-se,

$$\begin{aligned} \psi(t) = & (-0.398t + 0,2) - 0,3980t(t-1) + 0,7113t^2(t-1) + 0,2091 t^2(t-1)^2 \\ & - 0,3429t^3(t-1)^2 - 0,0525t^3(t-1)^3 + 0,0788t^4(t-1)^3 \\ & - 1,2759 \cdot 10^{-4}t^4(t-1)^4 \end{aligned} \quad \text{equação 3.45}$$

O resíduo é  $2,3082 \cdot 10^{-4}$ .

Para oito parâmetros constituindo a função, da forma:

$$\begin{aligned} \psi(t) = & (-0.398t + 0,2) + \alpha_1 t(t-1) + \alpha_2 t^2(t-1) + \alpha_3 t^2(t-1)^2 + \alpha_4 t^3(t-1)^2 \\ & + \alpha_5 t^3(t-1)^3 + \alpha_6 t^3(t-1)^4 + \alpha_7 t^4(t-1)^4 + \alpha_8 t^5(t-1)^5 \end{aligned}$$

Obtêm-se os valores das constantes:

$$\alpha_1 = -0,3980, \alpha_2 = 0,7113, \alpha_3 = 0,2093, \alpha_4 = -0,3430, \alpha_5 = -0,0503, \alpha_6 = 0,0763, \alpha_7 = 0,0072, \alpha_8 = -0,0101 \text{ e } \alpha_9 = 1,2974 \cdot 10^{-5}.$$

Assim, substituindo na função admissível, tem-se,

$$\begin{aligned} \psi(t) = & (-0.398t + 0,2) - 0,3980t(t-1) + 0,7113t^2(t-1) + 0,2093 t^2(t-1)^2 \\ & - 0,3430t^3(t-1)^2 + 0,0503t^3(t-1)^3 + 0,0763t^4(t-1)^3 \\ & - 0,0101t^4(t-1)^4 + 1,2974 \cdot 10^{-5}t^5(t-1)^5 \end{aligned} \quad \text{equação 3.46}$$

O resíduo é  $2,0439 \cdot 10^{-6}$ .

Observa-se que a resíduo diminuiu consideravelmente. De tal modo, não é necessário fazer outro parâmetro, pois a função admissível é satisfatória.

### iii) O problema do Movimento Harmônico Simples formulado pelo método de Galerkin:

Fazendo o mesmo procedimento, escolhendo uma função admissível da forma:

$$\psi(t) = \psi_0 + \alpha_1 \psi_1$$

Fazendo:

$$\psi_0 = (-0.398t + 0,2)$$

$$\psi_1 = t(t - 1)$$

Substituindo,

$$\psi(t) = (-0,398t + 0,2) + \alpha_1 t(t - 1)$$

A função ponderadora,  $W_i(t)$ , é dada, pelo Método de Galerkin, sendo:

$$W_i(t) = \psi_i \quad \text{equação 3.47}$$

Fazendo  $i = 1$ , tem-se que integral resíduo ponderado:

$$\langle R(t).W_1(t) \rangle = \int_0^{1,05} R(t).W_1(t)dt = 0$$

$$\int_0^{1,05} R(t).\psi_1 dt = 0 \quad \text{equação 3.48}$$

Resolvendo a integral obtém-se a constante,  $\alpha_1 = -0,1304$ . Substituindo na função admissível, tem-se,

$$\psi(t) = (-0,398t + 0,2) - 0,1304t(t - 1)$$

O resíduo é, dada por,

$$\|R(t)\| = \langle R(t), R(t) \rangle^{\frac{1}{2}} = \int_0^{1,05} R^2(t)^{\frac{1}{2}} dt = 3,4391$$

O resíduo deu maior que zero então a função admissível não é satisfatória. Do mesmo modo, é necessário fazer mais outro parâmetro para diminuir a norma, assim aproximando mais da solução correta.

Fazendo o mesmo procedimento, escolhendo uma função admissível da forma:

$$\psi(t) = \psi_0 + \alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2$$

Fazendo,

$$\psi_0 = (-0,398t + 0,2)$$

$$\psi_1 = t(t - 1)$$

$$\psi_2 = t(t - 1)^2$$

Substituindo,

$$\psi(t) = (-0,398t + 0,2) + \alpha_1 t(t - 1) + \alpha_2 t(t - 1)^2$$

Sabendo que a função ponderadora,  $W_i(t)$ , pelo Método de Galerkin, é dada por,

$$W_i(t) = \psi_i$$

Fazendo  $W_1(t) = \psi_1$  e  $W_2(t) = \psi_2$ , tem-se um sistema de integrais de resíduos ponderados:

$$\int_0^{1,05} R(t) \cdot W_i(t) dt = 0 \rightarrow \begin{cases} \int_0^{1,05} R(t) \cdot \psi_1 dt = 0 \\ \int_0^{1,05} R(t) \cdot \psi_2 dt = 0 \end{cases}$$

Resolvendo a integral obtêm-se as constantes,  $\alpha_1 = 0,3658$  e  $\alpha_2 = 0,7713$ . Substituindo na função admissível, tem-se,

$$\psi(t) = (-0,398t + 0,2) + 0,3658 t(t - 1) + 0,7713t(t - 1)^2$$

O resíduo é dado por:

$$\|R(t)\| = \langle R(t), R(t) \rangle^{\frac{1}{2}} = \int_{-0,2}^{0,2} R^2(t)^{\frac{1}{2}} dt = 0,6468$$

Nota-se que a norma ainda deu maior que zero. Assim, é necessário fazer mais outros parâmetros a fim de diminuir a norma, aproximando a função admissível ainda mais da solução correta.

Para três parâmetros constituindo a função, da forma:

$$\psi(t) = (-0,398t + 0,2) + \alpha_1 t(t - 1) + \alpha_2 t(t - 1)^2 + \alpha_3 t^2(t - 1)^3$$

Obtêm-se as constantes:

$$\alpha_1 = 0,3554, \alpha_2 = 0,7479 \text{ e } \alpha_3 = -0,1568.$$

Substituindo na função admissível, tem-se,

$$\psi(t) = (-0,398t + 0,2) + 0,3554 t(t - 1) + 0,7479t(t - 1)^2 - 0,1568t^2(t - 1)^3$$

equação 3.49

O resíduo é 0,4710.

Para quatro parâmetros constituindo a função, da forma:

$$\psi(t) = (-0,398t + 0,2) + \alpha_1 t(t - 1) + \alpha_2 t(t - 1)^2 + \alpha_3 t^2(t - 1)^2 + \alpha_4 t^2(t - 1)^3$$

Obtêm-se as constantes:

$$\alpha_1 = 0,3071, \alpha_2 = 0,7057, \alpha_3 = -0,1532 \text{ e } \alpha_4 = -0,3849.$$

Substituindo na função admissível, tem-se:

$$\begin{aligned} \psi(t) = & (-0,398t + 0,2) + 0,3071 t(t - 1) + 0,7057t(t - 1)^2 - 0,1532t^2(t - 1)^2 \\ & - 0,3849t^2(t - 1)^3 \end{aligned} \quad \text{equação 3.50}$$

O resíduo é 0,0737.

Para cinco parâmetros constituindo a função, da forma:

$$\begin{aligned} \psi(t) = & (-0,398t + 0,2) + \alpha_1 t(t - 1) + \alpha_2 t(t - 1)^2 + \alpha_3 t^2(t - 1)^2 + \alpha_4 t^2(t - 1)^3 \\ & + \alpha_5 t^3(t - 1)^3 \end{aligned}$$

Obtêm-se as constantes:

$$\alpha_1 = 0,3184, \alpha_2 = 0,7133, \alpha_3 = -0,1148, \alpha_4 = -0,3498 \text{ e } \alpha_5 = 0,0491.$$

Substituindo na função admissível, tem-se:

$$\begin{aligned} \psi(t) = & (-0,398t + 0,2) + 0,3184 t(t - 1) + 0,7133t(t - 1)^2 - 0,1148t^2(t - 1)^2 \\ & - 0,3498t^2(t - 1)^3 + 0,0491t^3(t - 1)^3 \end{aligned} \quad \text{equação 3.51}$$

O resíduo é 0,0608.

Para seis parâmetros constituindo a função, da forma:

$$\begin{aligned} \psi(t) = & (-0,398t + 0,2) + \alpha_1 t(t - 1) + \alpha_2 t(t - 1)^2 + \alpha_3 t^2(t - 1)^2 + \alpha_4 t^2(t - 1)^3 \\ & + \alpha_5 t^3(t - 1)^3 + \alpha_6 t^3(t - 1)^4 \end{aligned}$$

Obtêm-se as constantes:

$$\alpha_1 = 0,3133, \alpha_2 = 0,7113, \alpha_3 = -0,1338, \alpha_4 = -0,3429, \alpha_5 = 0,0263 \text{ e } \alpha_6 = 0,0792.$$

Substituindo na função admissível, tem-se,

$$\begin{aligned} \psi(t) = & (-0,398t + 0,2) + 0,3133 t(t - 1) + 0,7113t(t - 1)^2 - 0,1338t^2(t - 1)^2 \\ & - 0,3429t^2(t - 1)^3 + 0,0263t^3(t - 1)^3 + 0,0792t^3(t - 1)^4 \end{aligned}$$

equação 3.52

O resíduo é  $4,1604 \cdot 10^{-4}$ .

Para sete parâmetros constituindo a função, da forma:

$$\psi(t) = (-0,398t + 0,2) + \alpha_1 t(t-1) + \alpha_2 t(t-1)^2 + \alpha_3 t^2(t-1)^2 + \alpha_4 t^2(t-1)^3 + \alpha_5 t^3(t-1)^3 + \alpha_6 t^3(t-1)^4 + \alpha_7 t^4(t-1)^4$$

Obtêm-se as constantes:

$$\alpha_1 = 0,3133, \alpha_2 = 0,7113, \alpha_3 = -0,1338, \alpha_4 = -0,3427, \alpha_5 = 0,0261, \alpha_6 = 0,0796 \text{ e } \alpha_7 = -9,1276 \cdot 10^{-4}.$$

Substituindo na função admissível, tem-se:

$$\begin{aligned} \psi(t) = & (-0,398t + 0,2) + 0,3133 t(t-1) + 0,7113t(t-1)^2 - 0,1338t^2(t-1)^2 \\ & - 0,3427t^2(t-1)^3 + 0,0261t^3(t-1)^3 + 0,0796t^3(t-1)^4 \\ & - 9,1276 \cdot 10^{-4}t^4(t-1)^4 \end{aligned} \quad \text{equação 3.53}$$

O resíduo é  $3,8787 \cdot 10^{-4}$ .

Para oito parâmetros constituindo a função, da forma:

$$\psi(t) = (-0,398t + 0,2) + \alpha_1 t(t-1) + \alpha_2 t(t-1)^2 + \alpha_3 t^2(t-1)^2 + \alpha_4 t^2(t-1)^3 + \alpha_5 t^3(t-1)^3 + \alpha_6 t^3(t-1)^4 + \alpha_7 t^4(t-1)^4 + \alpha_8 t^4(t-1)^5$$

Obtêm-se as constantes:

$$\alpha_1 = 0,3134, \alpha_2 = 0,7113, \alpha_3 = -0,1337, \alpha_4 = -0,3430, \alpha_5 = 0,0260, \alpha_6 = 0,0762, \alpha_7 = -0,0029 \text{ e } \alpha_8 = -0,0102.$$

Substituindo na função admissível, tem-se:

$$\begin{aligned} \psi(t) = & (-0,398t + 0,2) + 0,3134 t(t-1) + 0,7113t(t-1)^2 - 0,1337t^2(t-1)^2 \\ & - 0,3430t^2(t-1)^3 + 0,0260t^3(t-1)^3 + 0,0762t^3(t-1)^4 \\ & - 0,0029t^4(t-1)^4 - 0,0102t^4(t-1)^5 \end{aligned} \quad \text{equação 3.54}$$

O resíduo é  $3,5748 \cdot 10^{-6}$ .

Vale ressaltar que a norma diminuiu consideravelmente. Portanto, não é necessário fazer outro parâmetro, pois a função admissível é satisfatória.

### 3.2. Estudo da solução aproximada do Movimento Harmônico Amortecido

Considere um oscilador harmônico que consiste em um bloco de massa  $m = 2,00kg$ , preso a uma mola de constante elástica  $k = 2,00N/m$ , sofrendo uma força de amortecimento da forma  $F = -bv$ , sendo  $b = 4kg/s$ . Inicialmente em repouso, no instante  $t=0s$ , ele oscila

com uma amplitude de  $0,25m$ , e que quando o  $t = 1s$  o espaço é  $x = 0,1839m$ . Os fatores determinantes da função deslocamento do movimento harmônico amortecido pelos métodos tradicionais são os modos de amortecimento. Dentre eles estão o subamortecido, o criticamente amortecido e o superamortecido.

O oscilador mencionado é um movimento criticamente amortecido, a solução analítica, já vista na revisão da literatura, é dada por,

$$x(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\gamma t}$$

Onde  $\gamma = \frac{b}{2m} = 1$  e  $A_1$  e  $A_2$  são constantes.

Para se obter a solução analítica pelos métodos tradicionais basta encontrar as constantes  $A_1$  e  $A_2$ . Para isso é necessário somente tomar conhecimento das condições iniciais.

Quando o tempo é  $t = 0s$ ,  $x = 0,25m$ , substituindo, tem-se:

$$\begin{aligned} x(0) &= (A_1 + A_2 0)e^{-\gamma 0} = 0,25 \\ A_1 &= 0,25 \end{aligned}$$

Utiliza-se a expressão da velocidade do oscilador em função do tempo para obter a segunda equação, para isto basta fazer a derivada primeira da equação do espaço,

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\gamma(A_1 + A_2 t)e^{-\gamma t} + A_2 e^{-\gamma t}$$

Levando os valores da velocidade para  $t = 0$  e de  $\gamma$  nessa expressão, obtém-se:

$$\begin{aligned} v(0) &= -1(0,25 + A_2 0)e^{-1 \cdot 0} + A_2 e^{-1 \cdot 0} = 0 \\ A_2 &= 0,25 \end{aligned}$$

Assim, substituindo os valores das constantes, tem-se a seguinte função do espaço do oscilador amortecido,

$$x(t) = (0,25 + 0,25t)e^{-t} \quad \text{equação 3.55}$$

Para o oscilador harmônico amortecido, será estudado pelos três métodos: O método da Colocação Pontual, dos Mínimos Quadrados e de Galerkin.

- i) **O problema do Movimento Harmônico Amortecido formulado pelo método da Colocação Pontual:**

Escolhe-se a função admissível da forma:

$$\psi(t) = \psi_0 + \alpha_1 \psi_1$$

As condições iniciais do problema proposto definem que a massa  $m$  saia do repouso, ou seja,  $v(0) = 0 \text{ m/s}$ , e que a posição  $x$  seja igual a  $0,25\text{m}$  no instante inicial. Já quando o  $t = 1,0\text{s}$ ,  $x(1) = 0,1839\text{m}$ . Desta forma, podem ser definidas,

Substituindo as funções  $\psi_0$  e  $\psi_1$ , tem-se:

$$\psi(t) = (-0,0661t + 0,25) + \alpha_1 t(t - 1) \quad \text{equação 3.56}$$

Fazendo  $\psi_0 = at + b$ , sendo  $a$  e  $b$  constantes e as condições de contorno  $x(0) = 0,25$  e  $x(1) = 0,1839$ , substituindo-as em  $\psi_0$ , tem-se:

$$\psi_0(0) = a \cdot 0 + b = 0,25 \rightarrow b = 0,25$$

$$\psi_0(1) = a \cdot 1 + b = 0,1839 \rightarrow a + 0,25 = 0,1839 \rightarrow a = -0,0661$$

Logo,

$$\psi_0 = (-0,0661t + 0,25) \quad \text{equação 3.57}$$

Para descobrir a função  $\psi_1 = t(t + d)$ , sendo  $d$  uma constante e as condições de contorno associadas  $x(0) = 0$  e  $x(1) = 0$ , tem-se,

$$\psi_1(1) = t(t + d) = 0 \rightarrow 1 + d = 0 \rightarrow d = -1$$

$$\psi_1(0) = t(t + d) = 0$$

Então a função  $\psi_1$  fica:

$$\psi_1 = t(t - 1) \quad \text{equação 3.58}$$

Substituindo as equações 3.57 e 3.58 em 3.56, tem-se:

$$\psi(t) = (-0,0661t + 0,25) + \alpha_1 t(t - 1)$$

Como a função admissível é uma aproximação, cabe-se saber o erro entre esta e a solução exata. Denomina-se Resíduo o erro total, que pode ser dado pela substituição da função admissível na equação diferencial do problema, dado por:

$$R(t) = 2 \frac{d^2\psi}{dt^2} + 4 \frac{d\psi}{dt} + 2\psi \quad \text{equação 3.59}$$

Para solucionar a função acima é necessária a integração abaixo:

$$\langle R(t), W(t) \rangle = \int R(t)W_i(t)dt = 0$$

Mas para isso, é preciso definir a função ponderadora,  $W_i(t)$ , a qual depende do método utilizado, dado pelo método da Colocação Pontual, pela função de Dirac  $W(t) = \delta(t - \zeta)$ , sendo  $0 < \zeta < 2$  o domínio.

Fazendo  $\zeta = 0,1$ , obtém-se  $W_1(t) = \delta(t - 0,1)$ . A integral do resíduo ponderado fé dada por:

$$\begin{aligned} \langle R(t), W(t) \rangle &= \int R(t)W_1(t)dt = 0 \\ \int R(t) \cdot \delta(t - 0,1)dt &= R(0,1) = 0 \end{aligned}$$

Aplicando o ponto 0,1 na função resíduo, obtém-se o valor da constante  $\alpha_1 = -0,3587$ . Assim sendo, substituindo na função admissível, tem-se,

$$\psi(t) = (-0,0661t + 0,25) - 0,3587t(t - 1) \quad \text{equação 3.60}$$

Advertindo que a função admissível acima é uma função aproximada, é necessário saber o quanto ela convergiu com a função analítica, sendo  $x(t) = (0,25 + 0,25t)e^{-t}$ . Desta forma, faz-se a norma da função resíduo, dada por,

$$\|R(t)\| = \langle R(t), R(t) \rangle^{\frac{1}{2}} = \int_0^2 R^2(t)^{\frac{1}{2}}dt = 5,2323$$

Vale ressaltar, quanto à função admissível, que na medida em que se aumenta o grau do polinômio a função se aproxima da resposta correta, porém dependendo da precisão esperada e do tipo de solução, pode ser imprescindível um polinômio de grau muito elevado para diminuir significativamente o erro de aproximação.

Escolhendo uma função admissível da forma:

$$\psi(t) = \psi_0 + \alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2$$

Fazendo:

$$\psi_0 = (-0,0661t + 0,25)$$

$$\psi_1 = t(t - 1)$$

$$\psi_2 = t^2(t - 1)$$

Substituindo as funções, tem-se:

$$\psi(t) = (-0,0661t + 0,25) + \alpha_1 t(t - 1) + \alpha_2 t(t - 1)^2 \quad \text{equação 3.61}$$

Definindo a função ponderadora, duas novas funções,  $W_1(t)$  e  $W_2(t)$ , para que sejam descobertos os valores das constantes. Para isso, define-se que  $\zeta_1 = 0,1$  e que  $\zeta_2 = 0,2$ . Resolvendo a integral não só com  $W_1(t) = \delta(t - 0,1)$  mas também com  $W_2(t) = \delta(t - 0,2)$ , adquire-se o sistema abaixo,

$$\begin{cases} \int R(t) \cdot \delta(t - 0,1) dt = R(0,1) = 0 \\ \int R(t) \cdot \delta(t - 0,2) dt = R(0,2) = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtêm-se as constantes,  $\alpha_1 = 0,0154$  e  $\alpha_2 = 0,0563$ . Assim como, substituindo na função admissível, tem-se,

$$\psi(t) = (-0,0661t + 0,25) + 0,0154t(t - 1) + 0,0563t(t - 1)^2 \quad \text{equação 3.62}$$

Como a função admissível acima é uma função aproximada é necessário saber o quanto ela o quanto convergiu com a função analítica, que é dada por,

$$x(t) = (0,25 + 0,25t)e^{-t}$$

Desta forma, faz-se a norma da função resíduo, dada por,

$$\|R(t)\| = \langle R(t), R(t) \rangle^{\frac{1}{2}} = \int_0^2 R^2(t)^{\frac{1}{2}} dt = 1,4681$$

Para três parâmetros constituindo a função, da forma:

$$\psi(t) = (-0,0661t + 0,25) + \alpha_1 t(t - 1) + \alpha_2 t(t - 1)^2 + \alpha_3 t^2(t - 1)^2$$

Obtêm-se as constantes:

$$\alpha_1 = -0,0369, \alpha_2 = 0,0339 \text{ e } \alpha_3 = -0,0246.$$

Substituindo na função admissível, tem-se:

$$\psi(t) = (-0,0661t + 0,25) - 0,0369t(t - 1) + 0,0339t(t - 1)^2 - 0,0246t^2(t - 1)^2$$

equação 3.63

O resíduo é 1.0152.

Para quatro parâmetros constituindo a função, da forma:

$$\psi(t) = (-0,0661t + 0,25) + \alpha_1 t(t-1) + \alpha_2 t(t-1)^2 + \alpha_3 t^2(t-1)^2 + \alpha_4 t^2(t-1)^3$$

Obtêm-se as constantes:

$$\alpha_1 = -0,0244, \alpha_2 = 0,0411, \alpha_3 = -0,0117 \text{ e } \alpha_4 = 0,0061.$$

Substituindo na função admissível, tem-se:

$$\begin{aligned} \psi(t) = & (-0,0661t + 0,25) - 0,0244t(t-1) + 0,0411t(t-1)^2 \\ & - 0,0117 \cdot 10^{-4} t^2(t-1)^2 + 0,0061 t^2(t-1)^3 \end{aligned} \quad \text{equação 3.64}$$

O resíduo é 0,3927.

Para cinco parâmetros constituindo a função, da forma:

$$\begin{aligned} \psi(t) = & (-0,0661t + 0,25) + \alpha_1 t(t-1) + \alpha_2 t(t-1)^2 + \alpha_3 t^2(t-1)^2 + \alpha_4 t^2(t-1)^3 \\ & + \alpha_5 t^3(t-1)^3 \end{aligned}$$

Obtêm-se as constantes:

$$\alpha_1 = -0,0260, \alpha_2 = 0,0400, \alpha_3 = -0,0146, \alpha_4 = 0,0043 \text{ e } \alpha_5 = -0,0012.$$

Substituindo na função admissível, tem-se:

$$\begin{aligned} \psi(t) = & (-0,0661t + 0,25) - 0,0260t(t-1) + 0,0400t(t-1)^2 - 0,0146t^2(t-1)^2 \\ & + 0,0043 t^2(t-1)^3 - 0,0012t^3(t-1)^3 \end{aligned} \quad \text{equação 3.65}$$

O resíduo é 0,1138.

Para seis parâmetros constituindo a função, da forma:

$$\begin{aligned} \psi(t) = & (-0,0661t + 0,25) + \alpha_1 t(t-1) + \alpha_2 t(t-1)^2 + \alpha_3 t^2(t-1)^2 + \alpha_4 t^2(t-1)^3 \\ & + \alpha_5 t^3(t-1)^3 + \alpha_6 t^3(t-1)^4 \end{aligned}$$

Obtêm-se as constantes:

$$\alpha_1 = -0,0259, \alpha_2 = 0,0401, \alpha_3 = -0,0142, \alpha_4 = 0,0046, \alpha_5 = -8,3450 \cdot 10^{-4} \text{ e } \alpha_6 = 1,9834 \cdot 10^{-4}.$$

Substituindo na função admissível, tem-se:

$$\begin{aligned} \psi(t) = & (-0,0661t + 0,25) - 0,0259t(t-1) + 0,0401t(t-1)^2 - 0,0142t^2(t-1)^2 \\ & + 0,0046 t^2(t-1)^3 - 8,3450 \cdot 10^{-4} t^3(t-1)^3 + 1,9834 \cdot 10^{-4} t^3(t-1)^4 \end{aligned} \quad \text{equação 3.66}$$

O resíduo é 0,0279.

Para sete parâmetros constituindo a função, da forma:

$$\psi(t) = (-0,0661t + 0,25) + \alpha_1 t(t-1) + \alpha_2 t(t-1)^2 + \alpha_3 t^2(t-1)^2 + \alpha_4 t^2(t-1)^3 + \alpha_5 t^3(t-1)^3 + \alpha_6 t^3(t-1)^4 + \alpha_7 t^4(t-1)^4$$

Obtêm-se as constantes:

$$\alpha_1 = -0,0259, \alpha_2 = 0,0401, \alpha_3 = -0,0142, \alpha_4 = 0,0045, \alpha_5 = -8,9203 \cdot 10^{-4}, \\ \alpha_6 = 1,6490 \cdot 10^{-4} \text{ e } \alpha_7 = -2,7560 \cdot 10^{-5}.$$

Assim como, substituindo na função admissível, tem-se:

$$\psi(t) = (-0,0661t + 0,25) - 0,0259t(t-1) + 0,0401t(t-1)^2 - 0,0142t^2(t-1)^2 + 0,0046t^2(t-1)^3 - 8,9203 \cdot 10^{-4}t^3(t-1)^3 + 1,6490 \cdot 10^{-4}t^3(t-1)^4 - 2,7560 \cdot 10^{-5}t^4(t-1)^4 \quad \text{equação 3.67}$$

O resíduo é 0,0070.

Para oito parâmetros constituindo a função, da forma:

$$\psi(t) = (-0,0661t + 0,25) + \alpha_1 t(t-1) + \alpha_2 t(t-1)^2 + \alpha_3 t^2(t-1)^2 + \alpha_4 t^2(t-1)^3 + \alpha_5 t^3(t-1)^3 + \alpha_6 t^3(t-1)^4 + \alpha_7 t^4(t-1)^4 + \alpha_8 t^4(t-1)^5$$

Obtêm-se as constantes:

$$\alpha_1 = -0,0259, \alpha_2 = 0,0401, \alpha_3 = -0,0142, \alpha_4 = 0,0045, \alpha_5 = 8,8737 \cdot 10^{-4}, \alpha_6 = 1,6867 \cdot 10^{-4}, \alpha_7 = -2,2843 \cdot 10^{-5} \text{ e } \alpha_8 = -3,3335 \cdot 10^{-6}.$$

Assim como, substituindo na função admissível, tem-se:

$$\psi(t) = (-0,0661t + 0,25) - 0,0259t(t-1) + 0,0401t(t-1)^2 - 0,0142t^2(t-1)^2 + 0,0045t^2(t-1)^3 - 8,8737 \cdot 10^{-4}t^3(t-1)^3 + 1,6867 \cdot 10^{-4}t^3(t-1)^4 - 2,2843 \cdot 10^{-5}t^4(t-1)^4 - 3,3335 \cdot 10^{-6}t^4(t-1)^5 \quad \text{equação 3.68}$$

O resíduo é 0,0052.

Para nove parâmetros constituindo a função, da forma:

$$\psi(t) = (-0,0661t + 0,25) + \alpha_1 t(t-1) + \alpha_2 t(t-1)^2 + \alpha_3 t^2(t-1)^2 + \alpha_4 t^2(t-1)^3 + \alpha_5 t^3(t-1)^3 + \alpha_6 t^3(t-1)^4 + \alpha_7 t^4(t-1)^4 + \alpha_8 t^4(t-1)^5 + \alpha_9 t^5(t-1)^5$$

Obtêm-se as constantes:

$$\alpha_1 = -0,0259, \alpha_2 = 0,0401, \alpha_3 = -0,0142, \alpha_4 = 0,0045, \alpha_5 = 8,8759 \cdot 10^{-4}, \alpha_6 = 1,6853 \cdot 10^{-4}, \alpha_7 = -2,3304 \cdot 10^{-5}, \alpha_8 = 3,1490 \cdot 10^{-6} \text{ e } \alpha_9 = -3,5714 \cdot 10^{-7}.$$

Assim como, substituindo na função admissível, tem-se:

$$\begin{aligned} \psi(t) = & (-0,0661t + 0,25) - 0,0259t(t-1) + 0,0401t(t-1)^2 - 0,0142t^2(t-1)^2 \\ & + 0,0045t^2(t-1)^3 - 8,8759 \cdot 10^{-4}t^3(t-1)^3 + 1,6853 \cdot 10^{-4}t^3(t-1)^4 \\ & - 2,3304 \cdot 10^{-5}t^4(t-1)^4 + 3,1490 \cdot 10^{-6}t^4(t-1)^5 \\ & - 3,5714 \cdot 10^{-7}t^5(t-1)^5 \end{aligned} \quad \text{equação 3.69}$$

O resíduo é 0,0024.

Para dez parâmetros constituindo a função, da forma:

$$\begin{aligned} \psi(t) = & (-0,0661t + 0,25) + \alpha_1t(t-1) + \alpha_2t(t-1)^2 + \alpha_3t^2(t-1)^2 + \alpha_4t^2(t-1)^3 \\ & + \alpha_5t^3(t-1)^3 + \alpha_6t^3(t-1)^4 + \alpha_7t^4(t-1)^4 + \alpha_8t^4(t-1)^5 \\ & + \alpha_9t^5(t-1)^5 + \alpha_{10}t^5(t-1)^6 \end{aligned}$$

Obtêm-se as constantes:

$$\alpha_1 = -0,0259, \alpha_2 = 0,0401, \alpha_3 = -0,0142, \alpha_4 = 0,0045, \alpha_5 = -8,8759 \cdot 10^{-4}, \alpha_6 = 1,6854 \cdot 10^{-4}, \alpha_7 = -2,3290 \cdot 10^{-5}, \alpha_8 = 3,1762 \cdot 10^{-6}, \alpha_9 = -3,3933 \cdot 10^{-7} \text{ e } \alpha_{10} = 3,4349 \cdot 10^{-8}.$$

Assim como, substituindo na função admissível, tem-se,

$$\begin{aligned} \psi(t) = & (-0,0661t + 0,25) - 0,0259t(t-1) + 0,0401t(t-1)^2 - 0,0142t^2(t-1)^2 \\ & + 0,0045t^2(t-1)^3 - 8,8759 \cdot 10^{-4}t^3(t-1)^3 + 1,6854 \cdot 10^{-4}t^3(t-1)^4 \\ & - 2,3290 \cdot 10^{-5}t^4(t-1)^4 + 3,1762 \cdot 10^{-6}t^4(t-1)^5 \\ & - 3,3933 \cdot 10^{-7}t^5(t-1)^5 + 3,4349 \cdot 10^{-8}t^5(t-1)^6 \end{aligned} \quad \text{equação 3.70}$$

O resíduo é 0,0023.

Nota-se que a norma diminuiu consideravelmente. Assim, não é necessário fazer outro parâmetro, pois a função admissível é satisfatória.

## ii) O problema do Movimento Harmônico Amortecido formulado pelo método dos Mínimos Quadrados:

Escolhe-se a função admissível da forma:

$$\psi(t) = \psi_0 + \alpha_1\psi_1$$

Fazendo:

$$\psi_0 = (-0,0661t + 0,25)$$

$$\psi_1 = t(t - 1)$$

Substituindo as funções  $\psi_0$  e  $\psi_1$ , tem-se:

$$\psi(t) = (-0,0661t + 0,25) + \alpha_1 t(t - 1)$$

A função resíduo é dada substituindo a função admissível na equação diferencial do problema, assim tem-se:

$$R(t) = 2 \frac{d^2\psi}{dt^2} + 4 \frac{d\psi}{dt} + 2\psi$$

É preciso definir a função ponderadora,  $W_i(t)$ , a qual depende do método utilizado, que é dada, pelo Método dos Mínimos Quadrados, sendo:

$$W_i(t) = \frac{\partial R(\alpha_i)}{\partial \alpha_i}$$

Fazendo  $i = 1$ , tem-se a integral resíduo ponderado abaixo:

$$\langle R(t).W_1(t) \rangle = \int_0^2 R(t).W_1(t)dt = 0$$

Em que,

$$W_1(t) = \frac{\partial R(\alpha_1)}{\partial \alpha_1}$$

Logo,

$$\int_0^2 R(t). \frac{\partial R(\alpha_1)}{\partial \alpha_1} dt = 0$$

Resolvendo a integral acima, obtém-se a constante:

$$\alpha_1 = -0,0042$$

Assim sendo, substituindo a constante na função admissível, tem-se:

$$\psi(t) = (-0,0661t + 0,25) - 0,0042t(t - 1) \quad \text{equação 3.71}$$

Como a função admissível acima é uma função aproximada é necessário saber o quanto ela o quanto convergiu com a função analítica, que é dada por  $x(t) = (0,25 + 0,25te^{-t})$ . Desta forma, faz-se a norma da função resíduo, dada por,

$$\|R(t)\| = \langle R(t), R(t) \rangle^{\frac{1}{2}} = \int_0^2 R^2(t)^{\frac{1}{2}} dt = 0,1709$$

Nota-se que a norma deu maior que zero isso implica que quanto mais próximo de zero, mais precisa é a função admissível.

Escolhendo outra função admissível da forma:

$$\psi(t) = \psi_0 + \alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2$$

Sabendo que  $\psi_0(t)$  deve atender todas as condições de contorno,  $\psi_1(t)$  e  $\psi_2(t)$  devem satisfazer todas as condições de contorno homogêneas associadas e  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  constantes.

$$\psi(x) = \psi_0 + \alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2$$

$$\psi_0 = (-0,0661t + 0,25)$$

$$\psi_1 = t(t - 1)$$

$$\psi_2 = t(t - 1)^2$$

$$\psi(t) = (-0,0661t + 0,25) + \alpha_1t(t - 1) + \alpha_2t(t - 1)^2$$

A função resíduo é dada substituindo a função admissível na equação diferencial do problema, assim tem-se:

$$R(t) = 2 \frac{d^2\psi}{d^2t} + 4 \frac{d\psi}{dt} + 2\psi$$

É preciso definir a função ponderadora,  $W_i(t)$ , a qual depende do método utilizado, que é dada, pelo Método dos Mínimos Quadrados, sendo:

$$W_i(t) = \frac{\partial R(\alpha_i)}{\partial \alpha_i}$$

A função ponderadora será  $W_1(t)$  e  $W_2(t)$ , sendo definidas,

$$W_1(t) = \frac{\partial R(\alpha_1)}{\partial \alpha_1} \text{ e } W_2(t) = \frac{\partial R(\alpha_2)}{\partial \alpha_2}$$

Desta forma, obtém-se o sistema de equações:

$$\begin{cases} \int R(t) \cdot \frac{\partial R(\alpha_1)}{\partial \alpha_1} dt = 0 \\ \int R(t) \cdot \frac{\partial R(\alpha_2)}{\partial \alpha_2} dt = 0 \end{cases}$$

Resolvendo a integral obtêm-se as constantes,

$$\alpha_1 = -0,0264 \text{ e } \alpha_2 = 0,0163$$

Assim como, substituindo na função admissível, tem-se,

$$\psi(t) = (-0,0661t + 0,25) - 0,0264t(t - 1) + 0,0163t(t - 1)^2 \quad \text{equação 3.72}$$

Como a função admissível acima é uma função aproximada é necessário saber o quanto convergiu com a função analítica, que é dada por  $x(t) = (0,25 + 0,25t)e^{-t}$ . Desta forma, faz-se a norma da função resíduo, dada por,

$$\|R(t)\| = \langle R(t), R(t) \rangle^{\frac{1}{2}} = \int_0^2 R^2(t)^{\frac{1}{2}} dt = 0,0879$$

Como o resíduo é maior que zero, é necessário fazer mais outros parâmetros para diminuir a norma, aproximando a função admissível à solução correta.

Para três parâmetros constituindo a função, da forma:

$$\psi(t) = (-0,0661t + 0,25) + \alpha_1 t(t - 1) + \alpha_2 t(t - 1)^2 + \alpha_3 t^2(t - 1)^2$$

Obtêm-se as constantes:

$$\alpha_1 = -0,0280, \alpha_2 = 0,0374 \text{ e } \alpha_3 = -0,0087.$$

Assim como, substituindo na função admissível, tem-se:

$$\psi(t) = (-0,0661t + 0,25) - 0,0280t(t - 1) + 0,0374t(t - 1)^2 - 0,0087t^2(t - 1)^2 \quad \text{equação 3.73}$$

O resíduo é 0,0227.

Para quatro parâmetros constituindo a função, da forma:

$$\psi(t) = (-0,0661t + 0,25) + \alpha_1 t(t - 1) + \alpha_2 t(t - 1)^2 + \alpha_3 t^2(t - 1)^2 + \alpha_4 t^2(t - 1)^3$$

Obtêm-se as constantes:

$$\alpha_1 = -0,0258, \alpha_2 = 0,0403, \alpha_3 = -0,0138 \text{ e } \alpha_4 = 0,0037.$$

Assim, substituindo na função admissível, tem-se:

$$\begin{aligned} \psi(t) = & (-0,0661t + 0,25) - 0,0258(t - 1) + 0,0403t(t - 1)^2 - 0,0138t^2(t - 1)^2 \\ & + 0,0037t^2(t - 1)^3 \end{aligned} \quad \text{equação 3.74}$$

O resíduo é 0,0037.

Para cinco parâmetros constituindo a função, da forma:

$$\begin{aligned} \psi(t) = & (-0,0661t + 0,25) + \alpha_1 t(t - 1) + \alpha_2 t(t - 1)^2 + \alpha_3 t^2(t - 1)^2 + \alpha_4 t^2(t - 1)^3 \\ & + \alpha_5 t^3(t - 1)^3 \end{aligned}$$

Obtêm-se as constantes:

$$\alpha_1 = -0,0258, \alpha_2 = 0,0402, \alpha_3 = -0,0143, \alpha_4 = 0,0042 \text{ e } \alpha_5 = -5,4629 \cdot 10^{-4}.$$

Assim, substituindo na função admissível, tem-se,

$$\begin{aligned} \psi(t) = & (-0,0661t + 0,25) - 0,0258t(t - 1) + 0,0402t(t - 1)^2 - 0,0143t^2(t - 1)^2 \\ & + 0,0042t^2(t - 1)^3 - 5,4629 \cdot 10^{-4}t^3(t - 1)^3 \end{aligned} \quad \text{equação 3.75}$$

O resíduo é  $4,4712 \cdot 10^{-4}$ .

Para seis parâmetros constituindo a função, da forma:

$$\begin{aligned} \psi(t) = & (-0,0661t + 0,25) + \alpha_1 t(t - 1) + \alpha_2 t(t - 1)^2 + \alpha_3 t^2(t - 1)^2 + \alpha_4 t^2(t - 1)^3 \\ & + \alpha_5 t^3(t - 1)^3 + \alpha_6 t^3(t - 1)^4 \end{aligned}$$

Obtêm-se as constantes:

$$\alpha_1 = -0,0258, \alpha_2 = 0,0402, \alpha_3 = -0,0142, \alpha_4 = 0,0045, \alpha_5 = -8,3488 \cdot 10^{-4} \text{ e } \alpha_6 = 9,6200 \cdot 10^{-5}.$$

Assim, substituindo na função admissível, tem-se:

$$\begin{aligned} \psi(t) = & (-0,0661t + 0,25) - 0,0258t(t - 1) + 0,0402t(t - 1)^2 - 0,0142t^2(t - 1)^2 \\ & + 0,0045t^2(t - 1)^3 - 8,3488 \cdot 10^{-4}t^3(t - 1)^3 + 9,6200 \cdot 10^{-5}t^3(t - 1)^4 \end{aligned} \quad \text{equação 3.76}$$

O resíduo é  $4,4179 \cdot 10^{-5}$ . Nota-se que a norma diminuiu consideravelmente. Assim, não é necessário fazer outro parâmetro, pois a função admissível é satisfatória.

**iii) O problema do Movimento Harmônico Amortecido formulado pelo método de Galerkin:**

Da mesma maneira, escolhe-se a função admissível da forma:

$$\psi(t) = \psi_0 + \alpha_1 \psi_1$$

Fazendo,

$$\psi_0 = (-0,0661t + 0,25)$$

$$\psi_1 = t(t - 1)$$

Substituindo as funções  $\psi_0$  e  $\psi_1$ , tem-se:

$$\psi(t) = (-0,0661t + 0,25) + \alpha_1 t(t - 1)$$

É necessário que seja conhecido o valor da constante  $\alpha_1$  para que seja obtida a função admissível.

Como a função admissível é uma aproximação, cabe-se saber o erro entre esta e a solução exata. Denomina-se Resíduo o erro total, que pode ser dado pela substituição da função admissível na equação diferencial do problema, dado por:

$$R(t) = 2 \frac{d^2\psi}{dt^2} + 4 \frac{d\psi}{dt} + 2\psi$$

Para solucionar a função acima é necessária a integração abaixo:

$$\langle R(t), W(t) \rangle = \int R(t)W_i(t)dt = 0$$

Mas para isso, é preciso definir a função ponderadora,  $W_i(t)$ , a qual depende do método utilizado, que é dada pelo Método de Galerkin, sendo,

$$W_i(t) = \psi_i$$

Fazendo  $i = 1$ , tem-se que integral resíduo ponderado:

$$\langle R(t), W_1(t) \rangle = \int_0^2 R(t) \cdot W_1(t) dt = 0$$

Substituindo, tem-se a integral abaixo,

$$\int_0^2 R(t) \cdot \psi_1 dt = 0$$

Resolvendo a integral obtém-se a constante  $\alpha_1 = 0,0015$ . Assim como, substituindo na função admissível, tem-se,

$$\psi(t) = (-0,0661t + 0,25) + 0,0015t(t - 1) \quad \text{equação 3.77}$$

Como a função admissível acima é uma função aproximada é necessário saber o quanto ela o quanto convergiu com a função analítica, que é dada por  $x(t) = (0,25 + 0,25te^{-t})$ . Desta forma, faz-se a norma da função resíduo, dada por,

$$\|R(t)\| = \langle R(t), R(t) \rangle^{\frac{1}{2}} = \int_0^2 R^2(t)^{\frac{1}{2}} dt = 0,1904$$

Observa-se que a norma deu maior que zero isso implica que quanto mais próximo de zero, mais precisa é a função admissível.

Fazendo o mesmo procedimento, escolhendo uma função admissível da forma:

$$\psi(t) = \psi_0 + \alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2$$

Fazendo

$$\psi_0 = (-0,0661t + 0,25)$$

$$\psi_1 = t(t - 1)$$

$$\psi_2 = t(t - 1)^2$$

Substituindo:

$$\psi(t) = (-0,0661t + 0,25) + \alpha_1t(t - 1) + \alpha_2t(t - 1)^2$$

A função resíduo é dada substituindo a função admissível na equação diferencial do problema, assim tem-se:

$$R(t) = 2 \frac{d^2\psi}{dt^2} + 4 \frac{d\psi}{dt} + 2\psi$$

Sabendo que a função ponderadora,  $W_i(t)$ , pelo Método de Galerkin, é dada por,

$$W_i(t) = \psi_i$$

Fazendo  $W_1(t) = \psi_1$  e  $W_2(t) = \psi_2$ , tem-se um sistema de integrais de resíduos ponderados:

$$\int_0^2 R(t) \cdot W_i(t) dt = 0 \rightarrow \begin{cases} \int_0^2 R(t) \cdot \psi_1 dt = 0 \\ \int_0^2 R(t) \cdot \psi_2 dt = 0 \end{cases}$$

Resolvendo a integral obtêm-se as constantes,  $\alpha_1 = -0,0596$  e  $\alpha_2 = 0,0349$  Assim como, substituindo na função admissível, tem-se,

$$\psi(t) = (-0,0661t + 0,25) - 0,0596 t(t - 1) + 0,0349 \cdot 10^{-4} t(t - 1)^2$$

equação 3.78

Como a função admissível acima é uma função aproximada é necessário saber o quanto ela o quanto convergiu com a função analítica, que é dada por  $x(t) = (0,25 + 0,25te^{-t})$ . Desta forma, faz-se a norma da função resíduo, dada por,

$$\|R(t)\| = \langle R(t), R(t) \rangle^{\frac{1}{2}} = \int_0^2 R^2(t)^{\frac{1}{2}} dt = 0,2214$$

Nota-se que a norma ainda deu maior que zero. Assim, é necessário fazer mais outros parâmetros a fim de diminuir a norma.

Para três parâmetros constituindo a função, da forma:

$$\psi(t) = (-0,0661t + 0,25) + \alpha_1 t(t - 1) + \alpha_2 t(t - 1)^2 + \alpha_3 t^2(t - 1)^2$$

Obtêm-se as constantes:

$$\alpha_1 = -0,0305, \alpha_2 = 0,0339 \text{ e } \alpha_3 = -0,0067.$$

Assim como, substituindo na função admissível, tem-se:

$$\psi(t) = (-0,0661t + 0,25) - 0,0305 t(t - 1) + 0,0339 t(t - 1)^2 - 0,0067 t^2(t - 1)^2$$

equação 3.79

O resíduo é 0,0351.

Para quatro parâmetros constituindo a função, da forma:

$$\psi(t) = (-0,0661t + 0,25) + \alpha_1 t(t - 1) + \alpha_2 t(t - 1)^2 + \alpha_3 t^2(t - 1)^2 + \alpha_4 t^2(t - 1)^3$$

Obtêm-se as constantes:

$$\alpha_1 = -0,0248, \alpha_2 = 0,0408, \alpha_3 = -0,0146 \text{ e } \alpha_4 = 0,0028.$$

Assim como, substituindo na função admissível, tem-se:

$$\psi(t) = (-0,0661t + 0,25) - 0,0248 t(t - 1) + 0,0408 t(t - 1)^2 - 0,0146 t^2(t - 1)^2 + 0,0028 \cdot 10^{-5} t^2(t - 1)^3$$

equação 3.80

O resíduo é 0,0071.

Para cinco parâmetros constituindo a função, da forma:

$$\psi(t) = (-0,0661t + 0,25) + \alpha_1 t(t-1) + \alpha_2 t(t-1)^2 + \alpha_3 t^2(t-1)^2 + \alpha_4 t^2(t-1)^3 + \alpha_5 t^3(t-1)^3$$

Obtêm-se as constantes:

$$\alpha_1 = -0,0258, \alpha_2 = 0,0401, \alpha_3 = -0,0142, \alpha_4 = 0,0039 \text{ e } \alpha_5 = -4,5305 \cdot 10^{-4}.$$

Assim como, substituindo na função admissível, tem-se:

$$\psi(t) = (-0,0661t + 0,25) - 0,0258t(t-1) + 0,0401t(t-1)^2 - 0,0142t^2(t-1)^2 + 0,0039t^2(t-1)^3 - 4,5305 \cdot 10^{-4}t^3(t-1)^3 \quad \text{equação 3.81}$$

O resíduo é  $9,0837 \cdot 10^{-4}$ .

Para seis parâmetros constituindo a função, da forma:

$$\psi(t) = (-0,0661t + 0,25) + \alpha_1 t(t-1) + \alpha_2 t(t-1)^2 + \alpha_3 t^2(t-1)^2 + \alpha_4 t^2(t-1)^3 + \alpha_5 t^3(t-1)^3 + \alpha_6 t^3(t-1)^4$$

Obtêm-se as constantes:

$$\alpha_1 = -0,0258, \alpha_2 = 0,0401, \alpha_3 = -0,0142, \alpha_4 = 0,0045, \alpha_5 = -8,5438 \cdot 10^{-4} \text{ e } \alpha_6 = 1,0040 \cdot 10^{-4}.$$

Assim como, substituindo na função admissível, tem-se:

$$\psi(t) = (-0,0661t + 0,25) - 0,0258t(t-1) + 0,0401t(t-1)^2 - 0,0142t^2(t-1)^2 + 0,0045t^2(t-1)^3 - 8,5438 \cdot 10^{-4}t^3(t-1)^3 + 1,0040 \cdot 10^{-4}t^3(t-1)^4 \quad \text{equação 3.82}$$

O resíduo é  $9,4322 \cdot 10^{-5}$ . Nota-se que a norma diminuiu consideravelmente. Assim, não é necessário fazer outro parâmetro, pois a função admissível é satisfatória.

### 3.3. Estudo da solução aproximada do Movimento Harmônico Forçado

Tendo um oscilador harmônico criticamente amortecido, o qual consiste em um bloco de massa  $m = 2,0kg$  presa a uma mola de constante elástica  $k = 2N/m$ , sofrendo uma força de amortecimento da forma  $F = -bv$ , sendo  $b = 4kg/s$ . Inicialmente em  $x(0) = 0,25m$ , no repouso, sofre uma força senoidal da forma  $F_0 \cos(\omega t)$ , sendo  $F_0 = 5N$  e  $\omega = 1rad/s$ . Quando o  $t = 1s$  seu espaço é  $x = 1,2358m$ . A solução geral do deslocamento  $x(t)$  é determinada na literatura por:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

Onde a função complementar  $x_h(t)$  é a solução homogênea associada e a solução particular é  $x_p(t)$ .

A solução homogênea é dada quando a equação do movimento, que é dada pela equação 3.83 igual a zero.

$$2 \frac{d^2x}{dt^2} + 4 \frac{dx}{dt} + 2x = 5 \cos(t) \quad \text{equação 3.83}$$

$$2 \frac{d^2x}{dt^2} + 4 \frac{dx}{dt} + 2x = 0 \quad \text{equação 3.84}$$

Como a equação 3.84 é de um oscilador harmônico criticamente amortecido vale ressaltar que, a solução homogênea é dada por:

$$x_h(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\gamma t}$$

Onde  $\gamma = \frac{b}{2m} = 1$  e  $A_1$  e  $A_2$  são constantes.

Para se obter a solução analítica pelos métodos tradicionais basta encontrar as constantes  $A_1$  e  $A_2$ . Para isso é necessário somente tomar conhecimento das condições iniciais.

Quando o tempo é  $t = 0s$ ,  $x = 0,25m$ , substituindo, tem-se:

$$x(0) = (A_1 + A_2 0)e^{-\gamma 0} = 0,25$$

$$A_1 = 0,25$$

Utiliza-se a expressão da velocidade do oscilador em função do tempo para obter a segunda equação, para isto basta fazer a derivada primeira da equação do espaço,

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\gamma(A_1 + A_2 t)e^{-\gamma t} + A_2 e^{-\gamma t}$$

Levando os valores da velocidade para  $t = 0$  e de  $\gamma$  nessa expressão, obtém-se:

$$v(0) = -1(0,25 + A_2 0)e^{-1 \cdot 0} + A_2 e^{-1 \cdot 0} = 0$$

$$A_2 = 0,25$$

Assim, substituindo os valores das constantes, tem-se a seguinte função do espaço do oscilador amortecido,

$$x_h(t) = (0,25 + 0,25t)e^{-t}$$

Já a solução particular pela literatura é dada por,

$$x_p(t) = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \cos(\omega t - \delta)$$

Com

$$\delta = \operatorname{tg} \delta^{-1} \left( \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \text{ e } A = \frac{F_0}{m}$$

Substituindo os dados, tem-se que:

$$\begin{aligned} \omega &= 1 \\ \gamma &= \frac{b}{2m} = 1 \\ \omega_0 &= \sqrt{\frac{k}{m}} = 1 \end{aligned}$$

Assim,

$$\delta = \operatorname{tg} \delta^{-1} \left( \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) = \operatorname{tg} \delta^{-1} \left( \frac{1}{0} \right) = \operatorname{tg} \delta^{-1}(\infty) \quad \text{equação 3.85}$$

Logo,  $\delta = \pi/2$ . Assim:

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \frac{5}{\sqrt{4}} \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) \\ x_p(t) &= \frac{5}{4} \operatorname{sen} (\omega t) \end{aligned} \quad \text{equação 3.86}$$

Como a solução geral é dada por  $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ , tem-se:

$$x(t) = (0,25 + 0,25t)e^{-t} + 1,25\operatorname{sen} (\omega t) \quad \text{equação 3.87}$$

**i) O problema do Movimento Harmônico Amortecido e Forçado formulado pelo método da Colocação pontual:**

Escolhe-se a função admissível da forma:

$$\psi(t) = \psi_0 + \alpha_1\psi_1 \quad \text{equação 3.88}$$

Sabendo que  $\psi_0$  deve atender a todas as condições de contorno não homogêneas, que  $\psi_1$  deve satisfazer todas as condições de contorno homogêneas associadas e que  $\alpha_1$  é uma constante.

As condições iniciais do problema proposto definem que a massa  $m$  saia do repouso, ou seja,  $v(0) = 0 \text{ m/s}$ , e que a posição  $x$  seja igual a  $0,25\text{m}$  no instante inicial. Já quando o  $t = 1,0\text{s}$ ,  $x(1) = 1,2358$ . Desta forma, pode-se definir que:

$$\begin{aligned}\psi_0(0) &= a \cdot 0 + b = 0,25 \rightarrow b = 0,25 \\ \psi_0(1) &= a \cdot 1 + b = 1,2358 \rightarrow a + 0,25 = 1,2358 \rightarrow a = 0,9858\end{aligned}$$

Logo,

$$\psi_0 = (0,9858t + 0,25) \quad \text{equação 3.89}$$

Para descobrir a função  $\psi_1 = t(t + d)$ , sendo  $d$  uma constante e as condições de contorno associadas  $x(0) = 0$  e  $x(1) = 0$ , tem-se,

$$\begin{aligned}\psi_1(1) &= t(t + d) = 0 \rightarrow 1 + d = 0 \rightarrow d = -1 \\ \psi_1(0) &= t(t + d) = 0\end{aligned}$$

Então a função  $\psi_1$  fica:

$$\psi_1 = t(t - 1) \quad \text{equação 3.90}$$

Substituindo as equações 3.89 e 3.90 em 3.88, tem-se:

$$\psi(t) = (0,9858t + 0,25) + \alpha_1 t(t - 1) \quad \text{equação 3.91}$$

É necessário que seja conhecido o valor da constante  $\alpha_1$  para que seja obtida a função admissível.

Como a função admissível é uma aproximação, cabe-se saber o erro entre esta e a solução exata. Denomina-se Resíduo o erro total, que pode ser dado pela substituição da função admissível na equação diferencial do problema, dado por:

$$R(x) = 2 \frac{d^2\psi}{dt^2} + 4 \frac{d\psi}{dt} + 2\psi - 5 \cos(t)$$

Para solucionar a função acima é necessária a integração abaixo:

$$\langle R(t), W(t) \rangle = \int R(t)W_i(t)dt = 0$$

Mas para isso, é preciso definir a função ponderadora,  $W_i(t)$ , a qual depende do método utilizado, dado pelo método da Colocação Pontual, pela função de Dirac  $W(t) = \delta(t - \zeta)$ , sendo  $0 < \zeta < 1,5$  o domínio.

Fazendo  $\zeta = 1,4$ , obtém-se  $W_1(t) = \delta(t - 1,4)$ . A integral do resíduo ponderado fé dada por:

$$\begin{aligned} \langle R(t), W(t) \rangle &= \int R(t)W_1(t)dt = 0 \\ \int R(t) \cdot \delta(t - 1,4)dt &= R(1,4) = 0 \end{aligned}$$

Aplicando o ponto 1,4 na função resíduo, obtém-se a constante, assumindo valor:

$$\alpha_1 = -0,5157$$

Assim sendo, substituindo na função admissível, tem-se,

$$\psi(t) = (0,9858t + 0,25) - 0,5157t(t - 1) \quad \text{equação 3.92}$$

Advertindo que a função admissível acima é uma função aproximada, é necessário saber o quanto ela convergiu com a função analítica, sendo  $x(t) = (0,25 + 0,25t)e^{-t} + 1,25 \operatorname{sen}(t)$ . Desta forma, faz-se a norma da função resíduo, dada por,

$$\|R(t)\| = \langle R(t), R(t) \rangle^{\frac{1}{2}} = \int_0^{1,5} R^2(t)^{\frac{1}{2}} dt = 0,6930$$

Vale ressaltar, quanto à solução aproximada, que na medida em que se aumenta o grau do polinômio a resposta se aproxima da resposta correta.

Escolhendo uma função admissível da forma:

$$\psi(t) = \psi_0 + \alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2$$

Lembrando que  $\psi_0$  deve atender a todas as condições de contorno não homogêneas, que  $\psi_1$  e  $\psi_2$  devem satisfazer a todas as condições de contorno homogêneas associadas e que  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são constantes.

$$\psi_0 = (0,9858t + 0,25)$$

$$\psi_1 = t(t - 1)$$

$$\psi_2 = t(t - 1)^2$$

Substituindo as funções, tem-se:

$$\psi(t) = (0,9858t + 0,25) + \alpha_1 t(t - 1) + \alpha_2 t^2(t - 1)$$

A função resíduo é dada substituindo a função admissível na equação diferencial do problema, assim tem-se:

$$R(t) = 2 \frac{d^2\psi}{dt^2} + 4 \frac{d\psi}{dt} + 2\psi - 5 \cos(t)$$

Definindo a função ponderadora, duas novas funções,  $W_1(t)$  e  $W_2(t)$ , para que sejam descobertos os valores das constantes. Para isso, define-se que  $\zeta_1 = 1,4$  e que  $\zeta_2 = 1,3$ . Resolvendo a integral não só com  $W_1(t) = \delta(t - 1,4)$  mas também com  $W_2(t) = \delta(t - 1,3)$ , adquire-se o sistema abaixo,

$$\begin{cases} \int R(t) \cdot \delta(t - 1,4) dt = R(1,4) = 0 \\ \int R(t) \cdot \delta(t - 1,3) dt = R(1,3) = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtêm-se as constantes,

$$\alpha_1 = -0,4502 \text{ e } \alpha_2 = -0,0562$$

Assim como, substituindo na função admissível, tem-se,

$$\psi(t) = (0,9858t + 0,25) - 0,4502t(t - 1) - 0,0562 t(t - 1)^2 \quad \text{equação 3.93}$$

Como a função admissível acima é uma função aproximada é necessário saber o quanto ela o quanto convergiu com a função analítica, que é dada por,

$$x(t) = (0,25 + 0,25t)e^{-t} + 1,25 \text{ sen}(t)$$

Desta forma, faz-se a norma da função resíduo, dada por,

$$\|R(t)\| = \langle R(t), R(t) \rangle^{\frac{1}{2}} = \int_0^{1,5} R^2(t)^{\frac{1}{2}} dt = 0,3401$$

Lembrando que a solução aproximada, na medida em que se aumenta o grau do polinômio, a solução se aproxima da resposta correta.

Para três parâmetros constituindo a função, da forma:

$$\psi(t) = (0,9858t + 0,25) + \alpha_1 t(t - 1) + \alpha_2 t(t - 1)^2 + \alpha_3 t^2(t - 1)^2$$

Obtêm-se as constantes:

$$\alpha_1 = -0,3928, \alpha_2 = -0,1857 \text{ e } \alpha_3 = 0,0442.$$

Assim como, substituindo na função admissível, tem-se:

$$\psi(t) = (0,9858t + 0,25) - 0,3928t(t - 1) - 0,1857 t(t - 1)^2 + 0,0442 t^2(t - 1)^2$$

equação 3.94

O resíduo é 0,1632.

Para quatro parâmetros constituindo a função, da forma:

$$\psi(t) = (0,9858t + 0,25) + \alpha_1 t(t - 1) + \alpha_2 t(t - 1)^2 + \alpha_3 t^2(t - 1)^2 + \alpha_4 t^2(t - 1)^3$$

Obtêm-se as constantes:

$$\alpha_1 = -0,3997, \alpha_2 = -0,1562, \alpha_3 = 0,0274 \text{ e } \alpha_4 = 0,0050.$$

Assim como, substituindo na função admissível, tem-se:

$$\psi(t) = (0,9858t + 0,25) - 0,3997t(t - 1) - 0,1562 t(t - 1)^2 + 0,0274 t^2(t - 1)^2$$

$$+ 0,0050 t^2(t - 1)^3$$

equação 3.95

O resíduo é 0,0631.

Para cinco parâmetros constituindo a função, da forma:

$$\psi(t) = (0,9858t + 0,25) + \alpha_1 t(t - 1) + \alpha_2 t(t - 1)^2 + \alpha_3 t^2(t - 1)^2 + \alpha_4 t^2(t - 1)^3$$

$$+ \alpha_5 t^3(t - 1)^3$$

Obtêm-se as constantes:

$$\alpha_1 = -0,4024, \alpha_2 = -0,1377, \alpha_3 = 0,0142, \alpha_4 = 0,0140 \text{ e } \alpha_5 = -0,0020.$$

Assim como, substituindo na função admissível, tem-se:

$$\psi(t) = (0,9858t + 0,25) - 0,4024t(t - 1) - 0,1377 t(t - 1)^2 + 0,0142 t^2(t - 1)^2$$

$$+ 0,0140 t^2(t - 1)^3 - 0,0020 t^3(t - 1)^3$$

equação 3.96

O resíduo é 0,0017.

Para seis parâmetros constituindo a função, da forma:

$$\psi(t) = (0,9858t + 0,25) + \alpha_1 t(t - 1) + \alpha_2 t(t - 1)^2 + \alpha_3 t^2(t - 1)^2 + \alpha_4 t^2(t - 1)^3$$

$$+ \alpha_5 t^3(t - 1)^3 + \alpha_6 t^3(t - 1)^4$$

Obtêm-se as constantes:

$$\alpha_1 = -0,4024, \quad \alpha_2 = -0,1380, \alpha_3 = 0,0145, \alpha_4 = 0,0137, \alpha_5 = -0,0019 \quad \text{e} \\ \alpha_6 = -2,4917 \cdot 10^{-5}.$$

Assim como, substituindo na função admissível, tem-se:

$$\psi(t) = (0,9858t + 0,25) - 0,4024t(t-1) - 0,1380 t(t-1)^2 + 0,0145 t^2(t-1)^2 \\ + 0,0137 t^2(t-1)^3 - 0,0019 t^3(t-1)^3 - 2,4917 \cdot 10^{-5} t^3(t-1)^4 \\ \text{equação 3.97}$$

O resíduo é  $5,5858 \cdot 10^{-4}$ .

Para sete parâmetros constituindo a função, da forma:

$$\psi(t) = (0,9858t + 0,25) + \alpha_1 t(t-1) + \alpha_2 t(t-1)^2 + \alpha_3 t^2(t-1)^2 + \alpha_4 t^2(t-1)^3 \\ + \alpha_5 t^3(t-1)^3 + \alpha_6 t^3(t-1)^4 + \alpha_7 t^4(t-1)^5$$

Obtêm-se as constantes:

$$\alpha_1 = -0,4024, \quad \alpha_2 = -0,1380, \alpha_3 = 0,0146, \alpha_4 = 0,0135, \alpha_5 = -0,0018, \quad \alpha_6 = \\ -6,1403 \cdot 10^{-5} \text{ e } \alpha_7 = 3,1228 \cdot 10^{-6}.$$

Assim como, substituindo na função admissível, tem-se:

$$\psi(t) = (0,9858t + 0,25) - 0,4024t(t-1) - 0,1380 t(t-1)^2 + 0,0146 t^2(t-1)^2 \\ + 0,0135 t^2(t-1)^3 - 0,0018 t^3(t-1)^3 - 6,1403 \cdot 10^{-5} t^3(t-1)^4 \\ + 3,1228 \cdot 10^{-6} t^4(t-1)^5 \quad \text{equação 3.98}$$

O resíduo é  $1,8415 \cdot 10^{-4}$ .

Para oito parâmetros constituindo a função, da forma:

$$\psi(t) = (0,9858t + 0,25) + \alpha_1 t(t-1) + \alpha_2 t(t-1)^2 + \alpha_3 t^2(t-1)^2 + \alpha_4 t^2(t-1)^3 \\ + \alpha_5 t^3(t-1)^3 + \alpha_6 t^3(t-1)^4 + \alpha_7 t^4(t-1)^4 + \alpha_8 t^5(t-1)^5$$

Obtêm-se as constantes:

$$\alpha_1 = -0,4024, \alpha_2 = -0,1381, \alpha_3 = 0,0146, \alpha_4 = 0,0135, \alpha_5 = -0,0018, \\ \alpha_6 = -7,2564 \cdot 10^{-5}, \alpha_7 = 5,9393 \cdot 10^{-6} \text{ e } \alpha_8 = 6,1996 \cdot 10^{-7}.$$

Assim como, substituindo na função admissível, tem-se:

$$\psi(t) = (0,9858t + 0,25) - 0,4024t(t-1) - 0,1381 t(t-1)^2 + 0,0146 t^2(t-1)^2 \\ + 0,0135 t^2(t-1)^3 - 0,0018 t^3(t-1)^3 - 7,2564 \cdot 10^{-5} t^3(t-1)^4 \\ + 5,9393 \cdot 10^{-6} t^4(t-1)^4 + 6,1996 \cdot 10^{-7} t^5(t-1)^5 \quad \text{equação 3.99}$$

O resíduo é  $1,6240 \cdot 10^{-4}$ . Nota-se que a norma diminuiu consideravelmente. Assim, não é necessário fazer outro parâmetro, pois a função admissível é satisfatória.

**ii) O problema do Movimento Harmônico Amortecido e Forçado formulado pelo método dos Mínimos Quadrados:**

Escolhe-se a função admissível da forma:

$$\psi(t) = \psi_0 + \alpha_1 \psi_1$$

Fazendo:

$$\psi_0 = (0,9858t + 0,25)$$

$$\psi_1 = t(t - 1)$$

Substituindo as funções  $\psi_0$  e  $\psi_1$ , tem-se:

$$\psi(t) = (0,9858t + 0,25) + \alpha_1 t(t - 1)$$

É necessário que seja conhecido o valor da constante  $\alpha_1$  para que seja obtida a função admissível.

Como a função admissível é uma aproximação, cabe-se saber o erro entre esta e a solução exata. Denomina-se Resíduo o erro total, que pode ser dado pela substituição da função admissível na equação diferencial do problema, dado por:

$$R(x) = 2 \frac{d^2 \psi}{dt^2} + 4 \frac{d\psi}{dt} + 2\psi - 5 \cos(t)$$

Para solucionar a função acima é necessária a integração abaixo:

$$\langle R(t), W(t) \rangle = \int R(t) W_i(t) dt = 0$$

Mas para isso, é preciso definir a função ponderadora,  $W_i(t)$ , a qual depende do método utilizado, pelo Método dos Mínimos Quadrados, sendo,

$$W_i(t) = \frac{\partial R(\alpha_i)}{\partial \alpha_i}$$

Fazendo  $i = 1$ , tem-se a integral resíduo ponderado abaixo:

$$\langle R(t), W_1(t) \rangle = \int_0^{1,5} R(t) \cdot W_1(t) dt = 0$$

Em que,

$$W_1(t) = \frac{\partial R(\alpha_1)}{\partial \alpha_1}$$

Logo,

$$\int_0^{1,5} R(t) \cdot \frac{\partial R(\alpha_1)}{\partial \alpha_1} dt = 0$$

Resolvendo a integral acima, obtém-se a constante  $\alpha_1 = -0,4764$ . Assim sendo, substituindo a constante na função admissível, tem-se:

$$\psi(t) = (0,9858t + 0,25) - 0,4764t(t - 1) \quad \text{equação 3.100}$$

Como a função admissível acima é uma função aproximada é necessário saber o quanto ela o quanto convergiu com a função analítica, que é dada por  $x(t) = (0,25 + 0,25te^{-t} + 1,25 \text{ sent.})$ . Desta forma, faz-se a norma da função resíduo, dada por,

$$\|R(t)\| = \langle R(t), R(t) \rangle^{\frac{1}{2}} = \int_0^{1,5} R^2(t)^{\frac{1}{2}} dt = 0,6014$$

Nota-se que a norma deu maior que zero isso implica que quanto mais próximo de zero, mais precisa é a função admissível.

Escolhendo outra função admissível da forma:

$$\psi(t) = \psi_0 + \alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2$$

Fazendo:

$$\psi_0 = (0,9858t + 0,25)$$

$$\psi_1 = t(t - 1)$$

$$\psi_2 = t(t - 1)^2$$

Substituindo:

$$\psi(t) = (0,9858t + 0,25) + \alpha_1t(t - 1) + \alpha_2t(t - 1)^2$$

A função resíduo é dada substituindo a função admissível na equação diferencial do problema, assim tem-se:

$$R(t) = 2 \frac{d^2\psi}{d^2t} + 4 \frac{d\psi}{dt} + 2\psi - 5 \cos(t)$$

É preciso definir a função ponderadora,  $W_i(t)$ , a qual depende do método utilizado, que é dada, pelo Método dos Mínimos Quadrados, sendo:

$$W_i(t) = \frac{\partial R(\alpha_i)}{\partial \alpha_i}$$

A função ponderadora será  $W_1(t)$  e  $W_2(t)$ , sendo definidas,

$$W_1(t) = \frac{\partial R(\alpha_1)}{\partial \alpha_1} \text{ e } W_2(t) = \frac{\partial R(\alpha_2)}{\partial \alpha_2}$$

Desta forma, obtém-se o sistema de equações:

$$\begin{cases} \int_0^{1,5} R(t) \cdot \frac{\partial R(\alpha_1)}{\partial \alpha_1} dt = 0 \\ \int_0^{1,5} R(t) \cdot \frac{\partial R(\alpha_2)}{\partial \alpha_2} dt = 0 \end{cases}$$

Resolvendo a integral obtêm-se as constantes,

$$\alpha_1 = -0,3950 \text{ e } \alpha_2 = -0,1113$$

Assim como, substituindo na função admissível, tem-se,

$$\psi(t) = (0,9858t + 0,25) - 0,3950t(t - 1) - 0,1113 \cdot 10^{-5}t(t - 1)^2$$

equação 3.101

Como a função admissível acima é uma função aproximada é necessário saber o quanto convergiu com a função analítica, que é dada por  $x(t) = (0,25 + 0,25t)e^{-t} + 1,25 \operatorname{sen}(t)$ . . Desta forma, faz-se a norma da função resíduo, dada por,

$$\|R(t)\| = \langle R(t), R(t) \rangle^{\frac{1}{2}} = \int_0^{1,5} R^2(t)^{\frac{1}{2}} dt = 0,1148$$

Nota-se que a norma deu diferente de zero. Assim, é necessário fazer mais outro parâmetro para diminuir a norma, assim aproximando a função admissível da solução correta.

Para três parâmetros constituindo a função, da forma:

$$\psi(t) = (0,9858t + 0,25) + \alpha_1 t(t - 1) + \alpha_2 t(t - 1)^2 + \alpha_3 t^2(t - 1)^2$$

Obtêm-se as constantes:

$$\alpha_1 = -0,4032, \alpha_2 = -0,1379 \text{ e } \alpha_3 = 0,2221.$$

Assim como, substituindo na função admissível, tem-se:

$$\psi(t) = (0,9858t + 0,25) - 0,4032t(t - 1) - 0,1379t(t - 1)^2 + 0,2221t^2(t - 1)^2$$

equação 3.102

O resíduo é 0,0346.

Para quatro parâmetros constituindo a função, da forma:

$$\psi(t) = (0,9858t + 0,25) + \alpha_1 t(t - 1) + \alpha_2 t(t - 1)^2 + \alpha_3 t^2(t - 1)^2 + \alpha_4 t^2(t - 1)^3$$

Obtêm-se as constantes:

$$\alpha_1 = -0,4021, \alpha_2 = -0,1379, \alpha_3 = 0,0141 \text{ e } \alpha_4 = 0,0108.$$

Assim como, substituindo na função admissível, tem-se:

$$\psi(t) = (0,9858t + 0,25) - 0,4021t(t - 1) - 0,1379t(t - 1)^2 + 0,1279t^2(t - 1)^2 + 0,0108t^2(t - 1)^3$$

equação 3.103

O resíduo é 0,0034.

Para cinco parâmetros constituindo a função, da forma:

$$\psi(t) = (0,9858t + 0,25) + \alpha_1 t(t - 1) + \alpha_2 t(t - 1)^2 + \alpha_3 t^2(t - 1)^2 + \alpha_4 t^2(t - 1)^3 + \alpha_5 t^5(t - 1)^3$$

Obtêm-se as constantes:

$$\alpha_1 = -0,4024, \alpha_2 = -0,1381, \alpha_3 = 0,0146, \alpha_4 = 0,0136 \text{ e } \alpha_5 = -0,0019.$$

Assim como, substituindo na função admissível, tem-se:

$$\psi(t) = (0,9858t + 0,25) - 0,4024t(t - 1) - 0,1381t(t - 1)^2 + 0,1246t^2(t - 1)^2 + 0,0136t^2(t - 1)^3 - 0,0019t^3(t - 1)^3$$

equação 3.104

O resíduo é  $4,7980 \cdot 10^{-5}$ .

Para seis parâmetros constituindo a função, da forma:

$$\psi(t) = (0,9858t + 0,25) + \alpha_1 t(t - 1) + \alpha_2 t(t - 1)^2 + \alpha_3 t^2(t - 1)^2 + \alpha_4 t^2(t - 1)^3 + \alpha_5 t^3(t - 1)^3 + \alpha_6 t^3(t - 1)^4$$

Obtêm-se as constantes:

$$\alpha_1 = -0,4024, \alpha_2 = -0,1381, \alpha_3 = 0,0146, \alpha_4 = 0,0135, \alpha_5 = -0,0018 \text{ e } \alpha_6 = -5,0822 \cdot 10^{-5}.$$

Assim como, substituindo na função admissível, tem-se:

$$\begin{aligned} \psi(t) = & (0,9858t + 0,25) - 0,4024t(t - 1) - 0,1381t(t - 1)^2 + 0,1246t^2(t - 1)^2 \\ & + 0,0135t^2(t - 1)^3 - 0,0018t^3(t - 1)^3 - 5,0822 \cdot 10^{-5}t^3(t - 1)^4 \end{aligned}$$

equação 3.105

O resíduo é  $1,4528 \cdot 10^{-5}$ . Nota-se que a norma diminuiu consideravelmente. Assim, não é necessário fazer outro parâmetro, pois a função admissível é satisfatória.

**iii) O problema do Movimento Harmônico Amortecido formulado pelo método de Galerkin:**

Escolhe-se a função admissível da forma:

$$\psi(t) = \psi_0 + \alpha_1 \psi_1$$

Fazendo:

$$\psi_0 = (0,9858t + 0,25)$$

$$\psi_1 = t(t - 1)$$

Substituindo as funções  $\psi_0$  e  $\psi_1$ , tem-se:

$$\psi(t) = (0,9858t + 0,25) + \alpha_1 t(t - 1)$$

É necessário que seja conhecido o valor da constante  $\alpha_1$  para que seja obtida a função admissível.

Como a função admissível é uma aproximação, cabe-se saber o erro entre esta e a solução exata. Denomina-se Resíduo o erro total, que pode ser dado pela substituição da função admissível na equação diferencial do problema, dado por:

$$R(x) = 2 \frac{d^2\psi}{dt^2} + 4 \frac{d\psi}{dt} + 2\psi - 5 \cos(t)$$

Para solucionar a função acima é necessária a integração abaixo:

$$\langle R(t), W(t) \rangle = \int R(t)W_i(t)dt = 0$$

Mas para isso, é preciso definir a função ponderadora,  $W_i(t)$ , a qual depende do método utilizado, que é dada pelo Método de Galerkin, sendo,

$$W_i(t) = \psi_i$$

Fazendo  $i = 1$ , tem-se que integral resíduo ponderado:

$$\langle R(t).W_1(t) \rangle = \int_0^{1,5} R(t).W_1(t)dt = 0$$

Substituindo, tem-se a integral abaixo,

$$\int_0^{1,5} R(t).\psi_1 dt = 0$$

Resolvendo a integral obtém-se a constante,

$$\alpha_1 = -0,5957$$

Assim como, substituindo na função admissível, tem-se,

$$\psi(t) = (0,9858t + 0,25) - 0,5957t(t - 1) \quad \text{equação 3.106}$$

Como a função admissível acima é uma função aproximada é necessário saber o quanto ela o quanto convergiu com a função analítica, que é dada por  $x(t) = (0,25 + 0,25te^{-t} + 1,25 \text{ sent.})$ . Desta forma, faz-se a norma da função resíduo, dada por,

$$\|R(t)\| = \langle R(t), R(t) \rangle^{\frac{1}{2}} = \int_0^{1,5} R^2(t)^{\frac{1}{2}} dt = 1,2069$$

Nota-se que a norma deu diferente de zero, isso implica que quanto mais próximo de zero, mais precisa é a função admissível.

Fazendo o mesmo procedimento, escolhendo uma função admissível da forma:

$$\psi(t) = \psi_0 + \alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2$$

Fazendo:

$$\psi_0 = (0,9858t + 0,25)$$

$$\psi_1 = t(t - 1)$$

$$\psi_2 = t(t - 1)^2$$

Substituindo:

$$\psi(t) = (0,9858t + 0,25) + \alpha_1t(t - 1) + \alpha_2t(t - 1)^2$$

A função resíduo é dada substituindo a função admissível na equação diferencial do problema, assim tem-se:

$$R(t) = 2 \frac{d^2\psi}{dt^2} + 4 \frac{d\psi}{dt} + 2\psi - 5 \cos(t)$$

É preciso definir a função ponderadora,  $W_i(t)$ , a qual depende do método utilizado, que é dada, que é dada pelo Método de Galerkin, sendo,

$$W_i(t) = \psi_i$$

Fazendo  $W_1(t) = \psi_1$  e  $W_2(t) = \psi_2$ , tem-se um que integral de resíduos ponderados:

$$\int_0^{1,5} R(t) \cdot W_i(t) dt = 0 \rightarrow \begin{cases} \int_0^{1,5} R(t) \cdot \psi_1 dt = 0 \\ \int_0^{1,5} R(t) \cdot \psi_2 dt = 0 \end{cases}$$

Resolvendo a integral obtêm-se o valor das constantes,

$$\alpha_1 = -0,3801 \text{ e } \alpha_2 = -0,1162$$

Assim como, substituindo na função admissível, tem-se,

$$\psi(t) = (0,9858t + 0,25) - 0,3801t(t - 1) - 0,1162t(t - 1)^2 \quad \text{equação 3.103}$$

Como a função admissível acima é uma função aproximada é necessário saber o quanto ela o quanto convergiu com a função analítica, que é dada por  $x(t) = (0,25 + 0,25te^{-t} + 1,25 \text{ sent.})$ . Desta forma, faz-se a norma da função resíduo, dada por,

$$\|R(t)\| = \langle R(t), R(t) \rangle^{\frac{1}{2}} = \int_0^{1,5} R^2(t)^{\frac{1}{2}} dt = 0,1532$$

Nota-se que a norma deu diferente de zero, isso implica que quanto mais próximo de zero, mais precisa é a função admissível. Assim, é necessário fazer mais outros parâmetros para diminuir a norma, assim aproximando mais da solução correta.

Para três parâmetros constituindo a função, da forma:

$$\psi(t) = (0,9858t + 0,25) + \alpha_1 t(t - 1) + \alpha_2 t(t - 1)^2 + \alpha_3 t^2(t - 1)^2$$

Obtêm-se o valor das constantes:

$$\alpha_1 = -0,3911, \alpha_2 = -0,1298 \text{ e } \alpha_3 = 0,0125.$$

Assim como, substituindo na função admissível, tem-se:

$$\psi(t) = (0,9858t + 0,25) - 0,3911(t - 1) - 0,1298t(t - 1)^2 + 0,0125t^2(t - 1)^2 \quad \text{equação 3.104}$$

O resíduo é 0,0810.

Para quatro parâmetros constituindo a função, da forma:

$$\psi(t) = (0,9858t + 0,25) + \alpha_1 t(t - 1) + \alpha_2 t(t - 1)^2 + \alpha_3 t^2(t - 1)^2 + \alpha_4 t^2(t - 1)^3$$

Obtêm-se as constantes:

$$\alpha_1 = -0,4016, \alpha_2 = -0,1380, \alpha_3 = 0,0150 \text{ e } \alpha_4 = 0,0094.$$

Assim como, substituindo na função admissível, tem-se:

$$\begin{aligned} \psi(t) = (0,9858t + 0,25) - 0,4016 t(t - 1) - 0,1380t(t - 1)^2 + 0,0150t^2(t - 1)^2 \\ + 0,0094t^2(t - 1)^3 \end{aligned} \quad \text{equação 3.105}$$

O resíduo é 0,0067.

Para cinco parâmetros constituindo a função, da forma:

$$\begin{aligned} \psi(t) = (0,9858t + 0,25) + \alpha_1 t(t - 1) + \alpha_2 t(t - 1)^2 + \alpha_3 t^2(t - 1)^3 + \alpha_4 t^3(t - 1)^4 \\ + \alpha_5 t^4(t - 1)^4 \end{aligned}$$

Obtêm-se os valores das constantes:

$$\alpha_1 = -0,4024, \alpha_2 = -0,1381, \alpha_3 = 0,0146, \alpha_4 = 0,0136 \text{ e } \alpha_5 = -0,0019.$$

Assim como, substituindo na função admissível, tem-se:

$$\begin{aligned} \psi(t) = (0,9858t + 0,25) - 0,4024t(t - 1) - 0,1381t(t - 1)^2 + 0,0146t^2(t - 1)^3 \\ + 0,0136t^3(t - 1)^4 - 0,0019t^4(t - 1)^4 \end{aligned} \quad \text{equação 3.106}$$

O resíduo é  $7,0717 \cdot 10^{-5}$ .

Para seis parâmetros constituindo a função, da forma:

$$\begin{aligned} \psi(t) = (0,9858t + 0,25) + \alpha_1 t(t - 1) + \alpha_2 t(t - 1)^2 + \alpha_3 t^2(t - 1)^2 + \alpha_4 t^2(t - 1)^3 \\ + \alpha_5 t^3(t - 1)^3 + \alpha_6 t^3(t - 1)^4 \end{aligned}$$

Obtêm-se os valores das constantes:

$$\begin{aligned} \alpha_1 = -0,4024, \alpha_2 = -0,1381, \alpha_3 = 0,0146, \alpha_4 = 0,0135, \alpha_5 = -0,0019 \text{ e} \\ \alpha_6 = -2,0338 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$

Assim como, substituindo na função admissível, tem-se:

$$\begin{aligned} \psi(t) = (0,9858t + 0,25) - 0,4024t(t - 1) - 0,1381t(t - 1)^2 + 0,0146t^2(t - 1)^2 \\ + 0,0135t^2(t - 1)^3 - 0,0019t^3(t - 1)^3 - 2,0338 \cdot 10^{-5}t^3(t - 1)^4 \end{aligned}$$

equação 3.107

O resíduo é  $4,2273 \cdot 10^{-5}$ .

Para sete parâmetros constituindo a função, da forma:

$$\psi(t) = (0,9858t + 0,25) + \alpha_1 t(t-1) + \alpha_2 t(t-1)^2 + \alpha_3 t^2(t-1)^2 + \alpha_4 t^2(t-1)^3 \\ + \alpha_5 t^3(t-1)^3 + \alpha_6 t^3(t-1)^4 + \alpha_7 t^4(t-1)^4$$

Obtêm-se os valores das constantes:

$$\alpha_1 = -0,4024, \alpha_2 = -0,1381, \alpha_3 = 0,0146, \alpha_4 = 0,0135, \alpha_5 = -0,0018, \\ \alpha_6 = -5,8262 \cdot 10^{-5} \text{ e } \alpha_7 = 3,8192 \cdot 10^{-6}.$$

Assim como, substituindo na função admissível, tem-se:

$$\psi(t) = (0,9858t + 0,25) - 0,4024t(t-1) - 0,1381t(t-1)^2 + 0,0146t^2(t-1)^2 \\ + 0,0135t^2(t-1)^3 - 0,0018t^3(t-1)^3 - 5,8262 \cdot 10^{-5}t^3(t-1)^4 \\ + 3,8192 \cdot 10^{-6}t^4(t-1)^4 \quad \text{equação 3.108}$$

O resíduo é  $2,0341 \cdot 10^{-6}$ . Nota-se que a norma diminuiu consideravelmente. Assim, não é necessário fazer outro parâmetro, pois a função admissível é satisfatória.

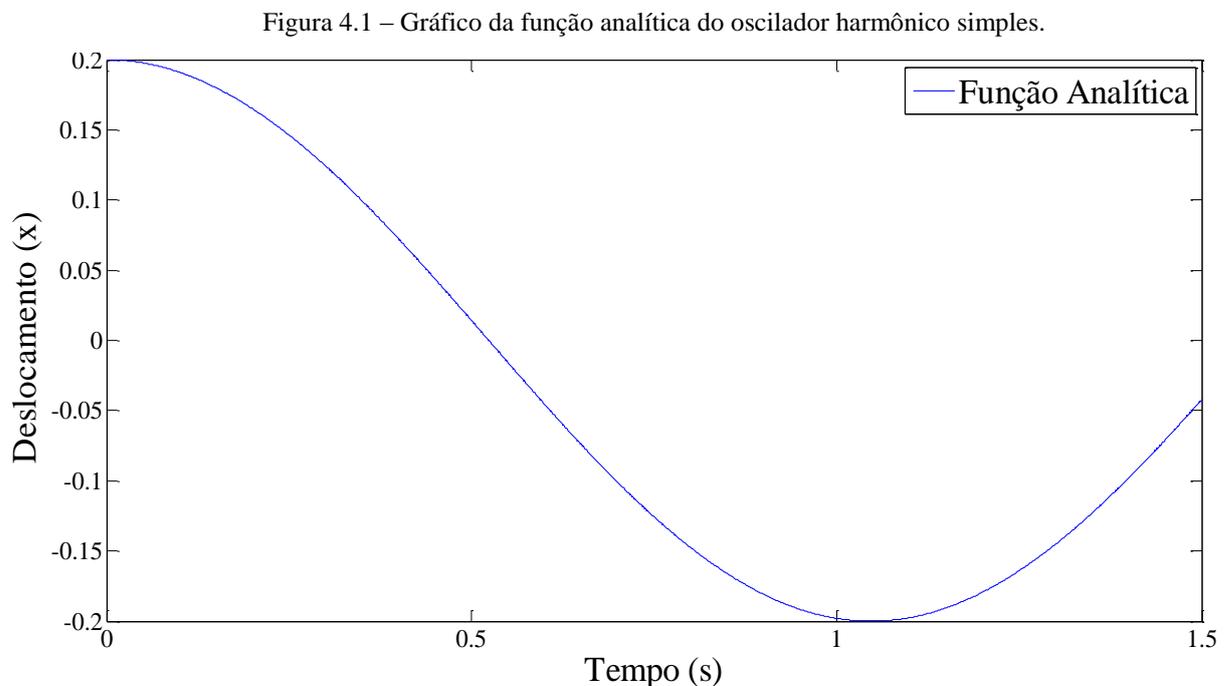
## 4. Resultados

Faz-se o uso de um modelo matemático analítico dos movimentos harmônicos descritos através de um modelo numérico computacional utilizando o método dos elementos finitos, na tentativa de avaliar o desempenho de soluções aproximadas obtidas pela aplicação de Métodos de Resíduos Ponderados, especificamente o Método da Colocação Pontual, Método dos Mínimos Quadrados e o Método de Galerkin.

É necessário um estudo gráfico para que haja uma comparação mais sucinta entre as soluções admissíveis encontradas no capítulo anterior e as soluções analíticas. Fazendo uso do software livre SCILAB (versão 5.3.3) foram descritos através dos gráficos o espaço em função do tempo de cada movimento e as relações entre as funções admissíveis encontradas pela aplicação de cada método de Resíduos Ponderados em cada oscilador.

A problemática será fragmentada para um estudo mais preciso do deslocamento dos respectivos osciladores harmônicos clássicos: oscilador harmônico simples, oscilador harmônico amortecido e oscilador harmônico amortecido forçado.

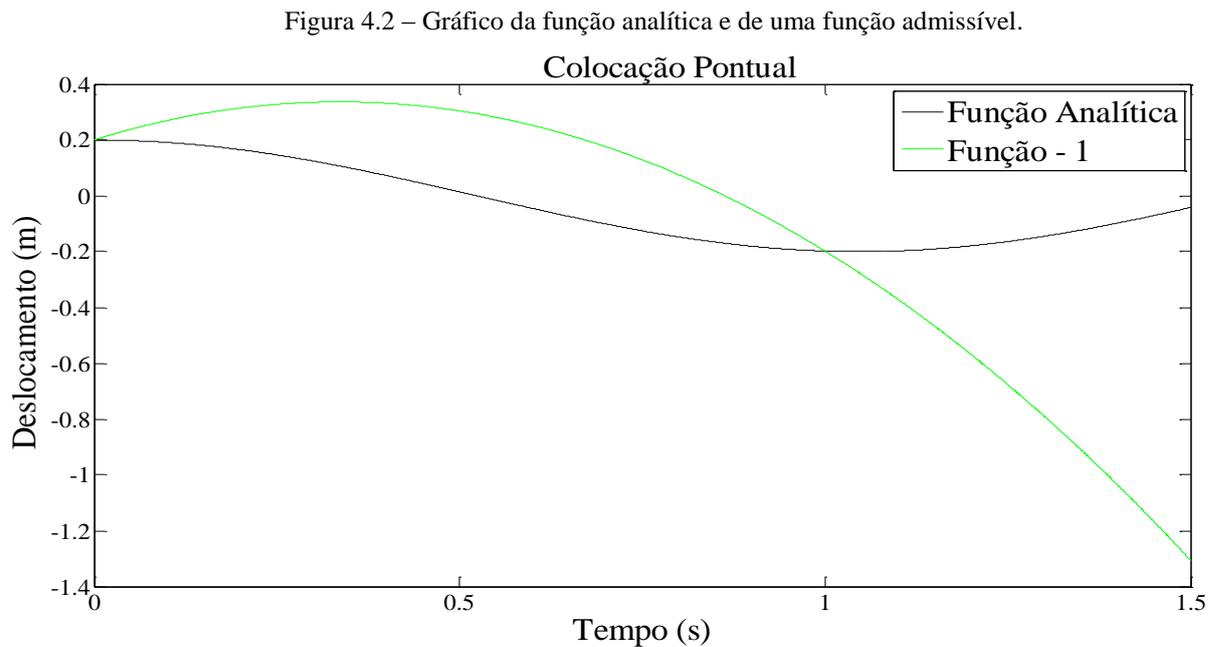
A figura 4.1 mostra o espaço em função do tempo do oscilador harmônico simples, através de métodos analíticos tradicionais.



Observa-se na função analítica acima que o corpo oscila entre os pontos máximo (0,2m) e mínimo (-0,20).

Após o estudo gráfico da função analítica, a seguir tem-se a comparação gráfica, da função analítica do oscilador harmônico simples com as respectivas funções admissíveis encontradas por cada método de Resíduo Ponderado.

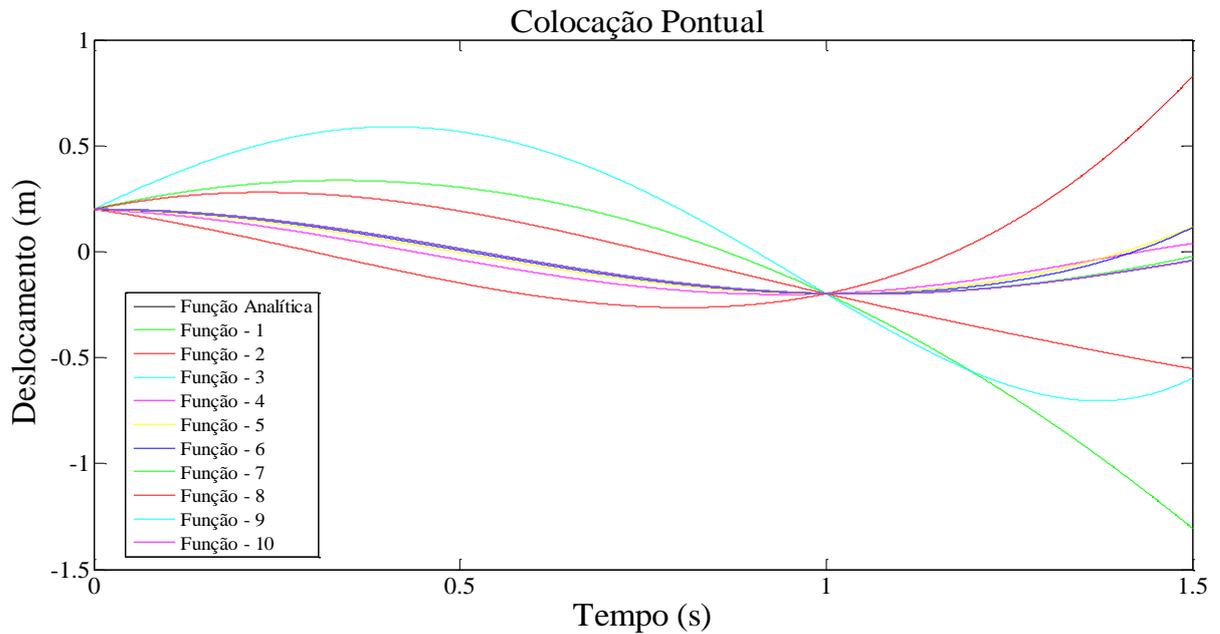
A figura 4.2 mostra a comparação entre a função analítica e uma função admissível pelo método da Colocação Pontual.



Observa-se na figura 4.2 que o erro ainda é bastante acentuado quando se é feito apenas um parâmetro através do método da Colocação Pontual. Foi necessária a realização de pelo menos 10 parâmetros, ou seja, com 10 tentativas, para encontrar a solução admissível satisfatória.

A figura 4.3 ilustra em um só gráfico todos os parâmetros realizados para a obtenção da solução satisfatória.

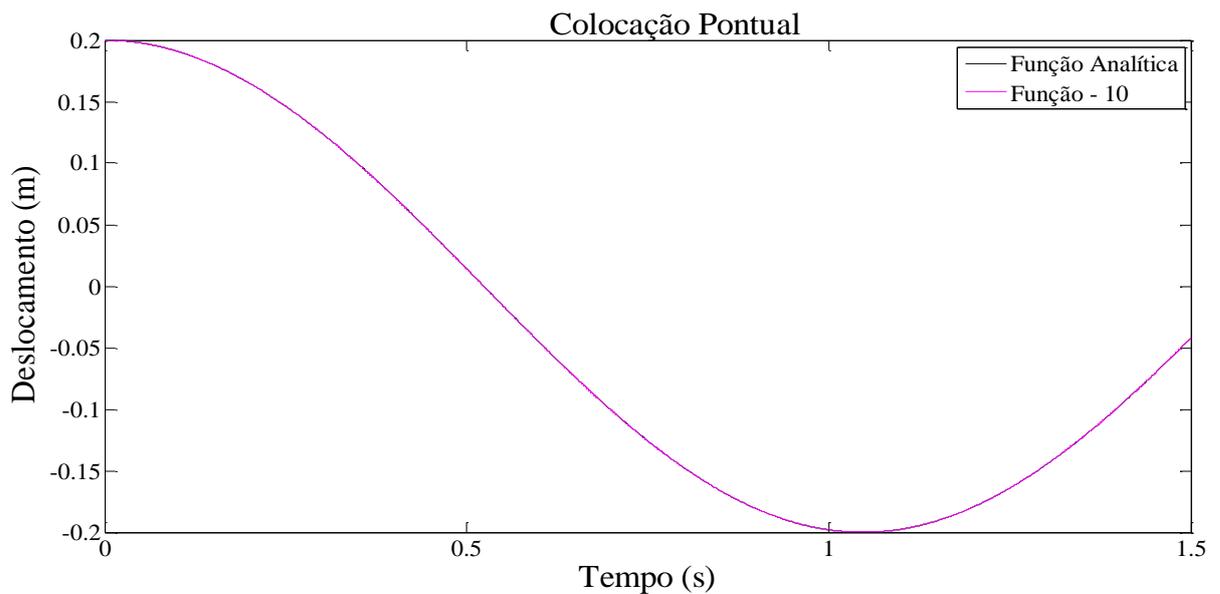
Figura 4.3 – Gráfico da função analítica e dez funções admissíveis.



Vale ressaltar que na figura 4.3 há discrepâncias entre as funções admissíveis e a função analítica. Trata-se do grau do polinômio admitido em cada função, assim aquela função de maior grau, subentende-se que será a mais aceitável.

A figura 4.4 esboça a função analítica e a função admissível no décimo parâmetro.

Figura 4.4 – Gráfico da função analítica e a décima função admissível.



Nota-se a superposição de ambas as funções, significando que a décima função é suficiente para um resultado satisfatório. Para um melhor entendimento do que foi exposto,

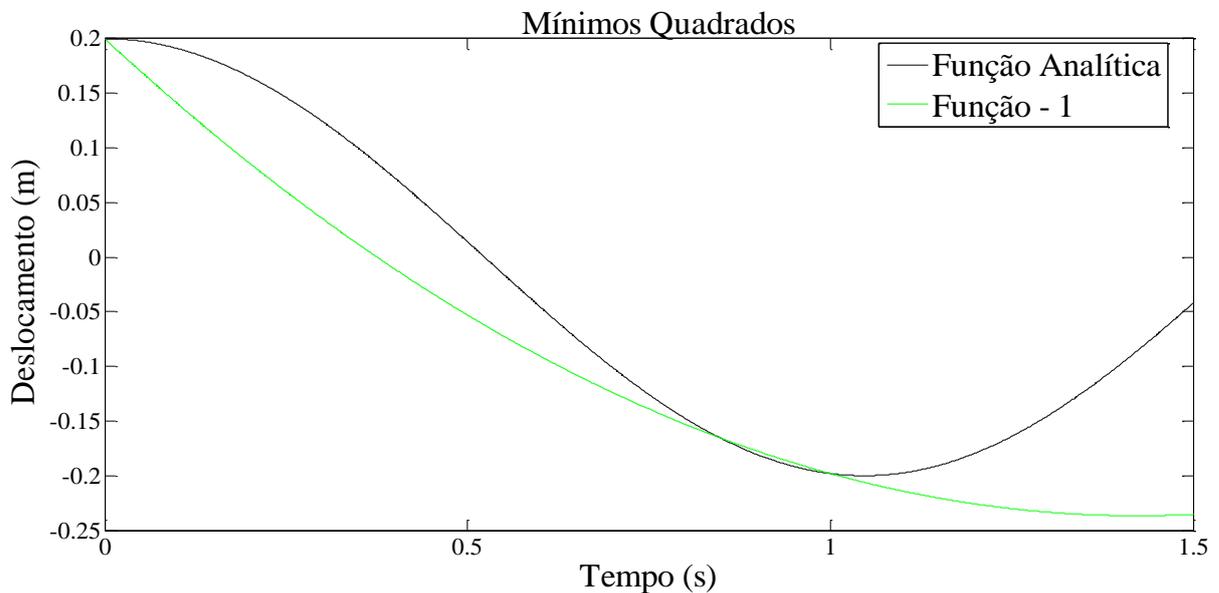
tem-se a seguir a tabela 4.1 que ilustra uma tabela comparativa de alguns pontos no intervalo de zero a 1.05.

Tabela 4.1 – Relação do deslocamento em função do tempo.

<b>Tempo</b>	<b>Solução Analítica</b>	<b>1ª função (Colocação Pontual)</b>	<b>10ª função (Colocação Pontual)</b>
<b>0</b>	0,200	0,2	0,20
<b>0,25</b>	0,1463	0,3277	0,1463
<b>0,5</b>	0,0141	0,3039	0,0141
<b>0,75</b>	-0,1256	0,1287	-0,1257
<b>1,05</b>	-0,200	-1,30	-0,20

Na figura 4.5 mostra a comparação entre a função analítica e uma função admissível pelo método dos Mínimos Quadrados.

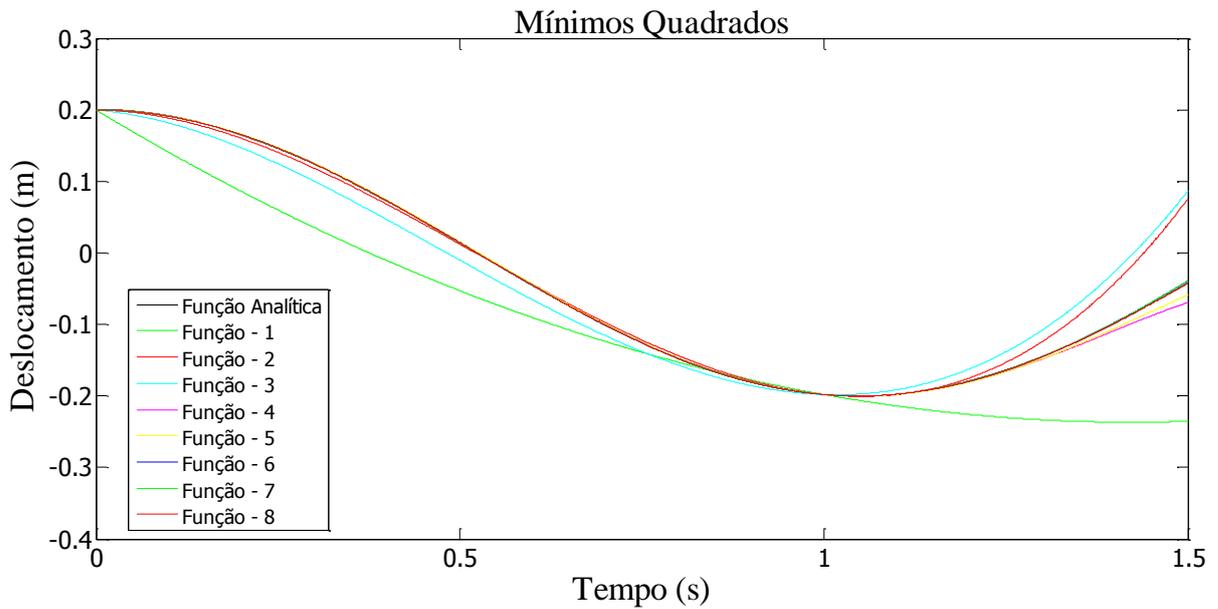
Figura 4.5 – Gráfico da função analítica e de uma função admissível.



Observa-se na figura 4.5 que o erro é marcante quando se é feito apenas um parâmetro através do método dos Mínimos Quadrados. Foi necessária a realização de pelo menos oito parâmetros, ou seja, com oito tentativas, para encontrar a solução admissível satisfatória.

A figura 4.6 ilustra em um só plano cartesiano todos os parâmetros realizados para a obtenção da solução satisfatória através do método dos Mínimos Quadrados.

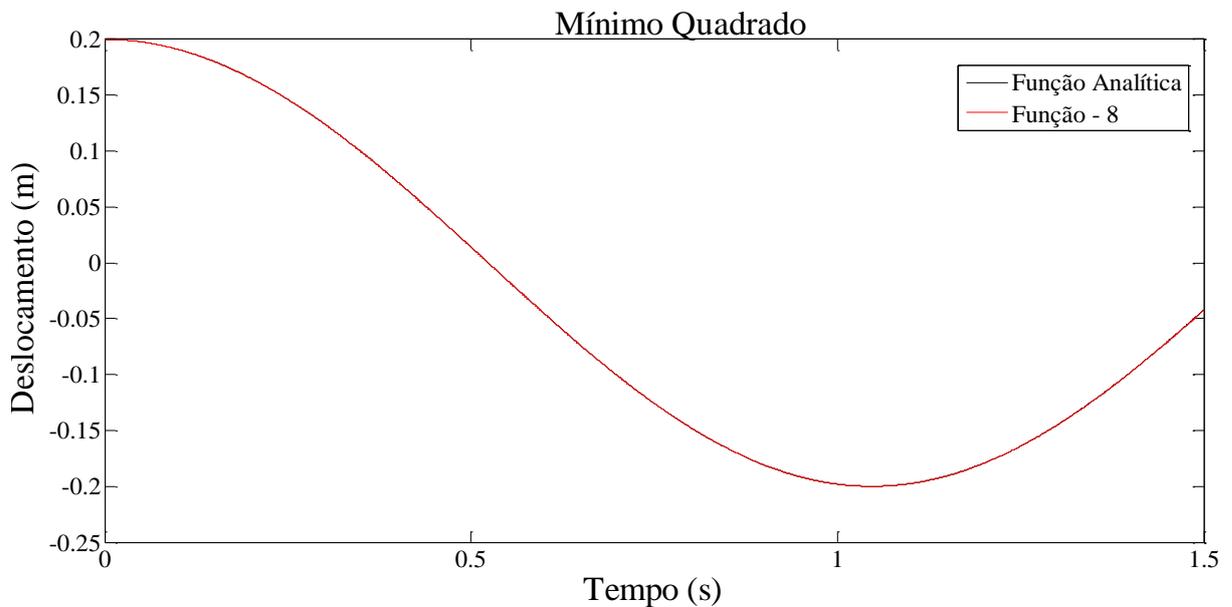
Figura 4.6 – Gráfico da função analítica e oito funções admissíveis.



É importante notar que na figura 4.6 as discrepâncias entre as funções admissíveis e a função analítica diminuíram significativamente pelo método dos Mínimos Quadrados comparado às obtidas pelo método da Colocação Pontual.

A figura 4.7 esboça a função analítica e a função admissível no oitavo parâmetro.

Figura 4.7 – Gráfico da função analítica e a oitava função admissível.



Nota-se a superposição de ambas as funções, significando que a oitava função é suficiente para um resultado satisfatório. Para um melhor entendimento do que foi exposto,

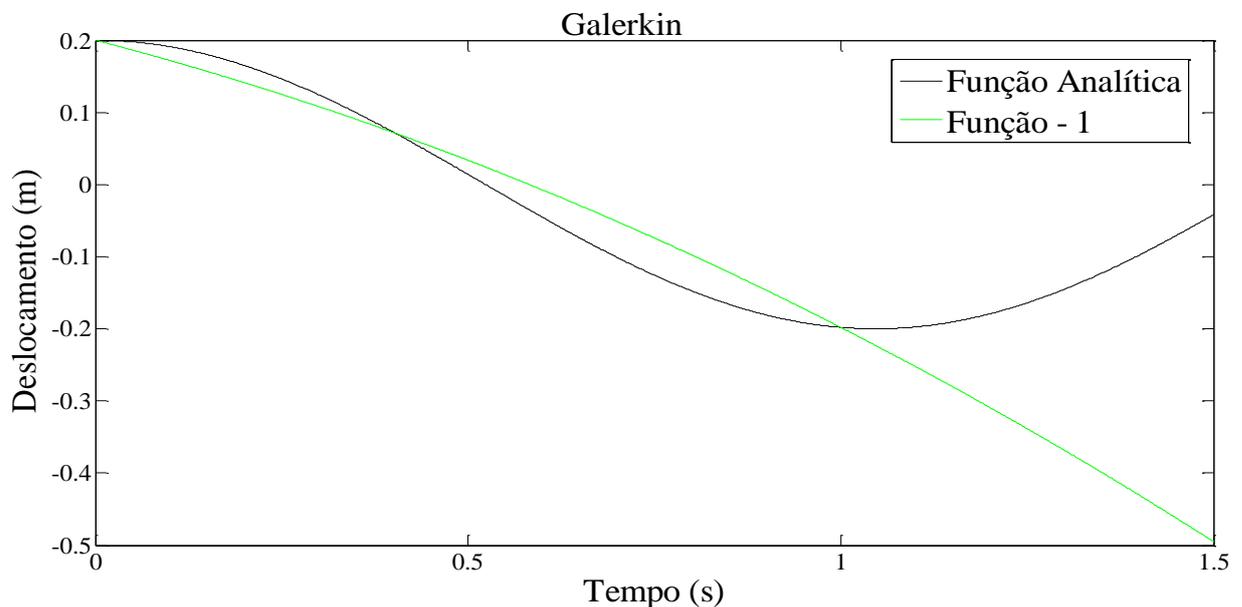
tem-se a seguir a tabela 4.2 que ilustra uma tabela comparativa de alguns pontos no intervalo de zero a 1.05s.

Tabela 4.2 – Relação do deslocamento em função do tempo.

<b>Tempo</b>	<b>Solução Analítica</b>	<b>1ª função (Mínimos Quadrados)</b>	<b>8ª função (Mínimos Quadrados)</b>
0	0,20	0,20	0,20
0,25	0,1463	0,0601	0,1463
0,5	0,0141	-0,0529	0,0141
0,75	-0,1256	-0,1389	-0,1256
1,05	-0,200	-0,2066	-0,20

Na figura 4.8 mostra a comparação entre a função analítica e uma função admissível pelo método de Galerkin.

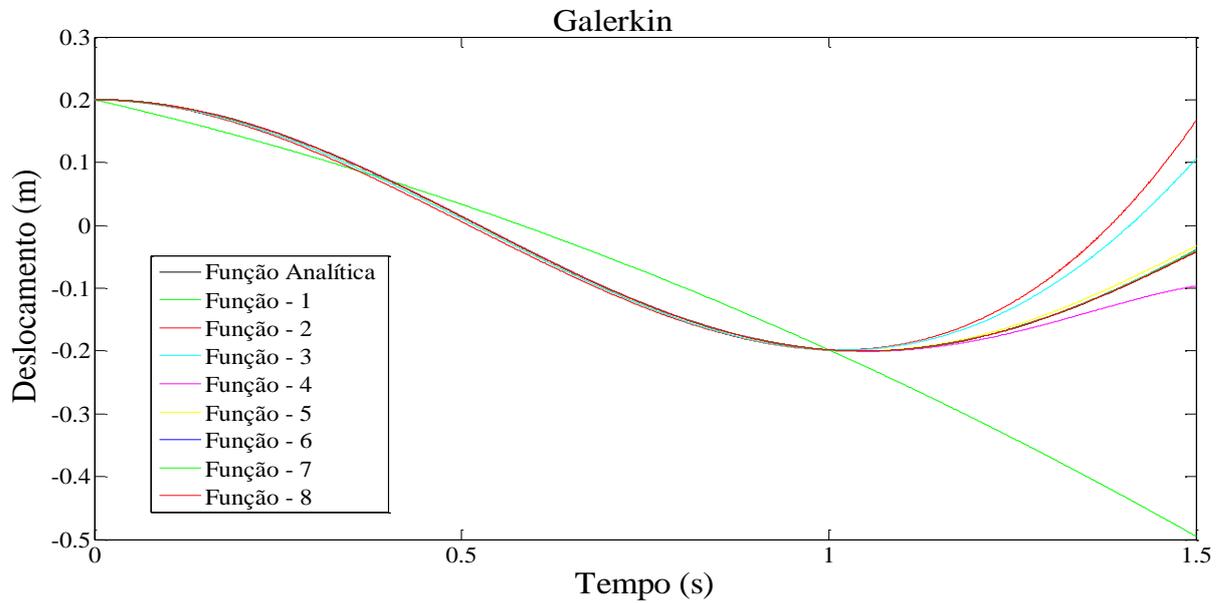
Figura 4.8 – Gráfico da função analítica e de uma função admissível.



Observa-se na figura 4.8 que o erro é tão marcante quando se é feito apenas um parâmetro através do método de Galerkin. Foi necessária a realização de pelo menos oito parâmetros, ou seja, com oito tentativas, para encontrar a solução admissível satisfatória.

A figura 4.9 ilustra em um só plano cartesiano todos os parâmetros realizados para a obtenção da solução satisfatória através do método de Galerkin.

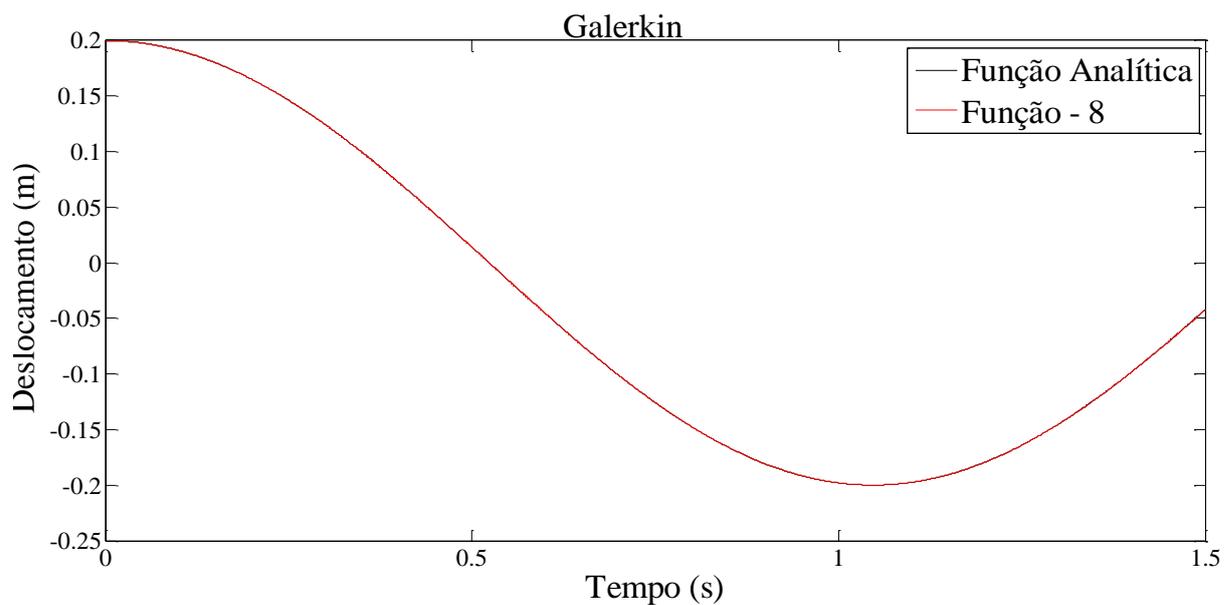
Figura 4.9 – Gráfico da função analítica e oito funções admissíveis.



É importante notar que na figura 4.9 as discrepâncias entre as funções admissíveis e a função analítica diminuíram significativamente pelo método de Galerkin comparado às obtidas não só pelo dos Mínimos Quadrados, mas também pelo método da Colocação Pontual.

A figura 4.10 esboça a função analítica e a função admissível no oitavo parâmetro.

Figura 4.10 – Gráfico da função analítica e a oitava função admissível.



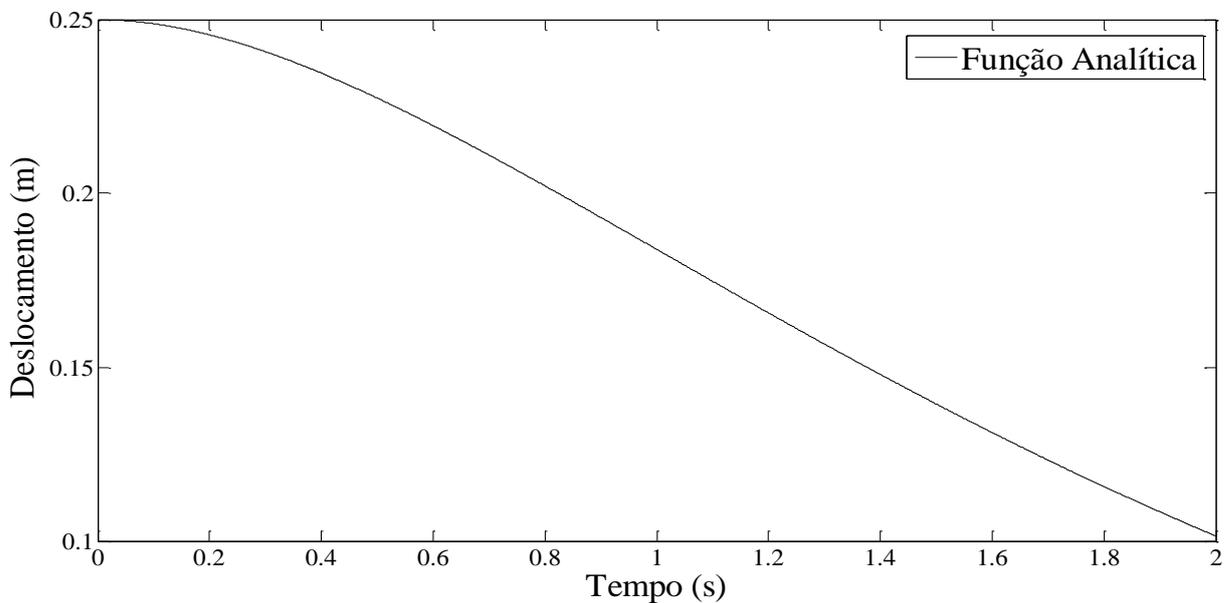
Observa-se novamente a superposição de ambas as funções, significando que a oitava função é suficiente para um resultado satisfatório. Para um melhor entendimento do que foi exposto, tem-se a seguir a tabela 4.3 que ilustra uma tabela comparativa de alguns pontos no intervalo de zero a 1.05s.

Tabela 4.3 – Relação do deslocamento em função do tempo.

<b>Tempo</b>	<b>Solução Analítica</b>	<b>1ª função (Galerkin)</b>	<b>8ª função (Galerkin)</b>
0	0,20	0,20	0,20
0,25	0,1463	0,1250	0,1463
0,5	0,0141	0,0336	0,0141
0,75	-0,1256	-0,0740	-0,1256
1,05	-0,20	-0,2247	-0,20

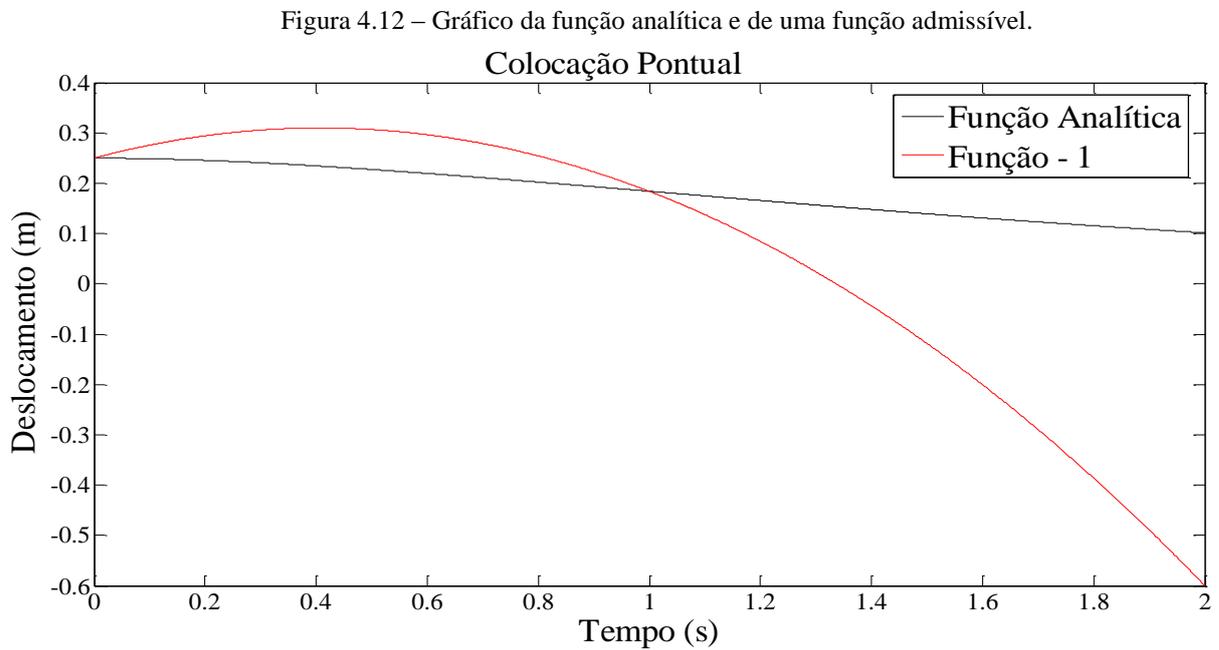
A figura 4.11 mostra o deslocamento em função do tempo do oscilador harmônico amortecido, através de métodos analíticos tradicionais.

Figura 4.11 – Gráfico da função analítica do oscilador harmônico amortecido.



Observa-se na função analítica acima que o corpo inicia o movimento em  $x=0,25\text{m}$  e quando o tempo é  $t=2\text{s}$  o espaço é  $x=0,1015\text{m}$ . Após o estudo gráfico da função analítica, a seguir tem-se a comparação gráfica, da função analítica do oscilador harmônico amortecido com as respectivas funções admissíveis encontradas por cada método de Resíduo Ponderado.

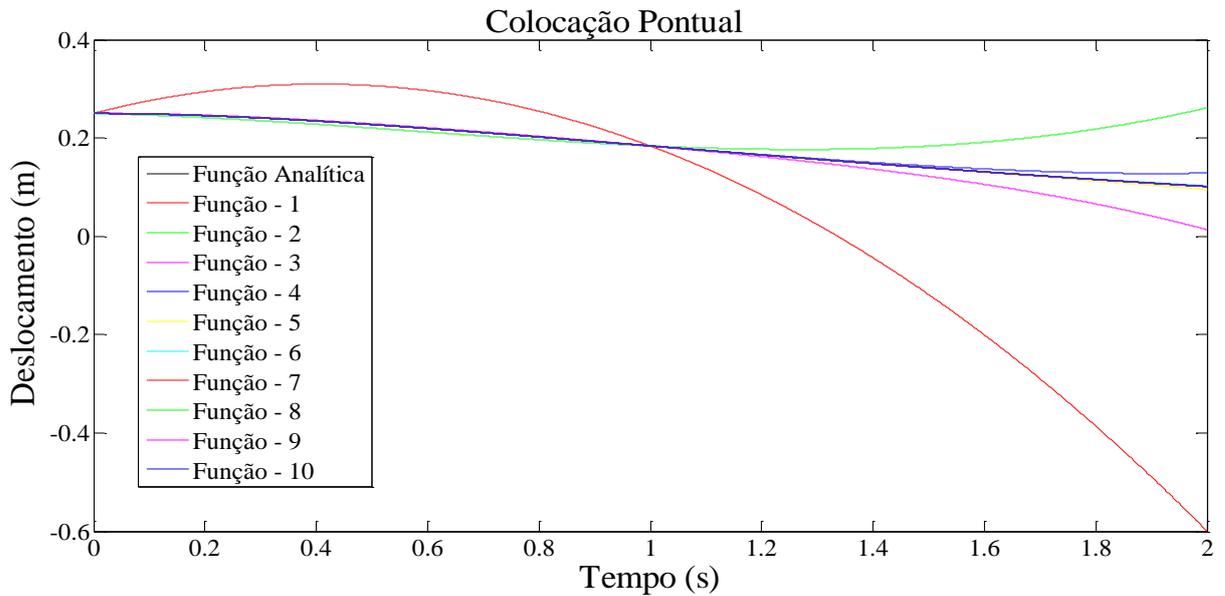
A figura 4.12 mostra a comparação entre a função analítica e uma função admissível pelo método da Colocação Pontual.



Observa-se na figura 4.12 que o erro é bastante acentuado, quando se é feito apenas um parâmetro através do método da Colocação Pontual. Foi necessária a realização de pelo menos 10 parâmetros, ou seja, com 10 tentativas, para encontrar a solução admissível satisfatória.

A figura 4.13 ilustra em um só plano cartesiano todos os parâmetros realizados para a obtenção da solução satisfatória.

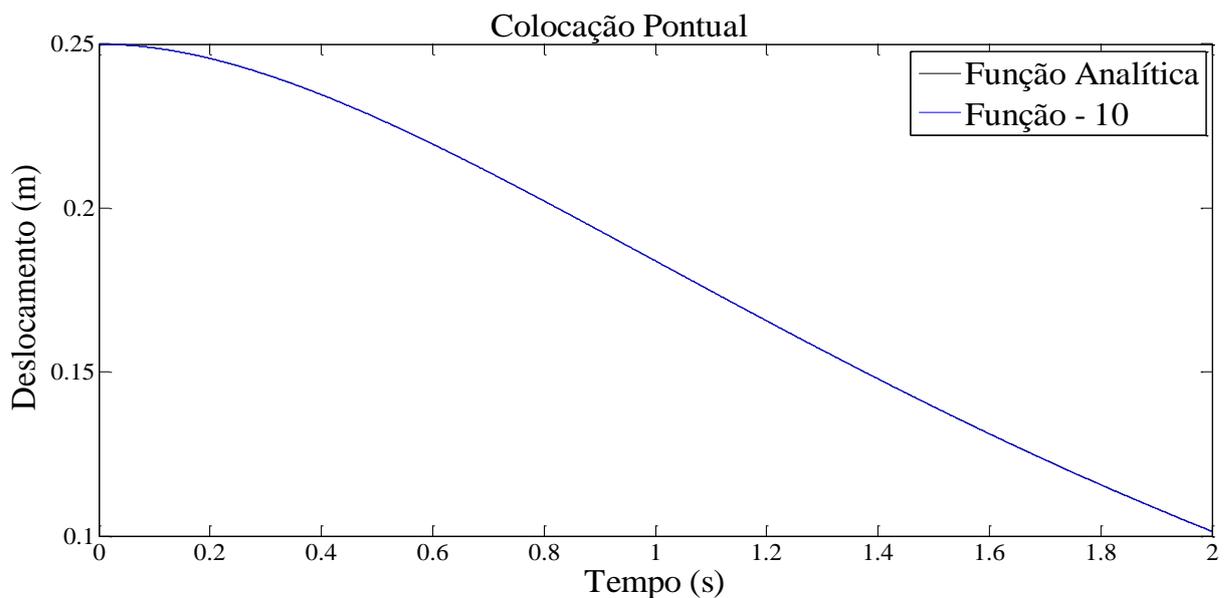
Figura 4.13 – Gráfico da função analítica e dez funções admissíveis.



Vale ressaltar que na figura 4.13 há pouca discrepância entre as funções admissíveis e a função analítica. Trata-se do grau do polinômio admitido em cada função, assim aquela função de maior grau, subentende-se que será a mais aceitável.

A figura 4.14 esboça a função analítica e a função admissível no décimo parâmetro.

Figura 4.14 – Gráfico da função analítica e a décima função admissível.



Nota-se a superposição de ambas as funções, significando que a décima função é suficiente para um resultado satisfatório. Para um melhor entendimento do que foi exposto,

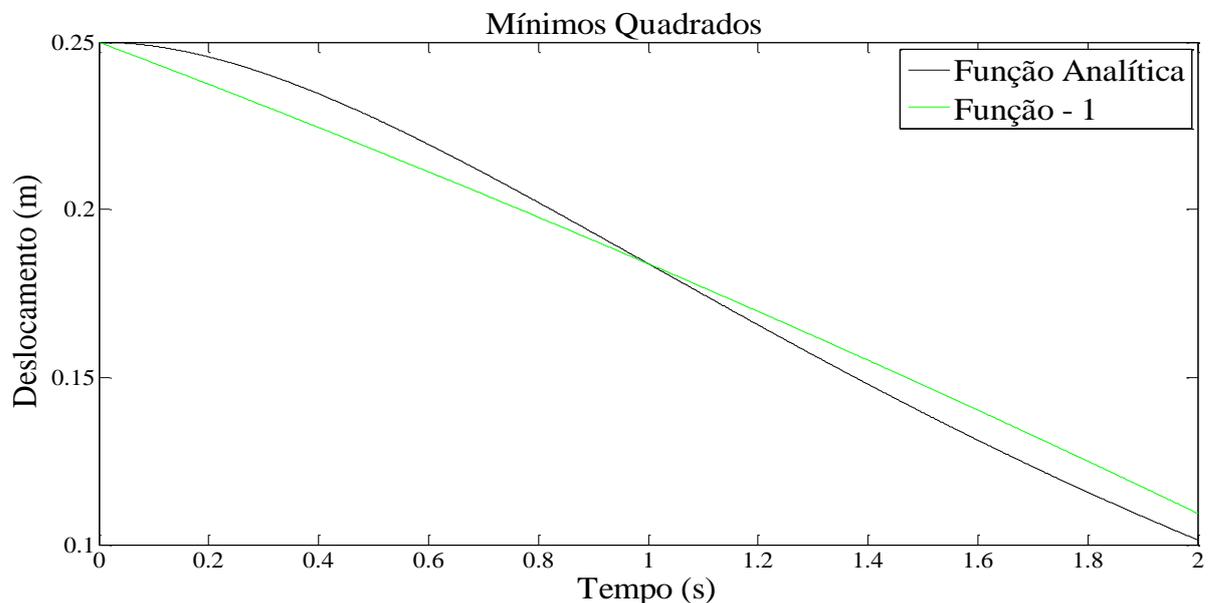
tem-se a seguir a tabela 4.4 que ilustra uma tabela comparativa de alguns pontos no intervalo de zero a 2s.

Tabela 4.4 – Relação do deslocamento em função do tempo.

Tempo	Solução Analítica	1ª função (Colocação Pontual)	10ª função (Colocação Pontual)
0	0,25	0,25	
0,5	0.8267	0.5931	0,8268
0,75	1.0587	1,0860	1,0587
1	1.2358	1,2358	1,2358
1,5	1.3863	1,3419	1,3863

Na figura 4.15 mostra a comparação entre a função analítica e uma função admissível pelo método dos Mínimos Quadrados.

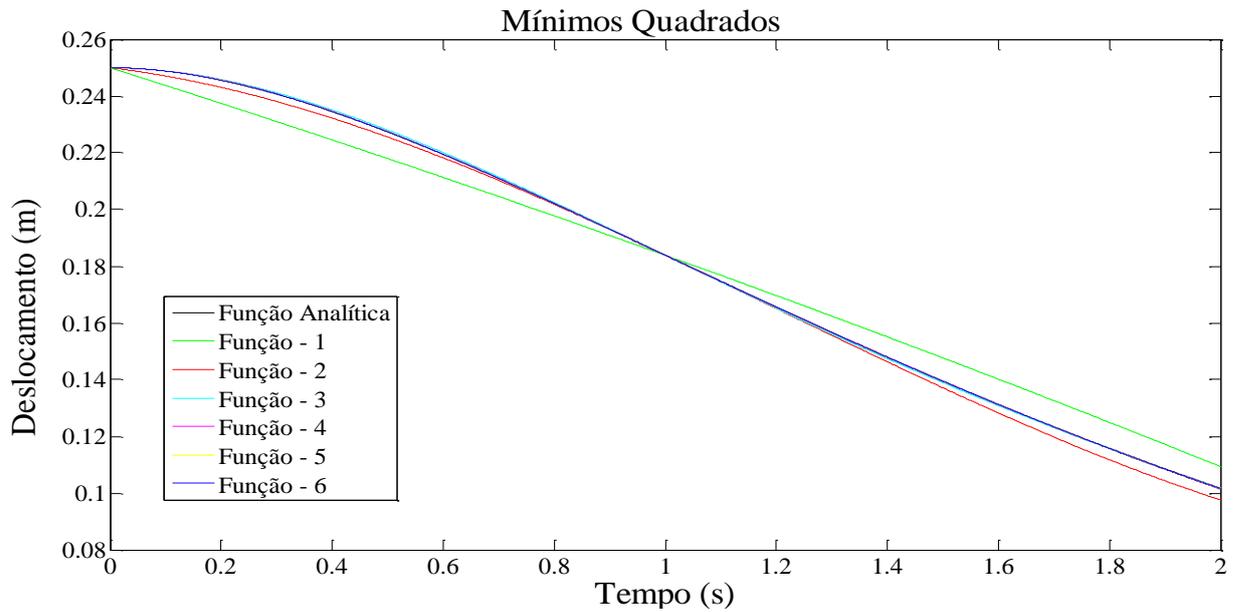
Figura 4.15 – Gráfico da função analítica e de uma função admissível.



Observa-se na figura 4.15 que o erro ainda é marcante quando se é feito apenas um parâmetro através do método dos Mínimos Quadrados. Foi necessária a realização de pelo menos seis parâmetros, ou seja, com seis tentativas, para encontrar a solução admissível satisfatória.

A figura 4.16 ilustra em um só plano cartesiano todos os parâmetros realizados para a obtenção da solução satisfatória através do método dos Mínimos Quadrados.

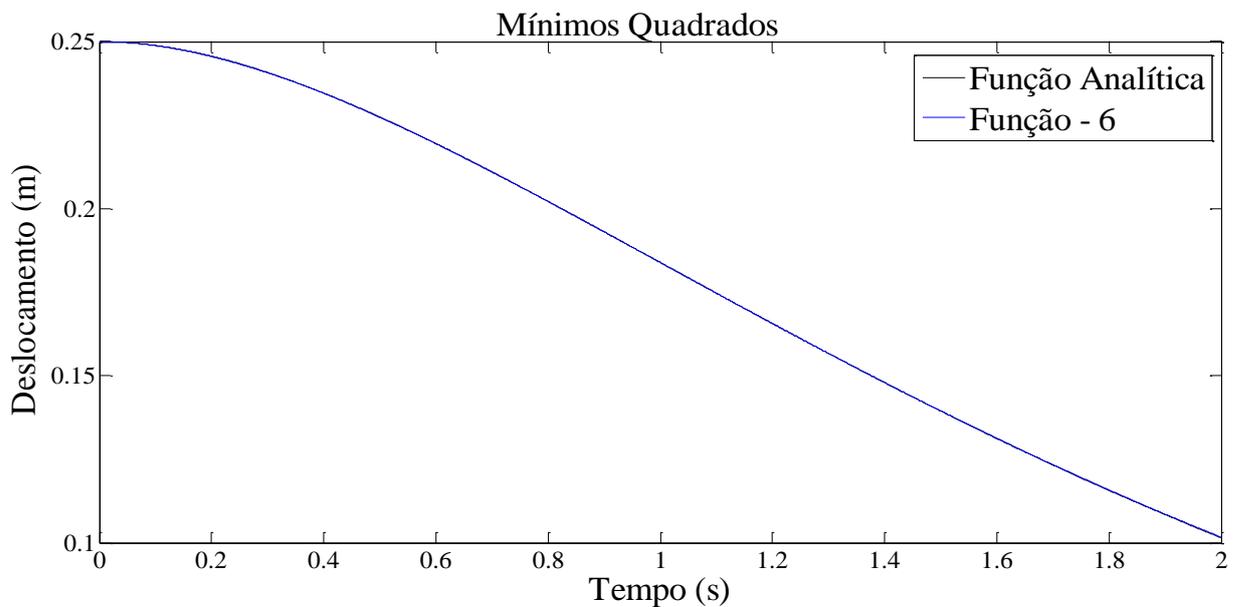
Figura 4.16 – Gráfico da função analítica e sexta funções admissíveis.



É importante notar que na figura 4.16 as discrepâncias entre as funções admissíveis e a função analítica diminuíram significativamente pelo método dos Mínimos Quadrados comparado às obtidas pelo método da Colocação Pontual.

A figura 4.17 esboça a função analítica e a função admissível no sexto parâmetro.

Figura 4.17 – Gráfico da função analítica e a sexta função admissível.



Nota-se a superposição de ambas as funções, significando que a sexta função é suficiente para um resultado satisfatório. Para um melhor entendimento do que foi exposto,

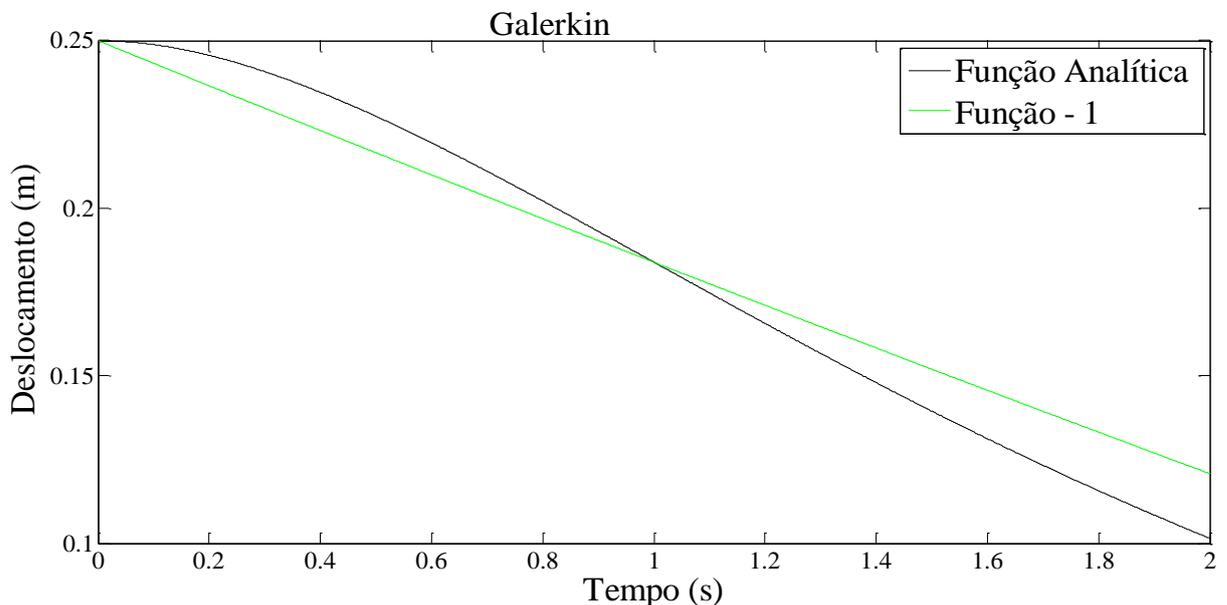
tem-se a seguir a tabela 4.5 que ilustra uma tabela comparativa de alguns pontos no intervalo de zero a 2s.

Tabela 4.5 – Relação do deslocamento em função do tempo.

Tempo	Solução Analítica	1ª função (Mínimos Quadrados)	6ª função (Mínimos Quadrados)
0	0,25	0,25	0,25
0,5	0,8267	0,8620	0,8268
0,75	1,0587	1,0787	1,0587
0,1	1,2358	1,2358	1,2358
1,5	1,3863	1,3714	1,3664

Na figura 4.18 mostra a comparação entre a função analítica e uma função admissível pelo método de Galerkin.

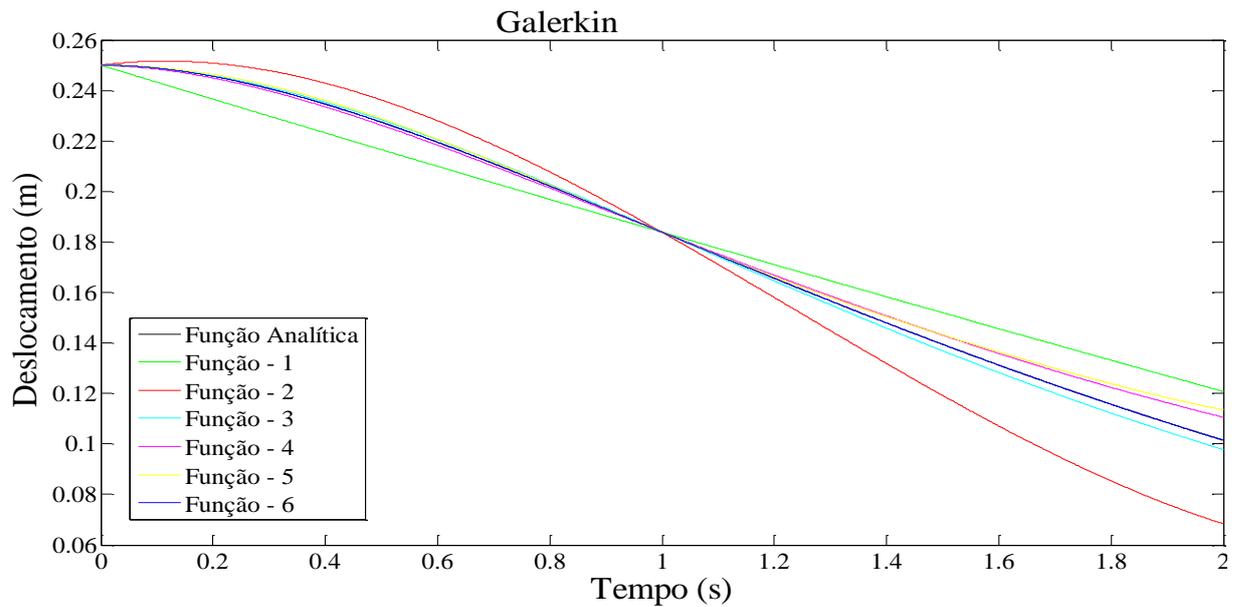
Figura 4.18 – Gráfico da função analítica e de uma função admissível.



Observa-se na figura 4.18 que o erro é marcante quando se é feito apenas um parâmetro através do método de Galerkin. Foi necessária a realização de pelo menos seis parâmetros, ou seja, com seis tentativas, para encontrar a solução admissível satisfatória.

A figura 4.19 ilustra em um só plano cartesiano todos os parâmetros realizados para a obtenção da solução satisfatória através do método de Galerkin.

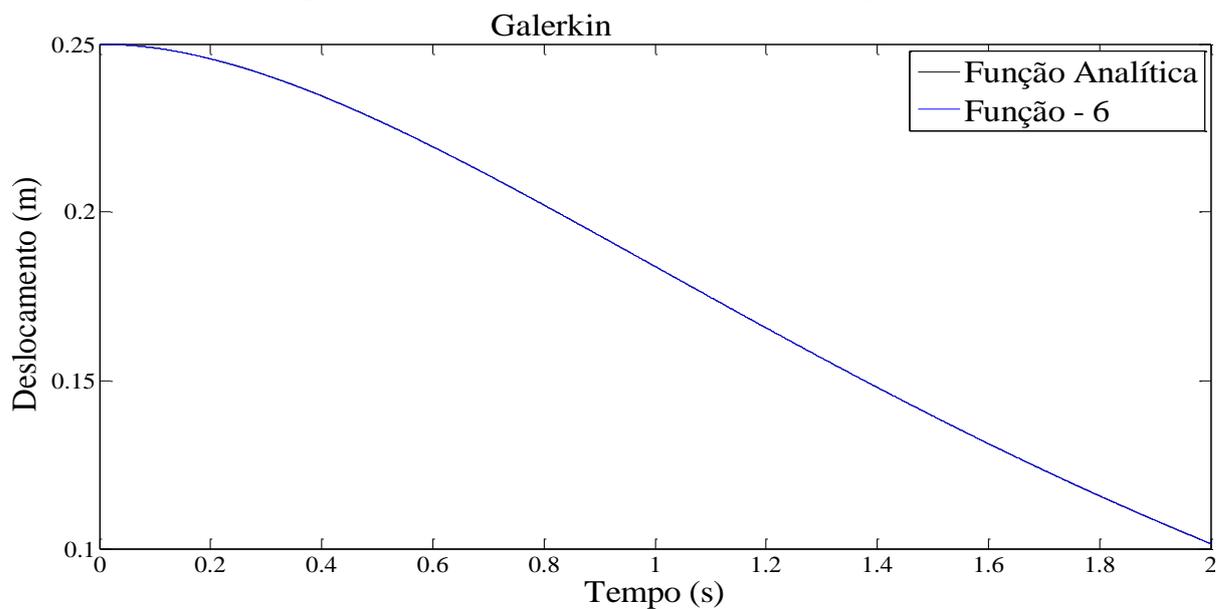
Figura 4.19 – Gráfico da função analítica e sete funções admissíveis.



É importante notar que na figura 4.19 as discrepâncias entre as funções admissíveis e a função analítica aumentaram significativamente pelo método de Galerkin comparado às obtidas não só pelo dos Mínimos Quadrados, mas também pelo método da Colocação Pontual.

A figura 4.20 esboça a função analítica e a função admissível no sexto parâmetro.

Figura 4.20 – Gráfico da função analítica e a sexta função admissível.



Observa-se novamente a superposição de ambas as funções, significando que a sexta função é suficiente para um resultado satisfatório. Para um melhor entendimento do que foi

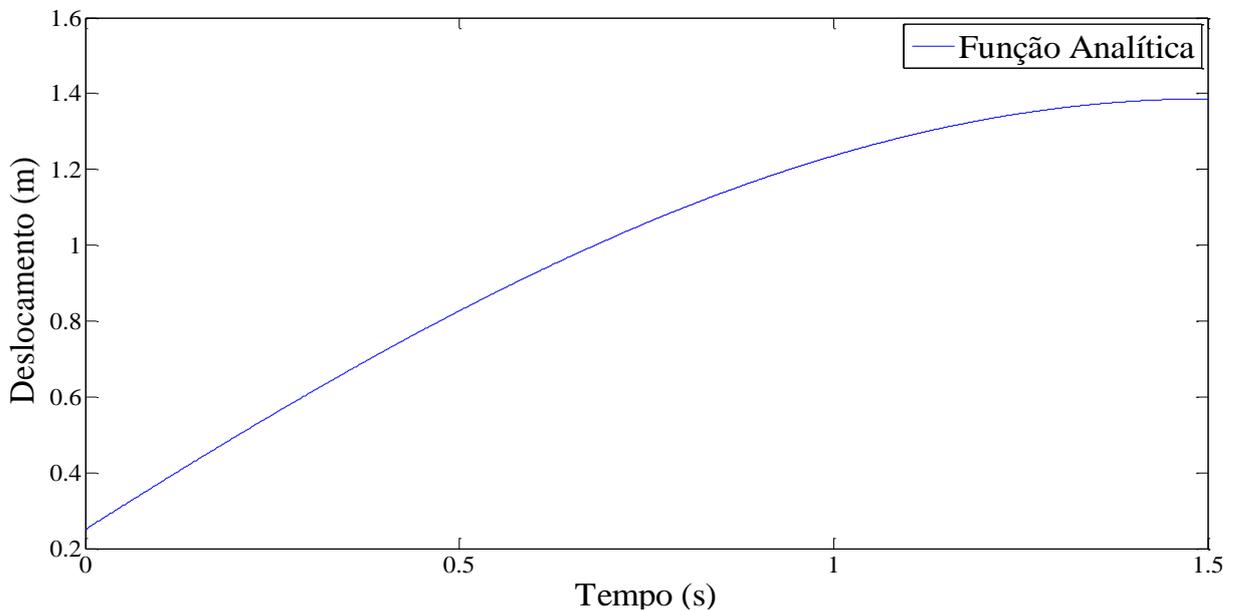
exposto, tem-se a seguir a tabela 4.6 que ilustra uma tabela comparativa de alguns pontos no intervalo de zero a 2s.

Tabela 4.6 – Relação do deslocamento em função do tempo.

Tempo	Solução Analítica	1ª função (Galerkin)	6ª função (Galerkin)
0	0,25	0,20	0,20
0,5	0,8267	0,8918	0,8268
0,75	1,0587	1,1010	0,0141
0,1	1,2358	1,2358	-0,1256
1,5	1,3863	1,2819	-0,20

A figura 4.21 mostra o deslocamento em função do tempo do oscilador harmônico amortecido forçado através de métodos analíticos tradicionais.

Figura 4.21 – Gráfico da função analítica do oscilador harmônico forçado.

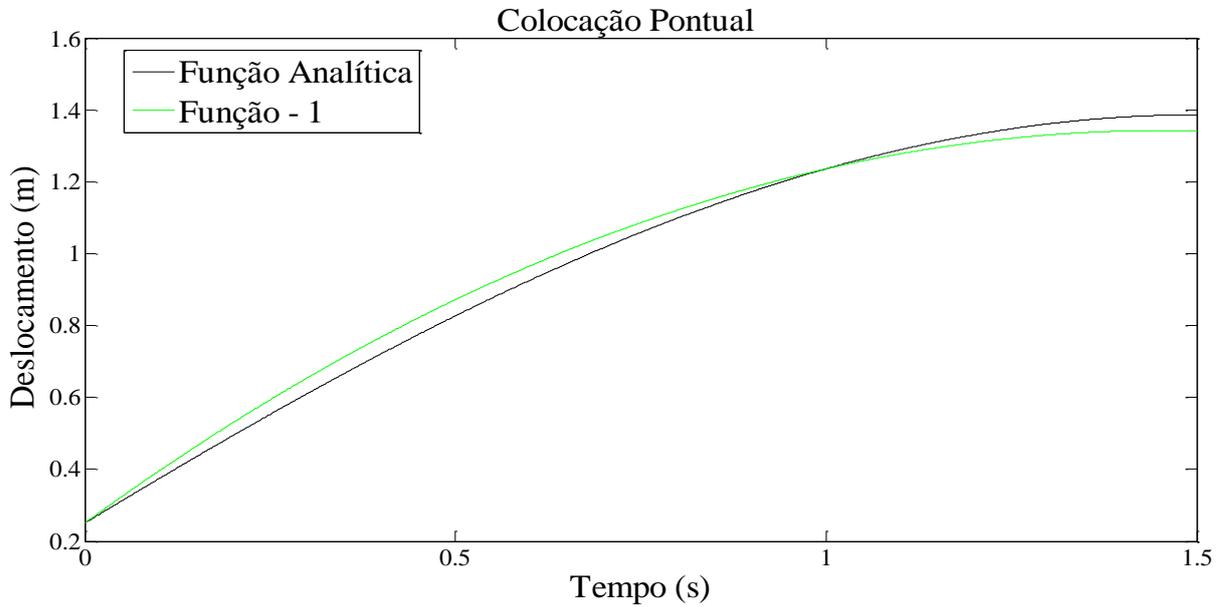


Observa-se na função analítica acima que o corpo inicia o movimento em  $x=0,25\text{m}$  e que seu ponto máximo é  $x=1,3863$  quando o tempo é  $t=1,5\text{s}$ .

Após o estudo gráfico da função analítica, a seguir tem-se a comparação gráfica, da função analítica do oscilador harmônico amortecido forçado com as respectivas funções admissíveis encontradas por cada método de Resíduo Ponderado.

A figura 4.22 mostra a comparação entre a função analítica e uma função admissível pelo método da Colocação Pontual.

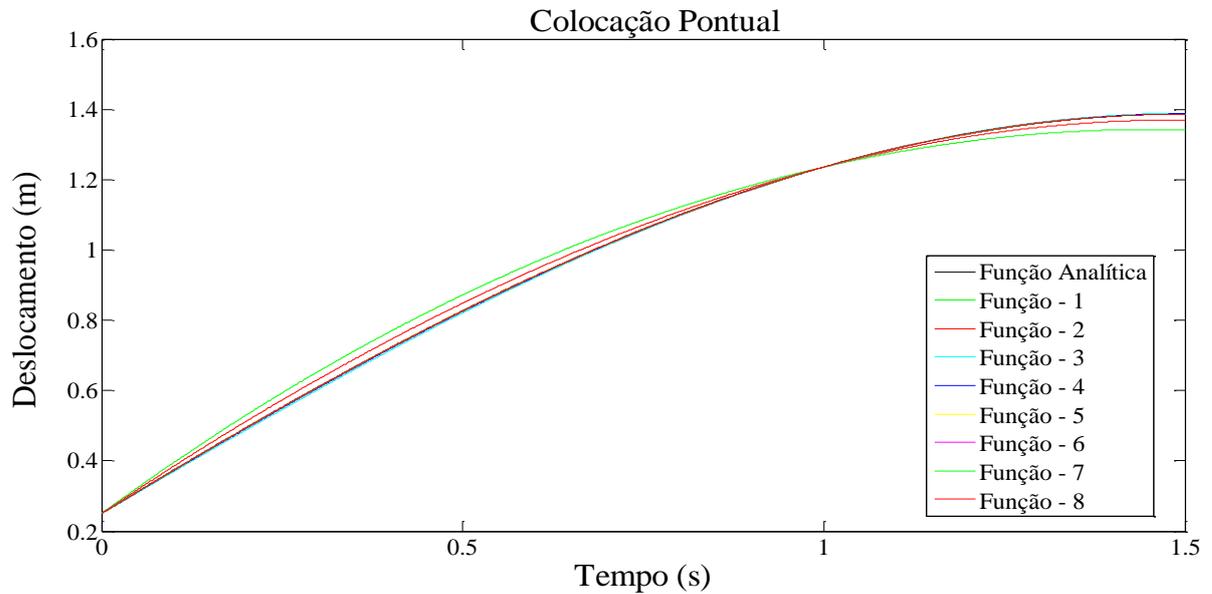
Figura 4.22: Gráfico da função analítica e de uma função admissível.



Observa-se na figura 4.22 que o erro não é tão acentuado, quando se é feito apenas um parâmetro através do método da Colocação Pontual. Foi necessária a realização de pelo menos oito parâmetros, ou seja, com oito tentativas, para encontrar a solução admissível satisfatória.

A figura 4.23 ilustra em um só plano cartesiano todos os parâmetros realizados para a obtenção da solução satisfatória.

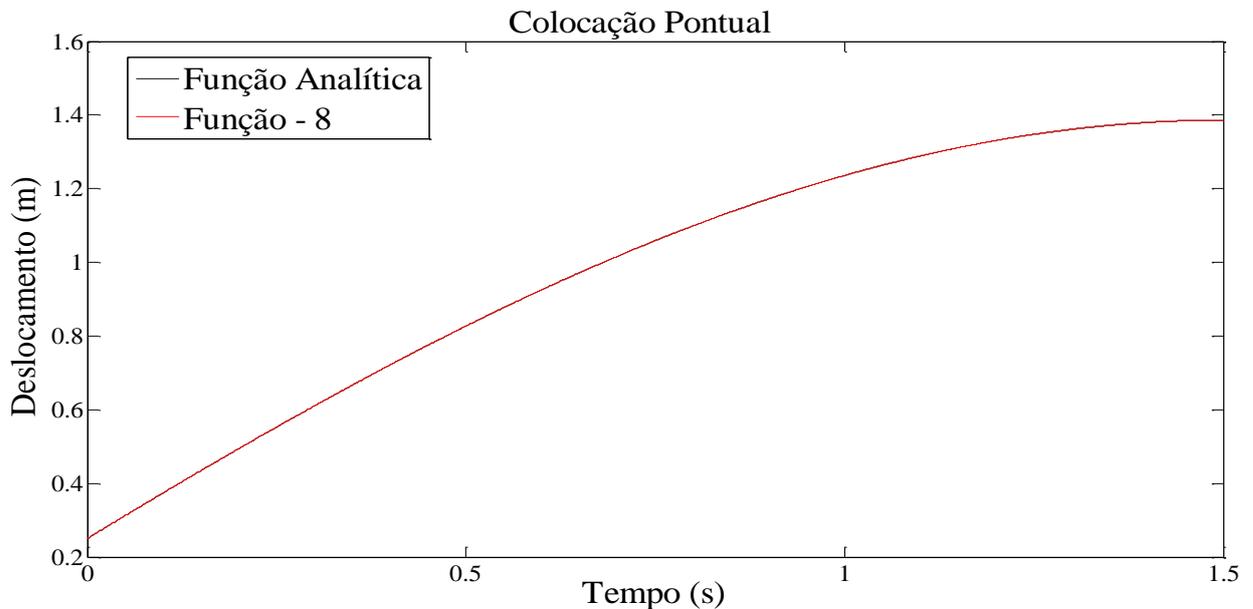
Figura 4.23: Gráfico da função analítica e dez funções admissíveis.



Vale ressaltar que na figura 4.23 há pouca discrepância entre as funções admissíveis e a função analítica. Trata-se do grau do polinômio admitido em cada função, assim aquela função de maior grau, subentende-se que será a mais aceitável.

A figura 4.24 esboça a função analítica e a função admissível no oitavo parâmetro.

Figura 4.24: Gráfico da função analítica e a oitava função admissível.



Nota-se a superposição de ambas as funções, significando que a oitava função é suficiente para um resultado satisfatório. Para um melhor entendimento do que foi exposto,

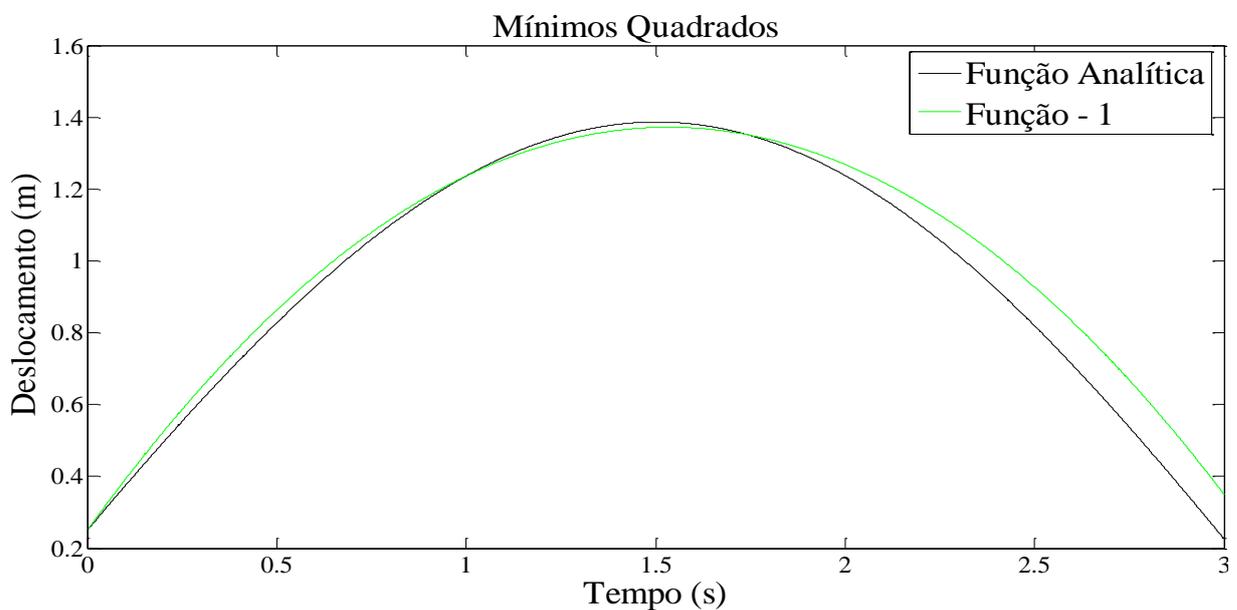
tem-se a seguir a tabela 4.7 que ilustra uma tabela comparativa de alguns pontos no intervalo de zero a 1.5.

Figura 4.7 – Relação do deslocamento em função do tempo.

<b>Tempo</b>	<b>Solução Analítica</b>	<b>1ª função (Colocação Pontual)</b>	<b>8ª função (Colocação Pontual)</b>
<b>0</b>	0,25	0,25	0,25
<b>0,5</b>	0.8267	0.5931	0,8267
<b>0,75</b>	1.0587	1,0860	1,0587
<b>1</b>	1.2358	1,2358	1,2358
<b>1,5</b>	1.3863	1,3419	1,3863

Na figura 4.25 mostra a comparação entre a função analítica e uma função admissível pelo método dos Mínimos Quadrados.

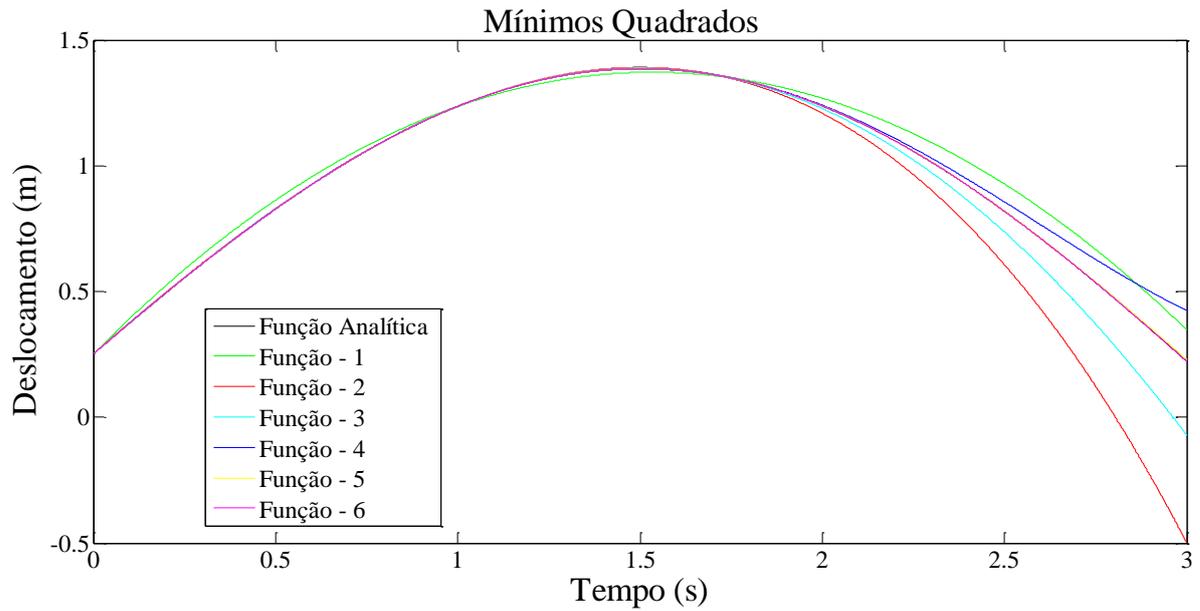
Figura 4.25 – Gráfico da função analítica e de uma função admissível.



Observa-se na figura 4.25 que o erro não é tão marcante quando se é feito apenas um parâmetro através do método dos Mínimos Quadrados. Ainda assim, foi necessária a realização de pelo menos seis parâmetros, ou seja, com seis tentativas, para encontrar a solução admissível satisfatória.

A figura 4.26 ilustra em um só plano cartesiano todos os parâmetros realizados para a obtenção da solução satisfatória através do método dos Mínimos Quadrados.

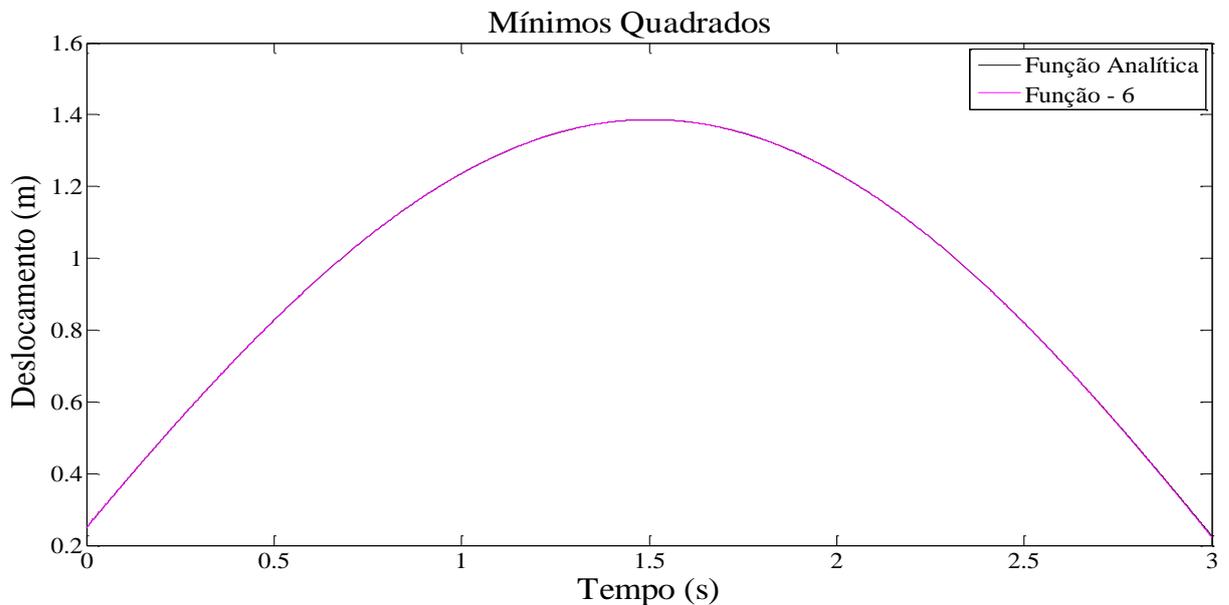
Figura 4.26 – Gráfico da função analítica e sexta funções admissíveis.



É importante notar que na figura 4.26 as discrepâncias entre as funções admissíveis e a função analítica aumentaram significativamente pelo método dos Mínimos Quadrados comparado às obtidas pelo método da Colocação Pontual.

A figura 4.27 esboça a função analítica e a função admissível no sexto parâmetro.

Figura 4.27 – Gráfico da função analítica e a sexta função admissível.



Nota-se a superposição de ambas as funções, significando que a sexta função é suficiente para um resultado satisfatório. Para um melhor entendimento do que foi exposto,

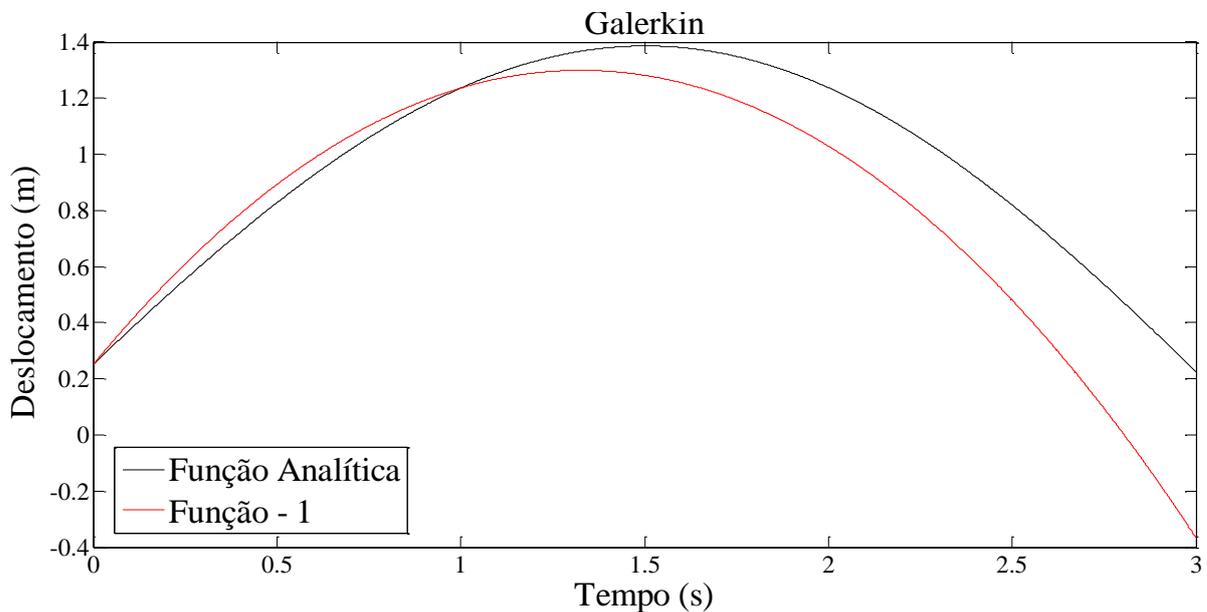
tem-se a seguir a tabela 4.8 que ilustra uma tabela comparativa de alguns pontos no intervalo de zero a 1,5s.

Tabela 4.8 – Relação do deslocamento em função do tempo.

Tempo	Solução Analítica	1ª função (Mínimos Quadrados)	6ª função (Mínimos Quadrados)
0	0,25	0,25	0,25
0,5	0,8267	0,8620	0,8268
0,75	1,0587	1,0787	1,0587
0,1	1,2358	1,2358	1,2358
1,5	1,3863	1,3714	1,3664

Na figura 4.28 mostra a comparação entre a função analítica e uma função admissível pelo método de Galerkin.

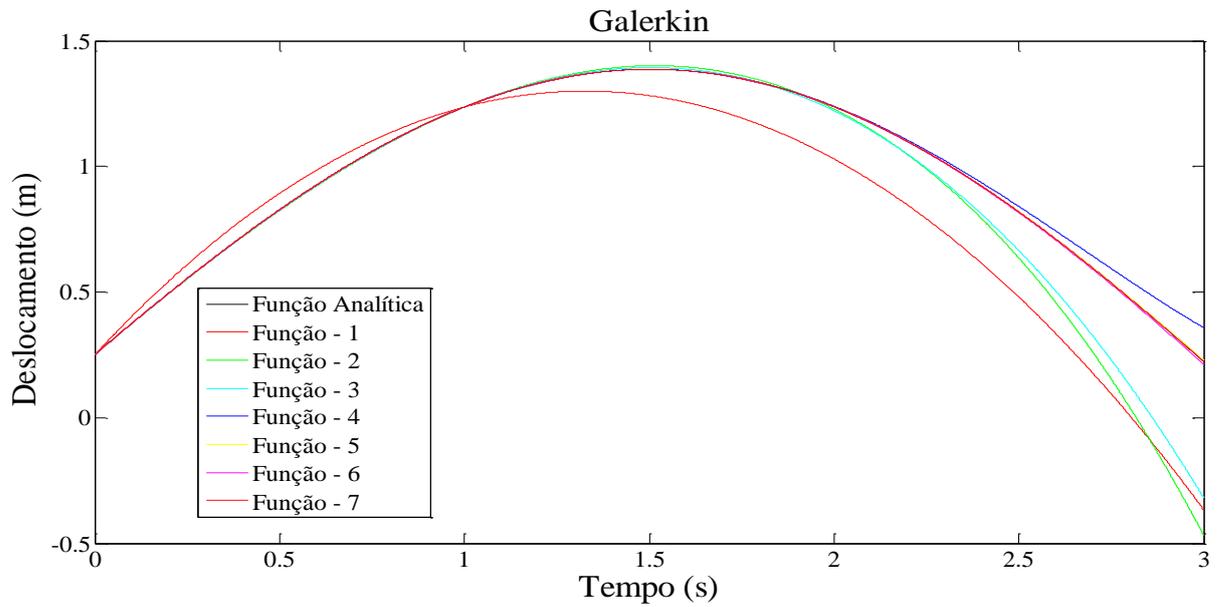
Figura 4.28 – Gráfico da função analítica e de uma função admissível.



Observa-se na figura 4.28 que o erro é visível quando se é feito apenas um parâmetro através do método de Galerkin. Foi necessária a realização de pelo menos oito parâmetros, ou seja, com oito tentativas, para encontrar a solução admissível satisfatória.

A figura 4.29 ilustra em um só plano cartesiano todos os parâmetros realizados para a obtenção da solução satisfatória através do método de Galerkin.

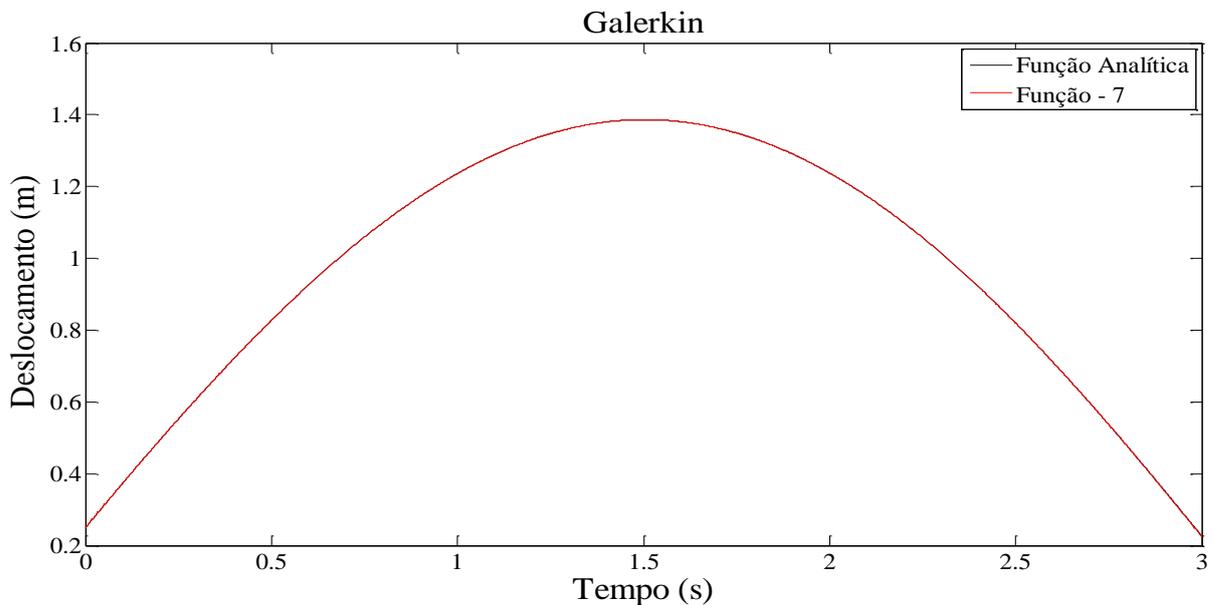
Figura 4.29 – Gráfico da função analítica e sete funções admissíveis.



É importante notar que na figura 4.29 as discrepâncias entre as funções admissíveis e a função analítica aumentaram significativamente pelo método de Galerkin comparado às obtidas não só pelo dos Mínimos Quadrados, mas também pelo método da Colocação Pontual.

A figura 4.30 esboça a função analítica e a função admissível no sétimo parâmetro.

Figura 4.30 – Gráfico da função analítica e a sétima função admissível.



Observa-se novamente a superposição de ambas as funções, significando que a sétima função é suficiente para um resultado satisfatório. Para um melhor entendimento do que foi

exposto, tem-se a seguir a tabela 4.9 que ilustra uma tabela comparativa de alguns pontos no intervalo de zero a 1,05s.

Tabela 4.9 - Relação do deslocamento em função do tempo.

<b>Tempo</b>	<b>Solução Analítica</b>	<b>1ª função (Galerkin)</b>	<b>7ª função (Galerkin)</b>
0	0,25	0,25	0,25
0,5	0,8267	0,1250	0,8267
0,75	1,0587	0,0336	1,0587
0,1	1,2358	-0,0740	1,2358
1,5	1,3863	-0,2247	1,3863

## 5. Conclusão

É de grande importância a escolha de um modelo matemático apropriado em reproduzir adequadamente a solução de um problema físico, nas mais diferentes áreas da ciência, pois possibilita o estudo e a análise do processo com maior variabilidade de resolução.

Por meio do Método de Elementos Finitos, abundantes trabalhos com diferentes aplicações e objetos de estudo podem ser conduzidos, sendo o mesmo plenamente aplicável para a realização da solução de um movimento harmônico clássico.

Neste trabalho foram feitas comparações dos resultados de cálculos obtidos da solução de um movimento harmônico clássico, sendo objeto de estudo, os três casos: do movimento harmônico simples, amortecido e forçado. Os cálculos foram efetuados de três modos diferentes pelo método dos Resíduos Ponderados.

O objetivo do trabalho é avaliar a eficiência de soluções aproximadas obtidas pela aplicação de Métodos de Resíduos Ponderados, especificamente o Método da Colocação Pontual, Método dos Mínimos Quadrados e o Método de Galerkin, revisando seus aspectos conceituais, realizando sua implementação computacional e por fim, procedendo a uma comparação com base gráfica.

Foi possível estabelecer uma comparação direta entre os resultados da metodologia tradicional e os resultados das metodologias propostas pelos métodos dos resíduos ponderados.

Finalmente, pode-se concluir que o elemento finito apresentado é uma contribuição importante na área de análise da solução de osciladores harmônicos clássicos. A contribuição mais importante deste trabalho foi o critério dos métodos utilizados serem satisfatórios para a solução de equações diferenciais ordinárias.

Como propostas para trabalhos futuros, podem citar não só o aprofundamento dessas funções em problemas bidimensionais, mas também, em abordar a ressonância de um oscilador harmônico amortecido forçado.

## 6. Referências

ASSAN, A. E., **Método dos Elementos Finitos: Primeiros Passos**. 2ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2003.

BARCELOS, J.N., **Mecânica Newtoniana, Lagrangiana e Hamiltoniana**, 1ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2004.

BECKER, G., **Human Capital**. New York: NBER, p. 62, 1964.

DA SILVA, S., **Introdução ao Método dos Elementos Finitos**, notas de aula de Análise de Estruturas, 2009, no site <http://www.inf.unioeste.br/~rogerio/Analise-Estruturas1.pdf>

DE ALBUQUERQUE, L. B., **Categorização de Tensões em Modelos de Elementos Finitos de Conexões Boca-Vaso de Pressão**. Dissertação de Mestrado. Instituto de Pesquisa Energéticas e Nucleares, Autarquia associada à Universidade de São Paulo, 1999.

DE LEMOS, E. M., **Implementação Dos Métodos De Resíduos Ponderados Por Quadraturas Gaussianas**. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia do Rio De Janeiro, Universidade Federal do Rio De Janeiro, Rj, 2007.

FINLAYSON, B.A., E SCRIVEN, L.E., The Method of Weighted Residuals - A Review. *Applied Mechanics Reviews*, 19, pp. 735-748, (1966).

FINLAYSON, B.A., E SCRIVEN, L.E., The Method of Weighted Residuals - A Review. *Applied Mechanics Reviews*, 19, pp. 735-748, (1966).

GORDON, J. L., FASICZKA, R. J., **Introduction to Finite Element Analysis**, PVP Tutorial Series, New York, NY, 1991.

GRIFFITHS, D. J., **Eletrodinâmica** 3ª Edição. 3 ed. PEARSON (UNIVERSITARIOS) - GRU: São Paulo. 2011.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo**. Vol. 2. Rio de Janeiro. LTC, 2001.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo**. Vol. 3 e 4. Rio de Janeiro. LTC, 2001.

HUEBNER, K., THORTN, E. A. E BYRON, T. G.. **The Finite Element Method for Engineers**. 3 ed, New York: John Wiley e Sons: 1995.

HALLIDAY, D., RESNICK, R. E WALKER, J. **Fundamentos de Física**. 8a Ed., Rio de Janeiro. Livros Técnicos e Científicos, Vol.2., 2008.

LEITHOLD, L. **O cálculo com Geometria Analítica**, 1v., 3 ed., São Paulo,: Harbra, 1994.

MARION, J. B. AND THORNTON, S.T., **Classical Dynamics of Particles and Systems**, 5<sup>th</sup> ed. Brooks/Cole - Thomson Learning Inc., Pacic Grove CA, 2004.

PAVANELO, R., “**Introdução dos Métodos Finitos**”, notas de aula de Elementos Finitos, no site:  
<http://www.fem.unicamp.br/~pava/Cursos/IntroducaoElementosFinitos/IntroducaoElementosFinitos.htm>, 1997.

RADE, D.A., “**Introdução ao Método de Elementos Finitos**”, 2003.

REDDY, J. N., **An Introduction to the Finite Element Method**, 2. ed., McGraw-Hill.1993.

SNYDER L. J., SPRIGGS T. W. E STEWART W. E., Solution of the equations of change by Galerkin's method, **AiChE Journal** Volume 10, Issue 4, pages 535-540, 1964.

STEINBRUCH, A. e WINTERLE, P., **Geometria Analítica** . 2 ed.. São Paulo: McGraw-Hill., 1987.

SYMON, K.R., **Mechanics**, 3<sup>rd</sup> ed., Addison-Wesley Publishing Company, Reading MA, 1996.

TIPLER, P.A. E MOSCA, G., **Física Para Cientistas E Engenheiros**, Volume 2 Mecânica, Oscilações e Ondas, Termodinâmica, 6<sup>a</sup> ed. LTC, Rio de Janeiro, 2009

WEDEL, S., MICHELSEN, M. L., VILLADESEN, J. 1977, "Asymptotic Stability of a Catalyst Particle", **Chemical Engineering Science**, v. 32, pp. 179-190, 1977.

ZIENKIEWICZ O.C., MORGAN K. "**Finite Element and Approximations**", Wiley 1983.