Computação

Fundamentos do Cálculo

Raquel Montezuma Pinheiro Cabral

Química | Ciências Biológicas | Artes Plásticas | Computação | Física | Matemática | Pedagogia

Computação

Fundamentos do Cálculo

Raquel Montezuma Pinheiro Cabral

Fortaleza

EdUECE

2016

Química | Ciências Biológicas | Artes Plásticas | Computação | Física | Matemática | Pedagogia

Editora Filiada à

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DAS EDITORAS UNIVERSITÁRIAS

Editora da Universidade Estadual do Ceará – EdUECE
Av. Dr. Silas Munguba, 1700 – Campus do Itaperi – Reitoria – Fortaleza – Ceará
CEP: 60714-903 – Fone: (85) 3101-9893
Internet: www.uece.br – E-mail: eduece@uece.br

Secretaria de Apoio às Tecnologias Educacionais
Fone: (85) 3101-9962

Sumário

Apresentação

Este material foi produzido para a Disciplina de Fundamentos do Cálculo, do Curso de Licenciatura em Computação, ofertado a distância pela Universidade Estadual do Ceará e tem como objetivo oferecer um canal de comunicação com o aluno, para que possa orientar seus estudos e facilitar sua aprendizagem.

O maior responsável pelo sucesso da aprendizagem é o próprio aluno e, para isso, é necessário que ele se organize, estabeleça horários de estudo, leia atentamente o material, faça as atividades propostas, anote dúvidas e erros que tenha cometido na resolução das atividades, para que possa tirar suas dúvidas, seja no momento presencial com o professor da disciplina, ou com a ajuda de colegas e tutores.

Os conceitos aqui apresentados são úteis para estudantes do curso de Licenciatura em Computação e para compreendê-los são necessários, apenas, conteúdos no ensino básico (Ensino Fundamental e Ensino Médio). Compreendemos que, muitas vezes, alguns desses conhecimentos foram esquecidos, ou não foram bem aprendidos e, por isso, são oferecidas, ao longo dos capítulos, informações e explicações da matemática básica utilizada.

Demonstrações de teoremas são de grande importância na matemática, oferecendo melhor compreensão e comprovação do que foi afirmado. No entanto, demonstrações longas estão além da finalidade desse material, por isso, algumas delas serão apresentadas de forma simplificada ou omitidas. Nesses casos, indicamos uma bibliografia complementar para aqueles que desejarem aprofundar seus estudos de Cálculo.

Este material foi elaborado com muito cuidado, para que possa ajudar ao estudante a construir conhecimentos e utilizá-los quando deles necessitar.

Estamos torcendo pelo seu sucesso!

A autora

Capítulo 1

Limites

Objetivos

- Compreender conceitos de limite e continuidade de funções
- Operar com limites de funções
- Compreender limites laterais, infinitos e no infinito
- Utilizar o teorema do confronto para resolver limites
- Conhecer limites trigonométricos

Neste capítulo abordamos o conceito de limite, fundamental para o Cálculo Diferencial e Integral. Apresentamos, inicialmente, a ideia de limites recordando conhecimentos de sequências e gráficos de retas, abordados no Ensino Médio e, a partir dessas noções, passamos aos conceitos. Ao final desta unidade espera-se que o aluno compreenda os conceitos de limite e continuidade de funções, saiba operar com limites de funções, compreenda casos particulares de limites laterais, infinitos e no infinito, além de conhecer e utilizar o teorema do confronto e o limite trigonométrico fundamental no cálculo de limites.

1. Sequências reais e limites

Podemos compreender a noção de limites estudando sequências de números reais.

Exemplo: Imagine que uma pessoa deseja percorrer uma distância de 1km, mas pretende fazê-lo de forma a realizar, inicialmente, a metade do caminho, em seguida, a metade da metade que sobrou e assim sucessivamente.

$$x_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$$

Partindo do somatório apresentado, podemos supor que a pessoa jamais percorreria este quilômetro totalmente, pois sempre restaria uma distância a percorrer. (Conhecido como Paradoxo de Zenão).

2. Matemática básica

Note que as parcelas da soma podem ser vistas como uma sequência e que, na medida em que o denominador cresce, a fração $\frac{1}{2^n}$ se aproxima de zero. $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8}\ldots,\frac{1}{2^n},\ldots\right)$

No Ensino Médio, estudamos as Progressões Geométricas, sequências que se modificam a partir do produto de um valor constante. Na sequência apresentada, cada novo termo é encontrado a partir da multiplicação do termo anterior por $q=\frac{1}{2}$ (razão da PG).

No estudo das Progressões Geométricas, deduzimos algumas fórmulas que ajudam a determinar o termo geral, $a_n = a_1 . q^{n-1}$, e a soma dos termos:

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \frac{a_1 - a_n.q}{1-q}.$$

Note que quando a_n tende a zero, escrevemos $a_n \to 0$, então,

$$S = \frac{a_1}{1-q}.$$

No caso da sequência anteriormente apresentada, os termos estão diminuindo e se aproximando de zero, tanto quanto se queira.

Utilizando os dados do exemplo, onde $a_1 = \frac{1}{2}$ e $q = \frac{1}{2}$, temos que:

$$S = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} \Rightarrow S = 1.$$

Conclusão: Na medida em que n cresce, a_n torna-se próximo de zero, chegando ao limite dessa sequência que será igual a 1. Assim, a pessoa do exemplo citado, alcançaria seu objetivo de andar *1km*.

Podemos escrever que:

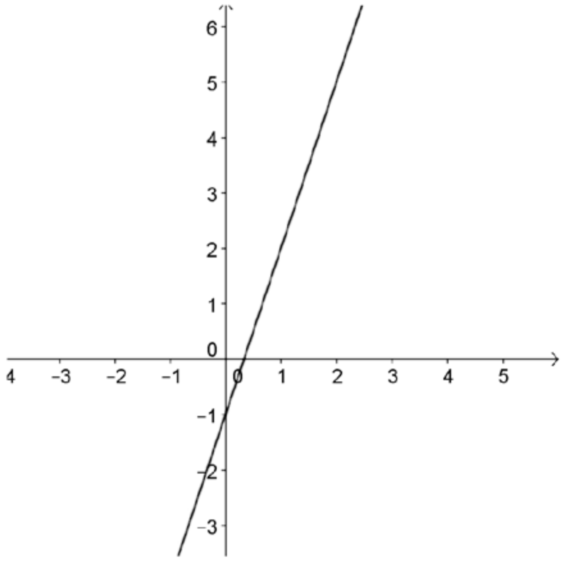
$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1.$$

3. Gráficos de retas e limites

Outra maneira simples de abordar a noção de limite é fazendo uso do gráfico de uma reta, ou seja, gráfico de uma função do 1º grau.

Exemplo: Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, uma função definida por $f(x) = 3x - 1$. Desejamos analisar o comportamento desta função quando se aproxima de 2. O gráfico da função é uma reta, como podemos determinar:

x	y
0	-1
1	2



O gráfico da função mostra como variam os valores de *(fx)*.

x	Y
1,9	4,7
1,99	4,97
1,999	4,997

x	y
2,1	5,3
2,01	5,03
2,001	5,003

Observando o que acontece com $f(x)$ quando x se aproxima de 2, por números menores ou maiores que 2, notamos que a função se aproxima de 5.

Matemática básica: Uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax+b$, é chamada função polinomial do primeiro grau e seu gráfico é uma reta. Além disso, essa reta é contínua, ou seja, não possui interrupções.

Conclusão: Na medida em que se escolhem valores de x cada vez mais próximos de 2, encontramos valores para $f(x)$ cada vez mais próximos de 5.

Como $f(2)=3 \,.\, 2 - 1 = 5$, podemos dizer que quando x tende para 2, $f(x)$ tende a $f(2)$, ou seja, o limite de $f(x)$ quando x tende para 2 é $f(2)$.

Escrevemos que:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = 5\,.$$

Outro exemplo desperta para o tipo de funções que não estão definidas para todos os reais.

Exemplo: Analise o comportamento da função apresentada a seguir, quando x se aproxima de 1.

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Solução:

x	Y		x	y
0,9	1,9		1,1	2,1
0,99	1,99		1,01	2,01
0,999	1,999		1,001	2,001

Note que a função não está definida para $x = 1$, pois este valor anula o denominador. Por outro lado, a função f aproxima-se de 2 quando x se aproxima de 1.

Conclusão: A função $f(x)$ está definida para todos os valores em torno de 1, exceto para $x = 1$, mas $f(x)$ fica arbitrariamente próximo de 2, quando x se aproxima de 1. Podemos, portanto, dizer que o limite existe e:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2\,.$$

4. Conceito de limites e continuidade de funções

Agora que temos uma noção intuitiva de limite formalizamos sua definição.

Definição: Seja f(x) uma função definida em um intervalo aberto em torno de x_o, podendo, ou não, estar definida em x_o. Dizemos que $f(x)$ tem **limite** L quando x tende a x_0, se na medida em que x se aproxima de x_o, o valor de $f(x)$ se aproxima de L. Nesse caso escrevemos:

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = L.$$

Conceito: Uma função $f(x)$ é contínua em x_o, se e somente se $f(x_o)$ e $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existem e

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = f(x_O)$$

Conceito: Dizemos que uma função f é contínua em um determinado intervalo $[a,b]$, se ela é contínua em cada ponto do intervalo, ou seja, f não possui interrupções. Se a função não for contínua em um ponto x_0, dizemos que este é um ponto de descontinuidade.

São exemplos de funções contínuas em seus domínios as funções: polinomiais, racionais, trigonométricas, exponenciais e logarítmicas.

Matemática básica:

Uma função racional é uma razão entre dois polinômios:

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}\,.$$

A função $r(x)$ não é definida para valores de x que anulam o denominador, ou seja, com $q(x)=0$, pois nesse caso teríamos uma indeterminação. Esse e outros tipos de indeterminações ocorrem naturalmente quando consideramos limites de funções racionais e outras funções elementares, como veremos adiante.

Exercícios resolvidos

1. Dada $f(x) = 4x - 2,\ x \in R$, calcule $\lim_{x \to 2} f(x)$:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} (4x - 2) = 4 \,.\, 2 - 2 = 6 \,.$$

2. Seja $f(x)=x^2 -5x+6,\ x \in R$, calcule $\lim_{x \to -1} f(x)$:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} (x^2 - 5x + 6) = (-1)^2 - 5.(-1) + 6 = 1 + 5 + 6 = 12$$

Para refletir

1. Calcule os limites a seguir:
   a) $\lim_{x \to 4} 3x - 2$
   b) $\lim_{x \to -2} x^4 + 4x$
   c) $\lim_{x \to 3} 2^x$

Podemos, ainda, encontrar o limite em pontos de descontinuidade de uma função quando esta coincidir com uma função contínua, como foi mostrado no exemplo da função $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, que não está definida em x=1.

Note que podemos simplificar a expressão, usando fatoração:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x + 1,\ para\ x \neq 1.$$

Assim,

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} (x+1) = 1 + 1 = 2 \,.$$

Matemática básica: No ensino fundamental são estudados os produtos de polinômios e alguns deles são tão utilizados, que recebem o nome de produtos notáveis. Destacamos alguns dos mais importantes produtos notáveis, para que se possa recordar.

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$	(Quadrado da soma de dois termos)
$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$	(Quadrado da diferença de dois temos)
$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$	(Produto da soma pela diferença de dois termos)

$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ (Cubo da soma de dois termos)

$(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$ (Cubo da diferença de dois termos)

No exemplo apresentado, transformamos a expressão em produto, por meio da fatoração, para poder simplificá-la. Recordamos alguns casos de fatoração que serão muito úteis.

- Fator comum em evidência

Ex.: $3x^3-x^2=x^2(3x-1)$

- Agrupamento

Ex.: $ax+bx+ay+by=x(a+b)+y(a+b)=(a+b)(x+y)$

- Reconhecimento de produtos notáveis

Ex.: $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$

Ex.: $x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$

- Soma e diferença de dois cubos

Ex.: $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$

Ex.: $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

- Diferença de potências

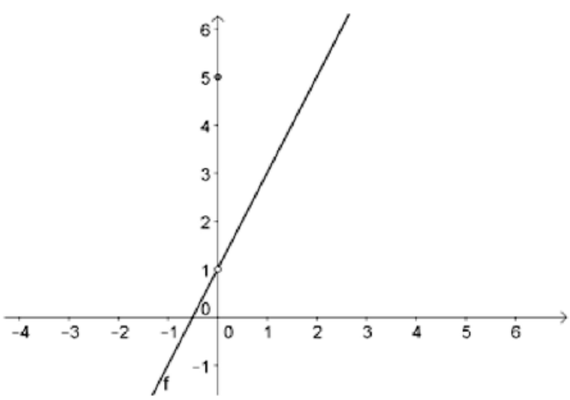
Ex.: $x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\ldots+xy^{n-2}+y^{n-1})$

Exercícios resolvidos

1.Determine $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, da função descontínua $f(x)=\begin{cases}2x+1, se\ x\neq 0\\ 5, se\ x=0\end{cases}$.

Solução: Como $f(x)$ é descontínua em $x=0$ e considerando a função contínua $g(x)=2x+1, x\in\mathbb{R}$, temos:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0} 2x+1=2.0+1=1.$$



Note que, na função, para x = 0 temos que y = 5, no entanto, o limite da função no ponto x = 0 é 1.

2. Considere a função $f(x)=\dfrac{2x^2+3x}{x}$. Encontre $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Solução: Como *f(x)* é uma função descontínua para $x = 0$, simplificamos a expressão e encontramos a função $g(x)=2x+3$ que é contínua para qualquer valor de x.

$$\frac{2x^2+3x}{x}=\frac{x(2x+3)}{x}=2x+3.$$

Desta forma,

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0} 2x+3=2.0+3=3.$$

Para refletir

1. Calcule os limites:

a) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+4}{x-2}$

b) $\lim_{x\to -4}\dfrac{x^2-16}{x+4}$

c) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$

2. Calcule $\lim\limits_{x\to 1} f(x), sendo \begin{cases} x-1, se\ x>1 \\ -x+1, se\ x<1 \end{cases}$

5. Propriedades dos limites

Sejam f e g funções, contínuas ou não no ponto x_o, de modo que existam $\lim_{x\to x_0} f(x)=L\ e \lim_{x\to x_0} g(x)=K, com\ L, K\in\mathbb{R}$.

Propriedade da soma: O limite da soma de duas funções é igual à soma dos seus limites.

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=L+K.$$

Propriedade da diferença: O limite da diferença de duas funções é igual à diferença dos seus limites.

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=L-K.$$

Propriedade do produto por uma constante: O limite de uma constante $c\in\mathbb{R}$, por uma função é igual ao produto da constante pelo limite da função.

$$\lim_{x \to x_o} (c.f(x)) = c\,.\,L\,.$$

Propriedade do produto: O limite do produto de duas funções é igual ao produto dos seus limites.

$$\lim_{x \to x_o} (f(x)\,.g(x)) = L\,.\,K\,.$$

Propriedade do quociente: O limite do quociente de duas funções, considerando que o limite do denominador seja diferente de zero, é igual ao quociente de seus limites.

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{K}, com\ K \neq 0\,.$$

Propriedade da potência: Sejam $r, s \in \mathbb{Z}$, com s≠0, tal que $L^{\frac{r}{s}} \in \mathbb{R}$. O limite da potência racional de uma função é igual à potência do limite da função.

$$\lim_{x \to x_o} (f(x))^{r/s} = L^{r/s}\ .$$

Propriedade da composta: Seja g uma função contínua, tal que seu domínio contém L. Então vale dizer que:

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right) = g(L)\,.$$

Matemática básica

Dadas duas funções $f{:}A \to B$ e $g{:}B \to C$, chamamos de função composta de g e f a função $gof{:}\,A \to C$, definida por $g(f(x))$, com $x \in A$.

Exemplo: Dadas as funções $f{:}\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x)=2x+3$ e $g{:}\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x)=x^2-1$. Podemos determinar a função composta $g(f(x))$ da seguinte maneira:

$g(f(x)) = (f(x))^2 - 1 = (2x+3)^2 - 1 = 4x^2+12x+8.$

Exercícios resolvidos:

1. Calcule: $\lim_{x \to 0}(x^2 - 3x + 2)$.

Solução: $\lim_{x \to 0}(x^2 - 3x + 2) = \lim_{x \to 0} x^2 - \lim_{x \to 0} 3x + \lim_{x \to 0} 2 = 0^2 - 3 \cdot 0 + 2 = 2.$

2. Determine $\lim_{x \to 0} \frac{2x^2 - x + 2}{5x+1}$:

Solução:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x^2 - x + 2}{5x+1} = \frac{\lim_{x \to 0} (2x^2 - x + 2)}{\lim_{x \to 0} (5x+1)} = \frac{2\,.\,0^2 - 0 + 2}{5\,.\,0 + 1} = 2.$$

3. Calcule o valor de $lim_{x \to 2}(x^3 - 2x + 1)^2$:

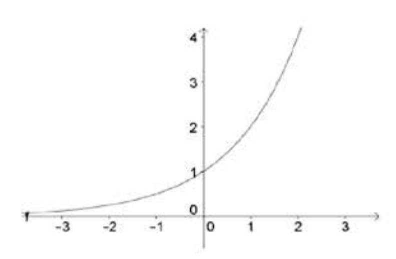
Solução: $lim_{x \to 2}(x^3 - 2x + 1)^2 = (lim_{x \to 2}(x^3 - 2x + 1))^2 = (2^3 - 2 \, . \, 2 + 1)^2 = 5^2 = 25.$

Matemática básica: vimos que funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas são exemplos de funções contínuas. Isso sugere que, em alguns exercícios sobre limites, possam ser envolvidas essas funções e, por isso, é necessário uma breve recordação.

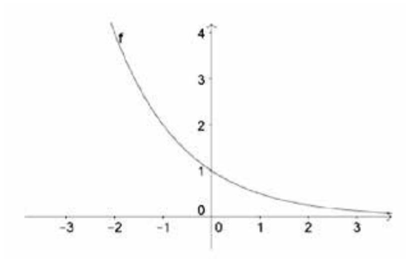
- Função exponencial: Seja $a > 0$ e $a \neq 1$. A função exponencial de base a é da forma:

$$f(x)=a^x.$$

Podemos traçar um esboço do gráfico de uma função exponencial, considerando que a função será crescente quando a base $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$.



a>1



0<a<1

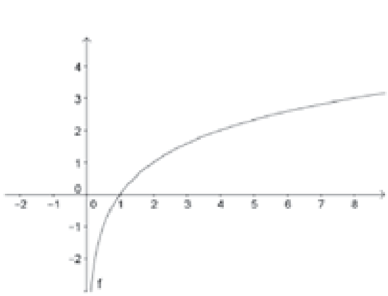
- Função logarítmica: Seja $a > 0$ e $a \neq 1$. A função logarítmica de base a é inversa da função exponencial $y = a^x$, e escreve-se da forma:

$$f(x)=log_a x.$$

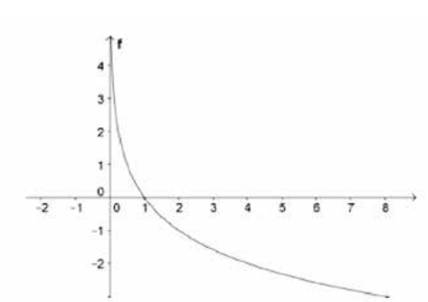
Definição de logaritmo: Sejam a, b > 0 e $a \neq 1$,

$$log_a b = x \Leftrightarrow b = a^x.$$

Podemos traçar um esboço do gráfico de uma função logarítmica $f(x)=log_a x$, considerando que a função será crescente se a base $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$.



a>1



0<a<1

Propriedades importantes dos logaritmos: Sejam $m \in R,\ a > 0\ \ e\ \ a \neq 1$,

$$log_a 1 = 0 \quad e \quad log_a a^m = m.$$

Propriedades operatórias dos logaritmos:

Logaritmo do produto: Sejam $m,\ n,\ a > 0\ \ e\ \ a \neq 1$

$$log_a\,(m \cdot n) = log_a m + log_a n.$$

Logaritmo do quociente: Sejam $m,\ n,\ a > 0,\ n \neq 0\ \ e\ \ a \neq 1$

$$\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n\,.$$

Logaritmo da potência: Sejam $n \in \mathbb{R},\ m,\ a > 0\ \ e\ \ a \neq 1$

$$log_a m^n = n\ .\ log_a m.$$

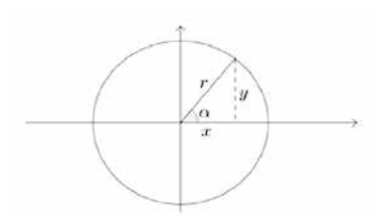
Logaritmos importantes:

logaritmos decimais e logaritmos naturais

$$logb = log_{10} b \quad e \quad log_e{}^b = lnb \text{ onde } e \cong 2{,}718.$$

- Funções trigonométricas:

Para transformação entre as unidades de graus e radianos, utilize: 180º $=\pi$rad. Considerando o círculo da figura, com centro no ponto (0,0) e raio r, definimos as funções:



$$\cos\alpha = \frac{x}{r},\ \ sen\alpha = \frac{y}{r},\ tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y}{x},$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha},\ \ \ \text{cossec}\,\alpha = \frac{1}{sen\alpha}\ \ e\ \ \cot g\alpha = \frac{1}{tg\alpha}.$$

Principais identidades trigonométricas:

$sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1$

$sec^2\,\alpha = 1 + tg^2\,\alpha$

$cossec^2\,\alpha = 1 + cotg^2\alpha.$

Existem muitas outras identidades trigonométricas importantes que devem ser recordadas. Pesquise em livros do ensino médio ou na internet.

Para refletir

1. Calcule os limites:

a) $\lim_{x\to 2}(2x^2 - 3^x)$

b) $\lim_{x\to 4} x^2\,(2x+1)$

c) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x+2}{x-2}$

d) $\lim_{x\to \pi}\dfrac{senx}{x}$

e) $\lim_{x\to 2}(2^{-x}+1)$

f) $\lim_{x\to 1}\sqrt{x^2+2x+3}$

g) $\lim_{x\to 4}\log_2 2x$

h) $\lim_{x\to 1}\dfrac{3x-3}{x^2-2}$

i) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$

2. Supondo que $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$ e $\lim_{x\to 2} g(x) = -3$, determine:

a) $\lim_{x\to 2}(f(x)\,.\,g(x))$

b) $\lim_{x\to 2}(2f(x)-3g(x))$

c) $\lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)+g(x)}{f(x)}$

6. Limites laterais

Existem funções que não estão definidas para toda a reta, apresentando pontos de descontinuidade. É possível que essas funções apresentem limites diferentes quando nos aproximamos pela direita, ou pela esquerda, dos pontos de descontinuidade, ou ainda, que não apresentem limites laterais.

Conceito: Dada $f(x)$ definida em (a,b), com $a < b$. Se $f(x)$ se aproxima de L na medida em que x se aproxima de a nesse intervalo, dizemos que a função possui limite **lateral à direita** o que é escrito assim:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L.$$

Conceito: Dada f(x) definida em (c,a), com c<a. Se f(x) se aproxima de K na medida em que x se aproxima de a nesse intervalo, dizemos que a função possui **limite lateral à esquerda** e escrevemos:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = K.$$

Conceito: A função f(x) terá um limite quando x se aproxima de a se, e somente se, tiver limite lateral à esquerda e à direita e estes forem iguais.

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to a^-} f(x) = L \;\; e \;\; \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

Observação: Utilizamos a notação a^- para indicar a aproximação de a por valores à sua esquerda (menores que a). De maneira totalmente análoga, a notação a^+ indica a proximidade de a por valores à sua direita (maiores que a).

Exemplos:

1. Seja $f(x) = \frac{1}{x}$ uma função contínua em $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$. A função $f(x)$, para $a \neq 0$, é definida em um intervalo aberto contendo a, ou seja, existe $f(x)$ para x próximo de a pela esquerda e pela direita. Assim,

$$\lim_{x \to a-} \frac{1}{x} = \frac{1}{a} \ e \ \lim_{x \to a+} \frac{1}{x} = \frac{1}{a} \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$$

2. Dada $f(x) = \frac{|2x|}{x}$ percebemos que: na medida em que x se aproxima de 0 pela esquerda $f(x)$ tende a -2, e quando x se aproxima de 0 pela direita $f(x)$ se aproxima de 2. De fato,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x} = 2, se\ x > 0 \\ \frac{-2x}{x} = -2, se\ x < 0 \end{cases}$$

Dessa forma,

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = -2 \ e \ \lim_{x \to 0+} f(x) = 2.$$

3. Considerando $f(x) = \sqrt{x}$. A função é contínua em $\mathbb{R}_+$ e para todo $a > 0$, temos que $\lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a} \ e \ \lim_{x \to a^+} \sqrt{x} = \sqrt{a}$. Porém, para $a = 0$ não se define o limite à esquerda, pois a função não está definida para valores menores que zero.

Para refletir

1. Seja $f(x) = \frac{x}{2}$ uma função contínua definida no intervalo [0,2]. Determine os limites, se estes forem definidos:

a) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$

b) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$

c) $\lim_{x \to 0^-} f(x)$

d) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$

e) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$

f) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$

2. Determine os limites que forem definidos nas funções a seguir:

a) $\lim_{x \to 1^-} \log x$

b) $\lim_{x \to 1^+} \log x$

3. Considerando a função $f(x) = |\, x - 1\, |$, calcule os limites indicados:

a) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$

c) $\lim_{x \to 1} f(x)$

b) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$

7. Limites infinitos e no infinito

Observamos, inicialmente, o comportamento das funções dos exemplos a seguir.

Exemplos:

1. Desejamos encontrar o limite da função $f(x) = 1 + \frac{1}{3^x}$, quando x→+∞.

Note que quando x→+∞, tem-se que $\frac{1}{3^x} \to 0$, ou seja,

$\lim_{x \to +\infty}\left(1 + \frac{1}{3^x}\right) = 1 + 0 = 1$.

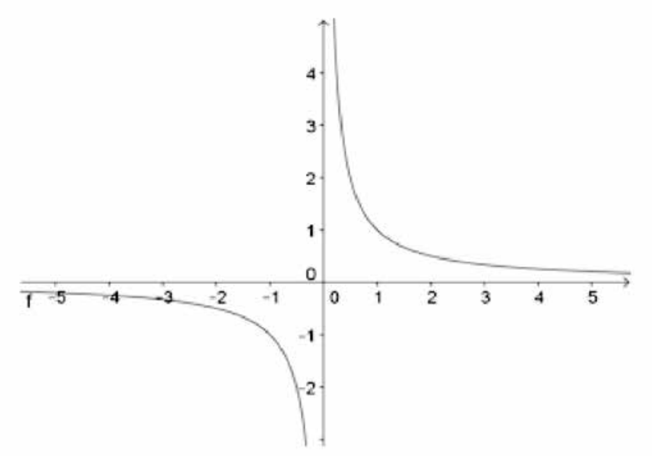
2. Mostraremos que $\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x+1} = 1$

Verificamos que não podemos utilizar a propriedade do quociente, pois encontraríamos uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Note que $\frac{x}{x+1} = \frac{\frac{x}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{1}{x}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$, e que quando x→+∞ temos que $\frac{1}{x} \to 0$.

Assim,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

3. Consideramos a função $f(x) = \frac{1}{x}$, definida para $x \neq 0$, e analisamos o seu gráfico.



Utilizando a função do exemplo podemos considerar duas situações:

1ª situação: O que ocorre com a função no caso em que x cresce arbitrariamente, $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, ou decresce arbitrariamente, $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

Quando abordamos as sequências decrescentes, visualizamos que quando x→+∞ a fração $\frac{1}{x} \to 0$, pois foram considerados, apenas, valores positivos. Observamos que o mesmo ocorre quando x→-∞. Donde concluímos que:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \ e \ \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0.$$

2ª situação: Analisando o comportamento do gráfico quando $x \to 0$, notamos que quando $x \to 0^-$ a fração $\frac{1}{x} \to -\infty$, Por outro lado, quando $x \to 0^+$ a fração $\frac{1}{x} \to +\infty$. Assim,

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = -\infty \ e \ \lim_{x \to 0+} f(x) = +\infty.$$

Observe que utilizamos noções e operações simples para aplicar os conhecimentos adquiridos.

Para refletir

1. Determine os limites:

a) $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}$

b) $\lim_{x \to \infty} \frac{3x - 1}{x}$

c) $\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x + 2}$

2. Comprove a igualdade a seguir:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x + 1}{x} = 2$$

7.1 Limites infinitos

Seja $f(x)$ uma função que assume valores positivos para $x \neq a$. Se $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, então, $\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$.

De maneira análoga, sendo $f(x)$ uma função que assume valores negativos para $x \neq a$ e $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, $\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$.

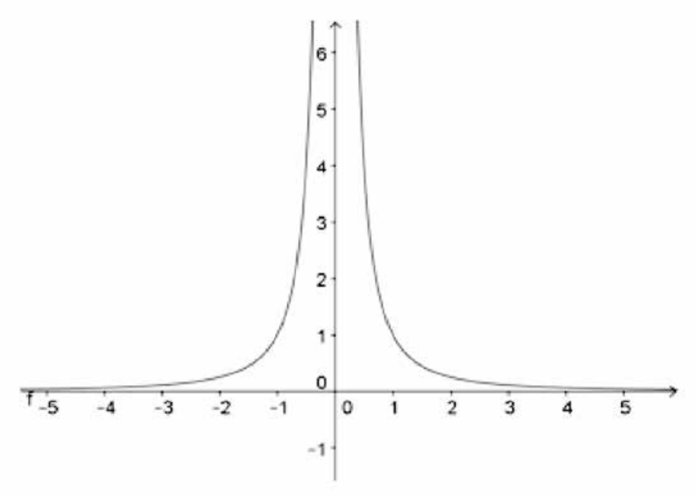
Exercícios resolvidos

1. Determine o limite de $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$, se existir.

Solução: Considerando $f(x)=x^2$, observamos que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ e que a função assume valores positivos para $x \neq 0$. Dessa forma, temos que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{f(x)} = +\infty \cdot$$

Adquirimos uma compreensão ainda maior, quando observamos o gráfico de $\frac{1}{x^2}$:



2. Seja a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2-x & se\ x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & se\ x > 0 \end{cases}$$

Determine os limites laterais quando $x \to 0$.

Solução: Analisando inicialmente o limite à esquerda:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(2-x) = 2 - 0 = 2.$$

Por outro lado, quando analisamos o limite pela direita temos:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

Para refletir

1. Determine os limites a seguir, se existirem:

a) $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^3}$

b) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^3}$

c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x^6}$

d) $\lim_{x\to 4^+} \dfrac{1}{x-4}$

e) $\lim_{x\to 4^-} \dfrac{1}{x-4}$

f) $\lim_{x\to 4} \dfrac{1}{x-4}$

g) $\lim_{x\to 2^-} \dfrac{-3}{x-2}$

h) $\lim_{x\to 2+} \dfrac{-2}{x^2-2x}$

i) $\lim_{x\to 0^+} \log x$

j) $\lim_{x\to 0+} \dfrac{1}{senx}$

k) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-senx}{1-\cos x}$

7.2 Limites no infinito

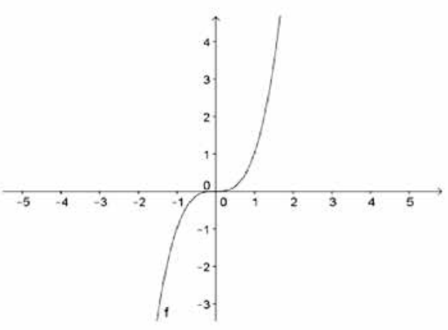
Nessa seção, tratamos dos limites de funções em que $x \to +\infty$ *ou* $x \to -\infty$, e consideramos, nos exemplos a seguir, três situações particulares.

Observação: As propriedades operatórias dos limites, vistas anteriormente, continuam válidas quando se trata de limites no infinito.

1ª situação: Alguns limites de funções quando $x \to +\infty$ *ou* $x \to -\infty$, podem também ser iguais a $+\infty$ *ou* $-\infty$.

Exemplo 1: Considerando a função $f(x)=x^3$, atribuindo valores para x e observando seu gráfico, podemos calcular seus limites no infinito.

x	Y
-1000	-1000000000
-100	-1000000
-10	-1000
-1	-1
0	0
1	1
10	1000
100	1000000
1000	1000000000



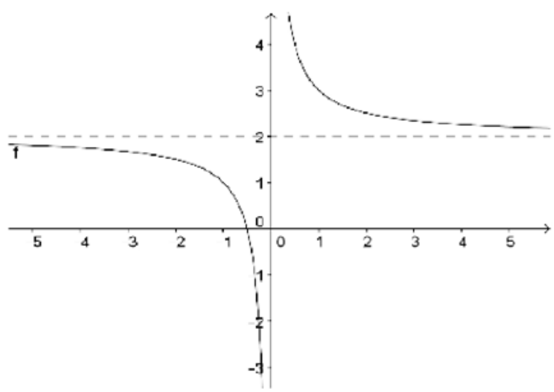
Dessa forma,

$\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$.

2ª situação: Existem funções que tendem para um número real quando $x\to+\infty$ ou $x\to-\infty$.

Exemplo 2: Seja $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x}$, definida para $x \neq 0$. Construindo e analisando o gráfico da função, podemos perceber como esta se comporta quando $x\to+\infty$ ou $x\to-\infty$.

x	Y
-10000	1,9999
-1000	1,999
-100	1,99
-10	1,9
-1	1
1	3
10	2,1
100	2,01
1000	2,001
10000	2,0001



Observamos nas sequências, que as frações do tipo $\dfrac{1}{x}$, quando $x\to\infty$, se aproximam de 2, logo

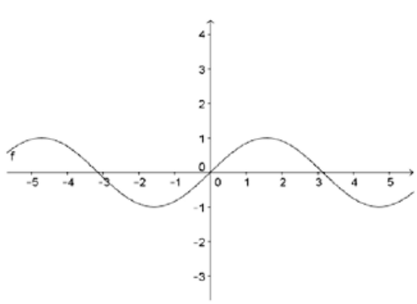
$$\lim_{x\to-\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty} 2 + \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 2 + 0 = 2\,.$$

De maneira semelhante podemos concluir que:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} 2 + \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 2 + 0 = 2\,.$$

3ª situação: Há funções que não apresentam tendências para números ou infinitos.

Exemplo 3: Considere a função $f(x) = sen\,x$. Observe o gráfico da função seno.



A função seno é periódica de período 2π, assim como a função cosseno e a função tangente, não possuindo limites no infinito; nem finitos, nem infinitos.

Exercícios resolvidos

Mais alguns exercícios resolvidos poderão dar boas ideias de como trabalhar com limites no infinito de polinômios e funções racionais. Lembre que o grau de um polinômio é o maior expoente da variável em questão.

1ª situação: Quando calculamos limites no infinito de polinômios, podemos sempre colocar a variável de maior expoente em evidência e verificar quais termos se anulam quando $x \to \infty$.

Exercício 1: Calcule o valor do limite:

$$\lim_{x\to+\infty} 4x^3 - 2x^2 + 5x + 1.$$

Solução: Colocando x^3 em evidência, podemos reescrever o polinômio e concluir o valor do seu limite.

$$\lim_{x\to+\infty} x^3\left(4 - \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{2}{x}} + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{5}{x^2}} + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{1}{x^3}}\right) = \lim_{x\to+\infty} 4x^3 = +\infty.$$

2ª situação: Quando a função racional possuir o grau do numerador menor que o grau do denominador.

Exercício 2: Determine o limite:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{8x^2-5}{7x^3+1}.$$

Solução: Observando a função racional seria difícil decidir quem cresce mais rápido, numerador ou denominador. No entanto, podemos, com operações elementares, reescrever a função. Nesse caso, dividimos numerador e denominador por x^3, que é a variável de maior expoente do denominador. Assim,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{8x^2-5}{7x^3+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{8x^2}{x^3} - \frac{5}{x^3}}{\frac{7x^3}{x^3} + \frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{8}{x} - \frac{5}{x^3}}{7 + \frac{1}{x^3}} = \frac{0-0}{7-0} = 0.$$

3ª situação: Quando a função racional possuir o grau do numerador maior que o grau do denominador.

Exercício 3: Determine o limite:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^2-2x+3}{4x+2}.$$

Solução: Nesse caso, o maior expoente de x do denominador é 1, por isso dividimos numerador e denominador por x para obter:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^2-2x+3}{4x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{5x^2}{x}-\frac{2x}{x}+\frac{3}{x}}{\frac{4x}{x}+\frac{2}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x-2+\frac{3}{x}}{4+\frac{2}{x}}=-\infty$$

Notamos que as frações com denominador x tendem a zero, porém, quando $x\to -\infty$ temos que $5\cdot x\to -\infty$.

4ª situação: Numerador e denominador de mesmo grau.

Exercício 4: Calcule o limite:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x-2}{2x^2+1}.$$

Solução:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x-2}{2x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}}{2+\frac{1}{x^2}}=\frac{3+0-0}{2+0}=\frac{3}{2}.$$

Para refletir

1. Calcule os seguintes limites, se existirem:

a) $\lim_{x\to+\infty}(3x^2)$

b) $\lim_{x\to+\infty}(-4x^3)$

c) $\lim_{x\to-\infty}(-4x^3)$

d) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3x^2}\right)$

e) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{7}{5x^3}\right)$

f) $\lim_{x\to+\infty}(3x^2+4x-1)$

g) $\lim_{x\to-\infty}(2+x-5x^2-x^3)$

8. Teorema do confronto

Podemos encontrar situações em que não se consegue obter diretamente o valor do limite de uma função $f(x)$. Quando existirem duas funções $g(x)$ e $h(x)$ que controlam os valores da função f e seus limites forem iguais quando $x\to c$, então o limite de $f(x)$ quando $x\to c$ existe e coincide com o limite de $g(x)$ e $h(x)$.

Teorema: Supondo $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$ para qualquer $x\in(a,b)$, intervalo contendo c, exceto possivelmente, em c. Se $\lim_{x\to c} g(x)=\lim_{x\to c} h(x)=L$, então $\lim_{x\to c} f(x)=L$.

Neste curso, omitimos a demonstração do teorema do confronto, que poderá ser encontrada na bibliografia indicada.

Exercício resolvido: Seja $f(x)=senx$ e sabendo que $-|x|\leq senx\leq|x|$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Utilizando as informações, determine $lim_{x\to 0} sen\, x$.

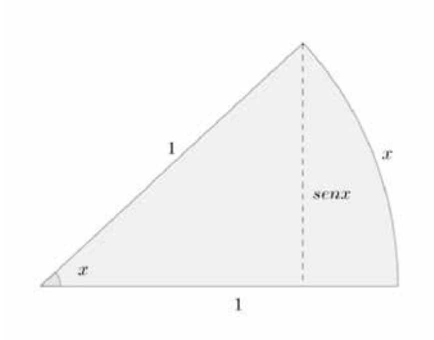
Solução: Sabemos que $-|x| \leq senx \leq |x|$ e com isso podemos, facilmente, calcular que:

$$lim_{x\to 0} -|x|=0 \text{ e } lim_{x\to 0}|x|=0.$$

Pelo teorema do confronto, $lim_{x\to 0} senx=0$.

Matemática básica

Na figura a seguir podemos ver que $-|x| \leq sen\, x \leq |x|$.



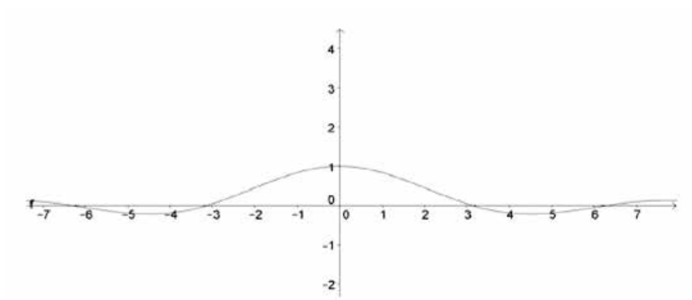
Para refletir

1. Estude $\lim_{x\to 0} x^2 \cdot \cos\left(\frac{2}{x}\right)$.
   Note que: Para $x \neq 0$, temos que $-1 \leq cos\left(\frac{2}{x}\right) \leq 1$.

2. Sabendo que $1-2x^2 \leq f(x) \leq 1 + 3x^2$, para todo $x \neq 0$. Determine $lim_{x\to 0} f(x)$.

9. Limite trigonométrico fundamental

Exemplo: Note que não podemos aplicar a regra do quociente para determinar $\lim_{x\to 0} \dfrac{senx}{x}$. Fazendo uma análise do gráfico, vemos que este limite é igual a 1.



Teorema: Temos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}=1.$$

Este é um importante resultado e, por vezes, é chamado de limite trigonométrico fundamental. Para demonstrá-lo utilizaremos o teorema do confronto.

Demonstração:

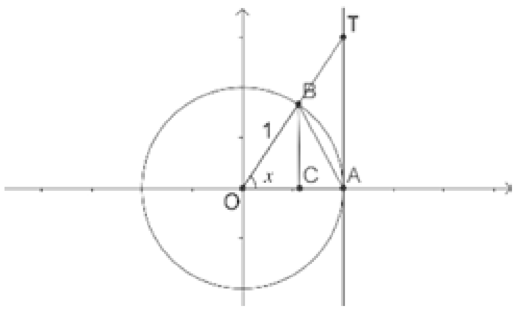
Observe que:

$\overline{AT}=tg\,x$

Para:

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$

$A_{\Delta AOB}\leq A_{SAOB}\leq A_{\Delta AOT}$



Notação: ΔAOB= triângulo de vértices A,O e B,

SAOB= área do setor circular A,O e B e

ΔAOT= triângulo de vértices A,O e T.

$$\frac{1\,.\,senx}{2}\leq\frac{x}{2}\leq\frac{1\,.\,tgx}{2}\Rightarrow senx\leq x\leq tgx\;e\;senx>0$$

Logo,

$$1\leq\frac{x}{sen\,x}\leq\frac{1}{\cos}\Rightarrow \cos x\leq\frac{senx}{x}\leq 1$$

Como $lim_{x\to 0}cosx=lim_{x\to 0}1=1$, pelo teorema do confronto, concluímos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}=1.$$

Depois da recordação das identidades trigonométricas, podemos resolver outro limite importante para o capítulo 2, no qual estudaremos as derivadas.

Exercícios resolvidos

1. Calcule o limite a seguir:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}.$$

Solução:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}.\frac{1+\cos x}{1+\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{sen^2 x}{x(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}senx\,.\,\frac{senx}{x}\,.\,\frac{1}{1+\cos x}=0\,.\,1\,.\,\frac{1}{2}=0.$$

Atividades de avaliação

1. Calcule os limites, quando existirem:

a) $\lim_{x\to 0}\dfrac{sen5x}{5x}$

Use $t=5x$ e note que quando $x\to 0$, temos que $5x\to 0$, ou seja, $t\to 0$.

b) $\lim_{x\to 0}\dfrac{sen3x}{x}$

c) $\lim_{x\to 0}\dfrac{senx}{2x}$

d) $\lim_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}$

Observação: Outros limites importantes.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \quad \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e,$$

$$\lim_{x\to 0^{+}}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e \quad e \quad \lim_{x\to 0^{-}}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

Exercício resolvido

1. Determine o seguinte limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}.$$

Solução: Considere $a^{x}-1=u \Rightarrow a^{x}=u+1 \Rightarrow x=\log_{a}(u+1)$. Note que quando $x\to 0$, temos que $u\to 0$.

Fazendo as substituições temos,

$$\lim_{u\to 0}\frac{u}{\log_{a}(u+1)}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\frac{1}{u}\log_{a}(u+1)}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\log_{a}(u+1)^{\frac{1}{u}}}=\frac{1}{\log_{a}e}=\frac{1}{\frac{\ln e}{\ln a}}=\ln a.$$

Atividades de avaliação

1. Calcule os limites, se existirem:

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{3x}$

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)^{x}$

Síntese do Capítulo

Iniciamos esta unidade com exemplos de sequências e gráficos de retas para compreendermos a noção de limite. Considerando uma função $f(x)$ definida em um intervalo aberto em torno de x_o, dizemos que L é o limite da função f quando x tende a x_o se à medida que x se aproxima de x_o, o valor de $f(x)$ se aproxima de L. Neste caso, escrevemos: $\lim_{x\to x_o} f(x)=L$. Uma função f é dita contínua em x_o quando $\lim_{x\to x_o} f(x)=f(x_o)$; em geral, a função é contínua num intervalo $[a,b]$ quando ela é contínua em cada ponto do intervalo.

Em seguida, descrevemos algumas propriedades operatórias básicas envolvendo limites de mais de uma função, por exemplo: considerando funções f e g, tais que existam $\lim_{x\to x_o} f(x)=L$ e $\lim_{x\to x_o} g(x)=K$, com $L,K\in\mathbb{R}$, temos:

soma: $\lim_{x\to x_o} [f(x)+g(x)]=L+K$.

diferença: $\lim_{x\to x_o} [f(x)-g(x)]=L-K$.

produto por uma constante: $\lim_{x\to x_o} (c.f(x))=c.L$

produto: $\lim_{x\to x_o} (f(x).g(x))=L.K$.

quociente: $\lim_{x\to x_o} \dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{L}{K}, com\ K\neq 0.$

potência: $\lim_{x\to xo} (f(x))^{r/s}=L^{r/s}$.

composta: $\lim_{x\to x_o} g(f(x))=g(\lim_{x\to x_o} f(x))=g(L)$.

Introduzimos o conceito de limites laterais e observamos que em pontos de descontinuidade podemos encontrar limites laterais diferentes, e que o limite existe sempre os limites laterais coincidem

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)=L \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)=L.$$

Resolvemos exemplos e exercícios relacionados a limites de funções que tendem para infinito e que vão para o infinito. Apresentamos o teorema do confronto, que diz: se $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$, para todo $x\in(a,b)$, e $c\in(a,b)$ é tal que

$$\lim_{x\to c} g(x)=\lim_{x\to c} h(x)=L, \text{ então } \lim_{x\to c} f(x)=L.$$

Finalizamos a unidade apresentando limites importantes, como limites envolvendo funções trigonométricas $\lim_{x \to 0} \frac{senx}{x} = 1$ e exponenciais $\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$

Leituras, filmes e sites

Sugerimos a utilização de programas simples para a construção de gráficos, tais como o GeoGebra, WinPlot, Graph ou outro de sua preferência.

Cálculo Diferencial e Integral - Notas de Aula: http://www.icmc.usp.br/~andcarva/sma301/Calculo1c-AM6.pdf

Fórmulas de arco duplo, arco triplo e arco metade: http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/trigonom/ trigo06.htm

Referências

ÁVILA, G. **Cálculo das funções de uma variável.** vol 1. São Paulo: LTC, 2003.

GUIDORIZZI, H. **Um Curso de Cálculo.** Rio de Janeiro: LTC, 2001.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica.** São Paulo: Harbra, 1994.

THOMAS, G. B. **Cálculo - vol. 1.** 10. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2002.

Capítulo 2

Derivadas

Objetivos

- Compreender conceito de derivada.
- Utilizar técnicas de derivação.
- Calcular derivadas utilizando as propriedades operatórias.
- Aplicar a regra da cadeia.
- Conhecer derivadas de funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas.

Introdução

O capítulo a seguir contará com exemplos iniciais para dar uma noção de derivada. A partir dos exemplos, poderemos verificar que a derivada de uma função é o limite de um quociente de duas grandezas, quando ambas se aproximam de zero. Munidos dessa ideia, passaremos às definições. Ao final desta unidade esperamos que o aluno compreenda o conceito de derivada e saiba calcular derivadas de funções utilizando a definição, as técnicas que não precisam da definição e as operações, além de saber aplicar a regra da cadeia e conhecer as derivadas de funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas.

Novamente partimos de exemplos para dar uma noção do que vem a ser a derivada.

1. Velocidade média e instantânea

Recordamos da física que a velocidade média de uma partícula que se movimenta segundo uma função do tipo $f(t) = s$, sendo s a posição e t o tempo, é descrita por:

$$V_m = \frac{s - s_0}{t - t_0} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

Essa é a velocidade média no intervalo de tempo entre t e t_o. Note que a velocidade instantânea no ponto t_o será calculada como o limite das velocidades médias quando $t \to t_o$, ou seja, será definida por:

$$V_i = \lim_{t \to t_o} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

Exemplo: Considere uma partícula que se movimenta segundo a equação $s(t)= t^2+t+5$, sendo s em metros e t em segundos.

Observe que a velocidade média entre os instantes 1 e t é dada por:

$$v_m = \frac{f(t)-f(1)}{t-1} = \frac{t^2+t+5-1^2-1-5}{t-1} = \frac{t^2+t-2}{t-1}.$$

A velocidade, no instante em que $t = 1$, é:

$$v = \lim_{t\to 1}\frac{t^2+t-2}{t-1} = \lim_{t\to 1}\frac{(t-1).(t+2)}{t-1} = \lim_{t\to 1} t+2 = 1+2 = 3m/s.$$

Se considerarmos a velocidade média entre os instantes t_o e t podemos escrever:

$$v_m = \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = \frac{t^2+t+5-(t_0^2+t_0+5)}{t-t_0} = \frac{(t^2-t_0^2)+(t-t_0)}{t-t_0}$$
$$= \frac{(t-t_0).(t+t_0)+(t-t_0)}{t-t_0} = \frac{(t-t_0).(t+t_0+1)}{t-t_0} = t+t_0+1.$$

Considerando a velocidade no instante em que $t = t_0$, temos:

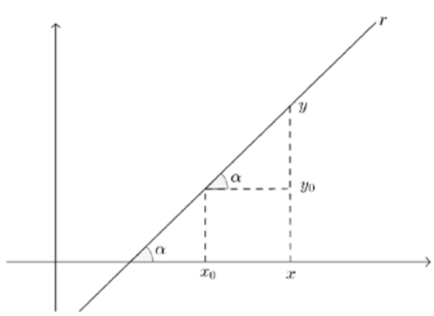
$$v_i = \lim_{t\to t_0} t+t_0+1 = 2t_0+1.$$

Teríamos, portanto, uma equação para a velocidade e poderíamos calcular a velocidade em um instante t qualquer. No caso particular de $t = 1$, escrevemos:

$$v(t) = 2t+1 \text{ e } v(1) = 2.1+1 = 3m/s.$$

2. A reta tangente a uma curva

Observando o gráfico da reta r, dada como o gráfico da função afim $f(x) = y$, podemos determinar sua inclinação como vemos na figura a seguir.



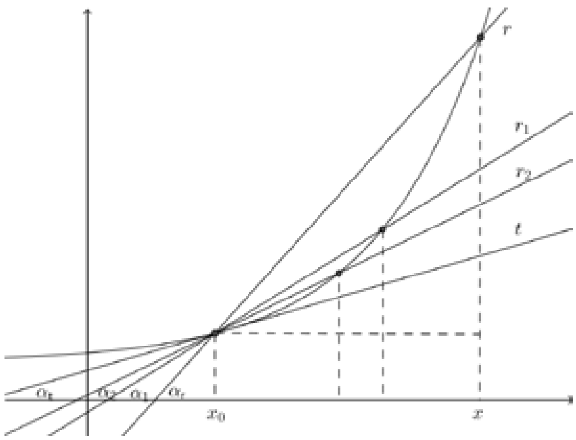
$$m_r = \frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = tg\alpha$$

Matemática básica

Lembramos que, num triângulo retângulo, temos que

$$tg\alpha = \frac{Cateto\ oposto}{Cateto\ adjacente}.$$

Consideramos agora o gráfico de uma curva dada por $f(x) = y$ e a reta r secante ao gráfico, como representado na figura a seguir. Note que quando $x \to x_o$, a reta r aproxima-se da reta t tangente à curva no ponto x_o.



Desta forma, quando o limite existir, temos que:

$$m_t = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Exemplo: Seja $f(x) = x^4 - 2x^2$. Podemos encontrar a inclinação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $x_o = 3$.

$$m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^4 - 2x^2 - x_0^4 + 2x_0^2}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{(x^2 + x_0^2)(x - x_0).(x + x_0) - 2(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} (x^2 + x_0^2 - 2)(x + x_0)$$

$$= 2x_0(2x_0^2 - 2) = 4x_0^3 - 4x_0.$$

Em particular, para $x_0 = 3$, temos que:

$$m = 4 \,.\, 3^3 - 4 \,.\, 3 = 96.$$

Conclusão: A reta tangente ao gráfico de $f(x) = y$ em um ponto $P(x_0, f(x_0))$ é a reta r que passa pelo ponto P e que tem como coeficiente angular, quando o limite existir:

$$m_r = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

3. Definição de derivada

Definição: Dada a função $f(x) = y$, chamamos de **derivada de f** de $x = x_0$, e escrevemos por $f'(x_0)$, ao limite a seguir, quando ele existir.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Podemos fazer $x = x_0 + h$, e reescrever a definição de derivada na forma:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Para facilitar, podemos trocar x_o por x e escrever:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Observação: A notação para a derivada de uma função pode variar bastante. Alguns autores preferem utilizar y', $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d}{dx}$ $f'(x)$ ou outras notações para representar a derivada, que aqui optamos por usar $f'(x)$.

Exercício resolvido

1. Determine a derivada da função $f(x) = 2x^2 + 5x$.

Solução:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{2(x+h)^2 + 5(x+h) - 2x^2 - 5x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 + 5x + 5h - 2x^2 - 5x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{4xh + 2h^2 + 5h}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} 4x + 2h + 5 \\ &= 4x + 5. \end{aligned}$$

Note que a definição foi apresentada por um limite semelhante aos apresentados nos exemplos dados, pois, a derivada mede a taxa de variação de uma função, que foi a ideia utilizada para determinar a velocidade em um ponto e o coeficiente angular da tangente em um ponto de uma curva.

Nos exemplos, observamos que os cálculos para obter a derivada utilizando a definição, nem sempre são tão fáceis, alguns poderão ser bastante trabalhosos e, por isso, passamos agora ao estudo de técnicas que facilitam o cálculo das derivadas, sem precisar recorrer à definição.

3.1 Derivadas de funções elementares

- Derivada da função constante

Seja a função constante $f(x) = c$, com x$\in \mathbb{R}$. Note que:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0.$$

Exemplo: Dada a função $f(x) = 5$, temos que $f'(x) = 0$.

- Derivada da função $f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}^*$. Lembre que quando $n \in \mathbb{N}^*$, podemos escrever $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + ... + xy^{n-2} + y^{n-1})$. Assim,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h-x)\left[(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\ldots+(x+h)x^{n-2}+x^{n-1}\right]}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left[(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\ldots+(x+h)x^{n-2}+x^{n-1}\right]\\
&= x^{n-1}+x^{n-1}+\ldots+x^{n-1}\\
&= nx^{n-1}.
\end{aligned}
$$

Exemplo: Se $f(x) = x$, então $f'(x) = 1 \,.\, x^{1-1} = x^0 = 1$.

Exemplo: Dada $f(x) = x^4$, a derivada da função é $f'(x) = 4 \,.\, x^{4-1} = 4x^3$.

Para refletir

1. Obtenha a derivada da função $f(x) = -3$ utilizando a definição e compare com a técnica das funções constantes.
2. Determine a derivada da função $f(x) = x^3$ utilizando a definição e a técnica.
3. Utilizando as técnicas determine a derivada das seguintes funções:
   a) $f(x) = 11$
   b) $f(x) = x^7$

4. Continuidade e derivabilidade

Apresentamos, até o momento, vários exemplos de funções contínuas que são deriváveis em todo o seu domínio. Mostraremos, nesta seção, que toda função derivável é contínua, mas nem toda função contínua é derivável.

Exemplo: Seja $f(x) = |x|$, que é uma função contínua. Analisando a derivada da função no ponto $x = 0$, temos que:

Se existisse a derivada de $f(x) = |x|$ em $x = 0$ teríamos:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}.$$

Porém,

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{|h|}{h} = -1 \quad e \quad \lim_{h\to 0^+}\frac{|h|}{h} = +1.$$

Como os limites laterais são diferentes, podemos afirmar que não existe $\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$. Portanto, a função não é derivável em $x = 0$.

Conclusão: A relação entre os limites, apresentadas no primeiro capítulo, vale para as derivadas, ou seja, uma função terá derivada em um ponto se e somente se possuir derivada à esquerda e à direita e estas forem iguais.

Observação: Dada uma função $f(x)$ contínua em todo o seu domínio, a função será derivável sempre que houver uma reta tangente ao gráfico da função. Neste caso, a reta não será perpendicular ao eixo x. Se observarmos “bicos” no gráfico de funções, nestes pontos a função não será derivável.

Teorema: Se f possui derivada para $x = x_0$, então a função é contínua em x_0.

Prova: Vimos no capítulo 1 que uma função é contínua se, e somente se, $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, ou seja, $lim_{h\to 0} f(x_0+h)=f(x_0)$.

Como f é derivável em x_0 então existe $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ temos:

$$\lim_{h\to 0}[f(x_0+h)-f(x_0)] = \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.h\right] = f'(x_0).0 = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} f(x_0+h) &= \lim_{h\to 0}[f(x_0+h)-f(x_0)+f(x_0)]\\ &= \lim_{h\to 0}[f(x_0+h)-f(x_0)] + \lim_{h\to 0} f(x_0)\\ &= 0 + f(x_0)\\ &= f(x_0).\end{aligned}$$

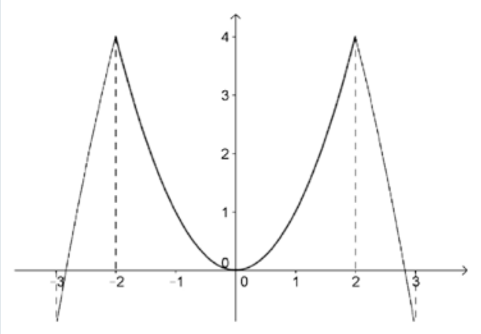
Para refletir

1. Determine as derivadas laterais para $x = 0$, na função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & se\ x \geq 0 \\ -x, & se < 0 \end{cases}$$

Conclua se a função possui derivada no ponto $x = 0$.

2. Analise o gráfico abaixo e conclua se a função é contínua em todos os pontos do intervalo fechado dado e aponte se existirem pontos de descontinuidade. Observe, também, se a função é derivável em todo o intervalo e apresente, caso existam, pontos em que a função não é derivável.



5. Propriedades operatórias das derivadas

Aprendemos algumas técnicas que facilitam o cálculo de derivadas, sem necessariamente utilizar a definição.

Consideremos as funções $r(x)$ e $s(x)$ deriváveis, e suas derivadas $r'(x)$ e $s'(x)$, respectivamente. Veremos como se torna fácil derivar funções utilizando as técnicas que apresentamos a seguir.

5.1 Derivada do produto de uma constante por uma função

Dada $f(x) = c \,.\, r(x)$, com $c \in \mathbb{R}$. Calculemos $f'(x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{c\,.\,r(x+h)-c\,.\,r(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left[c\,.\,\frac{r(x+h)-r(x)}{h}\right] \\ &= c\,.\,\lim_{h\to 0}\frac{r(x+h)-r(x)}{h} \\ &= c\,.\,r'(x). \end{aligned}$$

Exercício resolvido

1. Dada $f(x) = 3x^4$, calcule $f'(x)$.

Solução: Considere $r(x) = x^4$, assim $r'(x) = 4x^3$. Logo: $f'(x)=3\,.\,r'(x) = 3\,.\,4x^3=12x^3$.

5.2 Derivada da soma

Seja $f(x) = r(x) + s(x)$. Desejamos calcular $f'(x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{r(x+h)+s(x+h)-r(x)-s(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{r(x+h)-r(x)}{h}+\frac{s(x+h)-s(x)}{h}\right] \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{r(x+h)-r(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{s(x+h)-s(x)}{h} \\ &= r'(x)+s'(x). \end{aligned}$$

Observação: A propriedade da derivada da soma vale para somas de funções com qualquer quantidade finita de parcelas.

Exemplo: Sejam $f(x) = r(x) + s(x)$, onde $r(x) = 3x^2$ e $s(x) = 2x$. Podemos calcular a derivada da função f como:

$$f'(x) = r'(x) + s'(x) = 6x + 2.$$

5.3. Derivada de um polinômio

A derivada de um polinômio pode ser facilmente encontrada, derivando termo a termo, utilizando as propriedades anteriores.

Exercício resolvido: Encontre a derivada da função polinomial

$$y = 2x^6 - x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 6x - 4.$$

Solução:

$$y' = 2\,.\,6x^5 - 5x^4 + 3\,.\,4x^3 - 4\,.\,3x^2 + 2\,.\,2x + 6$$
$$y' = 12x^5 - 5x^4 + 12x^3 - 12x^2 + 4x + 6.$$

5.4. Derivada do produto de duas funções

Considere agora $f(x) = r(x)\,.\,s(x)$. Desejamos determinar uma expressão para encontrar $f'(x)$.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{r(x+h)s(x+h) - r(x)s(x)}{h}$$

Sem alterar a expressão podemos somar e subtrair o termo $r(x)s(x+h)$ e teremos:

$$\begin{aligned}
f'(x) = {} & \lim_{h\to 0}\frac{r(x+h)s(x+h) - r(x)s(x+h) + r(x)s(x+h) - r(x)s(x)}{h} \\
& \lim_{h\to 0}\frac{[r(x+h) - r(x)]s(x+h) + r(x)[s(x+h) - s(x)]}{h} \\
& \lim_{h\to 0}\frac{[r(x+h) - r(x)]s(x+h)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{r(x)[s(x+h) - s(x)]}{h} \\
& \lim_{h\to 0}\frac{r(x+h) - r(x)}{h}\,.\,\lim_{h\to 0}s(x+h) + \lim_{h\to 0}r(x)\,.\,\lim_{h\to 0}\frac{[s(x+h) - s(x)]}{h} \\
& = r'(x)\,.\,s(x) + r(x)\,.\,s'(x)\,.
\end{aligned}$$

Exercício resolvido

1. Dada a função $f(x) = (x^3 - 5x)\,.\,(x - 1)$, determine a derivada de f.

Solução: Considerando $r(x) = x^3 - 5x$ e $s(x) = x - 1$, temos que $r'(x) = 3x^2 - 5$ e $s'(x) = 1$. e. Assim,

$$f'(x) = r'(x).s(x) + r(x).s'(x) = (3x^2 - 5).(x - 1) + (x^3 - 5x).1$$
$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 10x + 5.$$

5.5 Derivada do quociente de duas funções

Seja $f(x)=\dfrac{r(x)}{s(x)}$. Obteremos uma expressão para calcular $f'(x)$.
Podemos escrever que

$$r(x) = f(x) \, . \, s(x).$$

Aplicando a regra da derivada do produto, temos que:

$$r'(x) = f'(x) \, . \, s(x) + f(x) \, . \, s'(x).$$

Substituindo $f(x)$ e isolando $f'(x)$, encontraremos a expressão desejada.

$$\begin{aligned}
&r'(x) = f'(x)\cdot s(x) + \frac{r(x)}{s(x)}\cdot s'(x)\\
&r'(x)\cdot s(x) = f'(x)\cdot[s(x)]^2 + r(x)\cdot s'(x)\\
&f'(x) = \frac{r'(x)\cdot s(x) - r(x)\cdot s'(x)}{s(x)^2}.
\end{aligned}$$

Exemplo: Dada a função $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-2x}$, calculamos $f'(x)$ considerando que $r(x) = 2x$ e $s(x) = x^2 - 2x$ e utilizando a expressão acima.

Calculando inicialmente as derivadas de $r(x)$ e $s(x)$, temos que $r'(x) = 2$ e $s'(x) = 2x - 2$ e , logo:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2\cdot(x^2-2x) - 2x\cdot(2x-2)}{(x^2-2x)^2}\\
&= \frac{-2x^2}{x^4-4x^3+4x^2}\\
&= \frac{-2}{x^2-4x+4}.
\end{aligned}$$

5.6 Derivada de potências com expoente negativo

Quando os expoentes são inteiros negativos, aplicamos a mesma técnica utilizada para inteiros positivos, demonstrada anteriormente. Dessa forma, se $f(x) = x^n$, então:

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

Exercícios resolvidos

1. Determine a derivada da função $f'(x) = 5x^{-4}$.

Solução: $f'(x) = 5 \, . \, (-4) \, . \, x^{-4-1} = -20x^{-5}$.

Observação: Na realidade, essa fórmula valerá para qualquer expoente real, como veremos mais adiante e demonstramos no exercício a seguir para $f(x)=\sqrt{x}$.

2. Dada a função $f(x)=\sqrt{x}$. encontre $f'(x)$, utilizando a definição.

Solução:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}.$$

Multiplicando o numerador e o denominador por $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$, encontramos:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Note que utilizando a regra da potência encontraríamos o mesmo resultado, isso é:

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \text{ e } f'(x) = \tfrac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

5.7 Derivadas de ordem superior

Dada uma função $f(x)$, a derivada da função é chamada de derivada primeira e representada por $f'(x)$. Se $f'(x)$ for derivável, sua derivada será chamada derivada segunda e será representada por $f''(x)$. Se $f''(x)$ ainda for derivável, sua derivada será chamada derivada terceira e será representada por $f'''(x)$ e assim sucessivamente, usando $f^{(n)}(x)$ para representar as derivadas de ordens superiores.

Para refletir

1. Determine a derivada de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = 2x^5$

b) $f(x) = x^2 - 3x + 1$

c) $f(x) = 3x^5 - x^4 + 2x + 1$

d) $f(x) = \dfrac{5x^3}{3} + \dfrac{3x^2}{2}$

e) $f(x) = \dfrac{x^4}{24}$

f) $f(x) = (x^2 - 3)(x + 1)$

g) $f(x) = (-x^2 + 2)(x^2 - 2x + 1)$

h) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$

i) $f(x) = \dfrac{3x + 1}{x^5}$

j) $f(x) = 2x^{-4}$

k) $f(x) = x^{-3} + 8x^{-2}$

l) $f(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{4}{x^4}.$

(Sugestão: escreva as potências de x como expoentes negativos).

2. Encontre uma equação para a reta tangente à curva $c(x)=x^2-6x+5$, no ponto (2,-3).

   Sugestão: encontre o coeficiente angular que é a derivada da função e utilize os conhecimentos de Geometria Analítica para a determinação da equação da reta conhecendo a inclinação e um ponto, ou seja, $y-y_0=m(x-x_0)$.

3. Determine as derivadas de todas as ordens de $f(x)=x^5$.

6. A regra da cadeia

A regra da cadeia é uma regra de derivação para a composição de funções.

Matemática básica: Dadas duas funções r e s, com a condição de que a imagem de r esteja contida no domínio de s, podemos considerar a função composta:

$$f(x)=r(s(x))=(r\circ s)(x).$$

6.1 Derivada da função composta

Sejam r e s funções reais tais que s seja derivável em x e r seja derivável em $s(x)$, ou seja, satisfeita a condição de que a imagem da função s esteja contida no domínio da função r, desejamos encontrar uma regra para derivar a função composta $f(x) = r(s(x))$.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{r(s(x+h))-r(s(x))}{h}.$$

Multiplicando numerador e denominador por $s(x+h)-s(x)$, não alteramos a fração e podemos reagrupar o produto da seguinte maneira:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{r(s(x+h))-r(s(x))}{s(x+h)-s(x)}\cdot\frac{s(x+h)-s(x)}{h}.$$

Note que quando $h\to 0$, temos que $v = s(x+h)-s(x)\to 0$. Utilizando a definição de derivada e a regra do produto para limites, escrevemos:

$$f'(x)=\lim_{v\to 0}\frac{r(s(x)+v)-r(s(x))}{v}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{s(x+h)-s(x)}{h}.$$

$$f'(x)=r'(s(x))\cdot s'(x)$$

Exercícios resolvidos

1. Derive a função $f(x)=(x^2+3)^5$:

Solução: Considere $f(x) = r(s(x))$, com $r(s) = s^5$ e $s(x) = x^2 + 3$. Assim,

$$f'(x) = r'(s)\,.\,s'(x) = 5\,.\,s^4\,.\,2x = 5\,.\,(x^2 + 3)^4\,.\,2x = 10x(x^2 + 3)^4$$

2. Dada a função $f(x)=\sqrt{4x^2-5x}$, determine a derivada da função f.

Solução: Fazendo $f(x) = r(s(x))$, com $r(s)=\sqrt{s}$ e $s = 4x^2-5x$. Escrevemos:

$$f'(x) = r'(s)\cdot s'(x) = \frac{1}{2\sqrt{s}}\cdot(8x-5) = \frac{8x-5}{2\sqrt{4x^2-5x}}.$$

Para refletir

1. Calcule a derivada de cada uma das funções a seguir.

a) $f(x)=(x^5+2x^3)^4$

b) $f(x)=\sqrt{x^6+2x^4-7x^2}$

c) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$

d) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

e) $f(x)=(3x^2-5x-2)^{-2}$

2. Determine a derivada primeira e a derivada segunda da função $f(x)=(x^2-7x)^3$.

6.2 Derivada de funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas

Calcularemos agora as derivadas do seno, cosseno e tangente, utilizando os limites já encontrados no capítulo 1, na seção Limite Trigonométrico Fundamental, e algumas identidades trigonométricas bem conhecidas. A partir dessas derivadas poderemos calcular as derivadas das demais funções trigonométricas.

a) **Derivada do seno**

Seja $f(x) = sen\, x$, temos que:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{sen(x+h)-senx}{h}.$$

Recorde que: $sen(a+b) = sena\cdot\cos b + senb\cdot\cos a$

Assim,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{senx\cdot\cosh + senh\cdot\cos x - senx}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{senh\cdot\cos x + senx(\cosh - 1)}{h}\\
&= \cos x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{senh}{h} + senx\cdot\lim_{h\to 0}\left(\frac{\cosh - 1}{h}\right)\\
&= 1\cdot\cos x + senx\cdot 0\\
&= \cos x.
\end{aligned}$$

b) Derivada do cosseno

Seja $f(x) = cosx$, temos que:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}.$$

Recorde que:

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - sena \cdot senb$$

Assim,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\cos x \cdot \cosh - senx \cdot senh - \cos x}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0}\left[\cos x \cdot \frac{\cosh - 1}{h}\right] - \lim_{h \to 0}\left[senx \cdot \frac{senh}{h}\right]$$
$$= (\cos x) \cdot 0 - (senx) \cdot 1$$
$$= -senx.$$

c) Derivada da tangente

Seja $f(x) = tgx$, temos que:

$$f(x) = tgx = \frac{senx}{\cos x}.$$

Utilizando a derivada do quociente, temos:

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot \cos x - senx \cdot (-senx)}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\cos^2 x + sen^2 x}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$= \sec^2 x.$$

Para refletir

1. Obtenha a derivada das seguintes funções:

a) $f(x) = -2senx$

b) $f(x) = 5\cos x$

c) $f(x) = \cot gx$

d) $f(x) = \sec x$

e) $f(x) = \text{cossec}\, x$

f) $f(x) = \dfrac{senx - \cos x}{2}$

g) $f(x) = 2senx + 3\cos x - 1$

2. Seja $f(x) = senx$, determine $f^{(48)}(x)$:

3. Encontre a derivada da função $f(x) = sen\, x \,.\, cosx{-}1$

4. Utilize a regra da cadeia para derivar as seguintes funções:

a) $f(x) = sen2x$

b) $f(x) = \cos 4x$

c) $f(x) = (\cos x)^5$

d) $f(x) = x \cdot sen^2 x$

e) $f(x) = sen(x^2 - 5x)$

6.3. Derivada das funções exponenciais

Seja $f(x)=a^x,\ a>0\ e\ a\neq 1$. Desejamos calcular $f'(x)$.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^x a^h-a^x}{h}=\lim_{h\to 0}\left[a^x\cdot\left(\frac{a^h-1}{h}\right)\right]=a^x\cdot\ln a.$$

Lembre de que, no final do capítulo 1, encontramos que $\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=\ln a$.

Exercícios resolvidos

1. Determine a derivada da função $f(x)=3^x$.

Solução: $f'(x)=3^x\ln 3$.

2. Encontre $f'(x)$ da função $f(x)=e^x$

Solução:

$f'(x)=e^x \ln e=e^x$.

6.4 Derivada das funções logarítmicas

Dada a função $f(x)=\log_a x,\ x>0,\ a>0\ e\ a\neq 1$. Calcularemos $f'(x)$.

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot[\log_a(x+h)-\log_a x]\\&=\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{h}\cdot\log_a\left(\frac{x+h}{x}\right)\right]\\&=\lim_{h\to 0}\left[\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right]\end{aligned}$$

Fazendo $t=\frac{h}{x}\Rightarrow\frac{1}{h}=\frac{1}{t\cdot x}$, e quando $h\to 0$, temos que $t\to 0$. Assim, o limite anterior pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned}&=\lim_{t\to 0}\left[\log_a(1+t)^{\frac{1}{t\cdot x}}\right]\\&=\lim_{t\to 0}\left\{\log_a\left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{\frac{1}{x}}\right\}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{\ln\left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{\frac{1}{x}}}{\ln a}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{x}\ln\left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]}{\ln a}\\&=\frac{1}{x\ln a}.\end{aligned}$$

No último passo usamos o limite fundamental $\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}$ = e, visto na Unidade 1.

Exercícios resolvidos

1. Determine a derivada das seguintes funções:

a) $f(x) = 2\ln x$

Solução: $f'(x) = 2 \cdot \dfrac{1}{x \ln e} = \dfrac{2}{x}$.

b) $f(x) = \log x$

Solução: $f'(x) = \dfrac{1}{x \ln 10}$.

c) $f(x) = 1 + 3\ln x$

Solução: $f'(x) = 0 + 3 \cdot \dfrac{1}{x \ln e} = \dfrac{3}{x}$.

2. Generalize a derivada de $f(x) = x^a$, para qualquer $a \in \mathbb{R}$.

Solução: Seja $f(x) = x^a$, para $a \in \mathbb{R}$, temos que: $\ln f(x) = \ln x^a$

$\ln f(x) = a \cdot \ln x$.

Derivando e usando a regra da cadeia, encontramos que:

$$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = a \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{a \cdot f(x)}{x} = \frac{a \cdot x^a}{x} = a \cdot x^{a-1}.$$

Atividades de avaliação

1. Determine as derivadas das funções:

a) $f(x) = 5e^x$

b) $f(x) = 2^x + x^2$

c) $f(x) = \log_3 x$

d) $f(x) = 3^x + 5\ln x$

e) $f(x) = x \ln x$

f) $f(x) = 3^x(1 + \ln x)$

g) $f(x) = senx(e^x + \log_2 x)$

h) $f(x) = 5^x e^{-2x}$

2. Utilize a regra da cadeia para derivar as funções dadas:

a) $f(x) = 3^{senx}$

b) $f(x) = \log_3 \sqrt{x}$

c) $f(x) = e^{x^2+1}$

Observação: Seja $f(x) = y$ uma função derivável e bijetora em seu domínio de definição. Podemos determinar a derivada da função inversa.

Como $f(x) = y$, temos que $f^{-1}(y) = x$. Dessa forma, podemos aplicar a regra da cadeia para obter:

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

$$[f^{-1}]'(y) \cdot f'(x) = 1$$

$$[f^{-1}]'(y) = \frac{1}{f'[f^{-1}(y)]}.$$

Exemplo: Seja $f(x) = arcsenx$. Queremos encontrar a derivada da função f. Lembre que $y = arcsen\, x \Leftrightarrow x = sen\, y$. Assim,

$$sen\, y = x$$

Derivando, temos:

$$\cos y \,.\, f'(x) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos y}$$

Lembrando que $sen^2 y + cos^2 y = 1$, temos que $\cos y = \sqrt{1 - sen^2\, y} = \sqrt{1 - x^2}$. Desta forma:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

3. Determine as derivadas das funções trigonométricas inversas a seguir:

a) $f(x) = arccos\, x$

b) $f(x) = arctg\, x$

c) $f(x) = arccotg\, x$

d) $f(x) = arcsec\, x$

Síntese do Capítulo

Iniciamos esta unidade com exemplos envolvendo o cálculo das velocidades média e instantânea de um objeto e gráficos de retas tangentes à curvas, para introduzir a noção de derivada. Dada uma função $f(x) = y$, definimos a derivada de f como

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Concluímos, para $r(x)$ e $s(x)$ deriváveis, as seguintes propriedades operatórias:

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
$c \cdot r(x)$	$c \cdot r'(x)$
$r(x)+s(x)$	$r'(x)+s'(x)$
$r(x) \cdot s(x)$	$r'(x) \cdot s(x)+r(x) \cdot s'(x)$
$\frac{r(x)}{s(x)}$	$\frac{r'(x) \cdot s(x) - r(x) \cdot s'(x)}{s(x)^2}$
x^n	$n \,.\, x^{n-1}$

Provamos que se f possui derivada em x_o, então f é contínua em x_o. Padronizamos a notação para derivadas de ordem superior da função $f(x)$, usando $f'(x), f''(x), f'''(x)$ e $f^{(n)}(x)$, para $n > 3$.

Apresentamos a regra da cadeia para $f(x) = r(s(x))$, com s derivável em x e r derivável em $s(x)$, temos

$$f'(x) = r'(s(x)) \,.\, s'(x).$$

Estudamos outras derivadas importantes:

$f(x)$	$f'(x)$
$senx$	$cosx$
$cosx$	$- senx$
tgx	sec^2x
a^x	$a^x \cdot lna$
$log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$

Encontramos a derivada da inversa de $f(x) = y$, derivável e bijetora em seu domínio de definição, como $[f^{-1}]'(y) = \frac{1}{f'[f^{-1}(y)]}$.

Leituras, filmes e sites

Derivadas: http://pt.wikipedia.org/wiki/Derivada

Derivadas de funções: http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/superior/calculo/derivada/derivada2.htm

Tabela de derivadas: http://pt.wikipedia.org/wiki/Tabela_de_derivadas

Referências

ÁVILA, G. **Cálculo das funções de uma variável.** vol 1. São Paulo: LTC, 2003.

GUIDORIZZI, H. **Um Curso de Cálculo**. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. São Paulo: Harbra, 1994.

THOMAS, G. B. **Cálculo - vol. 1**. 10. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2002.

Capítulo 3

Aplicações das derivadas

Objetivos

- Identificar intervalos de crescimento e decrescimento de funções.
- Identificar pontos de máximos e mínimos, absolutos e relativos.
- Utilizar a primeira e a segunda derivadas na construção de gráficos de funções.
- Resolver problemas de otimização utilizando derivadas.
- Aplicar a regra de L'Hôpital para resolver limites.

Introdução

No capítulo anterior já havíamos identificado que, com a derivada de uma função em um ponto, seria possível determinar a equação da reta tangente à curva neste ponto. Neste capítulo conheceremos outras aplicações das derivadas. Ao final do capítulo, esperamos que o aluno seja capaz de utilizar a derivada primeira para apontar pontos críticos de uma função, identificando se estes são pontos de máximo, mínimo ou inflexão. Além disso, desejamos que o aluno saiba utilizar a derivada primeira e a derivada segunda na construção de gráficos, em problemas de otimização e na aplicação da regra de L'Hôpital.

1. Equação da reta tangente

Como já mencionamos anteriormente, uma das aplicações das derivadas é a possibilidade de encontrar a equação da reta tangente a uma curva $f(x)$ em um ponto dado, considerando que $f(x)$ é derivável neste ponto e sabendo que $f'(x)$ é o coeficiente angular da reta. Vejamos mais alguns exemplos.

Matemática básica

A equação de uma reta que passa por um ponto dado (x_o, y_o) e tem coeficiente angular m é da forma:

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

Exemplo: Podemos obter a equação da reta tangente à curva.

$$f(x) = x^2 - 6x + 2 \quad em \quad x = 4.$$

Note que, para $x = 4$, temos

$$y = f(4) = 4^2 - 6 \cdot 4 + 2 = 16 - 24 + 2 = -6.$$

Devemos calcular, agora, a derivada da função no ponto $x = 4$.

$f'(x) = 2x - 6$, logo $f'(4) = 2 \cdot 4 - 6 = 2$. Dessa forma, a equação da reta tangente à curva no ponto $(4, -6)$ é:

$y - (-6) = 2(x - 4)$

$y + 6 = 2x - 8$

$y = 2x - 14.$

Para refletir

1. Encontre a equação da reta tangente à curva $f(x) = 3x^2 - 5x$ no ponto em que $x = 1$.
2. Ache a equação da reta tangente à circunferência $y = \sqrt{2 - x^2}$ no ponto $(1, 1)$.

2. Crescimento e decrescimento de funções

Definição: uma função f é **crescente** quando, atribuindo valores crescentes para x, encontramos valores crescentes de $f(x)$, ou seja, considerando $x_1 < x_2$, encontramos $f(x_1) < f(x_2)$.

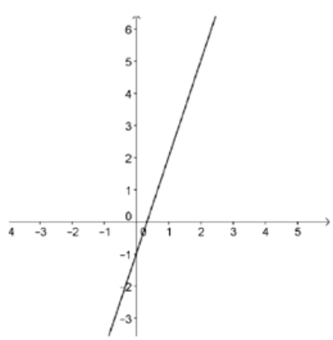
Definição: uma função f é **decrescente** quando, atribuindo valores crescentes para x, encontramos valores decrescentes de $f(x)$, ou seja, considerando $x_1 < x_2$, encontramos $f(x_1) > f(x_2)$.

Uma função pode não ser crescente em todo o seu domínio. Nesse caso, podemos encontrar intervalos, nos quais a função é crescente e outros em que ela é decrescente.

Exemplos:

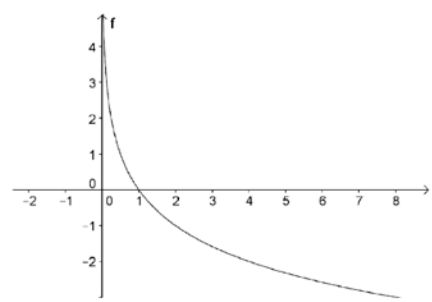
1. Observando os gráficos das funções, podemos verificar o seu crescimento ou decrescimento.

a)



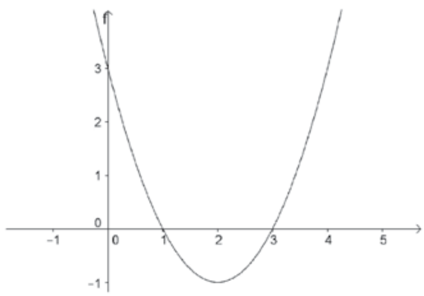
Crescente

b)



Decrescente

c)



Decrescente no intervalo $]-\infty, 2]$

Crescente no intervalo $[2, +\infty[$.

2. Analisando o crescimento e decrescimento da função

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & se\ x \geq 0 \\ 1-x, & se\ x < 0 \end{cases}.$$

Notamos que, para valores maiores que zero e $x_1 < x_2$, temos:

$x_1 < x_2$

$1 + x_1 < 1 + x_2$

$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f$ é $crescente\ em\ [0, +\infty]$

Para valores menores que zero e considerando $x_1 < x_2$, temos:

$x_1 < x_2$ multiplicando por –1.

$-x_1 > -x_2$

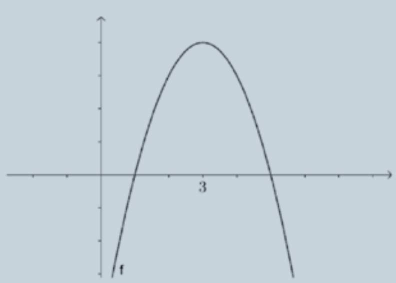
$1 - x_1 > 1 - x_2$

$f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow$ é decrescente em $]-\infty, 0]$.

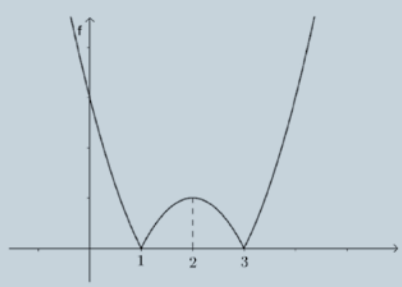
Para refletir

1. Observando os gráficos, identifique intervalos de crescimento ou decrescimento:

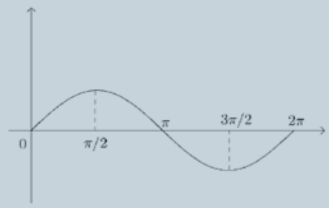
a)



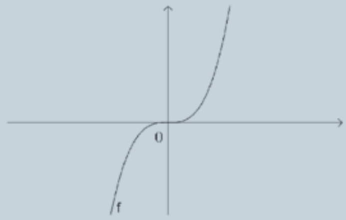
b)



c)



d)



2. Analise, quanto ao crescimento ou decrescimento, a função $f(x)=\dfrac{1}{x}$, quando $x > 0$.

3. Máximos e mínimos

Definição: uma função f tem **máximo absoluto** em um ponto x_o, se para todo x do seu domínio, temos que $f(x) \leq f(x_0)$. Nesse caso, $f(x_0)$ é chamado valor máximo da função.

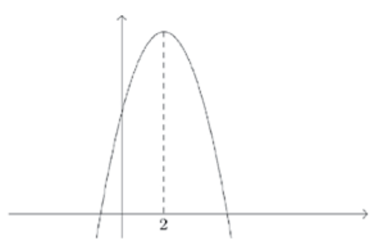
Definição: uma função f tem **mínimo absoluto** em um ponto x_o, se para todo x do seu domínio, temos que $f(x) \geq f(x_0)$. Nesse caso, $f(x_0)$ é chamado valor mínimo da função.

Podemos nos referir aos pontos de máximos e mínimos absolutos como pontos **extremos absolutos** da função.

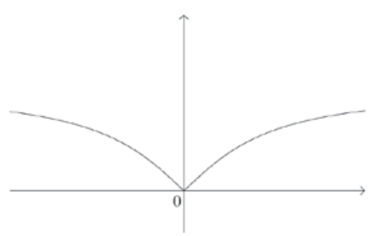
Exercício resolvido

1. Determine o valor de máximo ou mínimo absoluto, analisando os gráficos das funções:

a)



b)



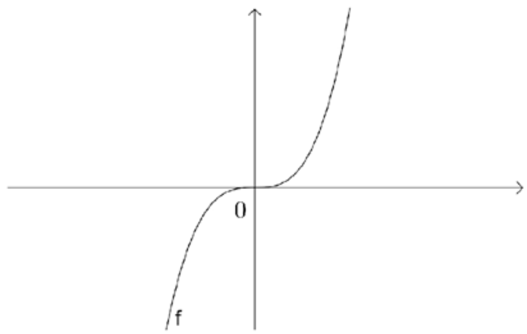
Solução: a) $x = 2$ é ponto de máximo absoluto b) $x = 0$ é um ponto de mínimo absoluto.

Definição: Considere x_0 um ponto do domínio da função f. Temos que $f(x_0)$ será:

1. um valor **máximo local (ou relativo)** em x_o, quando $f(x) \leq f(x_o)$ para qualquer x na interseção do domínio de f com um intervalo aberto I contendo x_o.
2. Um valor **mínimo local (ou relativo)** em x_o, quando $f(x) \geq f(x_o)$ para qualquer x na interseção do domínio de f com um intervalo aberto I contendo x_o.

Chamamos de **pontos críticos** os pontos em que $f'(x) = 0$. Os extremos locais são pontos que tem $f'(x) = 0$, pois a reta tangente ao gráfico, nesses pontos, é paralela ao eixo . Por outro lado, nem todo ponto que tem a derivada zero é um extremo local, como veremos no exemplo a seguir.

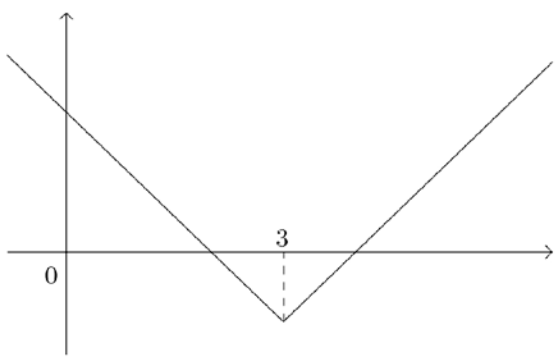
Exemplo: Seja $f(x) = x^3$. Neste caso, $f'(x) = 3x^2$ e $f'(x) = 0$ somente para $x = 0$. Porém, pela definição, este ponto não é um extremo local.



Nesse caso, o ponto $x = 0$ é chamado **ponto de inflexão**.

Quando encontramos os valores em que a derivada se anula, temos os possíveis candidatos a extremos locais onde a função é derivável. Porém, extremos locais podem ocorrer em pontos onde a função não é derivável.

Exemplo: Considere a função $f(x) = |-x + 3| - 1$. Observe que a função não é derivável para $x = 3$, mesmo assim, pela definição, este ponto é um mínimo local.



Conclusão: Se o ponto x_o do domínio de uma função é um extremo local, então teremos que uma das seguintes afirmações é verdadeira:

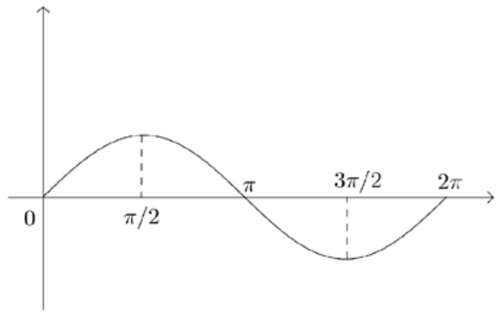
a) f não é derivável no ponto x_o.

b) f é derivável e $f'(x_o) = 0$.

Quando desejamos encontrar máximos e mínimos absolutos de funções deriváveis, em um intervalo $[a, b]$, determinamos os pontos críticos no intervalo aberto (a,b) e comparamos com as extremidades $f(a)$ e $f(b)$. O maior e o menor desses valores serão, respectivamente, o máximo e o mínimo absoluto.

Exercícios resolvidos

1. Analise a função $f(x) = sen\ x$, para valores de x no intervalo fechado $[0, 2\pi]$ e determine o que se pede:



a) máximos locais

Solução: $x = \dfrac{\pi}{2}\ \ e\ \ x = 2\pi$

b) mínimos locais

Solução: $x = 0\ \ e\ \ x = \dfrac{3\pi}{2}$.

c) máximo absoluto

Solução: $x = \dfrac{\pi}{2}$.

d) mínimo absoluto

Solução: $x = \dfrac{3\pi}{2}$.

2. Determine os pontos de máximo e mínimo absoluto da função $f(x) = x^3 - x^2 + 2$, no intervalo $[-1,3]$.

Solução:

A função não possui pontos de descontinuidade e para determinar os pontos críticos basta encontrar os pontos que anulam a derivada.

$f'(x) = 3x^2 - 2x$

$x(3x - 2) = 0$

$x = 0$ ou $x = \dfrac{2}{3}$

Determinamos os valores de f para os extremos e os pontos críticos.

$$f(-1) = 0, f(3) = 20, f(0) = 2 \quad e \quad f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{50}{27}.$$

Comparando os valores, temos que: em $x = -1$ encontramos o mínimo absoluto e em $x = 3$ encontramos o máximo absoluto.

Para refletir

1. Seja $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 2,\ x \in [-3,2]$. Encontre os pontos de máximo e mínimo absolutos da função.

2. Determine os pontos críticos da função $f(x) = |-x^2 + 4x|$.

3. Encontre máximos e mínimos absolutos de cada função:

   a) $f(x) = 3x - 1$, com $x \in [-2,3]$.
   b) $f(x) = x^2 - 16$, com $x \in \mathbb{R}$
   c) $f(x) = x^3 - 3x - 11$, com $x \in [-2,2]$

4. Utilizando a derivada primeira e a derivada segunda para traçar gráficos

Teste da derivada primeira: Seja f uma função derivável em (a,b).

1) Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$ então f é crescente em todo o seu domínio.

2) Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a,b)$ então f é decrescente em todo o seu domínio.

Demonstração: Demonstraremos para $f'(x) > 0$. O caso em que $f'(x) < 0$ pode ser feito de maneira totalmente análoga.

1) Supondo que $f'(x) > 0$ para um ponto $x \in (a,b)$ temos

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) > 0.$$

Sendo assim, para valores pequenos de h, temos

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0.$$

Se $h > 0 \Rightarrow x+h > x$ e $f(x+h) - f(x) > 0$, donde segue que $f(x+h) > f(x)$, para $h > 0$.

Por outro lado, se $h < 0 \Rightarrow x+h < x$ e $f(x+h) - f(x) < 0$. Nesse caso, concluímos que

$f(x+h) < f(x)$, para $h < 0$.

Em ambos os casos, f é crescente perto do ponto $x \in (a,b)$. Como $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$, a função f é crescente em todo o intervalo (a,b).

Utilizamos essa informação para identificar se um ponto crítico é um extremo local.

Conclusão: Para identificar se um ponto crítico x_o é um extremo local de f, é necessário verificar se f' muda de sinal.

a) Se $f'(x) > 0$ antes de x_o (à esquerda de x_o) e $f'(x) < 0$ depois dele (à direita de x_o), temos que x_o é um ponto de máximo local da função f.

b) Se $f'(x) < 0$ antes de x_o (à esquerda de x_o) e $f'(x) > 0$ depois dele (à direita de x_o), temos que x_o é um ponto de mínimo local da função f.

c) Se não houver mudança de sinal antes e depois do ponto crítico x_o, então x_o não é máximo, nem mínimo local.

Exercício resolvido

Encontre os pontos críticos da função $f(x) = x^3 - 6x$. Use a derivada primeira para identificar intervalos de crescimento e decrescimento e pontos de máximo e mínimo locais.

Solução: Calculamos inicialmente a derivada e os valores que tornam $f'(x) = 0$.

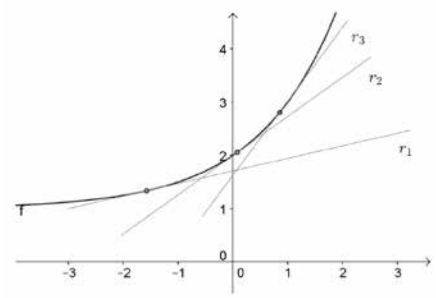
$$f'(x) = 3x^2 - 6$$

$3x^2 - 6 = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{2}\ \ ou\ \ x = \sqrt{2},$ que são os pontos críticos.

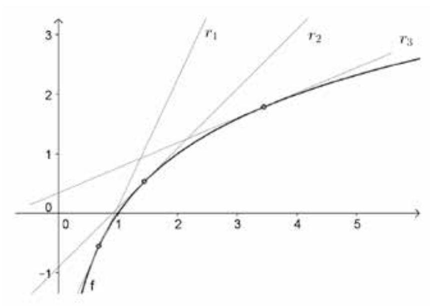
Testando valores temos: para $x < -\sqrt{2}$, vemos que $f'(x) > 0$ e a função é crescente; $f'(x) < 0$ para $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2},$ e a função é decrescente neste intervalo; para $x > \sqrt{2},$ vemos que $f'(x) > 0$ e a função é crescente. Dessa forma, concluímos que $-\sqrt{2}$ é um ponto de máximo local e $\sqrt{2}$ é um ponto de mínimo local.

Analisando os gráficos de curvas crescentes e decrescentes, notamos que:

a) a concavidade está voltada para cima quando a derivada é crescente, ou seja, quando a derivada segunda é maior que zero. Note que na medida em que x cresce a inclinação das retas tangentes também cresce.



b) a concavidade está voltada para baixo quando a derivada é decrescente, ou seja, quando a derivada segunda é menor que zero. Nesse caso, quando x cresce a inclinação das retas tangentes diminui.



Teste da concavidade: Seja f uma função que é duas vezes derivável em um intervalo aberto (a,b).

a) Se $f''(x) > 0$, para todo $x \in (a,b)$ então, neste intervalo, a concavidade do gráfico de f está voltada para cima.

b) Se $f''(x) < 0$, para todo $x \in (a,b)$ então, neste intervalo, a concavidade do gráfico de f está voltada para baixo.

Observação: Se a concavidade mudar de sentido sem que a função tenha mudado o crescimento, temos um ponto de inflexão.

No teste da derivada primeira é necessário conhecer os sinais da derivada primeira em certos intervalos. O teste a seguir torna o trabalho ainda mais fácil, sendo necessário, apenas, conhecer a derivada segunda nos pontos críticos.

Teste da derivada segunda: Seja x_o um ponto crítico da função f, ou seja, $f'(x_o) = 0$.

a) Se $f''(x_o) < 0$, então x_0 é um ponto de máximo local.

b) Se $f''(x_o) > 0$, então x_0 é um ponto de mínimo local.

Observação: Se em x_o, temos que $f''(x_o) = 0$ e a concavidade muda de sentido, então este ponto é um ponto de inflexão.

Exercício resolvido: Encontre os pontos críticos da função $f(x) = x^3 - 6x$. Use a derivada primeira e a derivada segunda para identificar pontos de máximo e mínimo absolutos.

Solução: Calculamos $f'(x)$, $f''(x)$ e os valores que tornam $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 3x^2 - 6 \ \ e \ \ f''(x) = 6x$$

$3x^2 - 6 = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{2} \ ou \ x = \sqrt{2}$ que são os pontos críticos.

$f''(-\sqrt{2}) = -6\sqrt{2} < 0,$ logo ponto de máximo.

$f''(\sqrt{2}) = 6\sqrt{2} > 0,$ logo ponto de mínimo.

Verificamos que os testes anteriormente mostrados são bons indicadores na hora da construção de gráficos de funções. Podemos ter em mente alguns dados importantes, como:

a) conhecer os pontos críticos;

b) intervalos de crescimento e decrescimento;

c) posição da concavidade;

d) interseções com os eixos coordenados;

e) limites próximos dos pontos de descontinuidade e no infinito.

Exercício resolvido: Esboce o gráfico da função $f(x) = x^5 - 5x$.

Solução: Note que f é contínua. Calculando a derivada primeira e a derivada segunda, temos:

$f'(x) = 5x^4 - 5 \;\; e \;\; f''(x) = 20x^3$

$5x^4 - 5 = 0 \Rightarrow x = -1 \;\; e \;\; x = 1$ que são as raízes reais e $20x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$

Observe que

$f(-1) = 4 \;\; e \;\; f''(-1) = -20 < 0,$ logo ponto de máximo,

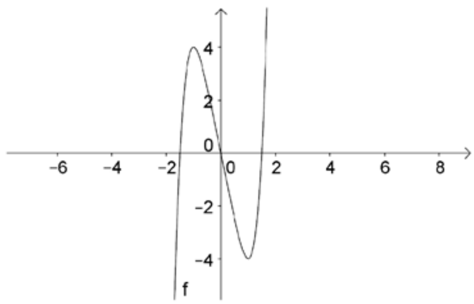
$f(1) = -4 \;\; e \;\; f''(1) = 20 > 0,$ logo ponto de mínimo.

Quanto à concavidade,

$x < 0, f''(x) < 0,$ concavidade para baixo

$0 < x, f''(x) > 0,$ concavidade para cima e

$x = 0$ é ponto de inflexão.



Para refletir

1. Esboce o gráfico das funções:

a) $f(x) = x^3 - x^2$

b) $f(x) = x^4 - 6x^2$

c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

d) $f(x) = x(x^2 - 1)$

e) $f(x) = 1 - 3senx$

5. Problemas de otimização

Daremos, a seguir, exemplos de problemas de otimização que podem ser resolvidos utilizando nossos conhecimentos de cálculo.

Destaque os pontos importantes:

a) identifique as grandezas envolvidas no problema;

b) analise valores que sejam possíveis para a resolução do problema;

c) escreva a equação ou as equações.

d) use a derivada primeira e a derivada segunda para detectar pontos críticos e possíveis soluções.

Exercícios resolvidos: Determine dois números cuja soma é 100 e o produto é o máximo possível.

Solução: Considere x e y como variáveis. Podemos escrever as seguintes equações:

$x + y = 100 \;\; e \;\; P = x \,.\, y \;\Rightarrow\; P = x \,.\, (100 - x) \Rightarrow P = -x^2 + 100x$

Calculamos P' e P'', para determinar pontos críticos.

$P' = -2x + 100 \;\; e \;\; P'' = -2$

$-2x + 100 = 0 \Rightarrow x = 50 \;\; e \;\; P''(50) = -2 < 0$, logo ponto máximo.

Portanto, os valores devem ser $x = y = 50$.

2. Desejamos construir caixas, sem tampa, com folhas de dimensão 20 cm por 35 cm. A caixa será construída recortando-se quadrados dos cantos, como mostra a figura. Determine o lado dos quadrados que devem ser recortados para que se tenha uma caixa com volume máximo.

Solução: Chamaremos de x o lado do quadrado do canto.

Escrevemos a equação para o volume:

$$V = x \cdot (35 - 2x) \cdot (20 - 2x)$$

$$V = 4x^3 - 110x^2 + 700x.$$

Sendo o domínio de definição o intervalo [0,10].

Encontramos V' e V'', para determinar pontos críticos.

$$V' = 12x^2 - 220x + 700 \quad e \quad V'' = 24x - 220$$

De $12x^2 - 220x + 700 = 0$ encontramos pontos críticos aproximados $4{,}1$ e $14{,}2$.

Podemos desprezar o segundo desses valores, pois $14{,}2$ não está no intervalo de definição [0,10]. Para a derivada segunda, temos que $V''(4{,}1) = -121{,}6 < 0$, donde concluímos que $4{,}1$ é valor de máximo.

Portanto devemos escolher o valor $x \cong 4{,}1cm$

Para refletir

1. Encontre a área máxima de um retângulo cujo perímetro é igual a 60 cm.
2. Determine um ponto do gráfico da função $f(x) = x^2$, que seja o mais próximo possível do ponto (0, 1). Lembre que a distância entre dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) é dada por $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.
3. Um reservatório, no formato de um cilindro, deve ter a capacidade de $20\pi m^3$. Para construí-lo, o custo das bases é de R$ 20,00 por metro quadrado e o custo da lateral é de R$ 16,00 por metro quadrado. Determine o raio da base e a altura do reservatório para que o custo seja mínimo.

6. Regra de L'Hôpital

Concluímos a unidade apresentando mais uma aplicação das derivadas. A regra de L'Hôpital facilita muito o cálculo de limites que envolvem indeterminações utilizando os conhecimentos de derivadas.

No caso de indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$: supondo $f(a) = g(a) = 0$ e que existam $f'(a)$ e $g'(a)$, com $g'(a) \neq 0$, a **Regra de L'Hôpital** nos diz que:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Demonstração:

Partindo de $\frac{f'(a)}{g'(a)}$, temos que:

$$\frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$$

Sabemos que $f(a) = g(a) = 0$, assim,

$$\frac{f'(a)}{g'(a)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - 0}{g(x) - 0} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Exercício resolvido: Calcule $\lim_{x \to 0} \frac{senx}{x}$.

Solução: Note que, para $x = 0$, temos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando a regra de L'Hôpital, temos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{senx}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1.$$

A regra de L'Hôpital pode ser utilizada em outras indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty \cdot 0$ e $\infty - \infty$. Se quando aplicarmos a regra de L'Hôpital encontrarmos uma nova indeterminação, podemos utilizá-la novamente para a derivada segunda. No caso de uma nova indeterminação passamos à derivada terceira, e assim sucessivamente.

Atividades de avaliação

1. Determine os limites:

a) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^3 + x - 2}$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{sen\, 2x}{sen\, 3x}$

c) $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$

d) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{5x^2 - 2x}{7x^2 + 1}$

Síntese do Capítulo

A primeira aplicação de derivadas apresentada foi a possibilidade de determinar equações de retas tangentes às curvas.

Conceituamos funções crescentes e decrescentes, máximos e mínimos absolutos, máximos e mínimos locais, pontos críticos $(f'(x) = 0)$ e pontos de inflexão.

Verificamos que os pontos críticos são possíveis candidatos a extremos locais, porém, os pontos em que a função não é derivável também podem ser extremos.

Teste da derivada primeira: Seja f uma função derivável em (a,b).

1) Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$ então f é crescente em todo o seu domínio.

2) Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a,b)$ então f é decrescente em todo o seu domínio.

Um ponto crítico x_o de f é extremo local se f' muda de sinal em x_o. Se o sinal muda de positivo para negativo temos um máximo local em x_o, e um mínimo local se o sinal de f' muda de negativo para positivo. Quando não há mudança de sinal, então x_o não é máximo, nem mínimo local.

Teste da concavidade: Seja f duas vezes derivável em um intervalo aberto (a,b).

a) Se $f''(x) > 0$, a concavidade do gráfico de f está voltada para cima.

b) Se $f''(x) < 0$, a concavidade do gráfico de f está voltada para baixo.

Se a concavidade mudar de sentido sem que a função tenha mudado o crescimento (crescente ou decrescente), temos um ponto de inflexão.

Teste da derivada segunda: Seja x_o um ponto crítico da função f.

a) Se $f''(x_o) < 0$, então x_o é um ponto de máximo local.

b) Se $f''(x_o) > 0$, então x_o é um ponto de mínimo local.

c) Se $f''(x_o) = 0$ e a concavidade muda de sentido, então x_o é um ponto de inflexão.

Estudamos problemas de otimização que podem ser resolvidos utilizando nossos conhecimentos da derivada primeira e derivada segunda e concluímos a unidade apresentando a regra de L'Hôpital, que facilita muito o cálculo de limites que envolvem indeterminações, e diz que: $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(a)}{g'(a)}$.

Leituras, filmes e sites

Pesquise mais exemplos e exercícios de aplicações de derivadas:

http://www.igm.mat.br/aplicativos/index.php?option=com_content&view=article&id=796:exercicios-aplicacoes-derivadas&catid=98:calculo1

Máximos e mínimos: http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2010/03/aplicacao-de-derivada-para-determinacao.html.

Interpretação gráfica da derivada primeira e derivada segunda: http://alfaconnection.net/pag_avsm/ldt0304.htm

Referências

ÁVILA, G. **Cálculo das funções de uma variável.** vol 1. São Paulo: LTC, 2003.

GUIDORIZZI, H. **Um Curso de Cálculo**. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. São Paulo: Harbra, 1994.

THOMAS, G. B. **Cálculo.** vol. 1. 10. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2002.

Capítulo 4

Noções de Integrais

Objetivos

- Resolver integrais definidas e indefinidas
- Utilizar propriedades de integrais
- Utilizar o método da substituição para resolver integrais
- Compreender a interpretação geométrica das integrais
- Conhecer o Teorema Fundamental do Cálculo e as integrais de Riemann

Introdução

Neste capítulo abordaremos noções e propriedades de integrais indefinidas, ou antiderivadas, as integrais das principais funções elementares, as integrais definidas, o teorema fundamental do cálculo e uma apresentação das integrais como limites de somas de Riemann. Ao final deste estudo, esperamos que o aluno saiba resolver integrais definidas e indefinidas e compreenda a interpretação geométrica das integrais.

1. A integral como antiderivada

Iniciamos esta unidade observando as derivadas de algumas funções.

$$G(x) = 2x^4 - 3x^3 + 1 \ \text{ e } \ G'(x) = 8x^3 - 9x^2$$

$$H(x) = 2x^4 - 3x^3 - 2 \ \text{ e } \ H'(x) = 8x^3 - 9x^2$$

$$I(x) = 2x^4 - 3x^3 \ \text{ e } \ I'(x) = 8x^3 - 9x^2$$

Note que apresentamos funções diferentes, mas encontramos a mesma derivada para todas as funções. E mais, todas as funções do tipo $F(x) = 2x^4 - 3x^3 + c$, com $c \in \mathbb{R}$, geram derivadas $f(x) = 8x^3 - 9x^2$.

Chamamos a função $F(x)$ de **antiderivada** ou **primitiva** da função $f(x)$, sempre que $F'(x) = f(x)$, para todo x do domínio da função.

Definição: Denominamos como **integral indefinida** da função f, o conjunto das funções primitivas de f e representamos da seguinte maneira:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c,$$

onde $\int$ é o sinal da integral, $f(x)$ é o integrando, x é a variável de integração, $c \in \mathbb{R}$ e F é uma função tal que $f = F'$.

Exemplos:

1. Seja $f(x) = 3x^4$. Podemos determinar as primitivas da função f.

$$\int 3x^4 dx = \frac{3x^5}{5} + c, \; com \;\; c \in \mathbb{R}.$$

De maneira geral calculamos este tipo de integral como:

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, \quad a, c \in \mathbb{R} \;\; e \;\; a \neq -1.$$

Em particular,

$$\int dx = x + c.$$

2. Dada $f(x) = cosx$, suas primitivas são da forma $F(x) = senx + c$, com $c \in \mathbb{R}$.

Vejamos mais algumas integrais de funções trigonométricas:

$$\int sen\, kx\, dx = -\frac{\cos kx}{k} + c$$

$$\int \cos kx\, dx = \frac{sen\, kx}{k} + c$$

$$\int \sec^2 x\, dx = tg\, x + c$$

$$\int \mathrm{cossec}^2 x\, dx = -\cot g\, x + c$$

$$\int \sec x\, tg\, x\, dx = \sec x + c$$

$$\int \mathrm{cossec}\, x \cot gx\, dx = -\mathrm{cossec}\, x + c$$

3. Calculando a integral:

$$\int e^{-2x} dx = -\frac{e^{-2x}}{2} + c.$$

Quando integramos funções exponenciais, temos:

$$\int e^{kx} dx = \frac{e^{kx}}{k} + c.$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c.$$

4. Encontrando a integral indefinida, temos:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c, \; x > 0.$$

Para calcularmos integrais precisamos lembrar bem as derivadas.

Para refletir

1. Determine as primitivas das seguintes funções:
   a) $f(x) = 3x^4$
   b) $f(x) = -sen\pi x$
2. Calcule as integrais:
   a) $\int \frac{1}{x} dx$
   b) $\int 2^x dx$
   c) $\int \sqrt{x}\, dx$

2. Propriedades da integral indefinida

As regras algébricas que aprendemos para limites e derivadas, também valem para o cálculo de integrais.

$$\int k \cdot f(x)\, dx = k \cdot \int f(x)\, dx$$
$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx.$$

Exercícios resolvidos:

1. Calcule: $\int (3x^4 + x^2 - 1)\, dx.$

Solução: Podemos analisar a integral termo a termo, para encontrar a primitiva.

$$3\int x^4 dx + \int x^2 dx - \int dx = \frac{3x^5}{5} + c_1 + \frac{x^3}{3} + c_2 - x + c_3, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$
$$= \frac{3x^5}{5} + \frac{x^3}{3} - x + c, \quad c = c_1 + c_2 + c_3.$$

2. Calcule a integral: $\int sen^2 x dx.$

Lembre que: $sen^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$

Solução: Desta forma,

$$\int sen^2 x\, dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx$$
$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{sen 2x}{2} + c = \frac{x}{2} - \frac{sen 2x}{4} + c.$$

Para refletir

1. Encontre as integrais indefinidas:

a) $\int (senx + \cos x)\, dx$

b) $\int \left(x^2 - \frac{1}{x}\right) dx$

c) $\int 5senx\, dx$

d) $\int x^{-1}\, dx$

e) $\int 3e^{2x}\, dx$

3. Método da substituição para calcular integrais

Podemos mudar a variável para resolver integrais. Sejam f e g funções tais que a composta $f \circ g$ esteja definida. O método da substituição consiste na seguinte ideia: se soubermos calcular a antiderivada de f, então podemos encontrar.

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx.$$

De fato, se F' = f, temos que $(F \circ g)'(x) = (f \circ g)(x) \cdot g'(x)$. Ou seja,

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = (F \circ g)(x) + c = F(g(x)) + c.$$

Podemos sintetizar essa discussão: fazendo a substituição $g(x) = u$, temos

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = F(g(x)) + c = F(u) + c = \int f(u)\, du.$$

Na prática, usamos a relação acima para justificar que: chamando $g(x) = u$, temos $g'(x)dx = du$ e escrevemos diretamente a igualdade simplificada.

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \int f(u)\, du.$$

Exemplo: Calcule a integral:

$$\int \sqrt{2x+1}\, dx$$

Chamaremos $u = 2x + 1 \Rightarrow du = 2dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$. Assim,

$$\begin{aligned}\int \sqrt{2x+1}\, dx &= \int u^{\frac{1}{2}} . \frac{1}{2} du \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c \\ &= \frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} + c.\end{aligned}$$

Para refletir

1. Utilize a substituição de variável para calcular as integrais:

a) $\int 3(2x-5)^4\,dx$

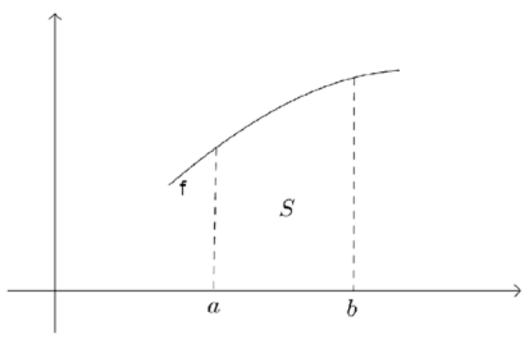
b) $\int \frac{1}{\sqrt{2x-3}}\,dx$

c) $\int \cos(5x+2)\,dx$

d) $\int \frac{2x}{x^2+3}\,dx$

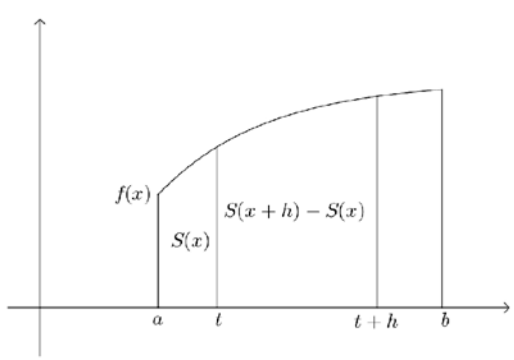
4. Integral definida e o Teorema Fundamental do Cálculo

Considere uma função contínua $f(x)$ com $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, onde $[a,b]$ é um intervalo fechado e $a < b$. Desejamos calcular a área S da região limitada pelo gráfico de f, o eixo x e as retas $x = a$ e $x = b$, como mostra a figura. O **Teorema Fundamental do Cálculo** (TFC) diz que a área S é igual a $F(b) - F(a)$, onde $F(t)$ é uma antiderivada da função $f(t)$.

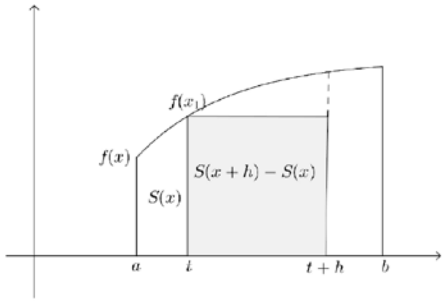


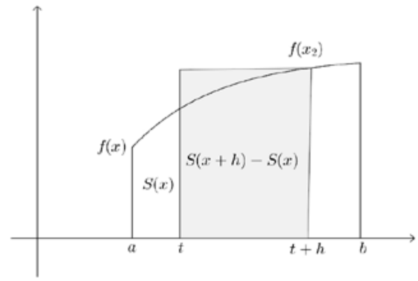
Para tanto, consideramos a área $S(t)$ limitada pelo gráfico de f, o eixo x e as retas $x = a$ e $x = t$, para cada $t \in [a,b]$. Observamos que $S(a) = 0$ e $S = s(b) - S(a)$.

A fim de verificar o TFC, mostraremos que a função área $S(t)$ satisfaz $S'(t) = f(t)$, ou seja, $S(t) = F(t) + c$ é uma primitiva de $f(t)$.



Dados t e (a,b) e $h>0$, sejam $f(x_1)$ e $f(x_2)$ os valores de mínimo e máximo de f no intervalo $[t, t+h]$, respectivamente, com x_1, x_2 e $[t, t+h]$. Uma função contínua, sempre atinge seus extremos em um intervalo desse tipo. Sendo assim, podemos comparar a área $S(t+h) - S(t)$ representada na figura anterior, com as áreas dos retângulos de mesma base e alturas $f(x_1)$ e $f(x_2)$:





$$f(x).h \le S(t+h) - S(t) \le f(x_2).h$$
$$f(x_1) \le \frac{S(t+h)-S(t)}{h} \le f(x_2)$$

O mesmo ocorre com $h < 0$. Quando $h \to 0$, temos que $\lim_{h\to 0} f(x_1) = \lim_{h \to 0} f(x_2) = f(t)$. Dessa forma, concluímos que

$$f(t) \le \lim_{h\to 0} \frac{S(t+h)-S(t)}{h} \le f(t)$$

e, portanto,

$$S'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{S(t+h)-S(t)}{h} = f(t).$$

Em particular, para o cálculo da área da região que vai de a até b, devemos encontrar a função F cuja derivada é a função f e calcular: $S = F(b) - F(a)$.

Definição: Seja f contínua no intervalo $[a,b]$. A área $F(b) - F(a)$ é usualmente denominada **integral definida** da função f de a a b, onde F é a função área construída nos gráficos apresentados anteriormente. Indicamos a integral definida de f por

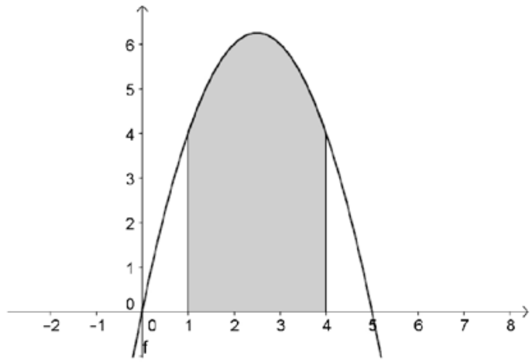
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Observação: Na resolução das integrais definidas, usaremos a seguinte notação:

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Exercícios resolvidos:

1. Calcule a área da região sombreada na figura delimitada pelas curvas $f(x) = -x^2 + 5x$, o eixo x e as retas $x = 1$ e $x = 4$.



Solução: Calculamos a primitiva da função f e aplicamos nos valores $x = 1$ e $x = 4$.

$$F(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2}$$

$$F(1) = \frac{-1^3}{3} + \frac{5 \cdot 1^2}{2} = \frac{13}{6} \;\; e \;\; F(4) = -\frac{4^3}{3} + \frac{5 \cdot 4^2}{2} = \frac{112}{6}$$

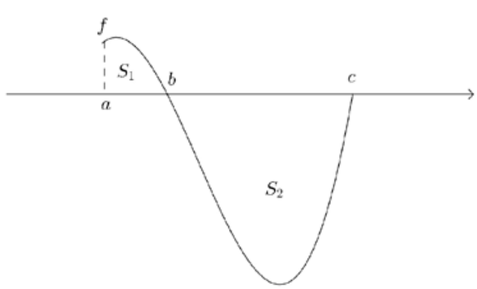
$$S = F(4) - F(1) = \frac{112}{6} - \frac{13}{6} = \frac{33}{2}.$$

2. Encontre a área da região limitada pelo gráfico da curva $f(x) = x^2$, o eixo x e as retas $x = -1$ e $x = 4$.

Solução: Calculamos a integral da função definida de $x = -1$ até $x = 4$, ou seja,

$$\int_{-1}^{4} x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^{4} = \frac{4^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{64}{3} + \frac{1}{3} = \frac{65}{3}.$$

Passemos a analisar o caso em que a função assume valores positivos e negativos, ou seja, seu gráfico pode gerar regiões acima ou abaixo do eixo x . Dessa forma, as áreas formadas abaixo do eixo x são contadas com valor negativo na integral definida, ou seja:



1) Se $f(x) \geq 0, \;\; para \;\; x \in [a,b]$, temos que

$$S_1 = \int_a^b f(x)\,dx.$$

2) Se $f(x) \leq 0,\ para\ x \in [b,c]$, temos que

$$S_2 = \left| \int_b^c f(x)\,dx \right| = -\int_b^c f(x)\,dx.$$

3) Finalmente, a integral definida de *f* em *[a,c]* é dada por

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = S_1 - S_2.$$

Além disso, podemos escrever a área delimitada pelo gráfico de *f*, o eixo *x* e as retas $x = a$ e $x = c$ em termos das integrais definidas como:

$$S = S_1 - S_2 = \int_a^b f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx$$

Observação: Sendo assim, a integral definida pode ser interpretada como a área delimitada pelo gráfico da função e o eixo *x*, sendo essa área contada com sinal positivo ou negativo, dependendo do sinal da função. No entanto, o cálculo das integrais definidas de funções que mudam de sinal, também pode ser feito diretamente, como no caso das funções positivas: encontrando uma primitiva e aplicando o TFC.

Até agora, só demos sentido ao valor $\int_a^b f(x)\,dx$ quando $a < b$. Mas também é importante considerar a **ordem de integração**. Sendo assim, quando escrevermos $\int_a^b f(x)\,dx$ significa que estamos integrando a função *f* de a até b Definimos a integral de *f* de b até a como sendo

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Exercício resolvido:

1. Determine a área da região limitada pela curva $f(x) = x^3 - 2x^2 - 8x$ e o eixo x.

Solução: Observamos que a função tem como raízes os valores $x = -2$, $x = 0$ e $x = 4$, ou seja, a função assume valores positivos e negativos. Note que $f(x) \geq 0$ para valores de $x \in [-2,0]\ e\ f(x) \leq 0\ para\, x \in [0,4]$. Desta forma, devemos determinar:

$$\int_{-2}^0 (x^3 - 2x^2 - 8x)\,dx - \int_0^4 (x^3 - 2x^2 - 8x)\,dx =$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{8x^2}{2}\right)\Big|_{-2}^{0} - \left(\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{8x^2}{2}\right)\Big|_{0}^{4}$$

$$= 0 - \left[\frac{(-2)^4}{4} - \frac{2\cdot(-2)^3}{3} - 4\cdot(-2)^2\right] - \left[\frac{4^4}{4} - \frac{2\cdot 4^3}{3} - 4\cdot 4^2\right] + 0$$

$$= \frac{20}{3} + \frac{128}{3} = \frac{148}{3}.$$

2. Calcule

$$\int_{-2}^4 (x^3 - 2x^2 - 8x)\,dx.$$

Solução:

$$\int_{-2}^{4}(x^3-2x^2-8x)\,dx=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-4x^2\right)\Big|_{-2}^{4}$$

$$=\left(\frac{4^4}{4}-\frac{2\cdot 4^3}{3}-4\cdot 4^2\right)-\left(\frac{(-2)^4}{4}-\frac{2\cdot(-2)^3}{3}-4\cdot(-2)^2\right)$$

$$=-\frac{128}{3}+\frac{20}{3}=\frac{-108}{3}.$$

Para refletir

1. Determine a área da região limitada pelo gráfico da curva $f(x)=-x^2+4$, o eixo x e as retas $x=-2$ e $x=2$.
2. Seja $f(x)=x^2-4x+5$. Calcule a área sombreada na figura:

3. Considere a função $f(x)=x^3-3x^2-4x$. Calcule a área limitada pelo gráfico da função $f(x)$ e o eixo x.

5. Propriedades das integrais definidas

Pelo teorema fundamental do cálculo, podemos usar as propriedades das integrais indefinidas para integrais definidas e acrescentar mais algumas.

$$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx.$$

a) Integração de a até a :

$$\int_a^a f(x)\,dx=0.$$

b) Multiplicação por uma constante:

$$\int_a^b k\cdot f(x)\,dx=k\cdot\int_a^b f(x)\,dx.$$

c) Soma ou subtração:

$$\int_a^b (f(x)\pm g(x))\,dx=\int_a^b f(x)\,dx\pm\int_a^b g(x)\,dx$$

d) Adição de intervalos

$$\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx$$

Exemplos:

1. Sejam *f(x)* e *g(x)* funções contínuas, tais que:

$$\int_1^3 f(x)\,dx = -2 \quad e \quad \int_1^3 g(x)\,dx = 5.$$

Podemos calcular integrais utilizando as propriedades.

$$\int_1^3 [f(x)+g(x)]dx = \int_1^3 f(x)\,dx + \int_1^3 g(x)\,dx = -2+5 = 3$$

2. Calcule o valor da seguinte integral definida

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^3}\,x^2\,dx.$$

Substituindo $u = 1-x^3$ e $du = -3x^2dx$. Observamos que $x = 0$ implica $u = 1$ e que $x = 1$ implica $u = 0$, ou seja, a ordem de integração se inverte depois da mudança de variáveis. E assim, temos:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^3}\,x^2\,dx = \int_1^0 u^{\frac{1}{2}}.\left(-\frac{1}{3}\right)du$$

$$= -\int_0^1 u^{\frac{1}{2}}.\left(-\frac{1}{3}\right)du$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{2}{9}.$$

Para refletir

1. Considere que $\int_0^2 f(x)\,dx = 3 \;\; e \;\; \int_2^5 f(x)\,dx = 5.$ Calcule o que se pede:

a) $\int_0^2 5\cdot f(x)\,dx$

b) $\int_2^0 f(x)\,dx$

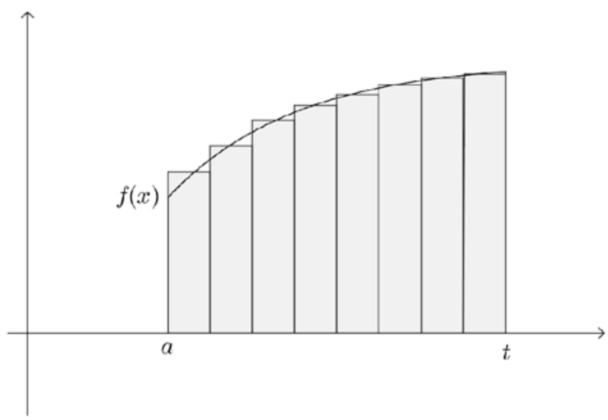
c) $\int_0^5 f(x)\,dx$

2. Suponha $\int_1^4 f(x)\,dx = -2 \quad e \quad \int_1^4 g(x)\,dx = 7.$ e Calcule:

$$\int_1^4 [3f(x)-2g(x)]dx.$$

6. Integrais de Riemann

Apresentaremos nessa seção uma maneira diferente de calcular a integral definida de uma função. Seja $f(x)$ uma função que pode assumir valores positivos, negativos ou zero em um intervalo fechado $[a, t]$. Podemos dividir esse intervalo em n subintervalos de comprimento h. Em cada subintervalo escolhemos um ponto x_i. Observe que a área S determinada pelo gráfico de f e pelo eixo x pode ser aproximada pela soma das áreas S_i dos retângulos, cujas bases são os subintervalos da divisão e de altura $f(x_i)$ como podemos ver na figura a seguir.



Podemos escrever então

$$S \cong \sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i).h$$

Essas somas são chamadas **somas de Riemann** e, passando ao limite, quando $n \to \infty$ e o comprimento dos subintervalos $h \to 0$ obtemos um valor que é chamado de **integral de Riemann** da função f no intervalo $[a,t]$.

Dessa forma, temos:

$$\int_a^t f(x)\,dx = S = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot h.$$

Exercício resolvido: Calcule a soma de Riemann para a função $f(x) = -x^2 - 2x$, no intervalo $-2 \leq x \leq 0$, utilizando 5 subintervalos de mesmo tamanho. Ao final dos cálculos, compare com o valor de $\int_{-2}^{0} f(x)\,dx$.

Solução: Dividimos o intervalo $-2 \leq x \leq 0$, em 5 subintervalos de comprimento $h = \dfrac{2}{5}$ e escolhemos um ponto em cada intervalo

$$x_1 = -\frac{8}{5} \in \left[-\frac{10}{5}, -\frac{8}{5}\right], x_2 = -\frac{6}{5} \in \left[-\frac{8}{5}, -\frac{6}{5}\right], x_3 = -\frac{4}{5} \in \left[-\frac{6}{5}, -\frac{4}{5}\right],$$

$$x_4 = -\frac{2}{5} \in \left[-\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}\right] \; e \;\; x_5 = 0 \in \left[-\frac{2}{5}, 0\right].$$

Calculamos os valores da função nos x_i e multiplicamos por h para obter a soma de Riemann pedida:

$$f(x_1)\cdot h + f(x_2)\cdot h + f(x_3)\cdot h + f(x_4)\cdot h + f(x_5)\cdot h =$$
$$= \left[f\left(-\frac{8}{5}\right) + f\left(-\frac{6}{5}\right) + f\left(-\frac{4}{5}\right) + f\left(-\frac{2}{5}\right) + f(0) \right] \cdot \frac{2}{5} =$$
$$= \left[\frac{16}{25} + \frac{24}{25} + \frac{24}{25} + \frac{16}{25} + 0 \right] \cdot \frac{2}{5} = 1,28.$$

Calculando $\int_{-2}^{0} f(x)\,dx$, temos:

$$\int_{-2}^{0} f(x)\,dx = \left(-\frac{x^3}{3} - x^2\right)\Big|_{-2}^{0} = -\left[-\frac{(-2)^3}{3} - (-2)^2\right] = \frac{4}{3} \cong 1,3.$$

Quando comparamos, observamos que o valor da área utilizando somas de Riemann é próximo do valor exato calculado com a integral definida no intervalo. Para obter uma aproximação melhor, seria necessário considerar uma quantidade maior de subintervalos.

Atividades de avaliação

1. Utilize as somas de Riemann para calcular a área aproximada que o gráfico da função $f(x) = x^3 + x^2 - 6x$ faz com o eixo x, no intervalo $-3 \leq x \leq 2$, utilizando 6 subintervalos.

2. Calcule a integral:

$$\int_{-3}^{2} (x^3 + x^2 - 6x)\,dx$$

e compare com o valor encontrado na atividade anterior.

Síntese do Capítulo

Chamamos a função $F(x)$ de antiderivada ou primitiva da função $f(x)$, sempre que $F'(x) = f(x)$, para todo x do domínio da função. Denominamos como integral indefinida da função f o conjunto das funções primitivas de f e representamos por:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c,$$

onde $c \in \mathbb{R}$ e F é tal que $f = F'$. Por exemplo, calculamos:

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, \quad c \in \mathbb{R} \;\; e \;\; a \neq -1.$$

Conhecemos integrais de funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas:

$\int f(x)\,dx$	$F(x) + c$
sen kx	$-\dfrac{\cos kx}{k} + c$
coskx	$\dfrac{senkx}{k} + c$
sec^2x	$tgx+c$
$cossec^2x$	$-cotgx+c$
secxtgx	*secx+c*
cossec x cotgx	*–cossecx+c*
e^{kx}	$\dfrac{e^{kx}}{k} + c$
x^{-1}	$lnx+c$

Verificamos que as regras algébricas de limites e derivadas, valem para as integrais e apresentamos o método da substituição para a composta $f \circ g$, substituindo $g(x) = u$, temos que

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = F(g(x)) + c = F(u) + c = \int f(u)\,du.$$

Apresentamos o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), que diz que a área $S = S(t)$ limitada pelo eixo x e pelo gráfico de f é uma antiderivada da função $f(t)$. Para o cálculo da região de a até b, encontramos a função cuja derivada é a função f e calculamos $S = S(b) - S(a)$. Definimos a integral definida da função contínua f em $[a,b]$, como o número real $F(b) - F(a)$, onde F é uma primitiva de f e a indicamos por

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Em particular, verificamos que as propriedades das integrais indefinidas passam às integrais definidas:

$$\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx \;\; e \;\; \int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx,$$

bem como

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \text{ e } \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$$

Finalmente, apresentamos uma maneira de calcular, ou aproximar, integrais definidas como limites de somas associadas a partições do intervalo de integração (Somas de Riemann). Para $f(x)$ definida em $[a, t]$, dividimos o intervalo em n subintervalos, e em cada subintervalo escolhemos um x_i, formando retângulos de mesma base h_n e altura $f(x_i)$. Usamos a soma das áreas desses retângulos para aproximar a integral definida de f entre a e t:

$$\int_a^t f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,.\,h_n$$

Leituras, filmes e sites

Cálculo Integral: http://cead.ufpi.br/conteudo/material_online/disciplinas/matematica/download/unidade6.pdf

Integral: http://pt.wikipedia.org/wiki/Integral

Soma de Riemann. Integral Definida. Propriedades. Área: http://www.uff.br/webmat/Calc1_LivroOnLine/Cap21_Calc1.html

Referências

ÁVILA, G. **Cálculo das funções de uma variável.** vol 1. São Paulo: LTC, 2003.

GUIDORIZZI, H. **Um Curso de Cálculo**, Rio de Janeiro: LTC, 2001.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. São Paulo: Harbra, 1994.

THOMAS, G. B. **Cálculo - vol. 1**. 10. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2002.

Sobre a autora

Professora de matemática da rede estadual do Ceará há 17 anos, trabalhando com educação semipresencial há 13 anos. Mestrado profissional de matemática pela Universidade Federal do Ceará, concluído em 2014. Especialização em ensino da matemática pela Universidade Estadual do Ceará, concluída em 2001. Graduação em licenciatura plena em Matemática pela Universidade Estadual do Ceará, concluída em 1987.

Respostas das Atividades de avaliação

Capítulo 1

Pág. 13

1.a) 10 b) 8 c) $\frac{1}{8}$

Pág. 15

1.a) 0 b) -8 c) 12

2. 0

Pág. 19

1.a) -1 b) 144 c) -1 d) 0

e) $\frac{5}{4}$ f) $\sqrt{6}$ g) 3 h) 0

i) 3

2. a) -12 b) 17 c) $\frac{1}{4}$

Pág. 21

1.a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) não está definido d) 0

e) 1 f) não está definido

2. a) 0 b) 0

3.a) 0 b) 0 c) 0

Pág. 23

1.a) 0 b) 3 c) 1

2. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x} = \lim_{x\to\infty} 2 + \frac{1}{x} = 2 + 0 = 2$

Pág. 24

1. a) $-\infty$ b) $+\infty$ c) $+\infty$ d) $+\infty$

e) $-\infty$ f) $\nexists$ g) $+\infty$ h) $-\infty$

i) $-\infty$ j) $+\infty$ k) $+\infty$

Pág. 28

1. a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) $+\infty$ d) 0

e) 0 f) $+\infty$ g) $+\infty$

Pág. 29

1. 0

2. 1

Pág. 31

1. a) 1 b) 3 c) $\frac{1}{2}$ d) 1

Pág. 32

1. a) e^3 b) $\sqrt[3]{e}$

Capítulo 2

Pág. 41

1. $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{-3+3}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$ e $f'(x) = 0$
2. $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} 3x^2 + 3xh + h^2 = 3x^2$ e $f'(x) = 3x^{3-1} = 3x^2$
3. a) 0 b) $f'(x) = 7x^6$

Pág. 42

1. $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^2-0^2}{h} = \lim_{h\to 0^+} h = 0$ e
$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h+0}{h} = \lim_{h\to 0^-} -1 = -1$, logo $f(x)$ não possui derivada no ponto $x = 0$.
2. Contínua e não derivável em $x = -2$ e $x = 2$.

Pág. 46

1. a) $10x^4$ b) $2x - 3$ c) $15x^4 - 4x^3 + 2$ d) $5x^2 + 3x$
e) $\frac{x^3}{6}$ f) $3x^2 + 2x - 3$ g) $-4x^3 + 6x^2 + 2x - 4$ h) $\frac{x^2-2x-1}{x^2-2x+1}$
i) $\frac{-12x-5}{x^6}$ j) $-8x^{-5}$ k) $-3x^{-4} - 16x^{-3}$ l) $2x^{-3} - 6x^{-4} - 16x^{-5}$
2. $2x + y - 1 = 0$
3. $f'(x) = 5x^4$, $f''(x) = 20x^3$, $f'''(x) = 60x^2$, $f^{(4)}(x) = 120x$, $f^{(5)}(x) = 120$, $f^{(6)}(x) = 0$ e $f^{(k)}(x) = 0$, para todo $k \geq 6$.

Pág. 48

1. a) $4(x^5 + 2x^3)^3 \cdot (5x^4 + 6x^2)$ b) $\frac{3x^4+4x^2-7}{\sqrt{x^4+2x^2-7}}$ c) $\frac{-2x}{(x^2-1)^2}$
d) $\frac{-x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$ e) $-2 \cdot (3x^2 - 5x - 2)^{-3} \cdot (6x - 5)$
2. $f'(x) = 3 \cdot (x^2 - 7x)^2 \cdot (2x - 7)$ e $f''(x) = 6 \cdot (x^2 - 7) \cdot (5x^2 - 35x + 49)$

Pág. 50

1. a) $-2\cos x$ b) $-5\,\mathrm{sen}\, x$ c) $-\mathrm{cossec}^2\, x$
d) $\mathrm{tg}\, x \cdot \sec x$ e) $-\mathrm{cotg}\, x \cdot \mathrm{cossec}\, x$ f) $\frac{\cos x + \mathrm{sen}\, x}{2}$
g) $2\cos x - 3\,\mathrm{sen}\, x$
2. $f^{(48)}(x) = \mathrm{sen}\, x$
3. $\cos^2 x - \mathrm{sen}^2\, x = \cos(2x)$
4. a) $2\cos(2x)$ b) $-4\,\mathrm{sen}(4x)$ c) $-5\cos^4 x \cdot \mathrm{sen}\, x$
d) $\mathrm{sen}^2\, x + 2x \cdot \mathrm{sen}\, x \cdot \cos x$ e) $(2x - 5) \cdot \cos(x^2 - 5x)$

Pág. 53

1. a) $5e^x$ b) $2^x \cdot \ln 2 + 2x$ c) $\frac{1}{x \cdot \ln 3}$ d) $3^x \cdot \ln 3 + 5x^{-1}$
e) $\ln x + 1$
f) $3^x \cdot \ln 3 \cdot (1 + \ln x) + 3^x \cdot x^{-1}$
g) $\cos x \cdot (e^x + \log_2 x) + \mathrm{sen}\, x \cdot \left(e^x + \frac{1}{x \cdot \ln 2}\right)$
h) $5^x \cdot \ln 5 \cdot e^{-2x} - 2 \cdot 5^x \cdot e^{-2x}$
2. a) $3^{\mathrm{sen}\, x} \cdot \ln(\mathrm{sen}\, x) \cdot \cos x$ b) $\frac{1}{2x \cdot \ln 3}$ c) $2x \cdot e^{x^2+1}$

Pág. 54

1. a) $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, para $x \in [0, \pi]$ b) $\frac{1}{1+x^2}$, para $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ c) $-\frac{1}{1+x^2}$, para $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

d) $\frac{1}{x \cdot \sqrt{x^2-1}}$, para $x \in [0, \pi]$ e) $-\frac{1}{x \cdot \sqrt{x^2-1}}$, para $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Capítulo 3

Pág. 60

1. $x - y - 3 = 0$
2. $x + y - 2 = 0$

Pág. 61

1. a) Crescente em $x \leq 3$ e decrescente em $x \geq 3$.
   b) Crescente em $[1,2] \cup [3, \infty)$ e decrescente em $(-\infty, 1] \cup [2,3]$.
   c) Crescente em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ e decrescente em $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.
   d) Crescente em $(-\infty, \infty)$.
2. $f(x) = \frac{1}{x}$ é decrescente em $x > 0$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$.

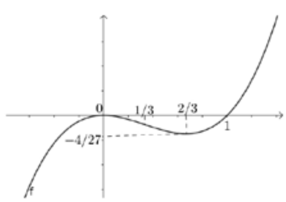
Pág. 65

1. Pontos de máximo: -2 e 2. Ponto de mínimo: $\frac{2}{3}$.
2. $x = 2$ é o único ponto crítico
3. a) valor máximo 8 e valor mínimo -7
   b) não existe valor máximo, pois a função assume valores arbitrariamente grandes. O valor mínimo é -16.
   c) valor máximo -9 e valor mínimo -13.

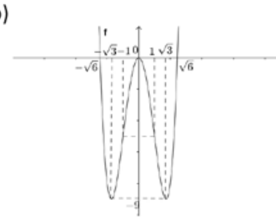
Pág. 69

1.

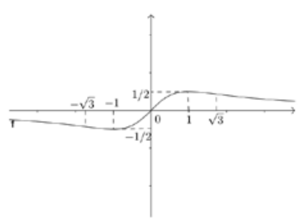
a)



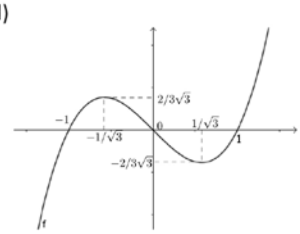
b)



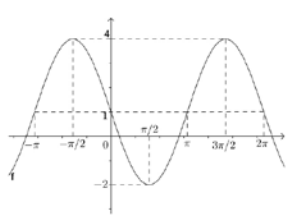
c)



d)



e)



Pág. 71

1. 225 cm^2
2. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ ou $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$
3. Raio da base $2m$ e altura do reservatório $5m$

Pág. 72

1. a) $-\frac{3}{4}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{5}{7}$

Capítulo 4

Pág. 79

1. a) $\frac{3x^5}{5} + c$ b) $\frac{\cos \pi x}{\pi} + c$
2. a) $\ln x + c$ b) $\frac{2^x}{\ln 2} + c$ c) $\frac{2\ \sqrt{x^3}}{3} + c$

Pág. 80

1. a) $-\cos x + \operatorname{sen} x + c$ b) $\frac{x^3}{3} - \ln x + c$ c) $-5 \cos x + c$
   d) $\ln x + c$ e) $\frac{3e^{2x}}{2} + c$

Pág. 81

1. a) $\frac{3}{10} \cdot (2x - 5)^5 + c$ b) $\sqrt{2x - 3} + c$
   c) $\frac{1}{5} \cdot \operatorname{sen}(5x + 2) + c$ d) $\ln(x^2 + 3) + c$

Pág. 86

1. $\frac{32}{3}$
2. $\frac{14}{3}$
3. $\frac{131}{4}$

Pág. 87

1. a) 15 b) -3 c) 8
2. -20

Pág. 89

1. O valor obtido depende dos seis subintervalos escolhidos. Uma possível escolha de valores nos intervalos é $-\frac{13}{6}, -\frac{4}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{7}{6}$ e 2. Nesta escolha obtemos $\cong 10{,}13$.
2. $\cong 10{,}42$

Computação

Fiel à sua missão de interiorizar o ensino superior no estado do Ceará, a UECE, como uma instituição que participa do Sistema Universidade Aberta do Brasil, vem ampliando a oferta de cursos de graduação e de pós-graduação na modalidade de educação a distância e gerando experiências e possibilidades inovadoras com uso das novas plataformas tecnológicas decorrentes da popularização da internet, do funcionamento do cinturão digital e da massificação dos computadores pessoais.

Comprometida com a formação de professores em todos os níveis e a qualificação dos servidores públicos para bem servir ao Estado, os cursos da UAB/UECE atendem aos padrões de qualidade estabelecidos pelos normativos legais do Governo Federal e se articulam com as demandas de desenvolvimento das regiões do Ceará.

Universidade Estadual do Ceará

UAB Universidade Aberta do Brasil

CAPES