



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ – UECE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA – CCT
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM FÍSICA**

HELANDERSON SANTOS DE SOUSA

**ALGUNS ASPECTOS ACERCA DO CONCEITO DE
LANÇAMENTO OBLIQUO, EM ANÁLISE À PARÁBOLA
DE SEGURANÇA**

FORTALEZA – CEARÁ

2013

HELANDERSON SANTOS DE SOUSA

ALGUNS ASPECTOS ACERCA DO CONCEITO DE LANÇAMENTO OBLIQUO, EM
ANÁLISE À PARÁBOLA DE SEGURANÇA

Monografia apresentada ao curso de Graduação em Física do Centro de Ciências e Tecnologia, da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de licenciado em Física.

Orientador (a): Prof. Me. Francisco de Assis Leandro Filho.

FORTALEZA – CEARÁ

2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Universidade Estadual do Ceará

Biblioteca Central Prof. Antônio Martins Filho

Bibliotecário(a) Responsável – Giordana Nascimento de Freitas CRB-3 / 1070

S725a Sousa, Helanderson Santos de
Alguns aspectos acerca do conceito de lançamento oblíquo em análise à parábola de segurança / Helanderson Santos de Sousa. — 2013.
CD-ROM. 67 f. : il. (algumas color.) ; 4 ¾ pol.
“CD-ROM contendo o arquivo no formato PDF do trabalho acadêmico, acondicionado em caixa de DVD Slin (19 x 14 cm x 7 mm)”.
Monografia (graduação) – Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Curso de Licenciatura Plena em Física, Fortaleza, 2013.
Orientação: Prof. Me. Francisco de Assis Leandro Filho.
1. Lançamento oblíquo. 2. Parábola de segurança. 3. Física – Estudo e ensino. I. Título.

CDD: 530

HELANDERSON SANTOS DE SOUSA


ALGUNS ASPECTOS ACERCA DO CONCEITO DE LANÇAMENTO OBLIQUO, EM
ANÁLISE PARÁBOLA DE SEGURANÇA

Mônografia apresentada a Coordenação
do Curso de Graduação em Física da
Universidade Estadual do Ceará como
requisito parcial para obtenção do título
de licenciado em Física

Aprovada em: 05 / 07 / 2013

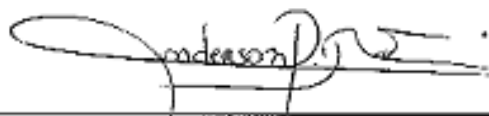
Conceito obtido: SATISFATORIO

BANCA EXAMINADORA



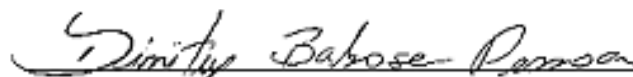
Prof. Me. Francisco de Assis Leandro Filho (Orientador)

Universidade Estadual do Ceará



Prof. Me. Anderson Pereira Rodrigues

Universidade Federal do Ceará



Prof. Me. Dimitry Barbosa Pessoa

Universidade Estadual do Ceará

Dedico esse trabalho, primeiramente, a Deus e a minha família, sem eles nada seria possível.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus por ter me permitido chegar a esse momento especial de minha vida, livrando-me de todos os males e abençoando enormemente minha vida, com muito amor aos meus pais Raimunda Edineuza Santos de Sousa e Joaquim Reginaldo Bezerra de Sousa que tanto me ajudaram nessa caminhada. Sem eles não teria conseguido alcançar a vitória.

A minha namorada Laynara dos Santos Nunes, e aos meus familiares que contribuíram. A estes os meus mais sinceros agradecimento.

A meu orientador, Prof. Francisco de Assis Leandro Filho, pelo incentivo, atenção, paciência, confiança, e principalmente pelos ensinamentos que levarei por toda a minha vida.

Aos amigos que me ajudaram neste percurso, incentivando, colaborando, participando. A estes e com muito carinho agradeço: Mario Sergio, Diego Leitão, entre outros.

Aos excelentes professores que contribuíram para minha formação acadêmica, e pessoal, são eles: Apiano Moraes, Eloísa Vidal, Leandro Filho, Humberto Carmona, Santos, dentre outros.

Aos alunos que fazem parte de minha carreira de professor, pois sem eles o estudo não teria sido possível e todos os colegas de turma que fizeram parte desta caminhada

Não a nós, Senhor, nenhuma glória para nós, mas sim ao teu nome, por teu amor e por tua fidelidade!

(Salmos 115:1)

RESUMO

O lançamento oblíquo no vácuo é um dos assuntos abordados no ensino médio, ao iniciar o estudo da mecânica. Nessa ocasião os alunos recebem o embasamento teórico e podem comprovar o que aprenderam com as mais variadas formas de aplicação do assunto, com experiências do dia-a-dia, além de exercitar por meio das várias questões propostas em livros didáticos. Todas as equações vistas ao se aprender lançamento oblíquo são provenientes das equações apresentadas no início do assunto de cinemática, em especial as demonstradas no estudo do movimento uniforme e do movimento uniformemente variado, por conseguinte o lançamento oblíquo é a composição desses dois tipos de movimentos. O presente trabalho tem como objetivo abordar um tema que não é normalmente explorado pelos alunos ao estudarem lançamento oblíquo, esse estudo terá como tema: A parábola de segurança. O tema parábola de segurança é citado no livro Problemas de física, e Problemas de física elementar que têm objetivo preparar alunos para olimpíadas de física, mas dificilmente é abordado em livros didáticos brasileiros. O conhecimento das diversas aplicações da parábola de segurança possibilita ao estudante de física resolver, de forma simples e elegante, problemas de lançamento oblíquo que sem a aplicação da mesma seriam resolvidos de maneira bem mais complicada e necessitariam até mesmo do uso de artifícios de cálculo diferencial. Nesse sentido, o autor trabalha a exposição do tópico lançamento oblíquo, discorrendo sobre o assunto inclusive através de vários exemplos resolvidos, desde os mais simples até alguns com um pouco mais de profundidade e em seguida expor o tema parábola de segurança, também através de algumas questões resolvidas com o propósito de oferecer mais uma ferramenta na resolução de problemas para os alunos.

Palavras-chave: Lançamento Oblíquo, Parábola de Segurança, Ensino de Física.

ABSTRACT

The oblique launch in vacuum is one of the topics covered in high school, when beginning the study of mechanics. At that time they receive theoretical and can prove what they have learned by the various forms of application of the subject, with day-to-day experiences besides exercising it through the various questions posed in textbooks. All equations seen by learning oblique launch in vacuum are from the equations presented in the beginning of the kinematic subject, particularly demonstrated on the study of uniform motion and the varied uniformly motion, therefore there are these two kind of motion in the oblique launch composition. This paper aims to address a topic that is not usually explored by students, it's called by The Parable of Security. The theme parable of security is quoted in the books Problems of Physics and Problems of Elemental Physics that are meant to prepare students for the Olympiads of Physics, but it is hardly addressed in Brazilian textbooks. The knowledge of various applications of the parable of security enables students with a simple and elegant form to solve physics oblique launch issues that would be so much more complicated and even require the use of calculation devices to solve them without their applications. In this sense, the author's goal in this work is to show the topic Oblique Launch, talking about it including the use of several solved examples, since the simplest ones until some ones with a little more depth and then expose the theme Parable Security also through some issues resolved in order to provide an additional tool in problem solving for students.

Keywords: Launch Slanted, Parable Security, Physics Teaching

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	9
2 REFERENCIAL TEÓRICO.....	11
2.1 Lançamento horizontal no vácuo	11
2.2 Lançamento oblíquo no vácuo.....	16
2.3 Trajetória como uma Parábola	22
3 METODOLOGIA	24
3.1 Aplicações da teoria às questões	24
3.1.1 Saltando um triângulo.....	24
3.1.2 Saltando um prisma hexagonal	26
3.1.3. Saltando a secção de um cilindro.....	31
3.2 Lei da reflexão dos choques	34
4 A PARÁBOLA DE SEGURANÇA... ..	40
4.1 Detalhando a parábola de segurança.....	40
4.2 Aperfeiçoando o ângulo de disparo	48
4.3 Velocidade mínima de disparo para atingir um alvo.....	49
5 GENERALIZANDO AS EQUAÇÕES DO MOVIMENTO PARABÓLICO	52
6 RESULTADOS.....	59
6.1 Detonador no fundo de um poço.....	59
6.2 Menor distância para se abater um avião	60
6.3 Lançamento de um penhasco	62
7 CONCLUSÃO	64
REFERÊNCIAS.....	65

1 INTRODUÇÃO

O estudo dos corpos em queda livre e dos lançamentos parabólicos são, segundo Hewitt (2005), dois dos temas mais antigos estudados em física. Desde a época de Aristóteles (384-322 a.c.) já se buscava entender os diversos tipos de movimento estabelecendo-se regras que perduraram por quase dois mil anos, mas foram derrubadas por Galileu Galilei (1564-1642) que, através de seus estudos, deu início ao conceito de queda livre e composição de movimentos que temos hoje.

O estudo dos lançamentos oblíquos é abordado nos anos iniciais do ensino médio em que o aluno recebe as noções introdutórias sobre o tema e a maneira de como resolver exercícios.

O presente trabalho se propõe a discorrer inicialmente sobre o tema lançamento oblíquo, através de uma teoria sucinta e com alguns exemplos de aplicações ao longo do texto, e em um segundo momento, sobre pontos importantes dentro do tema parábola de segurança, que é uma ferramenta muito oportuna na resolução de problemas envolvendo lançamento oblíquo, com o objetivo de expor aos alunos de ensino médio ou mesmo em nível de graduação uma poderosa ferramenta na resolução de problemas os quais seriam resolvidos de forma bem mais trabalhosa da maneira convencional. Essa ferramenta, conhecida como parábola de segurança ou envoltória, citada em vários livros voltados para olimpíadas de física pelo mundo, em especial os livros da editora russa Mir como o Problemas de Física Elementar, Conhecido no Brasil com Saraeva devido ao nome de um de seus autores, O livro do Dr Igor Irodov, Problemas de Física Geral que é indicado pelas bancas examinadoras das olimpíadas internacionais de física.

Os estudo da parábola de segurança, com os necessários conceitos e demonstrações é pouco difundo em livros didáticos brasileiros não obstante o fato de ser de grande importância para resolução de questões mais aprofundadas de lançamento de projéteis.

Nesse sentido o trabalho expõe, de forma direta, aspectos sobre a parábola de segurança em seus pontos mais relevantes, introduzindo, inicialmente, o conceito de lançamento oblíquo e o final mostrando a aplicação a alguns problemas de física, alguns retirados dos supracitados livros, com o objetivo de facilitar a resolução de questões, pois resolvendo-os de modo usual seriam

carregadas de muito cálculo algébrico ou mesmo de artifícios de cálculo, com o propósito de facilitar a vida de estudantes na hora de resolver problemas.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Lançamento horizontal no vácuo

Galileu, estudando problemas relativos a movimentos compostos, ou seja, movimentos que são resultantes da composição de dois ou mais movimentos, propôs o princípio da simultaneidade ou princípio da independência dos movimentos apresentado por Ramalho (2007) da seguinte forma:

Se um corpo apresenta um movimento composto, cada um dos movimentos componentes se realiza como se os demais não existissem e no mesmo intervalo de tempo. (Ramalho, Nicolau e Toledo, 2005, p. 151)

Assim se considerarmos como exemplo um barco que sai perpendicularmente às margens de um rio ele é arrastado pela correnteza, atingindo a margem oposta num ponto situado rio a baixo. O tempo gasto pelo barco na travessia é o mesmo que ele gastaria sem correnteza. O movimento de arrastamento rio abaixo é simultâneo ao movimento próprio do barco, mas independente dele. Os dois movimentos ocorrem ao mesmo tempo, mas não interferem na realização do outro, ou seja, são independentes.

Um corpo lançado horizontalmente no vácuo, nas proximidades da superfície terrestre, descreve, segundo Resnick (1992), uma trajetória parabólica em relação à Terra.

Esse movimento pode ser considerado, de acordo com o princípio da simultaneidade de Galileu mostrado acima, como o resultado da composição de dois movimentos simultâneos e independentes: queda livre e movimento horizontal.

O movimento de queda livre é vertical, sob a ação exclusiva da gravidade que é constante, pois não consideramos as possíveis variações relativas à altura, visto que o movimento ocorre nas proximidades da terra.

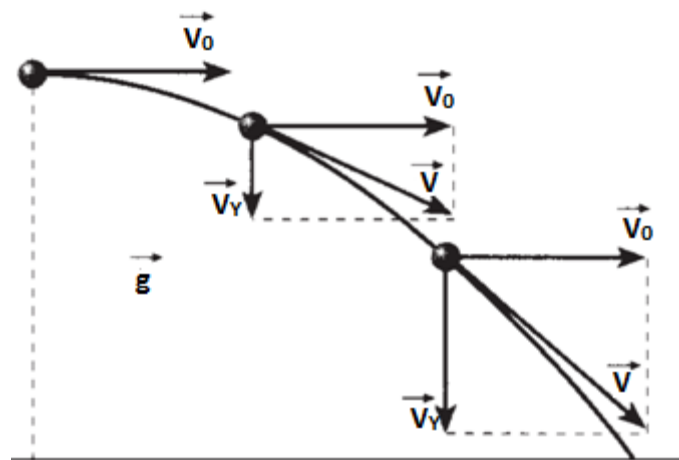
O movimento na horizontal é um movimento uniforme, porquanto não existe nenhuma aceleração na direção horizontal, o corpo realiza esse movimento por inércia, mantendo a velocidade com que foi lançado.

Em cada ponto da trajetória descrita pelo corpo, a velocidade resultante é tangente à trajetória, sendo dada pela soma vetorial da velocidade horizontal, que

permanece constante, e da velocidade vertical cujo módulo varia, pois a aceleração da gravidade tem direção vertical.

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$$

Figura 1- Composição de velocidades
 FONTE: Ramalho, Nicolau e Toledo (2005)



Dessa forma, à medida que o corpo se movimenta, o módulo de sua velocidade \vec{v} cresce devido o aumento do módulo da velocidade vertical \vec{v}_y .

A título de exemplificação, considere a seguinte situação de uma esfera rola com velocidade constante de 10 m/s sobre uma mesa horizontal sem atrito e que, ao abandoná-la, a esfera fica sujeita exclusivamente à ação da gravidade ($g = 10 \text{ m/s}^2$), não agindo nenhum tipo de força dissipativa nessa situação, atingindo o solo num ponto situado a 5m do pé da mesa.

Para determinarmos o tempo de queda dessa esfera simplesmente notemos que, na horizontal não há nenhuma tipo de aceleração, assim o movimento é uniforme, sem variação de velocidade, e acontecerá por inércia como a mesma velocidade que tinha ao deixar a mesa. Assim, seguindo Resnick (1992),

$$X = v_{x0} \cdot t \tag{1}$$

Em que X é o espaço percorrido pela esfera na horizontal, v_x é o módulo da velocidade horizontal ao abandonar a mesa e t intervalo e tempo, considerando o instante de tempo inicial sempre zero ($t_0 = 0$).

Substituindo os valores dados teremos:

$$5 = 10 \cdot t$$

assim

$$t = 0,5s$$

Esse tempo, pelo princípio da simultaneidade, é também o tempo de queda

Assim, a altura da mesa, segundo Resnick (1992), é dada e dada pela equação da queda livre, sob a ação exclusiva da gravidade, de tal forma que podemos escrever:

$$y = \frac{gt^2}{2} \tag{2}$$

Em que y é a distância percorrida na vertical pela esfera g é o módulo da aceleração da gravidade, e t o intervalo de tempo, considerando o instante inicial igual a zero ($t_0 = 0$). Substituindo os valores dados teremos

$$y = \frac{10 \cdot (0,5)^2}{2}$$

Logo teremos

$$y = 1,25m.$$

Ao chegar ao solo, a velocidade vetorial da esfera pode ser considerada resultante da composição da velocidade horizontal que se mantém constante e da velocidade vertical cujo módulo é dado por $v_y = 5m/s$, aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo de lados v_x, v_y e v , destacado na Figura 2, obteremos o módulo da velocidade vetorial da esfera ao chegar ao solo:

Figura 2 – Uma esfera é lançada obliquamente de uma mesa.

FONTE: Ramalho, Nicolau e Toledo (2005)

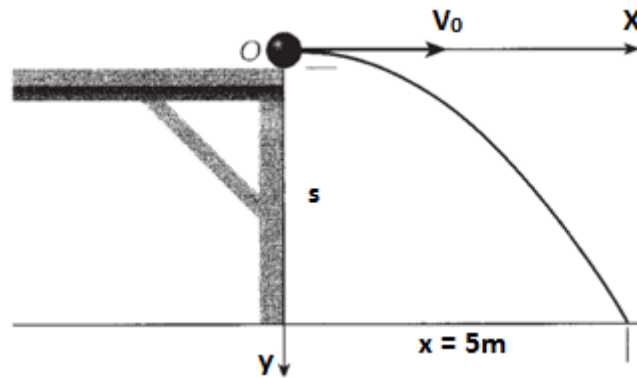
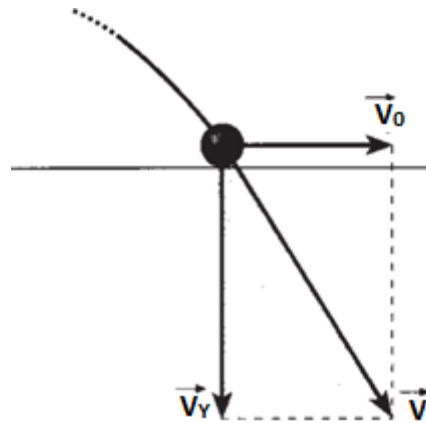


Figura 3 – velocidade ao chegar ao solo

FONTE: Ramalho, Nicolau e Toledo (2005)



$$v^2 = v_0^2 + v_y^2 \quad (3)$$

dessa forma

$$v^2 = 10^2 + 5^2$$

$$v^2 = 125$$

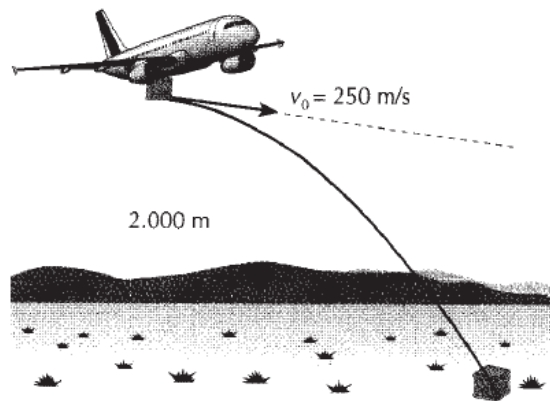
e

$$v \approx 11,2 \text{ m/s}$$

Também a título de exemplo, considere que um avião voa horizontalmente a 2.000 m de altura com velocidade de 250 m/s no instante em que abandona um pacote. Adotemos $g = 10\text{m/s}^2$ desprezemos a ação do ar.

Figura 4 – Avião abandonando um pacote.

FONTE: Ramalho, Nicolau e Toledo (2005)



Para encontrarmos o tempo de queda do pacote, lembremos que, na horizontal, não há aceleração e por isso o movimento é uniforme, visto que desprezamos qualquer atrito com o ar.

Dessa maneira, na horizontal, a Equação (1) nos dá os espaços percorridos na horizontal, substituindo os valores dados teremos:

$$2000 = 250 \cdot t$$

Logo

$$t = 4\text{s}$$

Nessa mesma esteira a distância percorrida pelo pacote antes de tocar o solo, considerando que na vertical o movimento é uniformemente variado sob a ação exclusiva da aceleração da gravidade, pela Equação (2). Como o tempo para esse o movimento na vertical é o mesmo para o movimento na vertical, devido ao princípio de simultaneidade podemos escrever

$$y = \frac{10(4)^2}{2} = 80\text{m}$$

Sendo assim para esse exemplo, aplicando os princípios descritos o objeto leva 4 segundos para tocar o solo distante 80 m, na vertical, de onde foi abandonado.

2.2 Lançamento oblíquo no vácuo

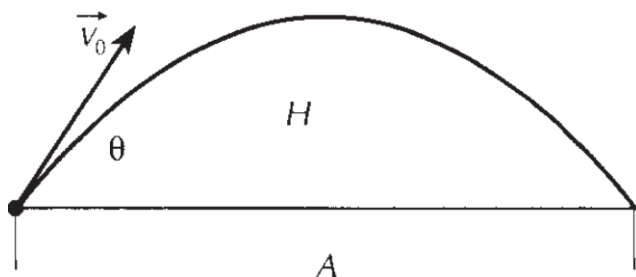
Lançamento oblíquo no vácuo é um movimento composto, bidimensional, sendo na direção vertical um movimento uniformemente variado com a presença da gravidade e na horizontal um movimento uniforme com velocidade constante.

Considere um corpo sendo lançado com velocidade v_0 numa direção que forma um ângulo θ com a horizontal. Desprezando a resistência do ar nessa situação, a aceleração do corpo é dada unicamente pela ação da gravidade na vertical e a trajetória descrita (isso será provado mais adiante, no tópico relativo à parábola de segurança) em relação à terra, é uma parábola.

A distância horizontal que o corpo percorre desde o lançamento até o instante que retorna ao nível horizontal do lançamento é o alcance (A) e o máximo deslocamento do móvel na direção vertical chamamos de altura máxima (H) do lançamento como mostra a Figura 5 abaixo.

Figura 5 – Velocidade formando um ângulo θ com a horizontal

FONTE: Ramalho, Nicolau e Toledo (2005)

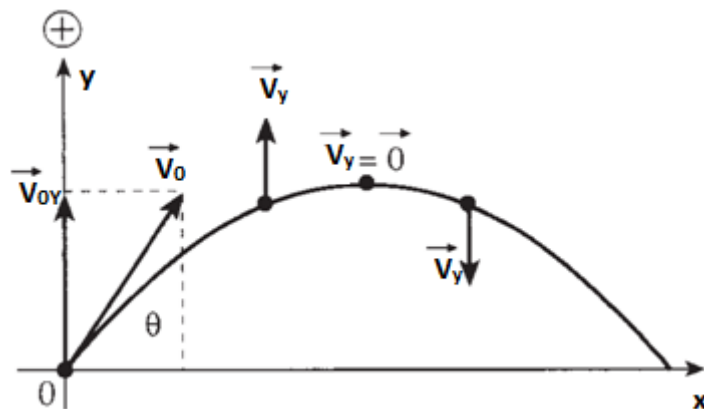


O movimento desse corpo é o resultado da composição de dois movimentos: um movimento vertical uniformemente variado (que é um movimento de lançamento vertical e em seguida um movimento de queda livre) cuja aceleração é a da gravidade, e um movimento horizontal uniforme, sendo que na horizontal não há

aceleração e o corpo se movimenta por inércia, esses movimentos são simultâneos e independentes.

Figura 6- Velocidade nula no ponto mais alto da trajetória

FONTE: Ramalho, Nicolau e Toledo (2005)



Analisemos separadamente esses movimentos simultâneos, inicialmente o movimento na vertical, ou seja, o movimento uniformemente variado.

Considere, na figura 6, o eixo y com origem no ponto de lançamento e orientado para cima. A aceleração escalar do movimento vertical será $\alpha = -g$, o sinal é negativo porque está no sentido contrário do tido como positivo, em que g é a aceleração da gravidade.

Se projetarmos a velocidade de lançamento v_0 na direção do eixo y obteremos a velocidade inicial v_{0y} , cujo módulo, decompondo a velocidade no eixo y da Figura 6, é dado por:

$$\vec{v}_{0y} = \vec{v}_0 \cdot \text{sen}\theta \quad (4)$$

Sob a ação da gravidade, o módulo da velocidade vertical v_y diminui à medida que o corpo sobe, anula-se no ponto mais alto e aumenta à medida que o corpo desce.

Como o movimento é uniformemente variado o seu movimento, segundo Resnick (1992) é descrito pelas seguintes equações:

$$y = v_{0y} \cdot t + \frac{\alpha \cdot t^2}{2} \quad (5)$$

que é a equação da posição em relação ao tempo no eixo y

$$v_y = v_{0y} + \alpha t \quad (6)$$

que é a velocidade no eixo y em relação ao tempo.

$$v_y^2 = v_{0y}^2 + 2\alpha y \quad (7)$$

que é conhecida com Equação de Torricelli.

Nessas funções, como a trajetória foi orientada para cima, a aceleração escalar é $\alpha = -g$. Para calcularmos a altura máxima do lançamento, considere que no ponto mais alto da trajetória teremos $y = H$ e $v_y = 0$ e na Equação de Torricelli (7), podemos escrever

$$v_y^2 = v_{0y}^2 + 2\alpha y$$

substituindo os valores temos

$$0 = v_{0y}^2 + 2 \cdot (-g)H$$

podemos escrever

$$2gH = v_{0y}^2$$

isolando H

$$H = \frac{v_{0y}^2}{2g}$$

mas da projeção da velocidade no eixo y

$$v_{0y} = v_0 \sin\theta$$

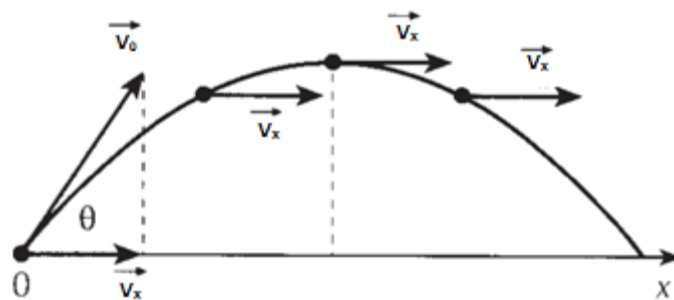
logo

$$H = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2\theta}{2g} \quad (8)$$

Para o movimento na horizontal, considere o eixo x com a origem no ponto de lançamento e orientado no sentido da velocidade horizontal v_x , dada pela projeção sobre esse eixo da velocidade de lançamento v_0 como mostra a figura 7.

Figura 7 – Velocidade constante na direção horizontal

FONTE: Ramalho, Nicolau e Toledo (2005)



o módulo da velocidade horizontal v_x é dado por

$$v_x = v_0 \cos \theta$$

como não há aceleração na horizontal a velocidade nessa direção é constante é constante, assim, a função horária do movimento horizontal é a Equação (1) durante esse tempo, o corpo avança horizontalmente a distancia A que é o alcance; assim $x = A$. Como, da Equação (1)

$$X = v_0 \cos \theta \cdot t$$

mas como

$$t = \frac{2v_0 \cdot \sin \theta}{g}$$

podemos escrever:

$$A = v_0 \cdot \cos \theta \cdot \frac{2v_0 \cdot \sin \theta}{g}$$

como

$$2\text{sen}\theta \cdot \text{cos}\theta = \text{sen}2\theta$$

teremos

$$A = \frac{v_0^2 \text{sen}2\theta}{g} \quad (9)$$

a Equação (9) é a relação que descreve o alcance máximo.

Teremos o alcance máximo quando o termo variável θ na relação acima for máximo. Tendo em vista que v_0 e g são constantes e sabendo que o valor máximo de

$$\text{sen}2\theta = 1 = \text{sen}90^\circ$$

Dessa forma teremos $\theta = 45^\circ$ para o alcance máximo. Concluimos assim que o alcance máximo será obtido quando o ângulo de lançamento for igual a 45° .

Uma relação interessante entre o alcance máximo e a altura máxima pode ser obtida substituindo θ por 45° , nas respectivas fórmulas da seguinte maneira:

$$A_{\text{máx}} = \frac{v_0^2 \text{sen}2\theta}{g}$$

substituindo o valor de 45° no ângulo teremos

$$\frac{v_0^2 \text{sen}(2 \cdot 45^\circ)}{g} = \frac{v_0^2}{g} \quad (10)$$

agora com a equação da altura máxima

$$H = \frac{v_0^2 \cdot \text{sen}^2\theta}{2g}$$

substituindo também o valor de 45° no ângulo teremos

$$\frac{v_0^2 \cdot \text{sen}^2 45^\circ}{2g} = \frac{v_0^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2g}$$

organizando a relação resultante teremos:

$$H = \frac{v_0^2}{4g} \quad (11)$$

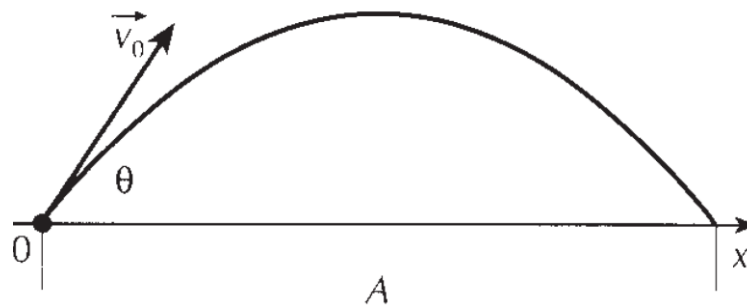
comparando Equação (10) com equação (11) teremos

$$A_{\text{máx}} = 4H \quad (12)$$

Assim quando o ângulo de lançamento de 45° , o alcance máximo é quatro vezes maior que a altura máxima do lançamento.

Figura 8 – Alcance máximo a um ângulo de 45°

FONTE: Ramalho, Nicolau e Toledo (2005)

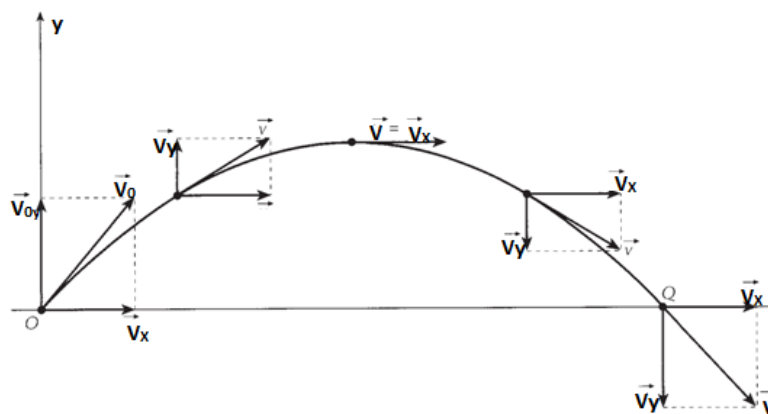


A velocidade v do movimento resultante do projétil é sempre dada pela vetorial dos vetores componentes v_x e v_y .

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y \quad (13).$$

Figura 9 – Velocidade tangente à trajetória

FONTE: Ramalho, Nicolau e Toledo (2005)



Da Figura 9 notemos que a velocidade \vec{v} é sempre tangente à trajetória. No ponto mais alto da trajetória, tem-se \vec{v}_y com módulo nulo e, portanto, $\vec{v} = \vec{v}_x$, assim, nesse ponto a velocidade \vec{v} tem módulo mínimo.

Ao retornar ao nível horizontal de lançamento, o projétil apresenta velocidade \vec{v} , cujo módulo é igual ao módulo da velocidade de lançamento \vec{v}_0 . Isso equivale a dizer que a velocidade escalar v do corpo, no instante de retorno ao solo, é igual à velocidade escalar \vec{v}_0 com que foi lançado a partir do solo.

2.3 Trajetória como uma Parábola

A trajetória descrita por um projétil ao ser lançado sob um ângulo θ em relação à horizontal, velocidade inicial v_0 em um plano cartesiano de abscissa e ordenada respectivamente iguais a x e y e origem no ponto de lançamento, desconsiderando ainda qualquer tipo de resistência do ar é dada pela seguinte equação (que será demonstrado no tópico relativo à parábola de segurança)

$$y = \operatorname{tg}\theta x - \frac{g}{2V_0^2 \cos^2 \theta} x^2 \quad (14)$$

Se fizermos

$$\frac{g}{2V_0^2 \cos^2 \theta} = a$$

$$\operatorname{tg} \theta = b$$

e

$$y = f(x)$$

teremos:

$$f(x) = b \cdot x - ax^2$$

ou

$$f(x) = -ax^2 + b \cdot x \quad (15)$$

A Equação 15 é uma função do segundo grau cujo gráfico é uma parábola com concavidade voltada para baixo, essa parábola é justamente a trajetória

descrita por um projétil lançado obliquamente nas condições apresentadas inicialmente.

3 METODOLOGIA

3.1 Aplicações da teoria às questões

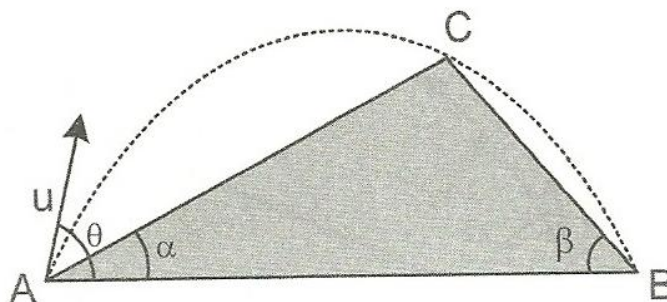
No capítulo anterior aplicamos a teoria do lançamento oblíquo a questões simples, para exemplificar o que estava sendo mostrado. No presente tópico aplicaremos a mesma teoria a questões mais elaboradas.

3.1.1 Saltando um triângulo

Considere o triângulo ABC mostrado na figura 10, cujos ângulos das bases valem α e β e que ele está localizado num plano horizontal. Admitamos θ o ângulo segundo o qual deve ser lançado um projétil a partir do vértice A a fim de que sua trajetória passe pelo vértice C e atinja o solo no ponto B. O objetivo desse exemplo será encontrar uma relação entre $\tan\theta$ e os ângulos das bases desse triângulo.

Figura 10 – Trajetória do projétil sobre o triângulo

FONTE: Brito (2010)

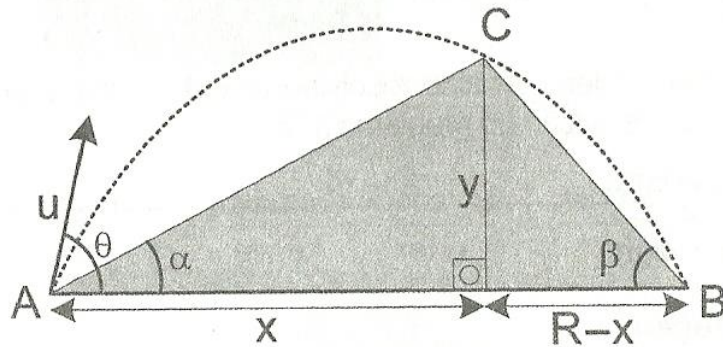


Nessas condições, o alcance horizontal R atingido pelo projétil vale:

$$AB = \frac{v^2}{g} \cdot 2 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta \quad (16)$$

Figura 11 – Alcance do projétil em relação ao triângulo

FONTE: Brito (2010)



do triângulo, temos que:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{y}{x} + \frac{y}{R-x} = \frac{y(R-x) + yx}{x(R-x)}$$

então

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{y \cdot R}{x(R-x)} \quad (17)$$

a Equação (14) descreve trajetória parabólica seguida pelo projétil.

$$y = \operatorname{tg}\theta \cdot x - \frac{g}{2 \cdot V_0^2 \cdot \cos^2 \theta} \cdot x^2$$

assim, podemos escrever

$$y = \operatorname{tg}\theta \cdot x \left(1 - \frac{g \cdot x}{2 \cdot V_0^2 \cdot \cos^2 \theta \cdot \operatorname{tg}\theta} \right)$$

ainda

$$y = \operatorname{tg}\theta \cdot x \cdot \left(1 - \frac{x}{2 \frac{V_0^2}{g} \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta} \right)$$

da Equação (16) podemos escrever

$$y = \operatorname{tg}\theta \cdot x \cdot \left(1 - \frac{x}{2 \frac{v^2}{g} \operatorname{sen}\theta \cdot \operatorname{cos}\theta}\right) = \operatorname{tg}\theta \cdot x \left(1 - \frac{x}{R}\right) = \operatorname{tg}\theta \cdot \frac{x(R-x)}{R}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{R \cdot y}{x(R-x)} \quad (18)$$

comparando Equação (16) e Equação (18) teremos

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$$

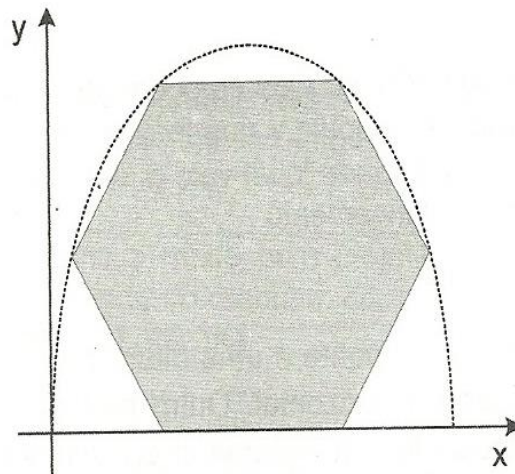
dessa forma temos uma relação entre a tangente do ângulo de disparo θ e os ângulos das bases, nas condições indicadas

3.1.2 Saltando um prisma hexagonal

Considere agora uma situação semelhante à anterior, mas agora com uma figura diferente. A Figura 12 mostra a secção transversal de um prisma reto de base hexagonal regular deitado sobre um solo horizontal, nessa situação hipotética, imagine que um projétil é lançado a partir do solo e descreve uma trajetória parabólica que tangencia quatro dos seis vértices da secção transversal hexagonal de lado c . Admitamos que a gravidade local vale g . Inicialmente teremos como objetivo encontrar, nas condições apresentadas, o valor numérico para a $\operatorname{tg}\alpha$ em que α é o ângulo de disparo do projétil.

Figura 12 – Trajetória em relação ao hexágono

FONTE: Brito (2010)



Analise o alcance horizontal atingido pelo projétil. Como dito, a partícula é lançada da origem O com velocidade u formando um ângulo α com a horizontal. Considere que a partícula atinja o solo no ponto K , após ter raspado os quatro vértices superiores F, E, D, C do hexágono regular $ABCDEF$ de lado c .

Considere também

$$c = 2a$$

Do vértice F descemos um segmento de reta vertical FL .

Seja

$$OL = h$$

$$AL = 2a \cdot \cos 60^\circ = a$$

$$FL = 2a \cdot \sin 60^\circ = a\sqrt{3}$$

e

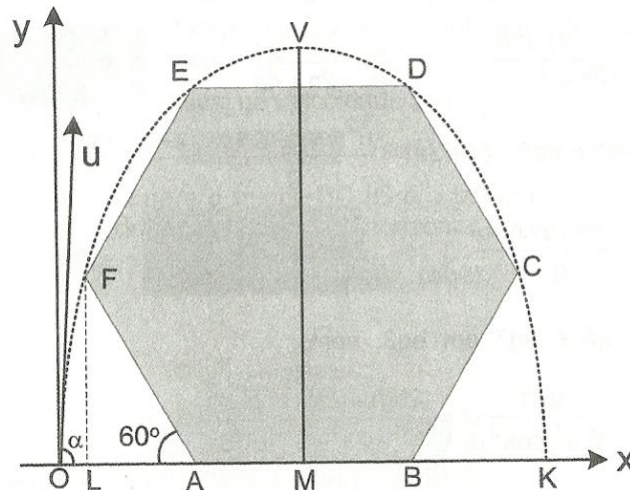
$$EA = 2FL = 2a\sqrt{3}$$

As coordenadas dos vértices F e E são $(h, a\sqrt{3})$ e $(h + a, 2a\sqrt{3})$ respectivamente. A equação da trajetória parabólica é dada pela Equação (14)

$$y = \operatorname{tg}\alpha \cdot x - \frac{g}{2 \cdot u^2 \cdot \cos^2 \alpha} \cdot x^2$$

Figura 13 – Relações geométricas do lançamento

FONTE: Brito (2010)



A trajetória parabólica (14) passa pelo ponto E $(h + a, 2 \cdot a \cdot \sqrt{3})$:

$$2 \cdot a \cdot \sqrt{3} = \operatorname{tg} \alpha \cdot (h + a) - \frac{g}{2 \cdot u^2 \cdot \cos^2 \alpha} \cdot (h + a)^2 \quad (19)$$

A trajetória parabólica (eq.14) passa também pelo ponto F $(h, a \cdot \sqrt{3})$:

$$a \cdot \sqrt{3} = \operatorname{tg} \alpha \cdot h - \frac{g}{2 \cdot u^2 \cdot \cos^2 \alpha} \cdot u^2 \quad (20)$$

Subtraindo a Equação (19) da Equação (20), teremos:

$$a \cdot \sqrt{3} = a \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{g(2 \cdot h \cdot a + a^2)}{2 \cdot u^2 \cdot \cos^2 \alpha}$$

assim

$$\sqrt{3} = \operatorname{tg} \alpha - \frac{g(2 \cdot h + a)}{2 \cdot u^2 \cdot \cos^2 \alpha} \quad (21)$$

o alcance OK no plano horizontal é dado por:

$$OK = 2u^2 \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{cos} \alpha / g \quad (22)$$

assim

$$h + a + a = \frac{u^2 \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{cos} \alpha}{g}$$

então

$$u^2 = \frac{g(h+2a)}{\operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{cos} \alpha} \quad (23)$$

substituindo a Equação (23) na Equação (21), teremos:

$$\sqrt{3} = \operatorname{tg} \alpha - \frac{g(2 \cdot h + a) \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{cos} \alpha}{2 \cdot g \cdot (h + 2 \cdot a) \operatorname{cos}^2 \alpha}$$

organizando os termos

$$\sqrt{3} = \operatorname{tg} \alpha - \frac{(2h + a) \operatorname{tg} \alpha}{(2h + 4a)}$$

então

$$\sqrt{3} = \frac{3a \cdot \operatorname{tg} \alpha}{(2h + 4a)}$$

e

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2(h+2a)}{a \cdot \sqrt{3}} \quad (24)$$

das Equações (23) e (24) teremos

$$(h + 2a) = \frac{u^2 \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{cos} \alpha}{g} = \frac{a \cdot \sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} \alpha}{g}$$

assim

$$a \cdot \sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{2u^2 \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{cos} \alpha}{g}$$

logo

$$u^2 \cdot \operatorname{cos}^2 \alpha = \frac{a \cdot g \cdot \sqrt{3}}{2} \quad (25)$$

substituindo Equação (24) e Equação (25) na Equação (20), teremos:

$$a \cdot \sqrt{3} = h \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2 \cdot u^2 \cdot \cos^2 \alpha} \cdot h^2 = \frac{2h(h+2a)}{a\sqrt{3}} - \frac{gh^2}{a\sqrt{3} \cdot g}$$

$$3a^2 = h^2 + 4ah - 3a^2 = 0$$

então

$$h = \frac{-4a + \sqrt{16a^2 + 12a^2}}{2}$$

$$h = -2a + a\sqrt{7} \quad (26)$$

substituindo a Equação (26) na Equação (24), vem:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2(h+2a)}{a\sqrt{3}}$$

e finalmente encontramos

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$$

conhecendo a $\operatorname{tg} \alpha$, podemos fazer uso do teorema de Pitágoras no triângulo retângulo para obter $\operatorname{sen} \alpha$ e $\operatorname{cos} \alpha$:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{31}}$$

e

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{31}} \quad (27)$$

Assim o alcance vale:

$$OK = 2u^2 \cdot \frac{\operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{cos} \alpha}{g}$$

substituindo os valores da Equação (27) na relação acima teremos:

$$2 \cdot \frac{31 \cdot a \cdot g}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{g} \cdot \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{31}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{31}} = 2 \cdot a \cdot \sqrt{7} = c\sqrt{7}$$

logo o alcance máximo procurado é:

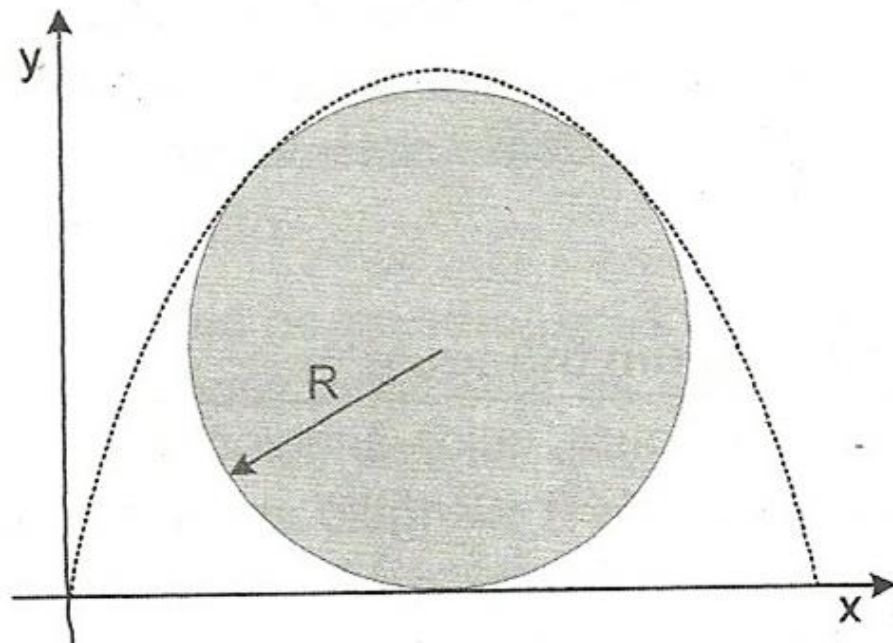
$$c\sqrt{7}.$$

3.1.3. Saltando a secção de um cilindro

Considere que um gafanhoto deseja saltar por cima de um tronco de árvore cilíndrica que se encontra apoiada no solo. Considere também que a gravidade local vale g e o raio da secção transversal circular vale R . O objetivo desse exemplo será encontrar a velocidade mínima para o salto do gafanhoto que permite galgar o tronco da árvore.

Figura 14 - Trajetória em relações à secção

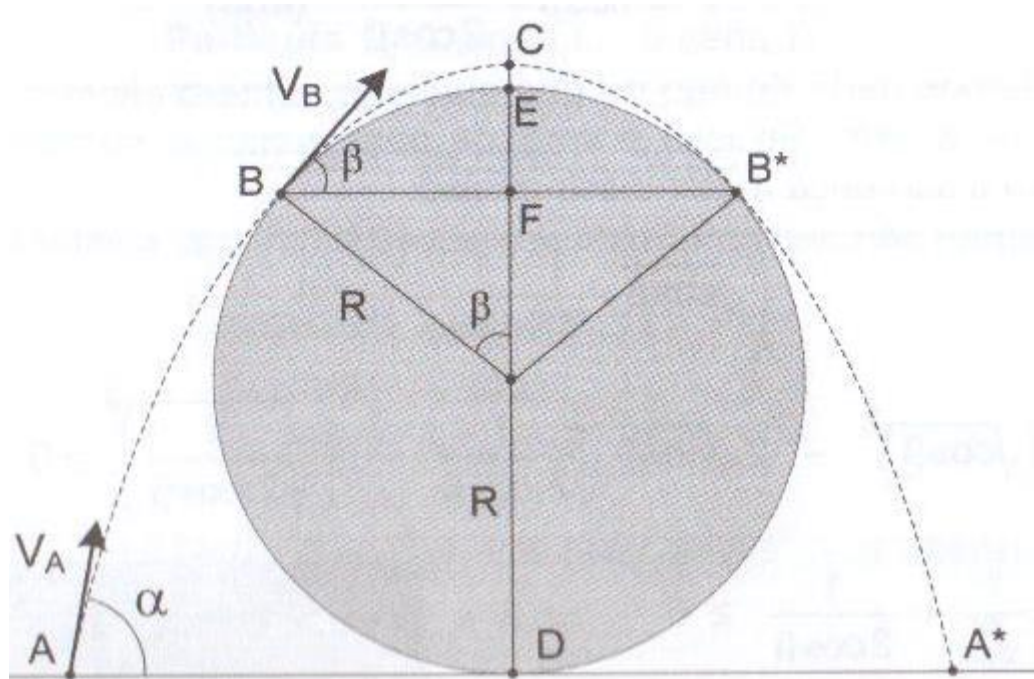
FONTE: Brito (2010)



Na situação hipotética apresentada, a trajetória do gafanhoto é uma parábola que tangencia o tronco em dois pontos B e B^* simétricos em relação ao eixo vertical que passa pelo centro da secção circular. Até agora não se sabe nada sobre esses dois pontos B e B^* . Eles podem ou não coincidir com o ponto E no topo do tronco.

Figura 15 Pontos e ângulos na seção relativos na trajetória.

FONTE: Brito (2010)



O gafanhoto salta do ponto A com velocidade inicial v_A formando um ângulo α com a horizontal. Nos pontos de tangência B e B*, o gafanhoto tem velocidade V_B formando um ângulo β com a horizontal.

No ponto B, a componente vertical da velocidade vale:

$$v_B \text{sen} \beta = gt_2 \quad (28)$$

Em que t_2 é o tempo de vôo para o trecho BC (C é o ponto mais alto da trajetória parabólica). O correspondente deslocamento horizontal BF vale:

$$v_B \cdot \text{cos} \beta \cdot t_2 = R \text{sen} \beta \quad (29)$$

Multiplicando a Equação (28) pela Equação (29), obteremos:

$$v_B^2 = \frac{g \cdot R}{\text{cos} \beta} \quad (30)$$

Da Equação (7), para a componente vertical do movimento uniformemente variado, do ponto A ao ponto B, teremos:

$$v_B^2 \text{sen}^2 \beta = v_A^2 \text{sen}^2 \alpha - 2 \cdot g \cdot R \cdot (1 + \text{cos} \beta)$$

$$= v_A^2 \sin^2 \alpha = v_B^2 \sin^2 \beta + 2 \cdot g \cdot R \cdot (1 + \cos \beta) \quad (31)$$

Como a componente horizontal da velocidade permanece constante, podemos escrever:

$$(v_A \cdot \cos \alpha)^2 = (v_B \cdot \cos \beta)^2$$

assim

$$v_A^2 (1 - \sin^2 \alpha) = v_B^2 (1 - \sin^2 \beta) \quad (32)$$

somando a Equação (31) à Equação (32), teremos:

$$v_A^2 = v_B^2 + 2 \cdot g \cdot R \cdot (1 + \cos \beta) \quad (33)$$

substituindo a Equação (30) na Equação (33), vem:

$$v_A^2 = \frac{g \cdot R}{\cos \beta} + 2 \cdot g \cdot R \cdot (1 + \cos \beta)$$

assim

$$v_A^2 = 2 \cdot R \cdot g \cdot \left(1 + \cos \beta + \frac{1}{2 \cos \beta} \right) \quad (34)$$

para se determinar o valor mínimo da velocidade na Equação (34), devemos determinar o valor mínimo da expressão trigonométrica:

$$\cos \beta + \frac{1}{2 \cos \beta} \quad (35)$$

Para isso, podemos partir do fato de que qualquer número elevado ao quadrado é maior ou igual a zero. Se isso é verdade para qualquer número, certamente será verdadeira a sentença matemática abaixo:

$$\left(\sqrt{\cos \beta} - \sqrt{\frac{1}{2 \cos \beta}} \right)^2 \geq 0$$

$$\sqrt{\cos \beta}^2 - 2 \cdot \sqrt{\cos \beta} \cdot \sqrt{\frac{1}{2 \cos \beta}} + \sqrt{\frac{1}{2 \cos \beta}}^2 \geq 0$$

$$\cos \beta - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2 \cos \beta} \geq 0$$

assim

$$\cos\beta + \frac{1}{2\cos\beta} \geq \sqrt{2}$$

Assim, vemos que o valor mínimo da expressão trigonométrica mostrada na Equação (9) vale $\sqrt{2}$, mínimo esse que é atingido exatamente no caso em que os termos são tais que

$$\cos\beta = \frac{1}{2\cos\beta}$$

logo

$$\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

e

$$\beta = 45^\circ$$

Substituindo o valor $\beta = 45^\circ$ na Equação (34), encontramos:

$$V_{\text{Amin}} = \sqrt{2 \cdot \text{R. g.} (1 + \sqrt{2})}$$

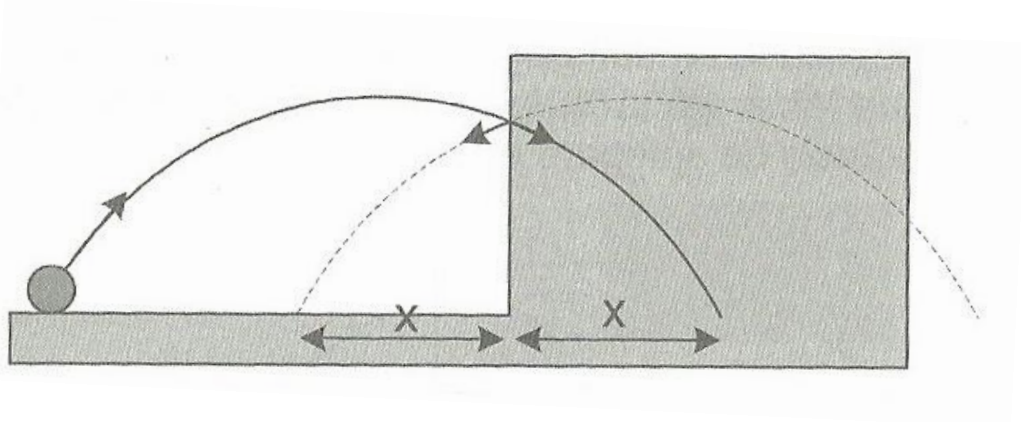
Que é a velocidade mínima a qual se propôs ser encontrada no exemplo.

3.2 Lei da reflexão dos choques

Considere que uma bola elástica tenha sido lançada obliquamente descrevendo uma trajetória parabólica quando, colide elasticamente com um anteparo fixo.

Figura 16 – Trajetória virtual

FONTE: Brito (2010)



Quando a bola colide com essa superfície lisa, troca com esta um par de forças impulsivas F que age na direção normal n , levando a uma variação da quantidade de movimento apenas na direção normal. A ausência de forças impulsivas na direção tangencial t garante que a quantidade de movimento do sistema deve se conservar nessa direção.

Assim, pela conservação da quantidade de movimento na direção tangencial, segundo Brito (2010), podemos escrever:

$$m \cdot (v_i)_t = m \cdot (v_f)_t$$

$$m \cdot v_i \cdot \cos\alpha_i = m \cdot v_f \cdot \cos\alpha_f \quad (36)$$

Em colisões bidimensionais, o coeficiente de restituição “ e ” relaciona a velocidade relativa entre o corpo e o anteparo, antes e após a colisão, tornando-se apenas as componentes na direção normal n . Assim, pela definição de coeficiente de restituição dada por Brito (2010) teremos:

$$e = \frac{|V_{\text{rel-após}}|_n}{|V_{\text{rel-antes}}|_n} = \frac{(v_f)_n}{(v_i)_n}$$

assim

$$e = \frac{v_f \sin\alpha_f}{v_i \sin\alpha_i} \quad (37)$$

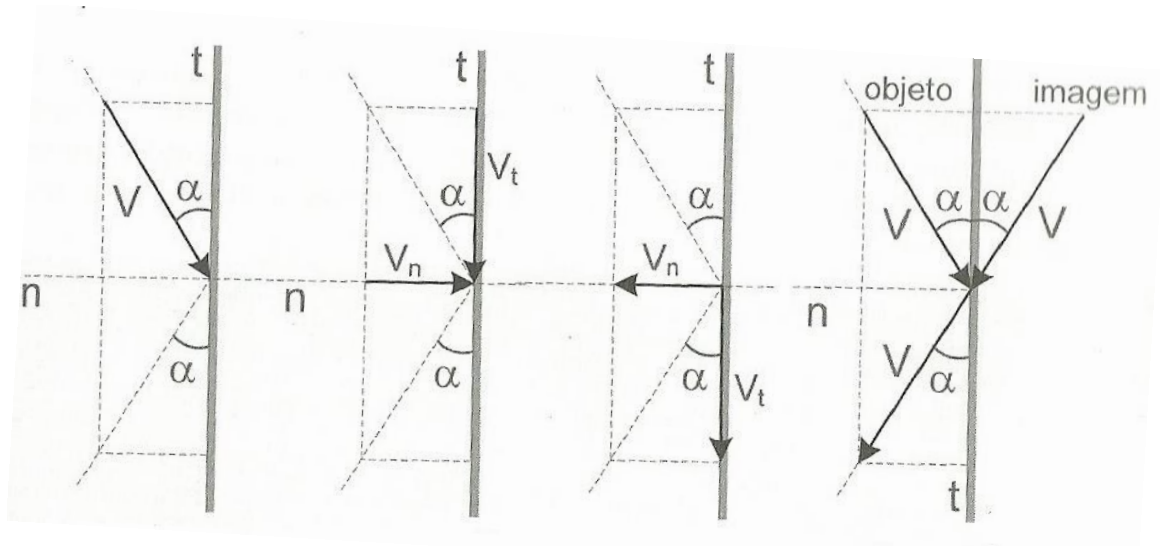
isolando $\frac{v_f}{v_i}$ em (36) e substituindo em (37) chegaremos a

$$\operatorname{tg}\alpha_F = e \cdot \operatorname{tg}\alpha_i \quad (38)$$

No caso da colisão elástica, temos $e = 1$, o que implica $\alpha_i = \alpha_F$, isto é, ângulo de incidência igual ao ângulo de reflexão. Consoante a lição - Brito (2010) era exatamente dessa forma que Isaac Newton demonstrava a lei da reflexão da luz, adotando o seu modelo, corpuscular para a luz segundo o qual ela era composta por um feixe de partículas. A reflexão da luz, segundo essa modelo corpuscular da luz, não passa de uma mera colisão elástica entre essas partículas.

Figura 17 – Ângulos de reflexão

FONTE: Brito (2010)

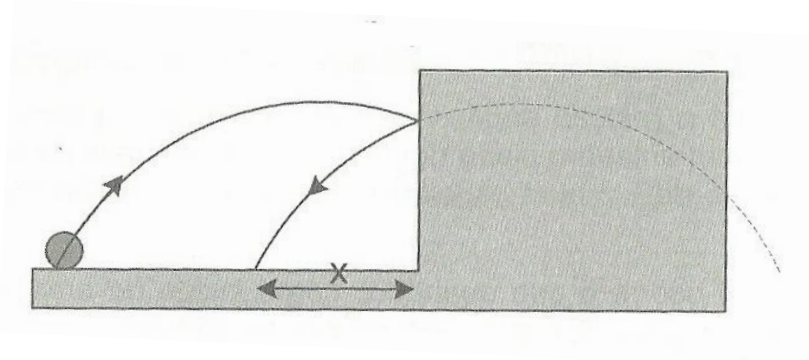


Dessa forma ocorre que quando o corpo colide com o anteparo fixo com velocidade inicial v , sua velocidade tangencial v_t se conserva em direção, sentido e módulo, durante a colisão, ao passo que sua componente normal v_n apenas inverte o seu sentido como - podemos ver nas figuras abaixo - sem mudança em seu modelo, visto que se trata de uma colisão elástica ($e = 1$)

Assim, os vetores que representam a velocidade do corpo antes e depois da colisão elástica são simétricos em relação à superfície plana do anteparo fixo, como se uma fosse a imagem do outro conjugada por um espelho plano.

Figura 18 – Trajetória real e virtual

FONTE: Brito (2010)



Dessa forma, para determinar a trajetória que o corpo seguirá, após colidir elasticamente com o anteparo fixo, é suficiente rebater o trecho posterior da trajetória original em torno do anteparo.

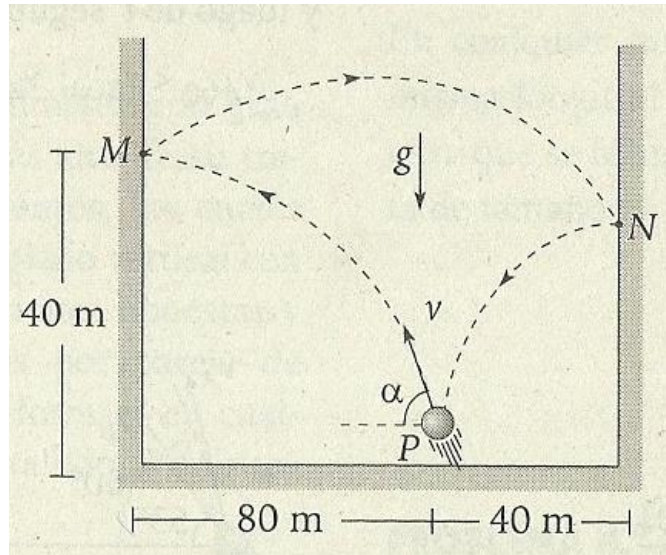
Esse rebatimento da trajetória é uma consequência do fato de que, quando a bola colide elasticamente com o anteparo fixo, sua velocidade é meramente rebatida em relação ao anteparo.

Com esse entendimento, considere a seguinte questão proposta no livro “Una visión analítica Del movimiento Vol.1” da editora peruana Lumbreras:

Admita a trajetória descrita por um objeto, como mostra a figura 19, lançado obliquamente da posição P e também que os impactos com as paredes em M e N são elásticos, o objetivo desse exemplo é determinar o ângulo de lançamento α com a metodologia apresentada nesse tópico.

Figura 19 – Trajetória da esfera

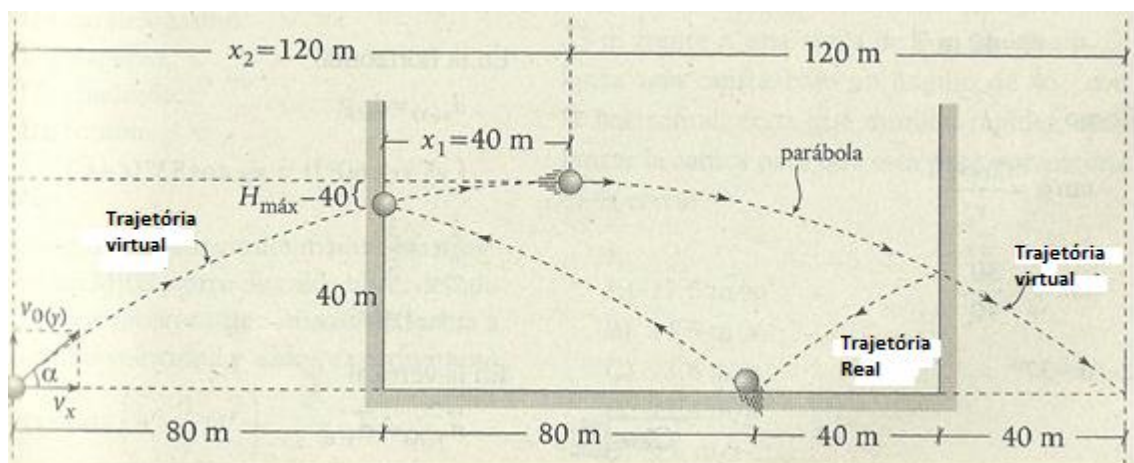
FONTE: Lumbreras (2010)



Aplicando a lei de reflexão do choques, apresentada anteriormente, teremos trajetórias virtuais simétricas

Figura 20 – Trajetória virtual da esfera

FONTE: Lumbreras (2010)



A equação da parábola, é dada por $y = k \cdot x^2$, segundo lezzi (2002),
Logo, da figura

$$(H_{\max} - 40) = k(40)^2 \quad (39)$$

$$H_{\max} = k(120)^2 \quad (40)$$

dividindo a Equação (38) pela Equação (39) chegamos

$$\frac{H_{\max} - 40}{H_{\max}} = \frac{1}{9}$$

resolvendo a equação para H_{\max}

$$H_{\max} = 45\text{m}$$

$$H_{\max} = \frac{v_{0y}^2}{g}$$

$$v_{0y} = 30\text{m/s}$$

na horizontal

$$d_x = v_x \cdot t$$

$$240 = v_x \cdot 2 \cdot \frac{v_{0y}}{g} = 2 \cdot v_x \cdot \frac{30}{10}$$

$$= v_x = 40\text{m/s}$$

como

$$\text{tg}\alpha = \frac{v_{0y}}{v_x}$$

então

$$\text{tg}\alpha = \frac{30}{40}$$

logo

$$\alpha = 37^\circ$$

4 A PARÁBOLA DE SEGURANÇA

A parábola de segurança é uma ferramenta poderosa e muito interessante que resolve, de forma simples e elegante, problemas de lançamentos oblíquo mais elaborados ou até mesmo problemas de máximos e mínimos no que tange também a lançamentos de projéteis os quais seriam resolvidos de maneira muito mais trabalhosa, como muitos cálculos algébricos e até mesmo artifícios de cálculo diferencial, se de outra forma fossem resolvidos.

Os livros em geral trazem em seu bojo uma teoria bastante completa sobre o tema: lançamento oblíquo, conquanto insuficientes para resolver alguns problemas que são propostos em questões mais apuradas, como as de olimpíadas e em questões do livro russo: Problemas de física elementar – Saraeva assim como em outros como Kosel, Irodov.

A parábola de segurança é citada em livros universitários como Física 1 de Resnick, mas sua teoria detalha é dificilmente encontrada. Nesse capítulo serão apresentadas de maneira sucinta alguns pontos sobre o tema parábola de segurança abordados no livro Fundamentos de mecânica volume 1, Editora Vestseller, do professor Renato Brito Bastos Neto e em outras obras devidamente citadas.

4.1 Detalhando a parábola de segurança.

Considere um lançador de projéteis localizado na origem de um plano cartesiano, disparando projéteis com velocidade inicial v_0 constante, e sob diferentes ângulos de disparo φ A trajetória descrita pelo projétil será uma parábola Para cada ângulo φ com a horizontal, variando progressivamente no seguinte intervalo:

$$0^\circ < \varphi < 180^\circ$$

Se não considerarmos o atrito com o ar - que parte da origem, atinge uma altura máxima e retorna ao solo horizontal como mostra a Figura 21.

A trajetória parabólica de um projétil pode ser interpretada como a composição de dois movimentos perpendiculares mais simples, sendo um movimento retilíneo e uniforme na horizontal, uma vez que o projétil se move na

ausência de forças na direção horizontal e um movimento retilíneo uniformemente variado na direção vertical sob a ação exclusiva da força peso, a qual fornece à aceleração constante da gravidade $a = g$ considerada constante. A cinemática de cada um desses movimentos permite escrever, segundo Brito (2010), as suas respectivas funções horárias das posições em cada eixo:

$$x = V_0 \cdot \cos\varphi \cdot t \quad (41)$$

$$y = V_0 \cdot \sin\varphi \cdot t - \frac{gt^2}{2} \quad (42)$$

Com o primeiro propósito de determinar a equação da trajetória parabólica a qual descreve o projétil, devemos inicialmente conceber uma relação entre as coordenadas X e Y que não dependa do parâmetro t o qual designa o instante de tempo, para isso ele precisa ser eliminado das Equações (41) e (41), isolando t na Equação (42) e substituindo na Equação (42) teremos:

$$t = \frac{X}{V_0 \cdot \cos\varphi}$$

substituindo na Equação (42) teremos:

$$y = V_0 \cdot \sin\varphi \cdot \frac{X}{V_0 \cdot \cos\varphi} - \frac{g\left(\frac{X}{V_0 \cdot \cos\varphi}\right)^2}{2}$$

com um pouco de álgebra chegaremos a:

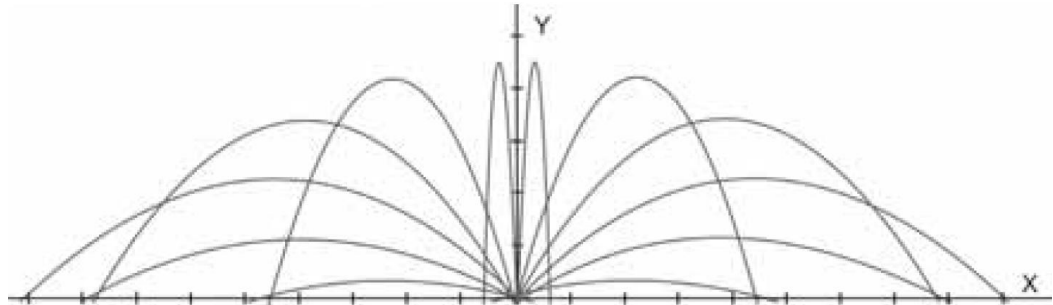
$$y = \operatorname{tg}\varphi X - \frac{g}{2V_0^2 \cos^2 \varphi} X^2$$

Dessa forma é demonstrada a equação da trajetória (14) como se afirmou no tópico 2.3.

A Equação (14) é a equação geral da trajetória descrita por um projétil lançado com velocidade inicial V_0 , formando um ângulo φ com a horizontal, num campo gravitacional uniforme g e que claramente mostra-se como uma equação de 2ª grau cujo gráfico é uma parábola no plano cartesiano

Figura 21 – As várias trajetórias possíveis para cada ângulo de lançamento

FONTE: Brito (2010)

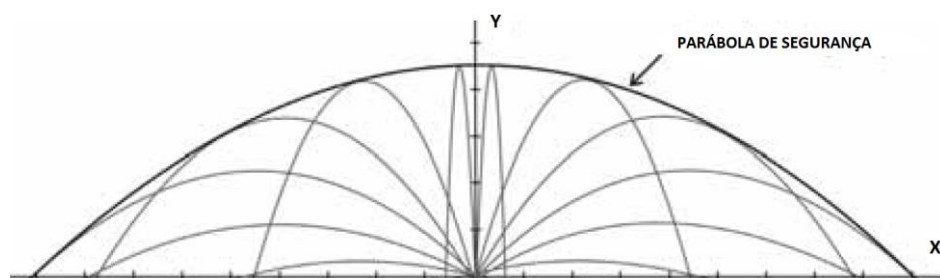


A Figura 21 mostra a família de trajetórias parabólicas descritas por projéteis os quais foram disparados da origem do sistema de coordenadas com velocidade de disparo v_0 constante sob cada um dos seguintes ângulos de disparo φ : $15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 85^\circ, 95^\circ, 105^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ$..

Efetuada uma sequência de disparos sob ângulos φ progressivamente maiores, variando no intervalo $0^\circ < \varphi < 180^\circ$, obteremos uma família de trajetórias parabólicas que têm, em comum, a velocidade de disparo v_0 , sendo, cada uma delas, descrita pela Equação (14)

Figura 22 – A envoltória

FONTE: Brito (2010)



Na Figura 21, Todas as trajetórias parabólicas de projéteis disparados com mesma velocidade inicial v_0 , mas sob ângulos de disparos variados, tangenciam internamente uma parábola envolvente, denominada parábola de segurança ou envoltória.

Essa família de parábolas, que têm em comum a mesma velocidade de disparo v_0 , de acordo com Brito (2010), é tangenciada por uma parábola envolvente, que é única para cada valor de v_0 , denominada “parábola de segurança”, como mostra a figura.

Figura 23 – Zona de segurança e zona de risco

FONTE: Brito (2010)



A Figura 23 mostra os pontos localizados na zona externa à parábola de segurança os quais não são alcançados pelos projéteis, quando disparados com a velocidade v_0 característica dessa parábola de segurança.

De acordo com Brito (2010) a expressão “parábola de segurança” advém do fato de que ela define o lugar geométrico dos pontos do plano XY os quais jamais serão atingidos pelo lançador, ao efetuar disparos com aquela velocidade v_0 característica daquela parábola de segurança. O conjunto de todos os pontos externos a essa parábola de segurança constituem a chamada zona de segurança

Para determinar a equação da parábola de segurança, considere inicialmente um lançador, situado na origem $(0,0)$ do plano cartesiano, lançando projéteis com velocidade de módulo v_0 constante, porém, sob ângulos que variam. Pretendemos inicialmente responder a seguinte pergunta:

Dado um ponto P qualquer, do plano cartesiano, localizado nas coordenadas (X_p, Y_p) , com qual ângulo a o lançador deverá efetuar o disparo a fim de atingir aquele ponto?

Para determinar o ângulo ϕ , vamos impor que a trajetória do projétil (dada pela Equação (14) efetivamente passe pelo ponto P. Para isso, fazemos

$$X = X_p$$

e

$$Y = Y_p$$

na Equação (14) teremos:

$$Y_p = \operatorname{tg}\varphi \cdot X_p - \frac{g}{2V_0^2 \cos^2\varphi} \cdot X_p^2$$

de acordo com lezzi (2002)

$$\frac{1}{\cos^2\varphi} = \sec^2\varphi = 1 + \operatorname{tg}^2\varphi$$

$$Y_p = \operatorname{tg}\varphi \cdot x_p - \frac{g \cdot x_p^2}{2V_0^2} \cdot (1 + \operatorname{tg}^2\varphi)$$

com um pouco de álgebra, encontramos

$$\operatorname{tg}\varphi^2 - \left(\frac{2V_0^2}{gx_p}\right) \operatorname{tg}\varphi + \left(1 + \frac{2V_0^2 Y_p}{gx_p}\right) = 0 \quad (43)$$

Claramente se percebe que essa expressão é uma equação do 2^a grau em que a variável é $\operatorname{tg}\varphi$ a qual vai fornecer o ângulo de disparo φ para os quais o projétil, realmente, passa pelo ponto P. No entanto, dependendo das coordenadas (X_p, Y_p) desse ponto, de acordo com Brito (2010) três situações possíveis podem ocorrer:

Considere inicialmente $\Delta > 0$ nessa situação a equação do segundo grau terá duas raízes reais e distintas e, no que tange à parábola de segurança, fornecerá ângulos φ diferentes para os quais os ponto (X_p, Y_p) será atingido pelo projétil.

Em um segundo caso, considere $\Delta = 0$, nessa situação, a equação fornecerá um único ângulo φ de disparo sob o qual o ponto (X_p, Y_p) será atingido pelo projétil. Graficamente, o ponto P está sobre a parábola de segurança.

Ademais, uma terceira situação, considere $\Delta < 0$, nessa terceira situação a equação não possui solução em números reais. Em outras palavras, não há ângulo φ que faça a trajetória do projétil passar pelo ponto (X_p, Y_p) . O motivo é que a velocidade do lançador está pequena demais para atingir esse ponto. Para atingi-lo, será necessário aumentar a velocidade de disparo, isto é, trocar a parábola de segurança original por uma nova mais abrangente que contenha esse ponto P.

Graficamente, $\Delta < 0$ significa que o ponto P é externo à parábola de segurança, isto é, se encontra em sua zona de segurança.

O lugar geométrico dos pontos no plano cartesiano que são atingidos pelo projétil sob um ângulo exclusivo φ de disparo é chamado de parábola de segurança.

Em outras palavras a parábola de segurança é o lugar geométrico dos pontos (X_p, Y_p) que a equação do 2ª grau na variável $\tan \varphi$ a qual chegamos anteriormente apresenta apenas uma única solução.

Por conseguinte, com o intuito de chegarmos a esses pontos (X_p, Y_p) , devemos aplicar a condição $\Delta = 0$ na equação. Assim teríamos:

$$b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0$$

Ou

$$\left(\frac{2V_0^2}{gx_p}\right)^2 - 4\left(1 + \frac{2V_0^2 Y_p}{gx_p}\right) = 0$$

Resolvendo a equação para y_p teremos:

$$y_p = \frac{V_0^2}{2g} - \frac{g}{2V_0^2} \cdot x_p^2 \quad (44)$$

Esta é a equação da parábola de segurança, ou seja, uma envoltória de todo o conjunto de parábolas que têm em comum a mesma velocidade de lançamento v_0

Todos as coordenadas (X_p, Y_p) de todos os pontos que estão no limite de serem atingidos pelos projeteis com velocidade inicial v_0 constante a partir da origem do sistema cartesiano.

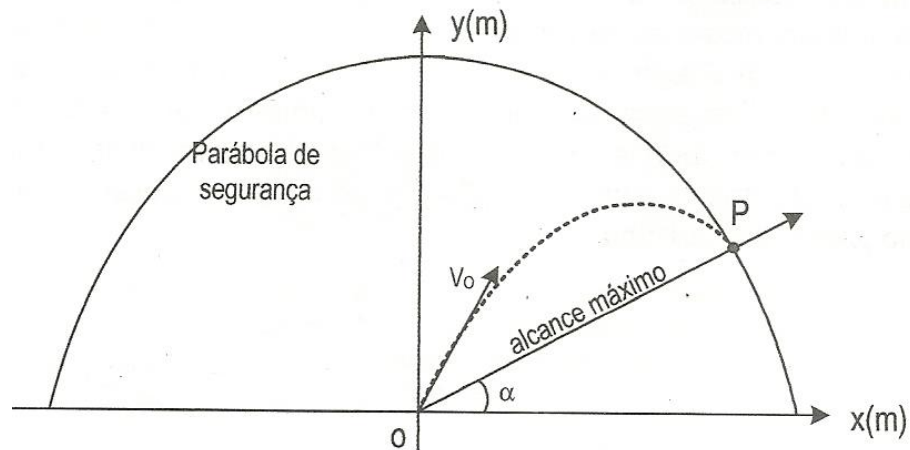
Os pontos que estão fora da parábola de segurança não estão ao alcance do lançador. Somente os pontos que estão dentro da envoltória ou no máximo sobre ela, serão atingidos.

Uma das várias alternativas de interpretar a equação da parábola de segurança é a dada por Brito (2010) seguinte:

Considere uma rampa de inclinação α que passa pela origem do sistema de coordenadas XY , como mostra a figura abaixo, qual o alcance máximo que esse lançador consegue atingir ao longo dessa rampa de inclinação α ? Em outras palavras, qual o ponto dessa rampa mais distante da origem que pode ser atingido por esse lançador? A resposta é o ponto P da envoltória, isto é, da parábola de segurança.

Figura 24 – Alcance máximo

FONTE: Brito (2010)



Da equação da parábola de segurança, de acordo com Brito (2010), pode-se chegar às duas propriedades as quais serão de muita valia mais a frente.

Propriedade1: A parábola de segurança de um lançador é o lugar geométrico dos pontos $P_1, P_2, P_3, \dots, P_N$ (Figura 25) de máximo alcance ao longo de

quaisquer rampas de inclinação $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_N$ que passem pela origem do sistema cartesiano.

Propriedade 2: A Parábola de segurança fornece os pontos P de máximo alcance de um lançador ao longo de qualquer reta AB do plano que toque a parábola de segurança em 1 ou 2 pontos. No caso em que a reta AB seja secante à parábola (toque em 2 pontos) Haverá dois pontos P_1 e P_2 de alcance máximo ao longo dessa reta, sendo um ao longo do sentido de A até B (P_1) e outro ponto (P_2) ao longo do sentido oposto de B até A, Figura 26, Em todo caso, note que, para uma mesma parábola de segurança, todos os lançamentos ocorrem a uma mesma velocidade de disparo V_0 , sendo alterada apenas a direção do disparo em cada lançamento.

Figura 25 – Alcance máximo para ângulos de lançamentos diferentes

FONTE: Brito (2010)

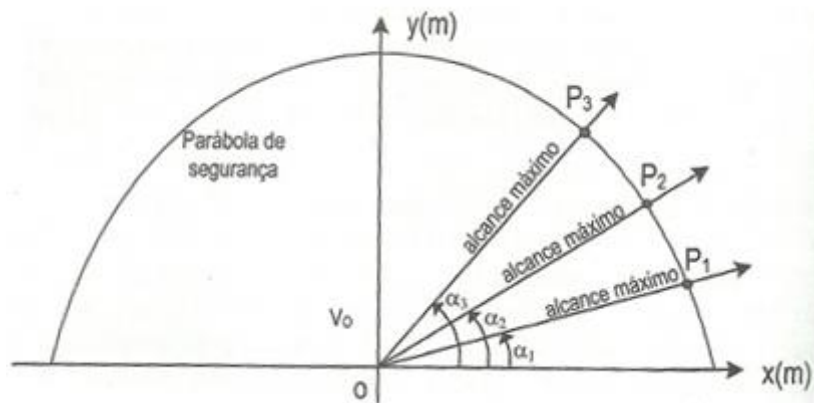
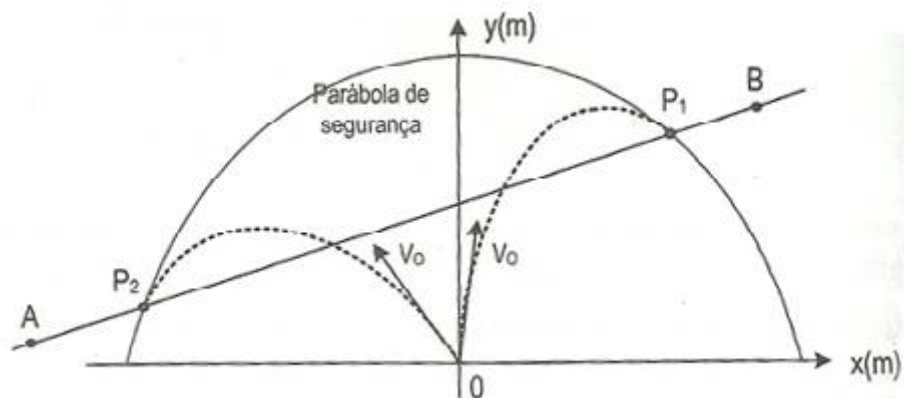


Figura 26 – Diferentes trajetória para velocidades sob ângulos distintos

FONTE: Brito (2010)



4.2 Aperfeiçoando o ângulo de disparo

Considere um plano com inclinação α em relação à horizontal e com origem no ponto (0,0) do plano cartesiano e um lançador nesse mesmo ponto.

Considere que o lançador dispare projeteis com velocidade V_0 constante, variando apenas o ângulo de disparo θ como mostra a Figura 27.

Pela propriedade 1 da parábola de segurança mostrada acima, o alcance máximo que esse lançador pode atingir, ao longo desse plano inclinado é dado pelo comprimento OP mostrado na figura, em que P é o ponto de interseção do plano inclinado com a parábola de segurança associada àquela velocidade V_0 daquele lançador.

Dessa forma para qual ângulo de disparo θ o atirador deve lançar o projétil a fim de atingir esse ponto P pertencente à parábola de segurança?

Para uma dada velocidade V_0 , a direção procurada, segundo Brito (2010), é a bissetriz do ângulo formado entre o segmento OP e o eixo vertical Y que passa pelo lançador.

O ângulo de disparo θ pode ser determinado de maneira simples examinando a Figura 27:

$$\alpha + 2\beta = 90^\circ \quad (45)$$

isolando β teremos:

$$\beta = \frac{90^\circ - \alpha}{2} = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

da Figura 27 notemos que:

$$\theta = \alpha + \beta$$

Analisando as duas relações acima chegamos a:

$$\theta = \frac{\alpha}{2} + 45$$

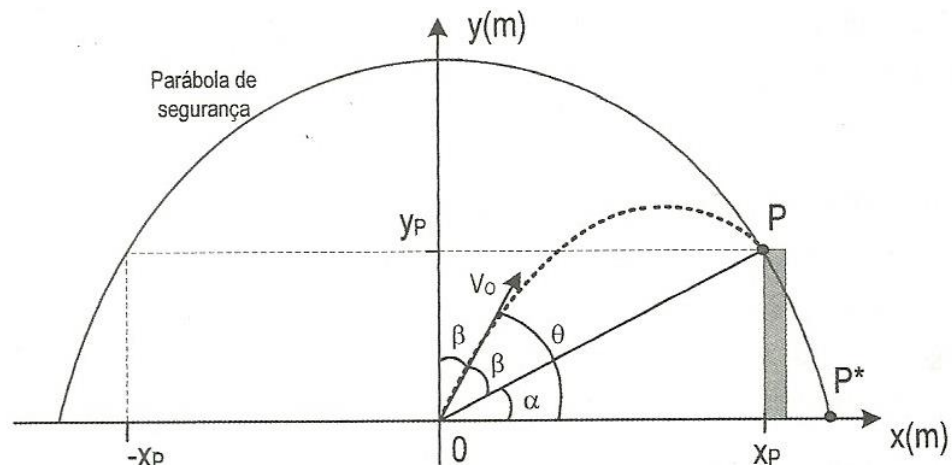
É interessante notar que para o caso de um “plano inclinado” de ângulo de inclinação $\alpha = 0$ com a horizontal, ou seja, não havendo inclinação teremos:

$$\theta = \frac{\alpha}{2} + 45^\circ = \frac{0}{2} + 45^\circ = 45^\circ$$

este é o alcance máximo ao longo de uma superfície horizontal.

Figura 27-Ângulo de disparo e de inclinação da rampa distintos

FONTE: Brito (2010)



4.3 Velocidade mínima de disparo para atingir um alvo.

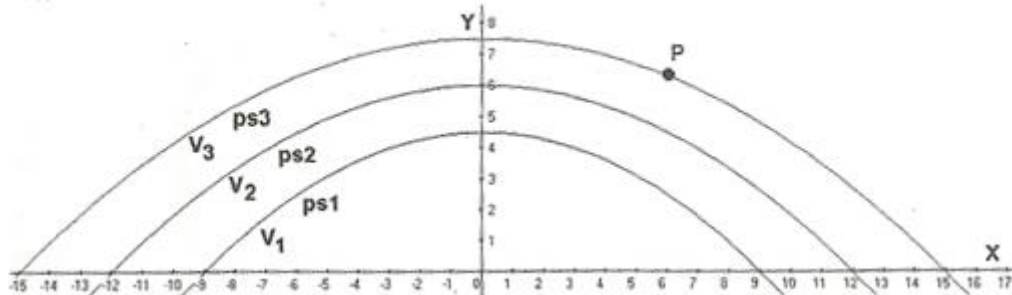
Do tópico anterior, podemos concluir que um lançador terá para cada velocidade de disparo uma parábola de segurança própria. Dessa maneira temos para cada velocidade v_0 tal que

$$V_0 < V_1 < V_2 < \dots < V_n$$

Teremos suas respectivas parábolas de segurança, e dependendo da velocidade de disparo, cada uma será mais abrangente que a outra. Lembrando que a parábola de segurança é a envoltória de todas as parábolas que podem ser obtidas no plano com uma certa velocidade constante de disparo fazendo variar apenas seu ângulo.

Figura 28 – Trajetórias para diferentes velocidades de lançamentos v_0

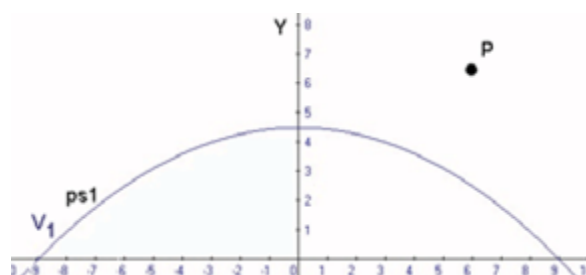
FONTE: Brito (2010)



Dessa forma, podemos concluir, Brito (2010), que quanto maior a velocidade de disparo da parábola de segurança, mais abrangente será ela. Nessa esteira, suponha que um lançador quisesse atingir o alvo representado pelo ponto P na figura. Dependendo da velocidade inicial de lançamento teremos várias parábolas que não conseguiriam alcançar tal meta, a exemplo da parábola de segurança P_1 de velocidade inicial V_1 mostrada na figura, em que se vê que o ponto P é externo – ou seja, para a velocidade inicial V_1 não existe ângulo de disparo que faça o projétil atingir o ponto P-, isso nos leva a crer que, para atingir seu objetivo, o lançador deve aumentar a velocidade de disparo conseqüentemente terá outra envoltória mais abrangente. Aumentando gradativamente a velocidade de disparo, iremos aumentar também, como foi dito, a abrangência da parábola de segurança de uma forma tal que podemos achar a velocidade mínima de disparo para que o ponto P seja atingido.

Figura 29 – Ponto P fora da zona de alcance

FONTE: Brito (2010)



Com esse raciocínio, de acordo com Renato Brito (2010), pode-se concluir que: a velocidade mínima v_0 de disparo que um lançador deve efetuar um disparo, a fim de atingir um dado ponto P do plano, é a velocidade v_0 associada à envoltória, ou seja: a parábola de segurança, que passa exatamente sobre o ponto planejado.

5 GENERALIZANDO AS EQUAÇÕES DO MOVIMENTO PARABÓLICO

No presente tópico, é apresentada uma generalização das equações do movimento parabólico se utilizado de métodos de simetria, consoante a obra Pierre Luciê (1971)

O movimento geral de um projétil, num campo gravitacional uniforme, de acordo com Luciê (1971) é regido pelas seguintes equações:

$$\vec{a} = \vec{g} = \text{constante} \quad (46)$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g} \cdot t \quad (47)$$

$$\vec{r} = \vec{v}_0 \cdot t + \frac{\vec{g}}{2} \cdot t^2 \quad (48)$$

Uma interessante interpretação da Equação (48) é mostrada no diagrama de vetores da Figura 31, na qual o movimento parabólico é interpretado como as composições de dois movimentos independentes, um MRU, na direção de v_0 e uma queda livre, a partir do repouso, na direção da gravidade g

Assim, em cada o instante t , a superposições (soma vetorial) desses dois movimentos independentes fornece o vetor posição r do móvel.

Figura 30 – Representação dos vetores

FONTE: Brito (2010)

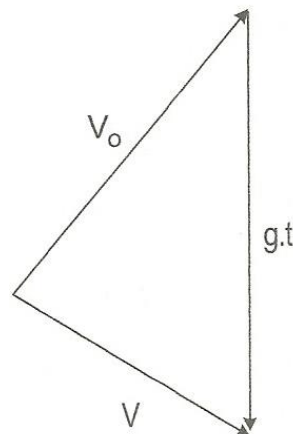
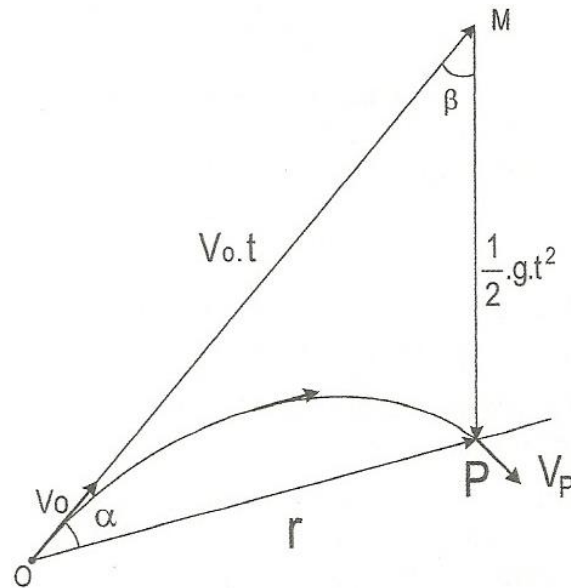


Figura 31 Representação de vetores

FONTE: Brito (2010)



Considerações de simetria são sempre úteis e, portanto, bem-vindas, visto que sempre trazem consideráveis simplificações na análise e resolução de problemas nas ciências exatas.

A partir de agora, usaremos a simetria da inversão da seta do tempo nesse movimento parabólico.

Invertamos, ao mesmo tempo, t e v_0 nas Equações (46), (47) e (48), substituindo t por $-t$ e v_0 por $-v_0$.

$$\vec{a} = \vec{g}$$

fazendo

$$\vec{a}^* = \vec{g} = \text{constante}$$

logo

$$\vec{a}^* = \vec{a}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g} \cdot t$$

assim

$$V' = -v_0 + g \cdot (-t) = -(v_0 + g \cdot t)$$

teremos

$$\vec{V}' = -\vec{V}$$

$$\vec{r}' = \vec{v}_0 \cdot t + \frac{g}{2} \cdot t^2$$

assim

$$r' = (-v_0) \cdot (-t) + \frac{g}{2} \cdot (-t^2)$$

teremos

$$\vec{r}' = \vec{r}$$

A Equação (46) não altera sua forma. Dizemos que ela permanece invariante: o valor da gravidade não depende, evidentemente, do sentido no qual avança o relógio.

A Equação (48) também permanece invariante, o que significa que a trajetória do projétil permanece a mesma.

Dado o movimento de um projétil, a origem dos tempos pode ser escolhida arbitrariamente. Na Figura 32, a origem dos tempos foi tomada no instante em que o projétil passava por O.

Nesse instante, a velocidade do projétil era v_0 . Era a velocidade inicial. em $t = -2$ s, o projétil estava em A com v_A .

Figura 32 – Movimento no sentido real

FONTE: Brito (2010)

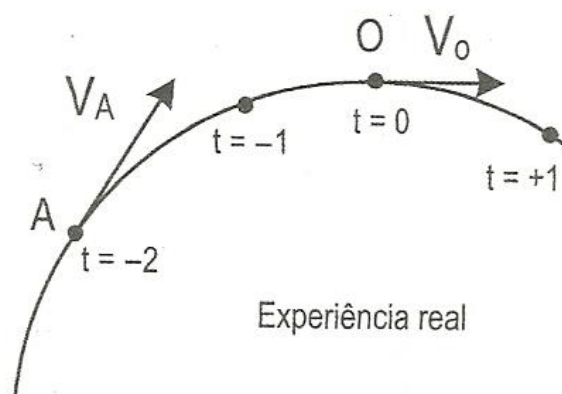
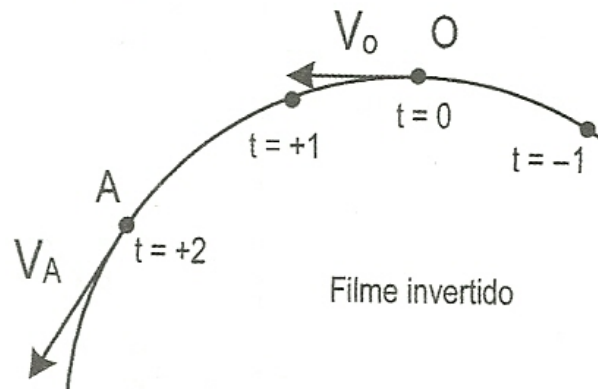


Figura 33 – Movimentos no sentido inverso

FONTE: Brito (2010)



Agora analisemos o movimento após invertermos t e v_0 . Na prática, isso poderia ser simulado da seguinte maneira: Filma-se a experiência real e passa-se o filme ao contrário. Dessa maneira veremos um projétil percorrer a mesma trajetória, porém em sentido contrário.

Em $t = 0$, ele passa pelo ponto O com uma velocidade v_0 igual, mas oposta à velocidade da experiência real. Em $t = 2$, ele passa por A também com uma velocidade oposta à da experiência real

A inversão do sentido do movimento sobre a mesma trajetória é ratificada, formalmente, pelo fato de que obtivemos $v' = -v$ ao substituirmos t por $-t$ e v_0 por $-v_0$ na equação (47). Assim, v se transforma em $-v$ ao inverter a seta do tempo.

Essa inversão do sentido do movimento sobre a mesma trajetória tem como consequência, que, ao se assistir ao filme da experiência do projétil, não há nenhuma meio de provarmos se o filme está sendo passado no sentido real ou no sentido contrário.

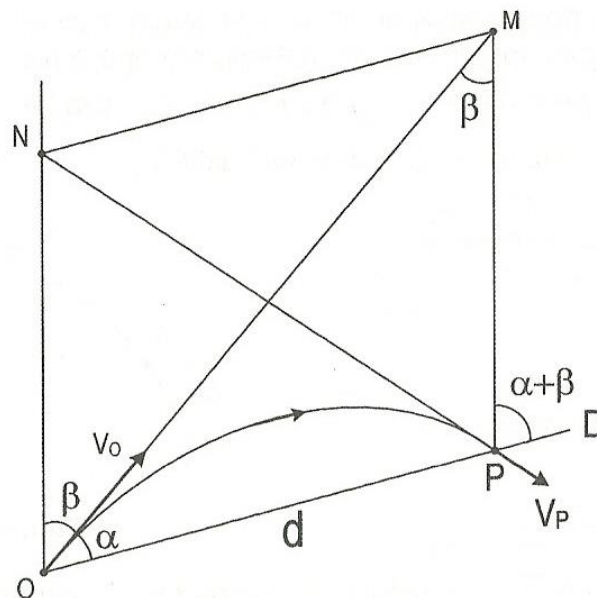
Dessa forma estamos diante de uma simetria e podemos concluir da seguinte maneira: as interações conservativas são simétricas em relação a uma inversão do sentido do tempo.

Durante o movimento do projétil, a interação gravitacional entre o projétil e a terra é conservativa, visto que a única força agindo sobre o projétil é a gravitacional, que é uma força conservativa.

A simetria vista acima permite generalizar as equações para o movimento parabólico:

Figura 34 – Trajetória seguida

FONTE: Brito (2010)



Atiremos um projétil com velocidade \vec{v}_0 fazendo um ângulo α acima de uma direção qualquer OD (não necessariamente horizontal) como mostra a Figura 34 acima.

Seja β o ângulo entre \vec{v}_0 e a vertical NO. Após t segundos, o projétil atinge o ponto P, da reta OD, com velocidade \vec{v}_P .

A partir das figuras 31 e 34 acima podemos escrever:

$$OM = v_0 \cdot t \quad (49)$$

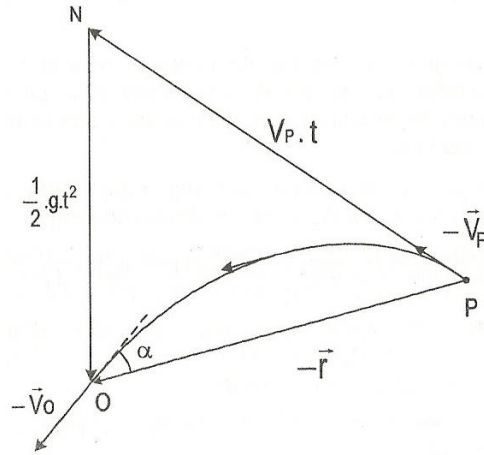
e

$$MP = \frac{g \cdot t^2}{2} \quad (50)$$

Passemos agora o filme de traz para frente notando a Figura 35

Figura 35–Representação de vetores no movimento inverso

FONTE: Brito (2010)



O projétil sai de P com velocidade $-\vec{v}_p$ e, t segundos depois, passa por O com velocidade $-\vec{v}_0$. Podemos escrever em relação aos seguimentos da figura 35:

$$PN = -\vec{v}_p \cdot t \quad (51)$$

$$NO = \frac{g \cdot t^2}{2} \quad (52)$$

Dessa forma, vemos que MP e NO são dois segmentos verticais congruentes, portanto o quadrilátero OPMN é um paralelogramo. A lei dos senos, no triângulos OMP da Figura 34, permite escrever

$$\frac{OP}{\text{sen}\beta} = \frac{MP}{\text{sen}\alpha} = \frac{OM}{\text{sen}[180^\circ - (\alpha + \beta)]}$$

Sendo OP o alcance d na direção OD figura 34 e considerando as relações (40) e (41), temos:

$$\frac{OP}{\text{sen}\beta} = \frac{MP}{\text{sen}\alpha} = \frac{OM}{\text{sen}[180^\circ - (\alpha + \beta)]} =$$

$$\frac{d}{\text{sen}\beta} = \frac{\frac{g \cdot t^2}{2}}{\text{sen}\alpha} = \frac{V_0 \cdot t}{\text{sen}(\alpha + \beta)} \quad (53)$$

da (53) podemos obter o tempo de voo t do projétil:

$$t = \frac{2V_0 \operatorname{sen} \alpha}{g \cdot \operatorname{sen}(\alpha + \beta)} \quad (54)$$

comparando Equação (53) e (54), determinamos o alcance d ao longo da direção OD:

$$\frac{d}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{V_0 \cdot t}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}$$

substituindo em t a Equação (54)

$$d = \frac{2V_0 \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)} \cdot t = \frac{V_0 \cdot \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)} \cdot \left(\frac{2V_0 \cdot \operatorname{sen} \alpha}{g \cdot \operatorname{sen}(\alpha + \beta)} \right)$$

$$d = \frac{2V_0^2 \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \alpha}{g \cdot \operatorname{sen}(\alpha + \beta)}$$

(55)

A Equação (55) é, segundo Brito (2010), a equação geral do alcance do projétil.

Particularizando-se, a título de verificação, a Equação (55) para o caso ordinário em que o disparo ocorre ao longo de um plano OD horizontal (isto é, admitindo-se $\alpha + \beta = 90^\circ$ na Figura 34, temos:

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

assim

$$\operatorname{sen} \beta = \operatorname{cos} \alpha$$

logo

$$d = \frac{2V_0^2 \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \alpha}{g \cdot \operatorname{sen}(\alpha + \beta)} = \frac{2V_0^2 \operatorname{cos} \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha}{g \cdot \operatorname{sen} 90^\circ} = \frac{V_0^2 \cdot \operatorname{sen}(2\alpha)}{g}$$

que é a equação do alcance conhecida do estudo elementar do movimento de projéteis

6 RESULTADOS

Neste capítulo, será aplicada a teoria apresentada sobre a parábola de segurança à resolução exemplos que envolvam lançamento oblíquo e que, de outra maneira, seriam bem mais trabalhosos.

O propósito é mostrar como o conceito de parábola de segurança é útil na resolução de problemas de lançamento oblíquo, encurtando o caminho para se chegar a solução de problemas e resolvendo de uma maneira bem mais elegante.

Os problemas foram extraídos de livros como o livro russo “Problemas Seleccionados de Física”, que é conhecido pelos estudantes brasileiros como Saraeva, em homenagem a uma de seus autores a professora I.M. Saraeva, do livro Problemas de Física - Dirigido por S. Kósel Livro também russo, assim como em outros livros os quais faz referência esse trabalho. Esses livros foram escolhidos para, apresentam problemas com resolução mais extensa e trabalhosa, semelhantes aos dos vestibulares do ITA, no Brasil e ao IIT-JEE na Índia mostrando quão útil se torna usar o conceito de parábola de segurança para resolvê-los.

6.1 Detonador no fundo de um poço.

O presente exemplo foi retirado do livro Problemas de física elementar, editora Mir, Moscou e foi reproduzido em outros livros como Fundamentos de mecânica, vol. 1(2010) de Renato Brito.

As provas de um detonador de uma granada efetuam-se no centro do fundo de um poço cilíndrico de profundidade H . Os estilhaços da granada, produzidos pela explosão e cujas velocidades não ultrapassam v_0 , não devem cair na superfície da terra. Qual deverá ser o diâmetro D do poço?

O menor diâmetro para esse poço, para que nenhum fragmento da granada atinja a superfície, ocorre quando a parábola de segurança – a envoltória de todas as possíveis trajetórias dos fragmentos - desse lançador – localizado na origem desse sistema de coordenadas – passar exatamente sobre as bordas do poço.

Em outras palavras, o ponto de coordenadas cartesianas $(x, y) = (R, H)$ pertence à parábola de segurança. Assim, podemos da Equação (44) escrever:

$$Y_P = \frac{V_0^2}{2g} - \frac{g}{2V_0^2} \cdot X_P^2$$

Substituindo $Y_p = R$ e $Y_p = H$ na equação da parábola de segurança, teremos:

$$H = \frac{V_0^2}{2g} - \frac{g}{2V_0^2} \cdot R^2$$

então

$$2V_0^2 \cdot g \cdot H = V_0^4 - g^2 R^2$$

assim

$$R^2 = \frac{V_0^4 - 2V_0^2 \cdot g \cdot H}{g^2} \quad (56)$$

assim o diâmetro D pedido é:

$$D = 2 \cdot R \quad (57)$$

logo, substituindo Equação (56) em Equação (57) teremos:

$$D = \frac{2V_0 \sqrt{V_0^2 - 2 \cdot g \cdot H}}{g}$$

6.2 Menor distância para se abater um avião

Essa questão é apresentada no livro Fundamentos de mecânica Vol. 1 de Renato Brito e através dela podemos aplicar a teoria apresentada da parábola de segurança.

Considere um avião voando a uma altura constante H aproxima-se de um canhão antiaéreo no solo que dispara projéteis com velocidade U num local onde a gravidade vale g. Sabendo que a trajetória seguida pelo avião e o canhão estão contidos no mesmo plano vertical, pedi-se que se determine a maior distância

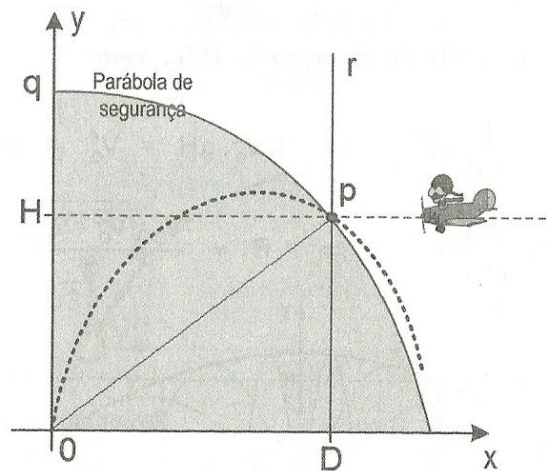
horizontal entre o canhão e o avião abaixo da qual o caminhão já é capaz de abater o avião.

Enquanto o avião estiver fora da região cinza, mostrada na figura 36, ele se encontrará na zona de segurança desse lançador. A posição mais distante em que o avião já pode ser abatido é o ponto p mostrado na figura, de coordenadas (D,H). Esse ponto pertence à parábola de segurança desse lançador, assim podemos escrever com base na Equação (44)

$$Y_P = \frac{V_0^2}{2g} - \frac{g}{2V_0^2} \cdot x_p^2$$

Figura 36 - Avião fora da Zona risco

FONTE: Brito (2010)



com

$$Y_p = H$$

e

$$X_p = D$$

$$H = \frac{V_0^2}{2g} - \frac{g}{2V_0^2} \cdot D^2$$

logo

$$D = \frac{U}{g} \sqrt{U^2 - 2 \cdot g \cdot H}$$

6.3 Lançamento de um penhasco

Neste terceiro exemplo, retirado do livro, Problemas de física dirigidos por S. Kósel, da editora Mir Moscou, será aplicado novamente o conceito de parábola de segurança sempre relacionado aos vínculos geométricos sugeridos no enunciado.

Determinemos sob qual ângulo com a horizontal é necessário lançar uma pedra, da extremidade de um penhasco vertical de 20 metros de altura, afim de que ela caia a uma distância maior possível do paredão. A velocidade inicial da pedra é $v_0 = 14\text{m/s}$ e a gravidade local vale $g = 10\text{m/s}^2$

O ponto do solo mais distante que pode ser atingido pelo lançador é o ponto P em que a parábola de segurança toca o solo.

A equação da parábola de segurança padrão admite que o lançador de projéteis se encontre na origem do sistema de coordenadas ($x = 0, y = 0$).

Como, nessa questão, o lançador se encontra na extremidade do penhasco, ali foi colocado a origem do sistema cartesiano.

A equação da parábola de segurança de um lançador de projéteis, localizado na origem ($x = 0, y = 0$) do sistema de coordenadas:

$$Y_P = \frac{V_0^2}{2g} - \frac{g}{2V_0^2} \cdot x_p^2$$

para $v_0 = 14\text{m/s}$

Determinemos a abscissa x_p do ponto, em que a parábola toca o solo, fazendo $y = -20$ na equação da parábola de segurança:

$$Y_P = \frac{V_0^2}{2g} - \frac{g}{2V_0^2} \cdot x_p^2$$

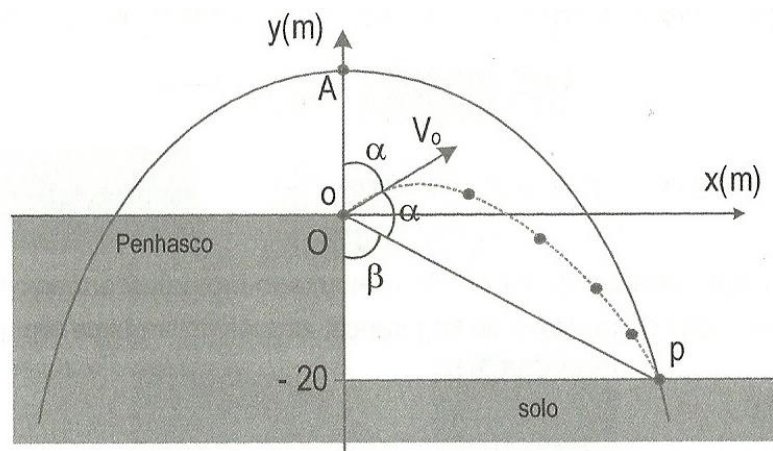
Então

$$-20 = \frac{14^2}{20} - \frac{g}{2V_0^2} \cdot x_p^2$$

Resolvendo pra $x_p \approx 34,1\text{m}$

Figura 37 – Representação dos ângulos e vetores

FONTE: Brito (2010)



determinando α e β na figura:

$$\tan \beta \cong 1,71$$

assim chegamos a

$$\beta = 60^\circ$$

$$2\alpha + \beta = 180^\circ$$

e

$$\alpha = 60^\circ$$

Da propriedade 4 da parábola de segurança, o projétil deve ser disparado na bissetriz do ângulo \widehat{POA} , isto é, na bissetriz do ângulo 2α . Assim, a direção do disparo do projétil forma um ângulo $90 - \alpha = 30^\circ$ com a horizontal.

7 CONCLUSÃO

Este trabalho mostrou, de maneira objetiva, em um primeiro momento, os principais pontos relativos ao tema lançamento oblíquo no vácuo, através de vários exemplos e questões, todas com suas respectivas soluções, ao longo do texto, inicialmente, com problemas de mera fixação em que as respostas eram obtidas diretamente, em um único passo, com a simples aplicação das fórmulas, apresentadas, em um segundo momento, a mesma teoria foi aplicada a situações-problema que exigiram para a resolução, não só a mera aplicação das fórmulas apresentadas, mas um maior domínio de álgebra elementar.

O tópico principal do trabalho é relativo ao conceito de parábola de segurança, o qual foi apresentado os principais pontos e propriedades de maneira objetiva, tratando-se de uma ferramenta muito útil para a resolução de problemas de física mais complexos também relativos ao tema lançamento oblíquo no vácuo. Nessa esteira, através de problemas retirados de livros como Problemas de Física Elementar, da editora russa Mir, assim como outros devidamente citados, considerados por muitos estudantes do ensino médio ou mesmo do ensino superior como de um nível de dificuldade mais elevado, foi mostrado que a parábola de segurança é um ótimo artifício matemático para solucioná-los

Além da parábola de segurança, foram apresentados, de maneira objetiva, temas como a lei da reflexão dos choques, a generalização das equações do movimento por simetria que através de situações-problema se mostraram bastante úteis na resolução de questões de física.

Nesse sentido, esse trabalho torna-se uma fonte de pesquisa para os alunos do ensino médio ou do ensino superior que procuram ter conhecimento no que tange ao assunto lançamento oblíquo de forma convencional e também para os que procuram ferramentas que facilitem a resolução de problemas com maior nível de dificuldade relativo a lançamento oblíquo.

REFERÊNCIAS

Asociacion Fondo de Investigadores y Editores. **Problemas Resueltos de Física, Una Visión Analítica del Movimiento. Volume I**

Bukhovtsev, B.B; Krrivtchenkov, V.D.; Miakishev, G.Y.; Saraeva,I.M. **Problemas de física elementar.**

Halliday, D., Resnick, R. e Walker, J. **Fundamentos de Física.** Tradução: José Paulo Soares de Azevedo. 6ª. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002. Vol. 2: Gravitação, Ondas e Termodinâmica

Hewitt, Paul G. **Física conceitual.** Porto Alegre: Artmed, 2002.

Iezzi, Gelson; Murakami, **Carlos. Fundamentos de Matemática Elementar Conjuntos , Funções - Vol. 1 - 8ª Ed.** 2004

Irodov, Igor Evgenevich. **Problems in General physics.** Moscou, Mir, 1977

Kósel, Stanislaw. **Problemas de Física dirigidos por S. Kósel.** Moscou, Mir, 1977.

Lucie, Pierre. **Física Para a universidade, Mecânica 1,** Rio de janeiro, Campus, 1972.

Neto, Renato Brito Bastos. **Fundamentos de mecânica vol. 1,** 2ª Ed. Editora Vestseller, 2010

Neto, Renato Brito Bastos. **Fundamentos de mecânica vol. 2,** 1ª Ed. Editora Vestseller,2010

Ramalho, Nicolau e Toledo. **Os Fundamentos da Física,** Vol. 03, 7ª Ed. Editora Moderna