

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ**

**CARLOS SIDNEY DOS SANTOS CIDADE NASCIMENTO**

**PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA PARA GESTÃO FINANCEIRA  
DO FLUXO DE CAIXA:  
INTEGRAÇÃO DOS MODELOS DE FLUXO EM REDES E  
ADMINISTRAÇÃO DE CAIXA EM UM AMBIENTE  
COMPUTACIONAL**

**FORTALEZA**

**2009**

**CARLOS SIDNEY DOS SANTOS CIDADE NASCIMENTO**

**PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA PARA GESTÃO FINANCEIRA DO  
FLUXO DE CAIXA:  
INTEGRAÇÃO DOS MODELOS DE FLUXO EM REDES E  
ADMINISTRAÇÃO DE CAIXA EM UM AMBIENTE COMPUTACIONAL**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Ciência da Computação da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Clécio Fontelles Thomaz.

Co-orientador: Prof. Dr. Jackson Sávio de Vasconcelos Silva.

FORTALEZA – CEARÁ

2009

N241p Nascimento, Carlos Sidney dos Santos Cidade  
Programação Matemática para Gestão  
Financeira do Fluxo de Caixa / Carlos S. S.  
Cidade Nascimento. — Fortaleza, 2010.

94 p.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Clécio Fonteles  
Thomaz.

Dissertação (Mestrado Acadêmico em Ciência  
da Computação) – Universidade Estadual do  
Ceará, Centro de Tecnologia.

1. Programação Matemática. 2. Fluxo de  
Caixa. 3. Ambiente Computacional. I.  
Universidade Estadual do Ceará, Centro de  
Tecnologia.

CDD: 001.6

**CARLOS SIDNEY DOS SANTOS CIDADE NASCIMENTO**

**PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA PARA GESTÃO FINANCEIRA DO FLUXO DE  
CAIXA:  
INTEGRAÇÃO DOS MODELOS DE FLUXO EM REDES E ADMINISTRAÇÃO DE  
CAIXA EM UM AMBIENTE COMPUTACIONAL**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Ciência da Computação da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ciência da Computação.

Aprovada em: 18/03/2009

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Antônio Clécio Fontelles Thomaz, Dr.  
Universidade Estadual do Ceará

---

Prof. Jackson Sávio de Vasconcelos Silva, Dr.  
Universidade Estadual do Ceará

---

Prof. José Raimundo Carvalho, *Ph. D.*  
Universidade Federal do Ceará

---

Prof. Francisco Gêvane Muniz Cunha, Dr.  
Instituto Federal do Ceará

---

Prof. Renato Craveiro de Souza, Dr.  
Universidade Estadual do Ceará

*Dedico esse trabalho a meu filho Daniel. A meus pais Carlos e Édila. A minha vó Jacy. A meus irmãos Jorge, Carleide, Vicente e Karina.*

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus, fonte de toda sabedoria.

Aos meus pais, Carlos e Édila, que me deram a oportunidade de estudar e estar aqui hoje, além de todo amor e compreensão necessários nessa longa jornada.

Aos meus irmãos Jorge, Carleide, Vicente, Monica e Karina, que muito me apoiaram em todos os momentos da minha vida.

À minha esposa Suly pela compreensão, carinho, atenção e amor, que me presenteou com um lindo filho, Daniel, que tanto amo.

Ao Prof. Dr. Antonio Clécio Fontelles Thomaz, que acreditou no meu trabalho e o tornou possível com sua orientação.

Aos Professores Renato Craveiro, Gustavo Augusto e Jackson Sávio, que muito me auxiliaram com seus conhecimentos e palavras de incentivo.

Ao Prof. Dr. Roberto Quirino Nascimento; incentivador, amigo e grande mestre que tive o prazer de trabalhar.

À Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico - FUNCAP, pelo apoio financeiro.

À Secretaria da Fazenda do Estado do Ceará, e em especial ao Prof. Jurandir Gurgel Gondim Filho, que muito auxiliou com seu conhecimento e experiência na área.

Aos colegas do LOGIN, Fábio Dias e Kelvin Rocha, que ajudaram e contribuíram na elaboração, desenvolvimento e implementação do ambiente proposto nesse trabalho.

Aos amigos Edvan e Viktor, colegas de apartamento que se tornaram minha família durante essa jornada, e que permanecerão.

A todos os companheiros do curso de mestrado, em especial: Alex, Daniele, Fabiano, Robson, Renato, Marcelo, Vigno e Viviane.

A todos aqueles que compõem o MACC da Universidade Estadual do Ceara.

“Ninguém ignora tudo. Ninguém sabe tudo. Todos nós sabemos alguma coisa. Todos nós ignoramos alguma coisa. Por isso aprendemos sempre.” (Paulo Freire).



## RESUMO

A utilização de modelos envolvendo programação matemática e de administração de disponível na gestão e análise financeira do fluxo de caixa vem ocupando o tempo de pesquisadores nas áreas de pesquisa operacional e administração financeira, estando à literatura repleta de trabalhos que versem sobre um ou outro assunto. Entretanto, muito pouco ou quase nada se encontra na literatura de metodologias que integrem essas duas linhas de pesquisas.

O desenvolvimento de um ambiente computacional que integre essas duas metodologias é o objetivo principal desse trabalho, e para isso é utilizado um problema de fluxo em redes para modelar o comportamento do fluxo de caixa e o modelo de administração de caixa de Miller - Orr para determinar o saldo ótimo que deve ser mantido em caixa diariamente a fim de evitar que a empresa torne-se ilíquida ou tenha excesso de liquidez acarretando em altos custos para a mesma, buscando assim otimizar o resultado no fim do horizonte de tempo estudado.

O modelo de programação matemática do fluxo de caixa otimizado proposto é extremamente complexo, chegando a dezenas de milhares de variáveis e restrições. Esse modelo é interfaceado com o software LINGO, que gera a solução do problema em questão, colocando a disposição do gestor um relatório completo e sucinto com todas as operações financeiras pertinentes ao fluxo de caixa.

Esse ambiente computacional é de fácil compreensão e interativo com o usuário através de telas auto-explicativas, nas quais serão disponibilizado os dados (receitas, despesas, saldo mínimo, saldo ótimo, custo de transação, custo de oportunidade, etc.) e como resultado temos todas as operações de aplicação e captação do fluxo de caixa otimizado, sendo essa sem dúvida a maior contribuição desse trabalho.

Paralelo a isso vem crescendo dentro do estado o desejo de desenvolver ferramentas em TIC que busquem otimizar seus processos com o objetivo de atender cada vez mais as demandas da sociedade cearense. O desenvolvimento desse trabalho de pesquisa coincidiu com esse desejo do estado e foi assinado um acordo de cooperação entre a Secretaria da Fazenda do Estado do Ceará e o Núcleo de Projeto de Tecnologia da Informação da Universidade Estadual do Ceará com o objetivo de desenvolver e implementar uma ambiente para gestão e

análise financeira do fluxo de caixa do estado. Mais do que uma ferramenta poderosa de decisão, esse trabalho veio fortalecer a posição da Universidade Estadual do Ceará, que é a de gerar conhecimento e pesquisa que agregue valor ao estado e beneficie a sociedade como um todo.

Palavras-chave: Programação Matemática. Fluxo de Caixa. Ambiente Computacional.

## ABSTRACT

The use of models involving mathematical programming and of administration of box in the management and financial analysis of the box flow comes occupying the time of researchers in the operational seek areas and financial administration, being literature replete of works that turn on one or another subject. However, much little or almost nothing meets in the literature of methodologies that integrate these two lines of research.

The development of a computational environment that integrates this two methodologies is the main objective of this work, and for this a problem of shape flow in nets is used the behavior of the box flow and the model of administration of box of Miller - Orr to determine the excellent balance that must be kept in box daily in order to prevent that the company becomes non liquid or has liquidity excess implying in costs for the same one.

The model of mathematical programming of the optimized flow of box considered is extremely complex, arriving the sets of ten of thousand of variable and restrictions. This model is interface with the software LINGO, that generates the solution of the problem in question, having placed the disposal of the manager a complete report and brief with all pertinent the financial operations to the box flow.

This computational environment is of easy understanding and interactive with the to clarify user through screens, in which the data will be to become available (prescriptions, expenditures, minimum balance, excellent balance, cost of transaction, cost of chance, etc.) and as resulted we have all the operations of application and capitation of the optimized flow of box, being this without a doubt the biggest contribution of this work.

Parallel to this, comes growing indents of the state the desire to develop tools in TIC that they search to optimize its objective processes to more take care of to each time the demands of the pertaining to the state of Ceará society. The development of this research work coincides his tries of the state and as signees a cooperative agreement enters the Secretaria da Fazenda do Estado do Ceará and the Nucleus of Project of Technology of the Information of the State University of the Ceará with the objective to develop and to implement one environment for management and financial analysis of the flow of box of the state. More than what a powerful

tool of decision, this work came to fortify the position of the State University of the Ceará, that is to generate knowledge and research that value to the state adds and benefits the society as a whole.

Keywords: Mathematical Programming. Cash Flow. Computacional Environment.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Fluxo de caixa como integração das Contas a Receber e Contas a Pagar.....	22
Figura 2 – Modelo de Administração de Caixa de Baumol.....	29
Figura 3 – Modelo de Administração de Caixa de Miller - Orr.....	31
Figura 4 – Modelo de Caixa Mínimo Operacional.....	32
Figura 5 – Check list do fluxo de caixa de um órgão público.....	36
Figura 6 – Exemplos de grafos.....	37
Figura 7 – Representação de uma rede através de um grafo orientado.....	37
Figura 8 – Matriz de incidência.....	38
Figura 9 – Rede residual.....	39
Figura 10 – Caminho expandível.....	40
Figura 11 – Cortes.....	40
Figura 12 – Grafo associado ao fluxo de caixa financeiro otimizado.....	44
Figura 13 – Tela de entrada de receitas do ambiente SEFAZ.....	46
Figura 14 – Tela de entrada de despesas do ambiente da SEFAZ.....	47
Figura 15 – Tela de entrada de aplicações do ambiente da SEFAZ.....	47
Figura 16 – Fluxo de fundos líquidos diários de 02/01 a 07/11/08.....	53
Figura 17 - Índices do MMO via planilha Excel.....	55
Figura 18 - Índices do MMO via planilha Excel.....	55

## **LISTA DE TABELAS**

Tabela 1 – Modelo do Dia da Semana.....	32
Tabela 2 – Fluxo de caixa projetado para fev/09.....	51
Tabela 3 – Taxas das aplicações financeiras.....	56
Tabela 4 – Resultados comparativos da simulação.....	56

## LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

AMPL – A Mathematical Programming Language

DFC – Demonstrativo de Fluxo de Caixa

DOAR – Demonstração de Origem e Aplicação dos Recursos

DRE – Demonstrativo De Resultado do Exercício

CMO – Caixa Mínimo Operacional

COTES – Controladoria do Tesouro Estadual

FASB – Financial Accounting Statement Board

HQL – Hibernate Query Language

IA – Inteligência Artificial

IBGE – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística

IBRACON – Instituto Brasileiro de Contadores

INSS – Instituto Nacional de Seguridade Social

IPCA - Índice de Preços ao Consumidor Amplo

LDO – Lei de Diretrizes Orçamentárias

LINGO – Linear Interactive Global Optimizer

LOGIN – Laboratório de Otimização e Gestão Industrial

LRF – Lei de Responsabilidade Fiscal

MMO – Modelo de Miller - Orr

NPC – Normas e Procedimentos Contábeis

NPTEC – Núcleo de Projetos de Tecnologia da Informação

PIB – Produto Interno Bruto

SAD – Sistema de Apoio à Decisão

SEFAZ – Secretaria da Fazenda

SFAS – Statement Financial Accounting Standard

SI – Sistemas de Informação

SQL – Structured Query Language

STN – Secretaria do Tesouro Nacional

TIC – Tecnologia da Informação e Comunicação

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO .....	18
1.1	PROBLEMÁTICA.....	19
1.1.1	Objetivos.....	19
1.1.1.1	Objetivo Geral.....	19
1.1.1.2	Objetivos Específicos .....	19
1.1.2	Metodologia.....	20
1.1.3	Organização da Dissertação.....	21
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	23
2.1	Demonstrativo de Fluxo de Caixa.....	23
2.2	Administração de Caixa.....	27
2.2.1	Modelos de Administração de Caixa.....	30
2.3	DFC no Setor Público.....	35
2.4	Problemas de Fluxo em Redes.....	38
2.4.1	Problemas de Fluxo Máximo.....	41
2.4.2	Método Simples e Fluxo em Redes.....	43
3	MODELO DE FLUXO DE CAIXA PROPOSTO.....	45
3.1	Complexidade do Modelo Proposto.....	47
3.2	Estrutura do Ambiente Computacional.....	47
3.2.1	Interface com o Software LINGO.....	50
4	ESTUDO DE CASO.....	52
4.1	Análise do Modelo e Resultados Obtidos.....	59
5	CONCLUSÃO E PROPOSTA PARA TRABALHOS FUTUROS.....	61
6	BIBLIOGRAFIA .....	63
	ANEXO A – PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA E O MÉTODO SIMPLEX.....	67
	ANEXO B – MODELO MATEMÁTICO.....	76
	ANEXO C – MODELO DE RELATÓRIO GERADO PELO AMBIENTE.....	89
	ANEXO D – RELATÓRIO GERADO PELO AMBIENTE SEFAZ.....	94

## 1 INTRODUÇÃO

Desde o trabalho pioneiro de William Baumol (1952), vários pesquisadores na área de finanças vêm desenvolvendo modelos com tratamento matemático para determinar o equilíbrio da conta caixa, com o objetivo de minimizar os custos associados a sua gestão ou maximizar o valor da empresa. Nesse modelo (conhecido como Modelo de Baumol) o gestor financeiro determinará o saldo ótimo que deve ser mantido em caixa, de tal maneira que as decisões de investir ou resgatar os recursos sejam as melhores possíveis, otimizando com isso os resultados. Todavia, foi com o trabalho de Merton Miller e Daniel Orr (1966), que a variável risco foi acrescentada aos modelos de gerenciamento do saldo de caixa, sofisticando com isso o tratamento dado ao assunto.

Paralelamente as pesquisas sobre modelos de administração de caixa, estudos sobre a Demonstração de Fluxo de Caixa vêm ganhando evidência na literatura sobre finanças. Entende-se que o caixa está no centro de uma série de decisões gerenciais e que, apesar disso, as pesquisas que consideram seus determinantes e implicações ainda estão em seu início. Modelos matemáticos vêm sendo usado para modelagem, análise e gestão dos fluxos de caixa, entre eles os que envolvem Programação Linear são os mais utilizadas, mais precisamente os problemas de Fluxos em Redes de atividades financeiras.

Somando-se a isso temos visto nos últimos anos a evolução, o crescimento e a utilização dos computadores e softwares como ferramentas de trabalho dos gestores financeiros, tão necessárias para uma boa decisão. Nesse contexto, a TIC - Tecnologia da Informação e Comunicação adquire uma importância sem precedentes, havendo um consenso entre especialistas das mais diversas áreas de que as organizações bem sucedidas no século XXI serão aquelas centradas no conhecimento, no fluxo intenso de informações e em pessoas capacitadas participando de decisões.

Integrar modelos de administração de caixa e fluxo de caixa via programação matemática em um ambiente computacional constitui a principal contribuição desse trabalho, colocando a disposição dos gestores financeiros uma ferramenta de apoio à decisão de fácil utilização, alicerçada em modelos matemáticos ainda não existentes na maioria das empresas que lidam com gestão financeira, conforme se aborda na seção “estudo de caso” deste trabalho. O modelo de fluxo de caixa apresentado está sedimentado em um problema de

programação matemática e modelado como um problema de fluxo em redes, e tem como diferencial em relação ao modelo padrão a otimização do seu resultado.

A integração dos modelos de administração de caixa no modelo de fluxo de caixa é feita através da determinação de um saldo ótimo que deve ser mantido em caixa no início de cada período para que a empresa salde seus compromissos operacionais, assim como manter caixa visando uma eventual falta de caixa por um motivo não programado (precaução) e também visando uma possível oportunidade que possa surgir (especulação). A partir da determinação desse saldo, o modelo apresentado faz a análise e gestão dos fluxos de entradas e saídas conforme o fluxo de caixa projetado pela empresa, buscando otimizar o saldo no final de cada período..

## 1.1 PROBLEMÁTICA

O meio empresarial vem sofrendo mudanças ao longo dos tempos, de forma contínua e rápida, tornando-se com isso, cada vez mais complexo, menos previsível, e mais dependente de informações e infra-estrutura tecnológica que permita o gerenciamento de enormes quantidades de dados. O desenvolvimento de novas tecnologias está gerando grandes transformações, que estão ocorrendo à nossa volta. É uma transformação com consequências fundamentais para o mundo empresarial, causando preocupação diária aos empresários, executivos das corporações e administradores em geral, com o estágio do desenvolvimento tecnológico das empresas e/ou de seus processos internos. A convergência desta infra-estrutura tecnológica com as telecomunicações que diminuiu as distâncias está determinando um novo perfil de produtos e de serviços. Sendo a informação um bem que agrega valor a uma empresa ou a um indivíduo, é necessário fazer uso de recursos de TIC de maneira apropriada, utilizando ferramentas, sistemas ou outros meios que façam das informações um diferencial competitivo e que agregue valor, e principalmente é necessário buscar soluções que tragam resultados, mas que tenham o menor custo possível.

## **1.1.1 OBJETIVOS**

### **1.1.1.1 Objetivo Geral**

Desenvolvimento de ambiente computacional que integre dois grandes modelos matemáticos aplicados a gestão e análise financeira do fluxo de caixa: Modelos de Administração de Caixa e Problemas de Fluxos em Redes.

### **1.1.1.2 Objetivos Específicos**

- 1- Desenvolvimento de um ambiente computacional para o sistema de fluxo de caixa que determine o histórico de entradas/saídas.
- 2 - Construção de um modelo dinâmico de Programação Linear de Fluxos em Redes para determinar o mix ótimo do fluxo de caixa, integrando o saldo ótimo de caixa através do Modelo de Miller - Orr.
- 3 - Definição um ambiente iterativo para simular cenários alternativos sobre o melhor Fluxo de Caixa Operacional visando a otimização dos resultados.

## **1.1.2 METODOLOGIA**

Este estudo trata de uma pesquisa aplicada, quantitativa e exploratória que visa à proposição de um ambiente computacional que servirá de orientação à gestão financeira de fluxo de caixa e está sedimentado nos seguintes tópicos:

1 – Análise e elaboração das séries históricas do fluxo de caixa (entradas e saídas) e das aplicações financeiras da empresa.

2 – Pesquisa descritiva e bibliográfica envolvendo os modelos inerentes ao problema: Modelo de Administração de Caixa, Demonstrativo de Fluxo de Caixa e Problemas de Fluxo em Redes.

3 – Implementações computacionais em ambiente JAVA com simulações sobre cenários alternativos de decisão.

### **1.1.3 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO**

A dissertação contém 5 Capítulos, 3 apêndices e 1 anexo. No primeiro capítulo temos a introdução, onde são apresentadas as motivações e descritos os objetivos e a metodologia do trabalho. O quinto capítulo apresenta as considerações finais e propostas para trabalhos futuros. Os demais capítulos contêm o desenvolvimento da dissertação.

O capítulo 2 apresenta a fundamentação teórica em que se baseia esse trabalho tais como: demonstração do fluxo de caixa, tipos de fluxo de caixa, administração de caixa e seus modelos, problemas de fluxos em redes, fluxo máximo em redes e algoritmo simplex para o problema de fluxo em redes.

O capítulo 3 mostra uma descrição dos recursos do modelo de fluxo de caixa otimizado proposto que vem a ser a contribuição maior deste trabalho, uma vez que na maioria das empresas, sejam elas públicas ou privadas, essas informações são geradas e salvas em planilhas eletrônicas sem nem um tratamento matemático que busque otimizar os resultados e sem a possibilidade de realizar simulações. É também mostrado nesse capítulo os recursos de hardware e software utilizados na implementação e nos testes, e apresentados os modelos matemáticos e algoritmos utilizados.

O capítulo 4 é reservado para o estudo de caso, onde será analisado o fluxo de caixa de uma das contas da Secretaria de Fazenda do Estado do Ceará, projetando para

mesma, um cenário com o saldo ótimo que deve mantido em caixa, assim como determinando as melhores aplicações financeiras mediante as aplicações possíveis e um relatório com a análise de sensibilidade, dando ao gestor uma ferramenta fácil e ágil que o auxilie na tomada de decisão.

No apêndice A é feito uma revisão de programação linear, assim como o método simplex e o simplex revisado que são os métodos para solução do problema. No apêndice B é disponibilizada a listagem do modelo matemático gerado pelo ambiente computacional e no apêndice C a solução numérica e a análise de sensibilidade do problema gerado pelo software LINGO. No apêndice C é mostrada a solução numérica gerada pelo software LINGO.

Finalmente, é disponibilizado o modelo do relatório descrevendo o fluxo do caixa no horizonte analisado.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1 DEMONSTRATIVO DE FLUXO DE CAIXA

Apesar de não ser um instrumento obrigatório pelas empresas até 2007 (Lei 6.404/76 - Lei das Sociedades Anônimas<sup>1</sup>) o DFC é muito utilizada pelas empresas no Brasil, e a justificativa para isso se dá pela sua fácil elaboração e pelo fácil entendimento dos gestores. Entretanto, a mesma já é objeto de uso, desde julho de 1999, como instrumento contábil obrigatório, sendo acatado o modelo americano, como sucintamente determinou a Normas e Pronunciamento de Contabilidade N° 20 (NPC 20) de julho de 1999, do IBRACON - Instituto Brasileiro de Contadores, modelo esse que foi normatizado pelo FASB - *Financial Accounting Statement Board*, através do SFAS - *Statement Financial Accounting Standard*.

Devido a sua simplicidade, o DFC é de suma importância na condução de qualquer empresa, seja ela de qualquer porte ou ramo de atividade. Dentre as informações que se pode obter, temos: apoiar o estudo para a previsão de falência; analisar a relação lucro versus caixa; avaliar os efeitos no caixa das transações de investimentos e financiamentos e indicar as possibilidades futuras de liquidação de obrigações, informações essas que são mais difíceis do gestor obter, em um espaço curto de tempo, nos meios clássicos utilizados pelas organizações tais como: Balanço Patrimonial, DRE - Demonstrativo de Resultado do Exercício e DOAR - Demonstração de Origem e Aplicação dos Recursos.

No Brasil, em abril de 1999, o Instituto Brasileiro de Contadores (IBRACON), procurando se antecipar às alterações na Lei 6.404/76, à época em discussão no Congresso, publicou a Normas e Procedimentos Contábeis no. 20 (NPC 20) contendo recomendações (bastante sucintas) quanto à elaboração do Demonstrativo de Fluxo de Caixa, o que mostra que o interesse sobre o pelo estudo sistemático do fluxo de caixa é muito recente, o que talvez explique a relativa pobreza da literatura a respeito e o uso limitado que o meio empresarial faz dele (Sá, 2004).

---

<sup>1</sup> Modificada pela Lei 11.638/07 que entrou em vigor em 01/01/2008, substituiu o DOAR pelo DFC.

Assim, o fluxo de caixa apresenta-se como uma ferramenta de aferição e interpretação das variações dos saldos do disponível da empresa. É o produto final da integração do Contas a Receber com o Contas a Pagar, de tal forma que, quando se comparam as contas recebidas com as contas pagas tem-se o fluxo de caixa realizado, e quando se comparam as contas a receber com as contas a pagar, tem-se o fluxo de caixa projetado (Sá, 2004).

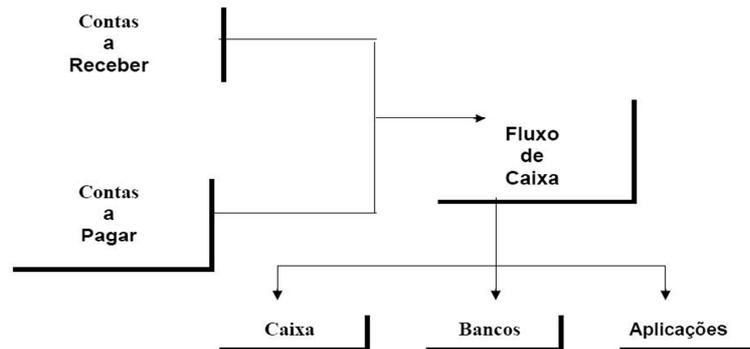


Figura 1 – Fluxo de caixa como integração das Contas a Receber e Contas a Pagar

Fonte: Sá (1998, p. 10)

A finalidade do fluxo de caixa realizado é mostrar como se comportam as entradas e saídas de recursos financeiros em determinado período, já o objetivo do fluxo de caixa projetado é informar como se comportará o fluxo financeiro a curto ou em longo prazo. A comparação dos fluxos de caixa realizado e do projetado, possibilita ao gestor identificar as variações ocorridas, que podem ocorrer por falha de projeções ou por falha de gestão. A análise das variações ocorridas no fluxo de caixa permite identificar as causas de eventuais divergências de valores e funciona como *feedback*, gerando informações para o processo decisório e para o planejamento financeiro futuro.

Conforme Silva *et al* (1993), a projeção do fluxo de caixa depende de vários fatores como o tipo de atividade econômica, o porte da empresa, o processo de produção e comercialização, se é contínuo ou não, entre outros fatores. Devem-se considerar também as fontes de caixa que podem ser internas e/ou externas. Os ingressos decorrentes de fontes de caixa podem ser originados por vendas à vista, cobrança das vendas a prazo, vendas de itens do Ativo Permanente, enquanto as fontes externas são identificadas como provenientes de fornecedores, instituições financeiras e governo [Dalbello 1999].

Acresce-se, ainda, que os ingressos de caixa ocorrem a intervalos regulares, embora algumas empresas possam receber maior parte dos recursos provenientes de sua atividade econômica, no início de cada mês ou em determinado período do ano, quando se tratar de vendas sazonais por questão de moda, safra ou estação. Independente do modo e do período de recebimento, a expectativa da empresa é que uma parcela deste retorno ao caixa, proveniente das vendas, deva representar liquidez<sup>2</sup>.

Por outro lado, a empresa apresenta desembolsos de caixa que podem ser classificados como regulares, periódicos e irregulares.

Os desembolsos regulares de caixa são aqueles que ocorrem por pagamentos de salários, fornecedores, despesas administrativas e pagamento de impostos. Para obter-se um estoque regular de matérias-primas, há necessidade da compra, no período certo, para que o processo produtivo não sofra descontinuidade. Estas passam a produtos em processamento, que, juntamente com a mão-de-obra e demais despesas indiretas de fabricação, transformam-se em produtos acabados. Este processo irá representar uma saída regular de caixa.

Os desembolsos periódicos de caixa correspondem aos pagamentos de juros a terceiros por operações financeiras, dividendos aos acionistas, retiradas feitas pelos proprietários, despesas tributárias, amortizações de dívidas por empréstimos ou financiamentos e resgates de outros títulos da empresa. Quanto aos desembolsos irregulares poderão ser por aquisição de itens do Ativo Imobilizado e outras despesas não esperadas pela empresa.

Quanto aos tipos de fluxos de caixa temos: Os fluxos operacionais são os fluxos de caixa – entradas e saídas – diretamente relacionado à produção e venda dos produtos e serviços da empresa. Esses fluxos captam a demonstração do resultado e as transações das contas circulantes (excluindo os títulos a pagar) ocorridas durante o período. Os fluxos de investimento são fluxos de caixa associados com a compra e venda de ativos imobilizados, e participações societárias. Obviamente, as operações de compra resultam em saídas de caixa, enquanto que as operações de venda geram entradas de caixa. Finalmente os fluxos de financiamentos, que resultam de operações de empréstimo e capital próprio. Tomando ou quitando empréstimos tanto de curto prazo (títulos a pagar) quanto de longo prazo resultará numa correspondente entrada ou saída de caixa.

---

<sup>2</sup> Liquidez é a facilidade com que um bem ou título é convertido em dinheiro.

Segundo Gazzoni (2003, p. 39), ambientes econômicos altamente competitivos, demandam rapidez nas tomadas de decisões, principalmente nas decisões financeiras e gestão dos recursos financeiros que representam uma das principais atividades da empresa. Dessa forma, se faz necessário um efetivo planejamento dos montantes captados e o acompanhamento dos resultados obtidos com o objetivo de administrar tais recursos, possibilitando uma melhor operacionalização. Fazendo uma pequena revisão na literatura, a autora utiliza as seguintes definições sobre fluxo de caixa:

- ❖ Para Zdanowicz": “o fluxo de caixa é o instrumento que permite demonstrar as operações financeiras que são realizadas pela empresa”, o que possibilita melhores análises e decisões quanto à aplicação de recursos que a empresa dispõe.
- ❖ Iudícibus e Marion afirmam que o fluxo de caixa “demonstra a origem e a aplicação de todo o dinheiro que transitou pelo caixa em um determinado período e o resultado desse fluxo”, sendo que o caixa engloba as contas caixa e bancos, evidenciando as entradas e saídas de valores monetários no decorrer das operações que ocorrem ao longo do tempo nas organizações.
- ❖ Thiesen: afirma que o DFC “permite mostrar, de forma direta ou mesmo indireta, as mudanças que tiveram reflexo no caixa, suas origens e aplicações”.
- ❖ No entendimento de Treuherz: o fluxo de caixa é denominado Demonstrativo de Entradas e Saídas ou Demonstrativo de Fluxo Disponível, e tem por finalidade indicar a procedência do numerário do qual se utilizou a empresa num determinado período e as aplicações desse numerário.
- ❖ Sanvicente: assegura que o fluxo de caixa tem como objetivo básico, a projeção das entradas e saídas de recursos financeiros para determinado período, visando prognosticar a necessidade de captar empréstimos ou aplicar excedentes de caixa nas operações mais rentáveis para a empresa.
- ❖ Para Gitman, o fluxo de caixa também é conceituado como o instrumento utilizado pelo administrador financeiro com o objetivo de apurar os

somatórios de ingressos e somatórios financeiros da empresa em determinado momento, prognosticando assim se haverá excedente ou escassez de caixa, em função do nível desejado de caixa pela empresa.

- ❖ Yoshitake: o fluxo de caixa é um esquema que representa os benefícios e os dispêndios ao longo do tempo. Sua gestão visa fundamentalmente manter certo nível de liquidez imediata, para fazer frente à incerteza associada ao fluxo de recebimento e pagamento.
- ❖ Já no entendimento de Assaf Neto e Silva: fluxo de caixa “é um processo pelo qual a empresa gera e aplica seus recursos de caixa determinados pelas várias atividades desenvolvidas”, onde as atividades da empresa dividem-se em operacionais, de investimentos e de financiamento.

Finalizando, Gazzoni (2003, p. 40) define: "fluxo de caixa é um instrumento de controle financeiro gerencial, cuja finalidade é a de auxiliar no processo decisório de uma organização, visando sempre atingir os objetivos esperados, fazendo frente à incerteza associada ao fluxo de recebimentos e pagamentos".

## **2.2 ADMINISTRAÇÃO DE CAIXA**

Vários modelos foram desenvolvidos para tentar refletir o comportamento dos fluxos de fundos. O objetivo principal desses modelos é servir de ferramenta para gestão, tentando minimizar perdas de rentabilidade derivadas de deficiente previsão do caixa. Essas perdas de rentabilidade pode se dar pelo excesso de dinheiro em caixa ou pela escassez, ou seja, pela disponibilidade de caixa.

Segundo Iudícibus (1995, p.117), a intitulação disponibilidades é usada para especificar o dinheiro em caixa e em bancos, e demais valores equivalentes que representem livre movimentação para uso nas operações da empresa e para os quais não haja restrições para uso imediato, caso necessário. O autor ainda considera que caixa “inclui dinheiro, bem como cheques em mãos, recebidos e ainda não depositados, pagáveis irrestrita e imediatamente”.

Bowes apud Matsumoto e Lima (2006, p. 02) em um de seus estudos afirmou "O caixa é o sangue de todas as empresas". Essa afirmação pode parecer um pouco exagerada, a primeira vista, mas vamos considerá-la um pressuposto para entender a sua relação com as demais atividades de uma organização. Sendo o caixa o sangue de todas as empresas, pode-se afirmar que administrá-lo bem pode ser de grande valia para as pretensões da mesma.

Para Kuster e Nogacz apud Matsumoto e Lima (2006, p. 02) "A administração do caixa constitui ferramenta fundamental para a boa administração dos recursos financeiros em qualquer empresa, independente de seu tamanho". Nota-se uma necessidade da administração da empresa em atentar-se para o fluxo de recursos no caixa da empresa, e a necessidade de se estabelecer uma condição em que se maximizem as operações do caixa.

Ross *et al* (1995, p. 617) descrevem os dois motivos fundamentais para a necessidade de posse de caixa, o primeiro é para atender ao motivo transação: as necessidades relacionadas a transações decorrem das atividades normais de desembolso e recebimento da empresa. Os desembolsos incluem o pagamento de salários e honorários, débitos mercantis, impostos e dividendos. Recebe-se caixa com as vendas efetuadas nas operações, em vendas de ativos, e entrada de novos financiamentos. As entradas de caixa (recebimentos) e as saídas de caixa (pagamentos) não são perfeitamente sincronizadas, e é necessário certo nível de saldo de caixa para compensar as diferenças entre elas. O segundo motivo para se manter saldos de caixa está relacionado à necessidade da empresa de possuir saldos médios. Esse saldo é exigido para o pagamento de tarifas de serviços bancários prestados à empresa.

Já Gitman (2004, p. 664) cita três motivos para manter saldos de caixa e quase-caixa (títulos negociáveis). O motivo transação, na mesma linha de raciocínio de Ross et al, a posse de saldos médios ele chama de motivo precaução e acrescenta o motivo especulação, que se caracteriza como "o motivo para manter caixa ou quase-caixa, com vista a tirar proveito de oportunidades inesperadas que possam surgir."

Ribeiro e Rocha apud Matsumoto e Lima (2006, p. 03) afirmam "Se o mundo fosse perfeito, ou seja, sem riscos e incerteza, uma firma iria manter caixa suficiente apenas para cobrir seus desembolsos [...]". Ela acrescenta que a empresa deve determinar o mínimo de saldo para cada ativo, não obstante, deixar de estipular uma margem de segurança que sustente a organização de uma forma tranqüila.

Andrade (2004, p.13) considera que deve haver harmonia entre o volume de disponibilidades e ao tempo de realização de despesas e receitas, devendo haver saldo de caixa ou disponibilidades para a realização dos compromissos da empresa, constituindo, assim, uma gestão eficiente do fluxo de caixa; caso contrário, constitui-se um desajuste financeiro.

Eid Junior (2001, p. 01) acrescenta que a inflação torna-se uma incerteza adicional para que as empresas aumentem essa margem de segurança. Mas muitas empresas mantêm elevados saldos de caixa simplesmente por conveniência. Diante dessas incertezas, é necessário prestarmos atenção em oportunidades que passam, muitas vezes, despercebidas pelas empresas, muitas delas com grande quantidade de pessoas ligadas à área financeira, e, conseqüentemente, responsáveis pela administração das disponibilidades.

Villalba e Sousa (2001, p. 02) explicam da seguinte maneira: Toda empresa tem como finalidade principal a permanente realização de lucros ou, em termos mais gerais, a maximização de valor. Em geral, elas possuem a capacidade de fornecer um produto ou serviço com uma potencialidade de fazer lucros muitas vezes elevados.

Sanvicente *apud* Cardeal (2006, p. 42) comenta sobre o binômio liquidez versus rentabilidade quando expõe que o volume ótimo de caixa deve ser tema relevante, pois o saldo que se deve manter em caixa tem que ser o suficiente para atender as necessidades da empresa, sejam elas operacionais, de precaução ou de eventuais oportunidades que se mostrem interessante e que maximize os seus resultados.

Segundo Matarazzo *apud* Andrade (2004, p. 08): “quase sempre os problemas de insolvência ou iliquidez ocorrem por falta de adequada administração do fluxo de caixa, daí a importância de sua análise”. Considerando que a análise do fluxo de caixa, geralmente, não é divulgada pelas empresas, sendo o seu uso mais interno, observa-se que nas análises de balanços ignora-se o fluxo de caixa.

### 2.2.1 MODELOS DE ADMINISTRAÇÃO DE CAIXA

Qual o nível ótimo que se deve manter em caixa na empresa de tal modo que haja uma sincronização das entradas e saídas para que a empresa não se torne ilíquida ou mantenha excesso de liquidez, incorrendo em altos custos de oportunidade?

Essa é a pergunta que muitos gestores e especialistas em finanças vêm dedicando tempo em busca de uma solução e/ou modelo que determine o saldo ótimo para manter em caixa na empresa, e para isso, vários são os modelos de administração de caixa que foram desenvolvidos para tentar refletir o comportamento dos fluxos de fundos. O objetivo principal desses modelos é servir de ferramenta para gestão, tentando minimizar perdas de rentabilidade derivadas de deficiente previsão do caixa. Dentre os mais conhecidos temos: Modelo do Caixa Mínimo Operacional (CMO), Modelo de Baumol, Modelo de Beranek, Modelo de Miller – Orr, Modelo do dia da semana e outros.

Os modelos citados representam importantes instrumentos de apoio ao gestor financeiro para determinar o nível de liquidez a ser mantido pela empresa. Contudo, no processo decisório na administração de caixa, o gestor deve considerar dois aspectos básicos: o custo de manter a liquidez e o custo da provável falta de liquidez. O custo de manutenção da liquidez é obtido pelo custo de oportunidade<sup>3</sup> desse volume de recursos, entretanto, o custo da falta de liquidez é mais difícil de ser mensurado [Assaf Neto 2005].

O modelo pioneiro para administração de caixa foi desenvolvido por William Baumol em 1952 e serve de base conceitual para a administração de caixa e que foi aperfeiçoado e desenvolvido posteriormente por outros autores. O Modelo de Baumol (1952), em linhas gerais, efetua uma análise do custo associado à manutenção do dinheiro em caixa,

---

<sup>3</sup> O Custo de Oportunidade representa o custo associado a uma determinada escolha medido em termos da melhor oportunidade perdida. Por outras palavras, o custo de oportunidade representa o valor que atribuímos à melhor alternativa de que prescindimos quando efetuamos a nossa escolha.

Segundo a Wikipédia, o custo de oportunidade é um termo usado na economia para indicar o custo de algo em termos de uma oportunidade renunciada, ou seja, o custo, até mesmo social, causado pela renúncia do ente econômico, bem como os benefícios que poderiam ser obtidos a partir desta oportunidade renunciada ou, ainda, a mais alta renda gerada em alguma aplicação alternativa.

Ou ainda: custo de oportunidade é o custo de algo em termos de uma oportunidade não exercida. Traduz o valor associado à melhor alternativa não escolhida. Num processo produtivo, o custo de oportunidade de um fator correspondente ao melhor ganho que se poderia obter utilizando esse fator em vez de outra atividade que não a produção da firma.

ou seja, o custo de oportunidade determinado pelos juros que a empresa deixa de receber ao não aplicar esses recursos em títulos negociáveis e do custo de obtenção do dinheiro pela conversão de títulos negociáveis em caixa. Sucintamente, a manutenção de caixa proporciona à empresa liquidez necessária para atender a falta de sincronização entre recebimentos e pagamentos [Assaf Neto 2005].

Para Assaf Neto (2003, p. 232), os princípios básicos do modelo podem ser extraídos observando a figura abaixo, que pressupõem o nível de caixa ao longo do tempo apresentado segundo uma forma dentada, admitindo que a empresa consiga manter dinheiro em caixa no período vendendo títulos negociáveis. A empresa inicia o período com certa quantidade de dinheiro em caixa  $Y$  e, sempre que essa quantia termina, a empresa vende títulos para repor o caixa integralmente. Essa operação de venda de títulos se repete cada vez que o caixa se esgota, devendo, por conseguinte ocorrer certo número de vezes no período considerado.

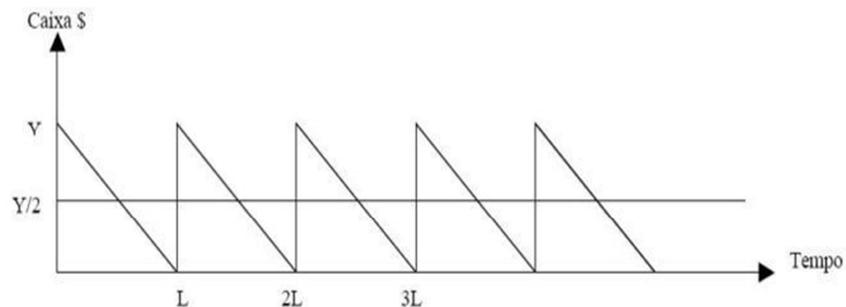


Figura 2 - no Modelo de Baumol, o caixa apresenta um fluxo contínuo e constante de saída, com reposições periódicas

Fonte: (Famá e Grava, 2000, p. 03).

O modelo pode ser representado pela seguinte equação [Baumol 1952]:

$$n = \left( \frac{iY}{2a} \right)^{\frac{1}{2}}$$

onde:  $n$  é o número de aplicações,  $Y$  é o valor da entrada de caixa,  $a$  é o custo fixo por transação (aplicação - resgate) e  $i$  são os juros.

O Modelo de Beranek considera a situação inversa ao Modelo de Baumol, considerando que as entradas de caixa são contínuas e as saídas são periódicas. O saldo de caixa cresce regularmente durante o período, sendo ao final do mesmo consumido totalmente num único instante com os pagamentos necessários. As demais considerações são as mesmas

que no Modelo de Baumol, inclusive a formulação matemática para determinar o número de transações ótimas [Villalba & Sousa].

O modelo desenvolvido por Merton Miller e Daniel Orr em 1966 adotou os mesmos pressupostos utilizados por William Baumol em relação às decisões enfrentadas pelo gestor e aos custos associados às diferentes operações. Entretanto, Miller e Orr (1966) admitem a aleatoriedade do comportamento de caixa, e supõem que a distribuição dos fluxos líquidos diários (entrada menos saída) é uma distribuição normal de probabilidade com média zero, que o desvio padrão não varia através do tempo e que não há correlação entre os fluxos de caixa ao longo do tempo, bem como aversão ou propensão ao risco pelos gestores, tendo como resultado, um modelo mais adequado a realidade do caixa [Villalba & Sousa].

Segundo Rogers *et al.* (2005, p. 03), o modelo formula uma estratégia de maximização do lucro baseando-se em certos limites que podem variar os fluxos de caixa. Quando o caixa total da firma encontra-se acima do limite de controle superior, investimentos são realizados a ponto de trazer para baixo o saldo de caixa; e quando este saldo se encontra abaixo do limite de controle inferior, são resgatados os investimentos para elevar novamente o saldo de caixa. Com isso objetiva-se justamente calcular o valor ótimo dos limites, os quais dependem dos custos fixos associados às transações, dos custos de oportunidade e da variação esperada nos saldos de caixa.

O modelo funciona da seguinte forma: o gestor determina um nível mínimo de caixa (L) de acordo com sua tendência ao risco, um limite máximo de caixa (H) e ponto de retorno ideal (Z\*), utilizando a seguinte formulação matemática [Miller & Orr]:

$$Z = \sqrt[3]{\frac{3F\sigma^2}{4K}}$$

$$H = 3Z - 2L$$

$$Y = \frac{4}{3} \sqrt[3]{\frac{3F\sigma^2}{4K}} = \frac{4}{3}Z \text{ ou } Y = \frac{4Z - L}{3}$$

Onde:  $\left\{ \begin{array}{l} L \text{ é o limite inferior do caixa;} \\ F \text{ é o custo de venda dos títulos para conseguir caixa;} \\ K \text{ é o custo de oportunidade para manter dinheiro em caixa;} \\ \sigma^2 \text{ é a variância dos fluxos líquidos de caixa;} \\ Y \text{ é o saldo otimizado de caixa;} \\ H \text{ é o limite máximo que deve ser mantido em caixa.} \end{array} \right.$

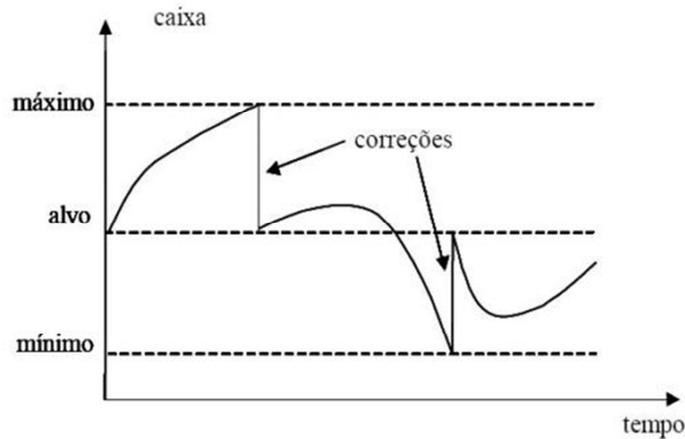


Figura 3 – Modelo de Administração de Caixa de Miller & Orr

Fonte: (Famá, 2000, p. 04)

Ross, Westerfield e Jaffe apud Cardeal (2006, p. 48), esclarecem o modelo chamando atenção para os níveis de caixa e acrescenta alguns dados que a empresa necessita definir a fim de executá-lo:

- a) determinar limite inferior de saldo em caixa, relacionado a um saldo mínimo de segurança determinado pela empresa;
- b) projetar o desvio-padrão dos fluxos de caixa diário;
- c) determinar a taxa de juros;
- d) prever os custos de transação resultante das aplicações e resgates dos recursos.

Ainda em Ross, Westerfield, Jaffe apud Cardeal (2006, p. 49), os mesmos concluem que este modelo “esclarece bem as questões básicas do administrador” porque apresenta de forma eficaz entre o ponto ótimo de retorno, isto é, o saldo mínimo de caixa e os custos de transação. E que este ponto ótimo está diretamente relacionado “a variabilidade dos fluxos de caixa”.

O modelo de caixa mínimo operacional utiliza uma metodologia bastante simples e é baseado em dados históricos. Segundo Assaf Neto (1997, p. 80), para obter o Caixa Mínimo Operacional - CMO, basta dividir o Desembolso Total Anual (DTA) por seu Giro de Caixa (GC). Por outro lado, o giro de caixa é determinado pelo quociente entre 360 (ano comercial) e o Ciclo de Caixa (CC), se a base for a dias e o período de projeção for de um ano. Já o ciclo de caixa é dado pela soma do Prazo Médio dos Estoques (PME) com o Prazo

Médio de Cobrança (PMC), subtraindo-se o Prazo Médio de Pagamentos (PMP). Matematicamente, temos:

$$CC = PME + PMC - PMP$$

$$GC = 360 / CC$$

$$CMO = DTA / GC$$

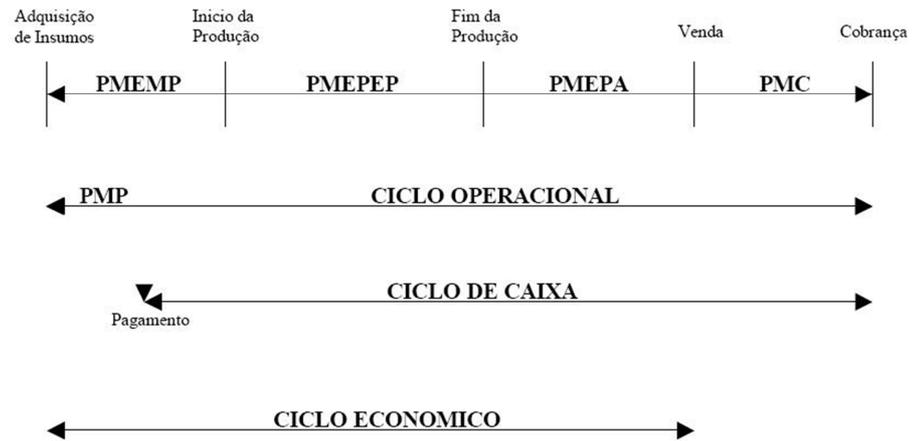


Figura 4 – Modelo de Caixa Mínimo Operacional

Fonte: Villalba & Sousa (2001, p. 03)

O modelo do dia da semana baseia-se na premissa de que as empresas possuem uma alta sazonalidade nos fluxos de fundos, especificamente concentrados em alguns dias da semana e que essa regularidade se mantém através do tempo. Primeiramente calcula-se o desvio entre a participação de cada dia da semana e a média. Se não houvesse sazonalidade nos dias da semana tomando os dias hábeis, de segunda a sexta-feira, o fluxo seria proporcionalmente igual para cada dia, ou seja, 20% [Villalba & Sousa].

Tabela 1 – Modelo do Dia da Semana

<b>Dia</b>	<b>Participação</b>	<b>Desvio</b>
segunda-feira	0,21	0,21 – 0,20 = 0,01
terça-feira	0,22	0,22 – 0,20 = 0,02
quarta-feira	0,17	0,17 – 0,20 = - 0,03
quinta-feira	0,15	0,15 – 0,20 = - 0,05
sexta-feira	0,25	0,25 – 0,20 = 0,05
Total	1,00	0

Fonte: Assaf Neto & Silva (1997, p. 98)

Segundo Assaf Neto e Silva (1997, p. 98), o componente sazonal de cada mês ou dia é calculado neste modelo e considerando o saldo do final do mês, fazendo-se a projeção para o fluxo de caixa diário.

Uma vez conhecido a estimativa do caixa para o final do mês, o gestor pode estimar facilmente o valor diário do caixa, e assim tomar decisões de investimento ou financiamento, ajustando o caixa ao mínimo necessário. Calculando as médias dos fluxos e seus desvios diários, podem-se prever os fluxos de fundos para cada dia.

Outros modelos utilizando a aleatoriedade dos fluxos foram desenvolvidos a partir da década de 60 até os dias de hoje, seguindo os mesmos critérios e pressupostos introduzindo por Miller e Orr. Poderíamos citar: 0 de Archer em 1966, Girgis em 1968, Eppen e Famá em 1969, Daellenbach e Archer em 1969, Neave em 1970, Daellenbach em 1971, Stone em 1972 e Morris em 1983.

### 2.3 DFC E ADMINISTRAÇÃO DE CAIXA NO SETOR PÚBLICO

A Constituição Federal - CF em vigor trouxe inovações significativas na sistemática de elaboração e de apreciação dos instrumentos que compõem o chamado "modelo orçamentário". O principal arcabouço legal do processo de planejamento e de orçamento está inscrito nos arts. 165 a 169 da Constituição Federal e tem como expoente formal três documentos interdependentes, a saber: a Lei do Plano Plurianual (PPA)<sup>4</sup>, a Lei de Diretrizes Orçamentárias (LDO)<sup>5</sup> e a Lei Orçamentária Anual (LOA)<sup>6</sup>. Além disso, vale notar

---

<sup>4</sup> A Lei do Plano Plurianual é de iniciativa do Poder Executivo. Trata-se de uma lei ordinária, editada a cada quatro anos e, segundo dispõe o § 1º do art. 165 do texto constitucional, “..estabelecerá, de forma regionalizada, as diretrizes, objetivos e metas da administração pública federal para as despesas de capital e outras delas decorrentes e para as relativas aos programas de duração continuada”.

<sup>5</sup> De acordo com o § 2º do art. 165 do texto constitucional, a LDO “compreenderá as metas e prioridades da administração pública, incluindo as despesas de capital para o exercício financeiro subsequente, orientará a elaboração da lei orçamentária anual, disporá sobre as alterações da legislação tributária e estabelecerá a política de aplicação das agências financeiras de fomento”.

<sup>6</sup> LOA é uma lei ordinária de iniciativa do Poder Executivo com validade para cada exercício fiscal. Consoante o § 5.º do art. 165 da Constituição, essa lei deve conter três orçamentos: o orçamento fiscal, o orçamento da seguridade social e o orçamento de investimento das empresas estatais.

a preocupação central dos Constituintes de 1988, ao aprovar essas normas: vincular os processos de planejamento ao de orçamento.

Assim sendo, foi determinado no art. 165, § 4º, da CF, que “..Os planos e programas nacionais, regionais e setoriais previstos nesta Constituição serão elaborados em consonância com o plano plurianual e apreciados pelo Congresso Nacional”. Adicionalmente, o § 1º do art. 167, estabelece que “...Nenhum investimento cuja execução ultrapasse um exercício financeiro poderá ser iniciado sem prévia inclusão no plano plurianual, ou sem lei que autorize a sua inclusão, sob pena de crime de responsabilidade” [Bastos2004].

A Lei de Responsabilidade Fiscal (Lei Complementar no 101/2000) estabelece normas de finanças públicas voltadas para a responsabilidade na gestão fiscal. É um código de conduta para os administradores públicos que passarão obedecer a normas e limites para administrar as finanças, prestando contas de quanto e como gastam os recursos da sociedade. Para alcançar este objetivo a Lei dispõe de meios, dentre os quais se destaca a ação planejada e transparente na busca do equilíbrio das contas públicas, cujas metas de resultado entre receitas e despesas devem ser cumpridas, assim como os limites e condições para a renúncia de receita, despesas com pessoal, seguridade social, dívidas consolidada e mobiliária, operações de crédito, concessão de garantia e inscrição em restos a pagar.

No Brasil após a implementação da Lei de Responsabilidade Fiscal, o conceito de administração pública vem mudando, principalmente no que se refere à figura do gestor público. O artigo 1º, §1º da LRF preconiza o seguinte:

A responsabilidade na gestão fiscal pressupõe a ação planejada, em que se previnem riscos e corrigem desvios capazes de afetar o equilíbrio das contas públicas, mediante o cumprimento de metas e resultados entre receitas e despesas e a obediência a limites e condições no que tange a renúncia de receita, geração de despesas com pessoal, da seguridade social e outras, dívidas consolidada e mobiliária, operações de crédito, inclusive por antecipação de receita, concessão de garantia e inscrição em Restos a Pagar.

Para Andrade apud Andrade (2005, p. 09), o processo de planejamento econômico e financeiro das entidades públicas passa invariavelmente pela gestão das contas Caixa e Bancos. É notório que essas duas contas têm evidentes provas de liquidez, estando por isso no rol das mais importantes para a entidade pública, figurando, inclusive, no ápice do plano de contas governamental.

Seguindo o raciocínio, Andrade (2005, p. 09) continua: no fluxo de caixa da gestão pública podem ser observados casos específicos de sazonalidades, inadimplência de contribuintes, potencial de investimento, vinculação de recursos, projeção para futuro a curto, médio e longo prazo, demonstração em valores constantes e valores correntes, vencimentos por ordem cronológica dos desembolsos, controle do grau de endividamento, indicadores de liquidez, visão geral da situação das finanças públicas, entre outras vantagens.

Albuquerque apud Andrade (2005, p. 6) afirma que:

*Com a LRF a programação anual da execução orçamentária e dos desembolsos financeiros passou a ter por finalidade não só evitar déficits de caixa, mas principalmente, prevenir a ocorrência de déficits que possam acarretar a acumulação de restos a pagar e consequentemente comprometimento de receitas futuras.*

O planejamento na administração pública tem a sua fase que deve ser acompanhada durante a execução orçamentária e financeira. Trata-se, conforme a LRF, da definição de metas de arrecadação, a programação financeira com a definição de cotas financeiras, do cronograma mensal de desembolso e da limitação de empenhos que são as alternativas para alcançar o equilíbrio das contas públicas [Andrade 2005].

Segundo Andrade (2005, p. 6), a execução do orçamento-programa ocorre durante os 12 meses correspondentes a um exercício financeiro, durante os quais os ajustes em suas previsões nos sistemas orçamentários e financeiros devem ser trabalhados, visando o equilíbrio das contas públicas no que tange as receitas e despesas e a verificação de resultados periódicos.

Apresenta-se no quadro abaixo, um *check-list* do que se deve compor em um fluxo de caixa de um órgão público, de forma que possa dar respaldo gerencial e ainda cumprir a legislação:

<b>Saldos Bancários</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>emitir balanço ou balancete do período anterior já encerrado ao de referência para a emissão do fluxo de caixa previsto, com vistas à confiabilidade dos dados contábeis;</li> <li>obter os saldos de caixa e bancos do período anterior conciliados;</li> <li>efetuar a análise dos pagamentos e recebimentos em trânsito.</li> </ul>
<b>Estimativa de Recebimento (metas de arrecadação)</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>elaborar a previsão mensal das receitas para o período (12 meses para frente);</li> <li>efetuar a composição das metas bimestrais de arrecadação (dispositivo da LRF);</li> <li>fazer a revisão e observar a análise da sazonalidade de cada fonte de receita;</li> <li>observar as metas de receita definidas no anexo de metas fiscais da LDO; atendimento à legislação de tributos municipais;</li> <li>ter atenção a mudança de legislação que produza impacto na receita;</li> <li>ter atenção a eventuais renúncias de receitas;</li> <li>observar a vinculação das receitas às respectivas fontes;</li> <li>observar a conjuntura atual da economia (impacto nas transferências constitucionais – FPM, ICMS e outras);</li> <li>providenciar a revisão periódica das estimativas de recebimento.</li> </ul>
<b>Previsão de Desembolso (cronograma de desembolso)</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>prever o desembolso mensal da conta de Restos a Pagar;</li> <li>prever o desembolso mensal das transferências financeiras (ex.: repasse ao Poder Legislativo, autarquias e fundações públicas);</li> <li>observar as metas de despesa definidas no anexo de metas fiscais da LDO;</li> <li>elaborar a previsão de desembolso da despesa para cada unidade orçamentária;</li> <li>observar o desembolso por vinculação/fontes de recursos;</li> <li>observar a ordem cronológica de pagamento para cada fonte de recursos;</li> <li>observar os limites legais de aplicação de recursos como ensino e saúde;</li> <li>cuidar da aplicação de determinadas fontes de recursos integralmente no exercício. Ex.: ensino e Fundef;</li> <li>acompanhar as obras e investimentos do PPA, principalmente os constantes nas metas prioritárias da LDO;</li> <li>manter as despesas de duração continuada, tais como tarifas de água, luz, e telefone, amortizações de dívidas, despesas bancárias, repasses, folha e pagamentos e encargos, juros e precatórios;</li> <li>observar o cronograma da aplicação dos convênios.</li> </ul>

Figura 5 - *Check list* do fluxo de caixa de uma empresa pública

Fonte: Andrade (2005, p. 10)

## 2.4 PROBLEMAS DE FLUXO EM REDES

Problemas de fluxos em redes são problemas de programação linear (Apêndice A) que apresentam uma estrutura de redes, ou seja, problemas cujas variáveis advêm de valores a serem definidos para os arcos e/ou vértices de um grafo direcionado, ou ainda: uma rede  $G = (V, E, f)$  ( $f$  é uma função real  $f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  é um grafo planar em que cada aresta  $(u,v) \in E$  tem uma capacidade não-negativa  $c(u,v) \geq 0$ , satisfazendo as seguintes propriedades:

- i. Restrição de capacidade:  $\forall u, v \in V$ , tem se  $f(u, v) \leq c(u, v)$ ;
- ii. Anti – simétrica oblíqua:  $\forall u, v \in V$ , tem se  $f(u, v) = -f(v, u)$ ;
- iii. Conservação de fluxo:  $\forall u \in V - \{s, t\}$ , tem se  $\sum_{v \in V} f(u, v) = 0$ .

O valor  $|f|$  do fluxo  $f$  é o fluxo de rede do sumidouro:

$$|f| = \sum_{u \in V} f(u, t) = \sum_{u \in V} f(s, u)$$

**Definição 1:** Um grafo (= grafo dirigido = grafo orientado) é um par  $(V, E)$ , onde  $V$  é um conjunto finito e  $E$  é um conjunto de pares ordenados de elementos de  $V$ . Os elementos de  $V$  são chamados nós (vértices) e os elementos de  $E$  são chamados arcos (arestas).

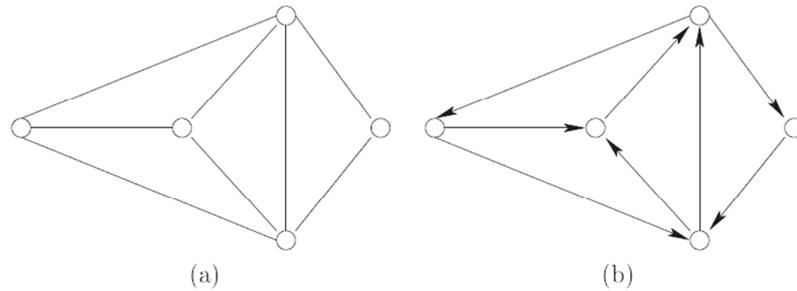


Figura 6 - Exemplos de grafos. (a) Grafo  $G$  não orientado. (b) Grafo  $\vec{G}$  orientado.

**Definição 2:** Uma rede é um grafo  $(V, E)$  juntamente com uma ou mais funções que atribuam números aos arcos e/ou aos nós e contém exatamente um vértice  $s$  do tipo fonte e um vértice  $t$  do tipo sumidouro.

A estrutura de uma rede orientada é ilustrada na figura 5, onde os nós são representados por círculos e os arcos por segmentos de linha orientados que conectam dois nós. A seta no segmento de reta indica a direção de fluxo no arco da rede. Por exemplo, o primeiro arco está direcionado a partir do nó 1 na direção do nó 5.

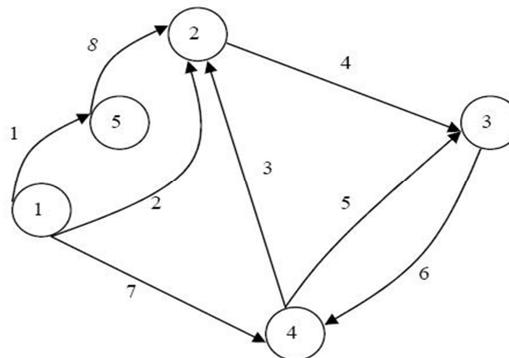


Figura 7 - Representação de uma rede através de um grafo orientado  $G$

Fonte: Machado (2005, p. 32)

A estrutura da rede pode também ser descrita por uma matriz  $A$  de dimensão  $|V| \times |E|$ , definida como segue [Machado]:

$$A_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{direção do arco } j \text{ a partir do nó } i; \\ -1, & \text{direção do arco } j \text{ na direção do nó } i; \\ 0, & \text{outros casos.} \end{cases}$$

Essa matriz é chamada matriz de incidência nó-arco e é representada abaixo:

		Arcos								
		1	2	3	4	5	6	7	8	Nós
$A =$	[	1	1					1		1
			-1	-1	1				-1	2
					-1	-1	1			3
				1		1	-1	-1		4
		-1							1	5
	]									

Figura 8 – Matriz de incidência

Fonte: Machado (2005, p. 33)

A cada nó  $i$  na rede  $G$  é associado um número  $b_i$  que representa a quantidade disponível para ser fornecida (se  $b_i > 0$ ) ou a quantidade requerida para demanda (se  $b_i < 0$ ). Nós com  $b_i > 0$  são chamados fontes e nós com  $b_i < 0$  são chamados sumidouros. Se  $b_i = 0$  nada é fornecido ou demandado e, neste caso, o nó é chamado de nó intermediário [Bazaraa1977].

Para cada arco  $(i, j)$ ,  $x_{ij}$  representa a quantidade de fluxo que transita por esse arco ( $x_{ij} \geq 0$ ) e  $c_{ij}$  representa o custo unitário para transitar pelo arco.

Considera-se que o total fornecido é igual ao total da demanda através da rede, isto é:

$$S_t = \sum b_i = 0$$

Se  $S_t > 0$ , acrescenta-se um nó  $m + 1$  (de demanda) com  $b_{m+1} = -S_t$ , bem como arcos com custo zero ligando esse nó a cada fornecedor.

Matematicamente, o problema pode ser escrito como [Franco & Monard]:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} \\ \text{s. a: } & \sum_{j=1}^m x_{ij} - \sum_{k=1}^m x_{ki} = 0, i = 0, 1, 2, \dots, m \\ & x_{ij} \geq 0 \end{aligned}$$

### 2.5.1 PROBLEMA DE FLUXO MÁXIMO

Dada uma rede  $G = (V, E)$ , com um nó de entrada (fonte) e um nó de saída (sumidouro), com capacidade associada a cada ramo, deseja-se encontrar o máximo de fluxo que pode ser enviado entre esses nós, e é modelado como um problema de programação inteira.

#### MODELO EM PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA

$$\begin{aligned} & \text{Maximize } v \\ \text{s. a: } & \sum_{\{j:(i,j) \in E\}} x_{ij} - \sum_{\{j:(j,i) \in E\}} x_{ji} = \begin{cases} v, \text{ para } i = s \\ 0, \forall i \in V - \{s, t\} \\ -v, \text{ para } i = t \end{cases} \\ & 0 \leq x_{ij} \leq c_{ij}, \text{ para cada } (i, j) \in E \end{aligned}$$

onde:  $x_{ij}$  é o fluxo que passa do ramo  $(i, j)$ , de  $i$  para  $j$ ,  $v$  é o valor do fluxo e  $c_{ij}$  a capacidade de transporte do ramo  $(i, j)$ .

**DEFINIÇÃO:** Uma função-capacidade em um grafo  $(V, E)$  é qualquer função de  $E$  em  $\mathbb{Z}_{\geq}$ :

$$u: E \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq}$$

Para cada arco  $ij$ , o inteiro não-negativo  $u_{ij}$  é a capacidade do arco  $ij$  na rede  $(V, E, u)$ . Diremos que uma função  $x$  de  $E$  em  $\mathbb{Z}_{\geq}$  respeita  $u$  se  $x \leq u$ , ou seja, se  $x_{ij} \leq u_{ij}$  para cada arco  $ij$  [Cormen].

**DEFINIÇÃO:** Sejam uma rede e um fluxo. Uma rede residual é uma rede com os arcos da rede original que comportam mais fluxo.

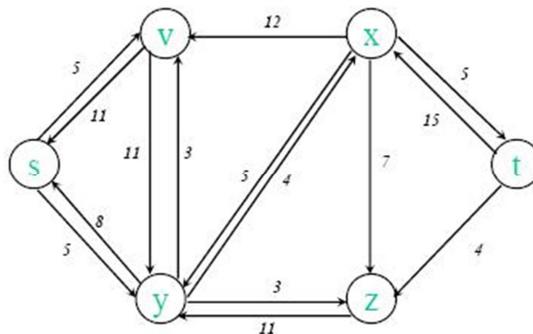


Figura 9 – Rede residual

**DEFINIÇÃO:** Um caminho de  $G$  é uma seqüência de vértices de  $G$   $(v_0, v_1, \dots, v_n)$  em que  $(v_0, v_1, \dots, v_n)$  são vértices de  $G$  distintos dois a dois e  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \{v_{i-1}, \dots, v_i\} \in G$ . Um caminho aumentante  $p$  é um caminho simples desde  $s$  até  $t$  na rede residual.

**DEFINIÇÃO:** Seja uma rede  $G = (V, E)$  e um fluxo  $f$ , um caminho expansível  $p$  é um caminho de  $s$  para  $t$  na rede residual  $G_f$ . A capacidade residual de um caminho expansível é definida como:  $c_f(p) = \min\{c_f(u, v) : (u, v) \in p\}$ .

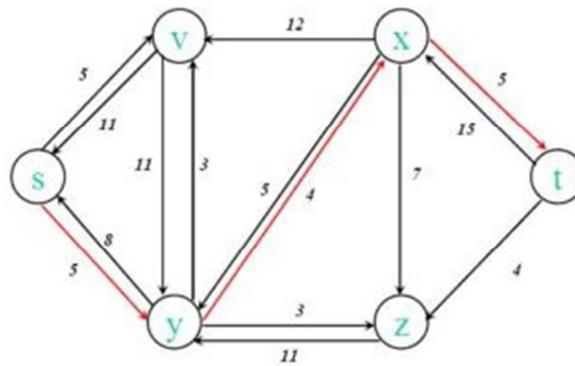


Figura 10 – Caminho expansível

**DEFINIÇÃO:** Um corte é uma partição de  $V$  em  $S$  e  $T = V - S$ , em que  $s \in S$  e  $t \in T$ . O fluxo da rede  $(f(S, T))$  através do corte é a soma dos fluxos  $f(u, v)$ , em que  $u \in S$  e  $v \in T$ . A capacidade  $(c(S, T))$  do corte é a soma das capacidades  $c(u, v)$ , em que  $u \in S$  e  $v \in T$ .

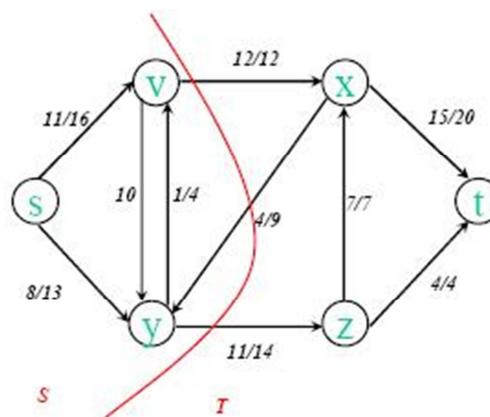


Figura 11 – Cortes

## TEOREMA DE FLUXO MÁXIMO E CORTE MÍNIMO [Cormen]

Se  $f$  é um fluxo em um fluxo em rede  $G = (V, E)$  com origem  $s$  e sorvedor  $t$ , então as condições a seguir são equivalentes:

- i)  $f$  é um fluxo máximo em  $G$ .
- ii) A rede residual  $G_f$  não possui nenhum caminho aumentante.
- iii)  $|f| = c(s, t)$  para algum corte  $(s, t)$  em  $G$ .

## ALGORITMO DO FLUXO MÁXIMO

Passo 1 - Registrar em cada arco, na sua origem, a capacidade de envio ainda disponível nesse arco.

Passo 2 - Registrar para cada arco, junto ao nó de destino o fluxo já enviado por esse arco.

Passo 3 - Arbitrar um caminho qualquer entre o nó de origem e o nó de destino, e determinar o fluxo máximo que por ele pode ser enviado.

Passo 4 - Repetir o algoritmo até saturar os caminhos possíveis.

### 2.5.2 MÉTODO SIMPLEX E FLUXOS EM REDES

Sendo o problema de fluxo em redes um problema de programação linear, o método simplex (Apêndice A) pode ser também utilizado para resolvê-lo e seu significado e o algoritmo utilizado para solucioná-lo é apresentado a seguir [Franco & Monard]:

1. Solução Básica Factível Inicial. A solução em redes de fluxo com  $n$  nós é composto por  $(n - 1)$  arcos, tal que os fluxos que circulam neles devem satisfazer as seguintes restrições:

$$s. a: \sum_{j=1}^m x_{ij} - \sum_{k=1}^m x_{ki} = 0, i = 0, 1, 2, \dots, m$$

$$x_{ij} \geq 0$$

2. Calcular  $z_j - c_j$ . Dado um subgrafo básico, computar  $z_j - c_j$  para cada variável não-básica  $x_{ij}$ .
3. OTIMALIDADE. A solução será considerada ótima quando não houver nenhum arco  $(i,j)$  tal que  $z_j - c_j > 0$ .
4. TROCA DE BASE E PIVOTAMENTO. Quando o método do ciclo é utilizado para computar  $(z_j - c_j)$  para os arcos não básicos, identifica-se o processo de pivotamento. Assim, quando  $z_j - c_j > 0$  (caso em que  $x_{ij}$  é candidato a entrar na base), deve-se proceder da seguinte forma: o valor de  $x_{ij}$  é incrementado e as variáveis básicas são ajustadas de modo a manter a factibilidade, determinando a primeira variável que atinge o valor zero. Esta variável deverá sair da base.

Quando o arco  $(i,j)$  é colocado na base, formando um ciclo orientado no sentido do arco  $(i,j)$ , circula um fluxo  $F$  através dele. Assim, há um fluxo  $F$  através do arco  $(i,j)$  e esse valor deve ser adicionado aos fluxos dos arcos que se encontram no sentido direito com relação ao ciclo e subtraído dos valores de fluxos dos arcos que se encontram no sentido contrário ao ciclo.

A variável a sair da base será aquela que tiver o menor fluxo entre as variáveis que estiverem em sentido contrário ao do ciclo. O valor de  $F$  será então o valor desse fluxo. Com o valor de  $F$  determinado, é possível então recalculer os valores dos fluxos das outras variáveis pertencentes ao ciclo.

### 3 MODELO DE FLUXO DE CAIXA OTIMIZADO PROPOSTO

O fluxo de caixa financeiro proposto é modelado como um problema de grafo valorado  $G(V, A, P)$  satisfazendo todas as propriedades do item 2.3 desse trabalho, onde  $V$  é o conjunto de vértices representando as datas (dias) do horizonte de planejamento,  $A$  é o conjunto de arestas representando os valores das operações financeiras (diárias) de entradas e saídas, aplicações, captações, taxas de administração, taxas de permanências, etc. e  $P$  representa o conjunto de produtos ofertados pelo mercado financeiro.

$$\text{Maximize } \sum_{x=1}^{NA} A_{xi} \text{ (Maximizar a soma dos saldos das aplicações } x \text{ no dia } i)$$

s.a:

$$E_i = \sum_{x=1}^{NA} EA_{xi} \text{ (Entrada no dia } i = \text{ somatório das entradas das aplicações } x \text{ no dia } i)$$

$$S_i = \sum_{x=1}^{NA} SA_{xi} \text{ (Saldo no dia } i = \text{ somatório das saídas das aplicações } x \text{ no dia } i)$$

$$A_{xi} \geq SM_x \text{ (Saldo da aplicação } x \text{ no dia } i \geq \text{ saldo mínimo da aplicação } x)$$

onde:

$$A_{xi} = EA_{xi} - SA_{xi} \times (1 + TS_x) + \sum_{k=1}^{NA} TA_{kxi} - \sum_{k=1}^{NA} TA_{xki} \times (1 + TS_x) + A_{xi-1} \times (1 + RA_{xi})$$

[Saldo das aplicações  $x$  nos dias  $i = (\text{entradas da aplicação } x \text{ no dia } i) - (\text{saída da aplicação } x \text{ no dia } i \times (1 + \text{taxa de saída ou retirada})) + (\text{soma do que saíram das outras aplicações } k \text{ com destino na aplicação } x \text{ no dia } i) - (\text{soma do que saíram da aplicação } x \text{ com destino as outras aplicações } k \text{ no dia } i \times (1 + \text{taxa de saída ou retirada})) + (\text{saldo da aplicação do dia anterior com o rendimento no dia } i)]$ .

NA = números de aplicações;

$E_i$  = Entradas do dia  $i$ ;

$S_i$  = Saídas do dia  $i$ ;

$EA_{xi}$  = Entrada na aplicação  $x$  no dia  $i$ ;

$SA_{xi}$  = Saída da aplicação x no dia i;

$A_{xi}$  = Saldo da aplicação x no dia i;

$SM_x$  = Saldo mínimo da aplicação x;

$TS_{xi}$  = Taxa de saída ou retirada da aplicação x no dia i;

$TA_{kxi}$  = Transferência da aplicação k a aplicação x no dia i;

$TA_{xki}$  = Transferência da aplicação x a aplicação k no dia i;

$RA_{xi}$  = Rendimento da aplicação x no dia i.

O problema também pode ser visualizado como um problema de fluxo em grafos, conforme se vem especificando desde o começo do trabalho, assim temos:

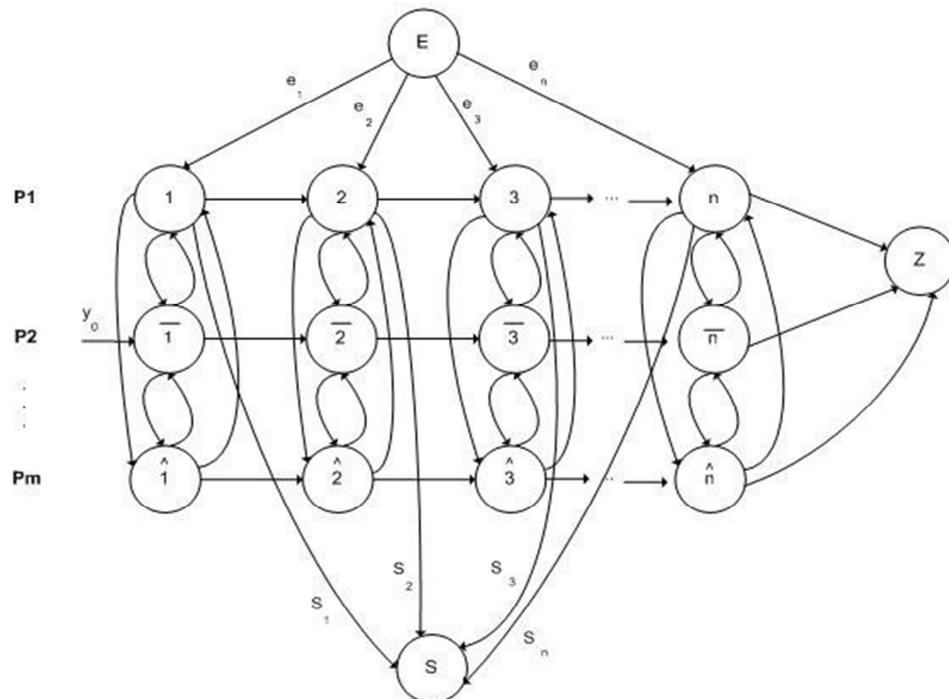


Figura 12 - Grafo associado ao fluxo de caixa financeiro otimizado

O problema pode ser descrito da seguinte maneira: no início de cada período  $n$ , temos as entradas (receitas)  $e_i$  e as saídas (despesas)  $s_i$  de caixa no dia  $i$ , se  $e_i \geq s_i, 1 \leq i \leq n$  nenhuma operação precisa ser realizada, podendo o excedente ser aplicado, caso contrário, é necessário fazer uma ou mais operações de resgate nas aplicações existentes de tal maneira que o saldo em caixa seja suficiente para cumprir os compromissos, podendo haver ou não custo de transação. No final do  $n$ -ésimo período obtém-se o saldo otimizado.

### 3. 1 COMPLEXIDADE DO MODELO PROPOSTO

A Complexidade de um algoritmo consiste na quantidade de "trabalho" necessário para a sua execução, expressa em função das operações fundamentais, as quais variam de acordo com o algoritmo, e em função do volume de dados. A complexidade pode ser expressa quanto ao seu comportamento, que pode ser polinomial ou exponencial. Para o modelo de fluxo de caixa otimizado proposto temos:

- i. Número de variáveis:  $6 \times A \times N + A^2 \times N^2$
- ii. Número de restrições:  $R + D + S \times P \times A \times N$

onde: A = aplicações;

N = período de rendimento das aplicações;

R = receitas;

D = despesas;

P = período.

### 3. 2 ESTRUTURA DO AMBIENTE COMPUTACIONAL

O ambiente computacional apresentado foi desenvolvido no LOGIN vinculado ao NPTEC/UECE em plataforma JAVA , assim como a posposta de um modelo inovador de fluxo de caixa apresentada aqui nesse trabalho que está sedimentada em modelos de programação linear através de otimização de fluxos em redes e programado em linguagem AMPL. Para o ambiente desenvolvido especificamente para SEFAZ, o mesmo foi interfaceado com o framework CICLOPES que é baseado na tecnologia J2EE (JAVA para web) com vista na arquitetura MVC e desenvolvido por componentes.

O CICLOPES utiliza outros frameworks de desenvolvimento open source para JAVA, onde destacamos dois, o *Hibernate* e o *Struts*. O *Hibertante* é um framework que permite a utilização de dados relacionais, trabalhando em JAVA, sem a necessidade de trabalhar com muitos códigos de acesso a bancos de dados e SQL, uma vez que ele utiliza a sua própria HQL,

acelerando sua velocidade de desenvolvimento. Já o *Struts* é uma implementação que usa o modelo MVC (*Model - View - Controller*) para aplicações JAVA com a internet.

Esse ambiente é interativo com o usuário e se faz através de telas auto - explicativas, onde o gestor disponibiliza os dados do fluxo de caixa (receitas, despesas, datas, etc.) e as modalidades de aplicações (códigos, instituições, descrição do investimento, carências, períodos e taxa de aplicação), permitindo a realização de simulações sobre cenários alternativos de otimização do fluxo de caixa de modo a atender as restrições operacionais endógenas e exógenas ao modelo através de telas interativas em ambientes amigáveis.

## TELAS DE ENTRADA DE DADOS DO AMBIENTE SEFAZ

The screenshot shows the SEFAZ Intranet interface. At the top, there is a header with the SEFAZ logo, the title 'SEFAZ - Sistema Fluxo de Caixa Otimizado', the date '23/01/2009', and the time '17:42:56'. Below the header, there are navigation tabs: 'Cadastro', 'Financeiro', 'Simulação', and 'Relatórios'. The 'Simulação' tab is active. Below the tabs, there is a sub-header 'Simulação' and a description 'Página para visualização e execução de Simulações'. There are three sub-tabs: 'Receitas', 'Despesas', and 'Aplicações', with 'Receitas' selected. The main content is a table with the following columns: 'Data', 'Categoria', 'Origem', 'Orgao', and 'Valor'. The table contains 14 rows of data, all with 'RECEITAS CORRENTES' as the category and 'RECEITA TRIBUTARIA' as the origin. The values range from 200,00 to 7.860,00. At the bottom of the table, there is a total value of 1.532.901.313,96. The footer of the page reads 'SECRETARIA DA FAZENDA DO ESTADO DO CEARÁ'.

Data	Categoria	Origem	Orgao	Valor
10/01/2008	RECEITAS CORRENTES	RECEITA TRIBUTARIA		7.860,00
25/01/2008	RECEITAS CORRENTES	RECEITA TRIBUTARIA		2.140,00
15/02/2008	RECEITAS CORRENTES	RECEITA TRIBUTARIA		1.500,00
20/02/2008	RECEITAS CORRENTES	RECEITA TRIBUTARIA		750,00
10/03/2008	RECEITAS CORRENTES	RECEITA TRIBUTARIA		250,00
10/04/2008	RECEITAS CORRENTES	RECEITA TRIBUTARIA		1.125,00
25/05/2008	RECEITAS CORRENTES	RECEITA TRIBUTARIA		1.070,10
20/06/2008	RECEITAS CORRENTES	RECEITA TRIBUTARIA		280,50
25/07/2008	RECEITAS CORRENTES	RECEITA TRIBUTARIA		495,00
14/08/2008	RECEITAS CORRENTES	RECEITA TRIBUTARIA		315,00
16/09/2008	RECEITAS CORRENTES	RECEITA TRIBUTARIA		400,00
26/10/2008	RECEITAS CORRENTES	RECEITA TRIBUTARIA		350,00
24/11/2008	RECEITAS CORRENTES	RECEITA TRIBUTARIA		200,00
15/12/2008	RECEITAS CORRENTES	RECEITA TRIBUTARIA		1.532.901.313,96

Figura 13 - Tela de entrada de receitas do ambiente da SEFAZ

Fonte: SEFAZ/CE

**SEFAZ** INTRANET - SEFAZ - Sistema Fluxo de Caixa Otimizado 23/01/2009 17:42:56 Sair

Cadastro | Financeiro | Simulação | Relatórios

Otimizar

### Simulação

Página para visualização e execução de Simulações

Receitas | Despesas | Aplicações

	Data	Categoria	Grupo	Fonte	Valor
<input type="checkbox"/>	15/12/2008	DESPESAS CORRENTES	PESSOAL E ENCARGOS SOCIAIS		7.633.691,17
<input type="checkbox"/>	15/12/2008	DESPESAS CORRENTES	OUTRAS DESPESA CORRENTES		8.306.921,37
<input type="checkbox"/>	15/12/2008	DESPESAS DE CAPITAL	INVESTIMENTOS		5.538.629,84
<input type="checkbox"/>	16/12/2008	DESPESAS CORRENTES	PESSOAL E ENCARGOS SOCIAIS		3.531.654,64
<input type="checkbox"/>	16/12/2008	DESPESAS CORRENTES	OUTRAS DESPESA CORRENTES		10.915.002,08
<input type="checkbox"/>	16/12/2008	DESPESAS DE CAPITAL	INVESTIMENTOS		6.333.784,45
<input type="checkbox"/>	17/12/2008	DESPESAS CORRENTES	PESSOAL E ENCARGOS SOCIAIS		39.049.583,03
<input type="checkbox"/>	17/12/2008	DESPESAS CORRENTES	OUTRAS DESPESA CORRENTES		13.784.231,84
<input type="checkbox"/>	17/12/2008	DESPESAS DE CAPITAL	INVESTIMENTOS		2.437.889,22
<input type="checkbox"/>	18/12/2008	DESPESAS CORRENTES	PESSOAL E ENCARGOS SOCIAIS		2.001.735,23
<input type="checkbox"/>	18/12/2008	DESPESAS CORRENTES	OUTRAS DESPESA CORRENTES		10.256.650,51
<input type="checkbox"/>	18/12/2008	DESPESAS DE CAPITAL	INVESTIMENTOS		11.544.991,62
<input type="checkbox"/>	19/12/2008	DESPESAS CORRENTES	PESSOAL E ENCARGOS SOCIAIS		1.994.324,95

SECRETARIA DA FAZENDA DO ESTADO DO CEARÁ

Figura 14 - Tela de entrada de despesas do ambiente da SEFAZ

Fonte: SEFAZ/CE

**SEFAZ** INTRANET - SEFAZ - Sistema Fluxo de Caixa Otimizado 23/01/2009 17:42:56 Sair

Cadastro | Financeiro | Simulação | Relatórios

Otimizar

### Simulação

Página para visualização e execução de Simulações

Receitas | Despesas | Aplicações

	Descrição	Banco	qtdDias	taxaRetorno	saldoMinimo	taxaSaida
<input type="checkbox"/>	BB Renda Fixa LP Corp. 10 milhões FICFI	BANCO DO BRASIL	5	11,87	50.000,00	0,01
<input type="checkbox"/>	BB Renda Fixa LP Corp. 3 milhões FICFI	BANCO DO BRASIL	30	5,24	50.000,00	0,00
<input type="checkbox"/>	BB Renda Fixa LP Corp. 600 mil FICFI	BANCO DO BRASIL	10	11,36	25.000,00	0,00
<input type="checkbox"/>	BNB FI Curto Prazo - Setor Público	BANCO DO NORDESTE	30	10,61	5.000,00	0,00
<input type="checkbox"/>	Caixa FICFI Patrimônio RF Longo Prazo	CAIXA ECONÔMICA	10	11,23	100.000,00	0,00
<input type="checkbox"/>	Caixa FICFI Preferencial DI Longo Prazo	CAIXA ECONÔMICA	8	10,99	75.000,00	0,00
<input type="checkbox"/>	Caixa Tesouro	CAIXA ECONÔMICA	1	0,00	0,00	0,00

SECRETARIA DA FAZENDA DO ESTADO DO CEARÁ

Figura 14 - Tela de entrada de aplicações do ambiente da SEFAZ

Fonte: SEFAZ/CE

O modelo de administração de caixa que será utilizado para determinar os níveis ótimos que devem ser mantidos em caixa é determinado pelo Modelo de Miller - Orr. Esse níveis são determinados pelos valores de caixa mínimo (L), saldo ótimo ( $Z^{\{*\}}$ ) e caixa máximo (H), valores esses que são utilizados para fazer frente a imprevisibilidade do fluxo de caixa, manter saldos médios para o pagamento de tarifas de serviços bancários prestados à empresa e/ou com vista a tirar proveito de oportunidades inesperadas que possam surgir.

Uma vez disponibilizado os dados (receitas, despesas e as taxas de aplicação e/ou de custo de captação, caixa mínimo, etc.) e solicitado pelo usuário a solução do problema, o ambiente gera internamente a modelagem do problema e através da DLL do software LINGO é encontrada a solução do problema de fluxo de caixa, gerando também um relatório (análise de sensibilidade) indicando as aplicações que foram indicadas pelo modelo.

Embora a literatura esteja repleta de métodos, algoritmos e procedimentos para tratamento das soluções desses problemas, optou-se em utilizar algoritmos exatos para obtenção da solução numérica do modelo do fluxo de caixa financeiro aqui proposto. Como foi mencionado anteriormente, problemas de fluxo em redes são problemas de programação linear, assim será resolvido pelo método do simplex revisado (Apêndice A).

### 3.2.1 INTERFACE COM O SOFTWARE LINGO

O LINGO é uma ferramenta de software projetada para construir e resolver eficientemente modelos de otimização lineares, não-lineares, e inteira, que permite utilizar uma sintaxe específica de tal modo que grandes problemas podem ser descritos de forma concisa. O usuário disponibiliza na tela inicial os dados do problema a ser resolvido (função objetivo, restrições, etc.) e solicita a solução do mesmo (Solver) e tem como resposta a modelagem matemática do problema e um relatório (análise de sensibilidade) sucinto descrevendo todas as variáveis que foram formuladas no modelo e suas respectivas contribuições no resultado procurado. Outra função muito útil no LINGO, é que podemos rotular as restrições com nomes, o que facilita muito na hora da interpretação da solução.

Por default, o LINGO assume que as variáveis são contínuas e maiores ou iguais a 0. As funções de domínio impõem restrições adicionais às variáveis, determinando quais valores elas podem assumir. Essas funções e seus efeitos são descritos a seguir:

@BIN (variável) Limita a variável a assumir apenas valores binários (0 ou 1).

@BND (inferior, variável, superior) Limita a variável a assumir valores entre “inferior” e “superior” ( $\text{inferior} \leq \text{variável} \leq \text{superior}$ ).

@FREE (variável) Permite que a variável assumira quaisquer valores (-, 0, +).

@GIN (variável) Restringe a variável a assumir apenas valores inteiros.

Na análise de sensibilidade do problema é formada por duas informações muito importantes: o *reduced cost*, que faz a análise para cada uma das variáveis do problema e que pode ser interpretado como a quantia de penalidade (positiva ou negativa, dependendo do problema) que teríamos que pagar para introduzir uma unidade daquela variável na solução ou ainda como o custo reduzido para a variável que é incluída na solução ótima é sempre zero. Para as variáveis não incluídas na solução ótima, o custo reduzido mostra quanto o valor da função objetiva diminuiria (para um problema do maximize) ou aumentaria (para um problema minimize) se uma unidade dessa variável for incluída na solução. A outra análise, *slack* ou *surplus*, mostra como uma desigualdade é satisfeita completamente como uma igualdade, caso a folga/excesso é zero. Se a folga/excesso é positiva, indica quantas unidades a mais da variável poderiam ser adicionadas à solução ótima antes que a desigualdade se transforme uma igualdade. Se a folga/excesso é negativa, concluímos que a desigualdade foi violada.

A coluna *dual price* pode ser interpretada como a quantia pela qual a função objetivo melhoraria (pioraria) quando o lado direito das restrições (constantes) é aumentado (diminuído) em uma unidade. Ele também pode ser entendido como o que estamos dispostos a pagar por unidades adicionais de um recurso. Por isto ele também é chamado de *shadow price*. Essas informações, no entanto, só tem sentido se as variáveis envolvidas no modelo forem do tipo real e essa análise tem validade apenas em certo intervalo de variação das restrições.

#### 4 ESTUDO DE CASO

O Governo do Estado do Ceará vem buscando ano a ano, desenvolver um Modelo de Gestão Pública por Resultados no cumprimento de todos os ditames da Lei de Responsabilidade Fiscal, visando manter equilíbrio em suas contas. Para atingir esses objetivos, o governo através da Secretaria da Fazenda - órgão responsável pela missão de captar e gerenciar os recursos financeiros para atender e às demandas da sociedade cearense, cuja competência institucional está focada nos seguintes preceitos:

- ❖ Auxiliar o Governador, direta e indiretamente, na formação da política econômica - tributária do Estado;
- ❖ Realizar a administração fazendária pública;
- ❖ Dirigir, superintender, orientar e coordenar as atividades de arrecadação, tributação, fiscalização e controle dos tributos e demais rendas do erário público;
- ❖ Acompanhar e gerenciar a capacidade de endividamento e de pagamento do Estado;
- ❖ Elaborar, em conjunto com as demais secretarias, o planejamento financeiro do Estado;
- ❖ Gerenciar o sistema de execução orçamentária financeira, contábil e patrimonial dos órgãos e entidades da Administração Estadual;
- ❖ Superintender coordenar a execução de atividades correlatas na Administração Direta e Indireta;
- ❖ Elaborar e consolidar os balanços dos órgãos da Administração Direta e Indireta;
- ❖ Exercer outras atribuições necessárias ao cumprimento de suas finalidades nos termos do regulamento.

Neste contexto, o Governo do Estado do Ceará vem apresentando melhorias consideráveis em suas finanças por conta da responsabilidade e maior severidade na condução dos gastos públicos. Com o intuito de buscar melhoria de seus resultados, a Universidade Estadual do Ceará e a Secretaria da Fazenda do Estado do Ceará firmaram uma parceria através

do projeto de cooperação na área de P&D, objetivando a definição, conceituação e implementação de modelagem matemática para otimizar a gestão do fluxo de caixa do estado que resultou no estudo de caso de dissertação de mestrado que ora descreve-se nessa fase do trabalho.

Sendo o Governo do Estado do Ceará um ente público, existe uma legislação muito vasta sobre a sua forma de gestão. São exigências, no tocante a sua escrituração contábil, o atendimento à Lei no 4.320/64, os demonstrativos contábeis específicos em cumprimento a LRF, as normas específicas da STN - Secretaria do Tesouro Nacional, INSS - Instituto Nacional de Seguridade Social, Tribunais de Contas, entre outros.

A metodologia utilizada pela SEFAZ/CE, assim como pelo Governo Federal, para projetar os fluxos de caixas são constituídas das principais variáveis macroeconômicas utilizadas pela Lei de Diretrizes Orçamentária, ou seja: variações do PIB Nacional e Estadual e a inflação medida pelo IPCA do IBGE. Assim temos o seguinte fluxo de caixa projetado para o mês de fevereiro no ano corrente:

Tabela 2 - Fluxo de caixa projetado para fev/09

<b>Dia</b>	<b>Receita</b>		<b>Despesa</b>		<b>Saldo do dia</b>		<b>Saldo acumulado</b>	
02/fev	R\$	60.869.855,03	R\$	88.181.043,67	-R\$	27.311.188,64	-R\$	27.311.188,64
03/fev	R\$	1.842.554,99	R\$	5.606.251,16	-R\$	3.763.696,17	-R\$	31.074.884,81
04/fev	R\$	1.842.554,99	R\$	5.606.251,16	-R\$	3.763.696,17	-R\$	34.838.580,98
05/fev	R\$	1.842.554,99	R\$	5.606.251,16	-R\$	3.763.696,17	-R\$	38.602.277,15
06/fev	R\$	1.842.554,99	R\$	1.326.518,98	R\$	516.036,01	-R\$	38.086.241,14
09/fev	R\$	1.842.554,99	R\$	5.606.251,16	-R\$	3.763.696,17	-R\$	41.849.937,31
10/fev	R\$	105.325.987,83	R\$	5.936.547,48	R\$	99.389.440,35	R\$	57.539.503,04
11/fev	R\$	-	R\$	5.606.251,16	-R\$	5.606.251,16	R\$	51.933.251,88
12/fev	R\$	1.842.554,99	R\$	5.606.251,16	-R\$	3.763.696,17	R\$	48.169.555,71
13/fev	R\$	1.842.554,99	R\$	5.606.251,16	-R\$	3.763.696,17	R\$	44.405.859,54
16/fev	R\$	45.671.569,59	R\$	12.552.893,09	R\$	33.118.676,50	R\$	77.524.536,04
17/fev	R\$	1.842.554,99	R\$	5.606.251,16	-R\$	3.763.696,17	R\$	73.760.839,87
18/fev	R\$	1.842.554,99	R\$	5.606.251,16	-R\$	3.763.696,17	R\$	69.997.143,70
19/fev	R\$	1.842.554,99	R\$	5.606.251,16	-R\$	3.763.696,17	R\$	66.233.447,53
20/fev	R\$	274.533.079,78	R\$	5.975.972,50	R\$	268.557.107,28	R\$	334.790.554,81
25/fev	R\$	-	R\$	5.606.251,16	-R\$	5.606.251,16	R\$	329.184.303,65
26/fev	R\$	1.842.554,99	R\$	5.606.251,16	-R\$	3.763.696,17	R\$	325.420.607,48
27/fev	R\$	274.533.079,78	R\$	262.091.199,17	R\$	12.441.880,61	R\$	337.862.488,09

Fonte: SEFAZ – CE

Por trata-se de um trabalho acadêmico, o estudo de caso que será apresentado é consideravelmente menor do que habitualmente será realizado na Secretaria da Fazenda, porém sem perder importância em relação aos resultados. Tal preocupação se faz, uma vez que utilizando todos os dados (receitas, despesas, taxas, etc.) para um horizonte correspondente a 30 dias, que é o período que a SEFAZ projeta seu fluxo de caixa, tornaria o problema muito grande, conforme visto no item 3.1, o que fugiria do objetivo do trabalho. Para isso utilizaremos o exemplo a seguir, fazendo dois tipos de simulações: a primeira simulação trabalharemos com um saldo inicial  $y_0$ , ou seja, a Secretaria da Fazenda irá contar com os recursos excedentes do período anterior conforme o fluxo de caixa projetado pela mesma, para a segunda simulação, será utilizado um saldo ótimo em caixa que deverá ser mantido no horizonte de tempo projetado pela mesma, visando cobrir possíveis falhas na sua previsão. E finalmente, será feita uma comparação entre os resultados obtidos para mostrar a eficácia do modelo proposto.

É importante lembrar, conforme foi mencionado anteriormente, os entes públicos possuem ferramentas com grande potencial de informação, em curto prazo temos a LOA, que é a lei que estima as receitas que o governo espera arrecadar durante o ano e fixa os gastos a ser realizado com tais recursos, o que implica que as receitas e despesas são até certo ponto conhecidas (estimadas). Para efeito de estudo, vamos considerar o seguinte caso:

A Secretaria da Fazenda do Estado deseja maximizar o retorno de seu fluxo de caixa ao final de um horizonte de planejamento de 14 dias. A secretaria tem boas previsões dos fluxos de entradas (contas a receber) e dos fluxos de saída (contas a pagar) no início de cada período. Os seguintes dados são conhecidos:

$E_t$  - Entradas de caixa no início do período  $t$ ,  $t = 1, 2, \dots, 10$ ,

$S_t$  - Saídas de caixa no início do período  $t$ ,  $t = 1, 2, \dots, 10$ .

Três produtos são disponibilizados pelos bancos como opções de investimento para o dinheiro do caixa no início de cada período, no qual o gestor deverá decidir:

- i. Aplicar parte ou todo dinheiro no produto A durante o período, com taxa de juros de 0,04 % ao dia;
- ii. Aplicar parte ou todo dinheiro no produto B durante 2 dias, com taxa de juros de 0,19 % no período;

- iii. Aplicar parte ou todo dinheiro no produto C durante 3 dias, com taxa de juros de 0,4 % no período.

As conversões (aplicações e resgates) entre os produtos A, B e C e a conta "CAIXA" podem ser realizadas apenas no início de cada período. Há um custo unitário de conversão entre os produtos de 0,02 %. No início do horizonte de planejamento a Secretaria da Fazenda dispõe de saldo proveniente do mês anterior.

Para determinar o saldo ótimo que deve ser mantido em caixa, utilizaremos o MMO, e para isso o fluxo de caixa tem que satisfazer as seguintes premissas:

- ❖ A curva do rendimento dos investimentos realizados é constante;
- ❖ Existe um custo de transação fixo de investir e desinvestir;
- ❖ Existe um limite, determinado pela administração da empresa, abaixo do qual o saldo de caixa da firma não deverá cair (MILLER e ORR, 1980).

O MMO trata os fluxos de caixa como se fosse aleatório, não assumindo a total previsibilidade de seus valores, ele é probabilístico e sua aplicação é recomendada para ambientes com incertezas de fluxos de caixa. Por causa dessa imprevisibilidade, o modelo procura determinar um saldo mínimo e um saldo máximo de caixa, podendo esse intervalo ser diminuído ou elevado em função das transações desconhecidas com antecedência (ASSAF NETO, 2003, p. 488).

Abaixo é apresentado o fluxo de fundos líquidos diários da SEFAZ no período de 02/01/08 a 07/11/2008:

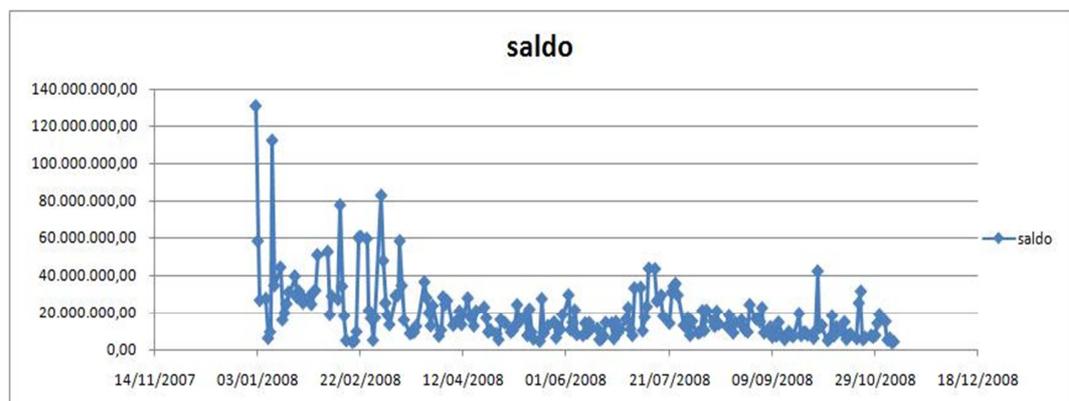


Figura 16 - Fluxo de fundos líquidos diários de 02/01 a 07/11/08

Fonte: SEFAZ/CE

Analisando o gráfico anterior pode-se ressaltar o comportamento aleatório dos fluxos, não podendo identificar um comportamento que se repita no tempo, o que mostra um comportamento como um *random walk* (caminho aleatório). Outra questão importante é que possuem uma tendência a ser positivo (ingressos maiores dos egressos), devido o fato que no início de cada mês analisado foi adicionado ao fluxo um valor correspondente ao saldo do mês anterior.

Além da projeção do fluxo de caixa pela área de negócio da SEFAZ/CE, nos foi disponibilizado o saldo de caixa final do mês de janeiro, aproximadamente R\$ 1.406.603.541,79, que será adicionado ao fluxo do mês de fevereiro. A proposta desse trabalho é manter em caixa um saldo que será determinado pelo MMO (saldo ótimo) e o restante do saldo será aplicado em aplicações com prazos maiores, conseqüentemente tendo maior rentabilidade. É importante frisar que o MMO é flexível e os índices podem ser alterados quando o gestor achar conveniente, o que para a SEFAZ é extremamente interessante, uma vez que segundo o fluxo projetado, a partir de um determinado dia (10/02) os saldos líquidos diários são positivos com tendência de crescimento, não havendo então necessidade de um saldo mínimo elevado podendo o mesmo ser diminuído, podendo ser até zero, aumentando com isso o valor a ser investido (aplicado).

É sabido de todos que as receitas da SEFAZ/CE são provenientes de arrecadação de impostos, repasses do Governo Federal e investimentos próprios, assim como as suas despesas são na maioria certas e previstas em orçamento, o que torna o fluxo da mesma previsível com um grau de acerto muito grande. Todavia, é interesse da SEFAZ/CE manter certo nível de caixa para atender possíveis erros de previsão e manter a sua operacionalidade, e para isso é determinado um limite mínimo de R\$ 10.000.000,00, que deverá ser mantido diariamente.

Para calcularmos os demais limites indicados pelo MMO, temos que calcular o desvio padrão dos fluxos líquidos, determinar os custos de oportunidade e de transação, que será calculado sobre o saldo líquido de caixa do mês em estudo, sem levar em consideração o saldo proveniente do mês anterior. Assim temos:

Dados			
Limite Inferior do Intervalo de flutuação (L)	R\$ 10.000.000,00	Taxa anual	0,15
Desvio-padrão dos fluxos diários ( $\sigma$ )	R\$ 69.476.894,52	Taxa Mensal (A/M)	0,011714917
Custo por Transação (F)	2.000,00	Taxa Diário (A/D)	0,000388
Custo de Oportunidade (K)	0,00	Taxa Diário (M/D)	0,000388
Pelo modelo de Miller-Orr, após definidos o limite inferior e o desvio-padrão dos fluxos diários de caixa, é necessário calcular o limite superior e o nível ótimo de caixa através das fórmulas a seguir.			
Nível ótimo de caixa considerando os parêmtros ( $Z^*$ ) =	$Z^* = (3F\sigma^2/4K)^{1/3} + L$		
Limite superior do intervalo de flutuação de caixa ( $H^*$ )=	$H^* = 3Z^* - 2L$		
Saldo médio de caixa =	$(4Z^* - L) / 3$		
Assim tem-se que:	Resultados teste		
Nível ótimo do saldo de caixa ( $Z^*$ )	36.524.473,77		
Limite Superior do Intervalo de flutuação ( $H^*$ )	89.573.421,32		
Saldo Ótimo de Caixa =	45.365.965,03		

Figura 16 – Índices do MMO via planilha Excel

Fonte: O autor

Observando os resultados acima, temos um valor do desvio-padrão bem superior a média dos fluxos líquidos, fato esse que pode ser considerado sazonal, não ocorrendo nos demais meses, conforme a área de negócio da secretaria. Outro fator importante para ser observado, é que o custo de transação foi calculado em cima do valor mínimo do caixa, sendo que o mesmo é considerado fixo no modelo original.

Outra consideração que deve ser feita é em relação ao limite máximo que deve ser mantido em caixa (H), uma vez que para a SEFAZ/CE não é interessante manter um nível alto de caixa, já que conforme a figura 4.1, os saldos líquidos são positivos e para os tipos de produtos disponíveis para mesma, manter esse nível em caixa é oneroso, podendo o mesmo ser introduzido no modelo segundo a disposição do gestor.

Além do objetivo maior do modelo que é otimizar os resultados do fluxo de caixa no horizonte de planejamento, o mesmo pode ser utilizado como meio de negociação entre a SEFAZ/CE seus fornecedores ou mesmo bancos, buscando trazer com isso maior rentabilidade aos investimentos financeiro realizados pelo estado e consequentemente a sociedade como um todo.

Uma vez disponibilizado os dados (receitas, despesas, taxas de aplicação e resgate, saldo ótimo, etc.) o ambiente computacional gera o modelo matemático (Apêndice B) que interfaceado com o software LINGO determinará a solução do problema (Apêndice C).

Tabela 3 - Taxas das aplicações financeiras

Produtos	Períodos (em dias)	Taxa de aplicação	Saldo Mínimo	Taxa de Retirada
A	1	0,01%	R\$ 0,00	0.0001%
B	3	0,06%	R\$ 0,00	0.0001%
C	5	0,12%	R\$ 0,00	0.0001%
L	10	0,25%	R\$ 0,00	0.0001%
Caixa	1	0%	R\$ 0,00	0.0001%

Fonte: O autor

## RESULTADOS

Tabela 4 – Resultados comparativos da simulação

Data	Receitas	Despesas	Saldo	Saldo Otimizado	Diferença
01/02/2008	1.406.603.541,79	-	<b>1.406.603.541,79</b>	<b>1.406.603.541,79</b>	-
02/02/2008	60.869.855,03	88.181.043,67	<b>1.379.292.353,15</b>	<b>1.379.295.623,02</b>	3.269,87
03/02/2008	1.842.554,99	5.606.251,16	<b>1.375.528.656,98</b>	<b>1.375.532.299,42</b>	3.642,44
04/02/2008	1.842.554,99	5.606.251,16	<b>1.371.764.960,81</b>	<b>1.371.773.107,42</b>	8.146,61
05/02/2008	1.842.554,99	5.606.251,16	<b>1.368.001.264,64</b>	<b>1.368.010.743,63</b>	9.478,99
06/02/2008	1.842.554,99	1.326.518,98	<b>1.368.517.300,65</b>	<b>1.368.528.368,23</b>	11.067,58
07/02/2008	-	-	<b>1.368.517.300,65</b>	<b>1.368.528.368,23</b>	11.067,58
08/02/2008	-	-	<b>1.368.517.300,65</b>	<b>1.368.528.368,23</b>	11.067,58
09/02/2008	1.842.554,99	5.606.251,16	<b>1.364.753.604,48</b>	<b>1.364.768.075,11</b>	14.470,63
10/02/2008	105.325.987,83	5.936.547,48	<b>1.464.143.044,83</b>	<b>1.467.544.435,65</b>	3.401.390,82

Fonte: O autor

Observa-se na tabela acima o ganho que a SEFAZ/CE tem utilizando o fluxo de caixa otimizado, sendo esse ganho no final do horizonte analisado de R\$ 3.410.390,82. Esse ganho se mostra maior no último dia estudado, justamente porque a maior aplicação tem prazo de maturidade de nove dias, trazendo conseqüentemente, maior retorno.

Conforme foi citado anteriormente, a complexidade do modelo depende do número de entradas, saídas, produtos e período de aplicação, o que tornará o modelo matemático e os resultados cada vez maiores quando são aumentados esses parâmetros. A simplicidade e a utilidade do ambiente apresentado é que para o gestor financeiro, que é o responsável em deferir ou não as aplicações, a resposta do ambiente é dada por um relatório (Apêndice D) indicando o

fluxo do dinheiro e os respectivos rendimentos, ficando o modelo matemático e a análise de sensibilidade (Apêndice B e C) para uma análise mais acurada.

#### 4.1 ANÁLISE DO MODELO E RESULTADOS OBTIDOS PELO AMBIENTE

O apêndice B descreve o modelo matemático determinado pelo ambiente através do fluxo de caixa otimizado. Esse modelo matemático é o que será utilizado pelo software LINGO para determinar a solução do problema e a análise de sensibilidade, conforme o apêndice C. Assim, de forma sucinta temos as seguintes análises:

Na linha [5] no modelo matemático ( $- E_{A1\_4} - E_{B2\_4} - E_{C5\_4} - E_{L5\_4} - E_{CAIXA1\_4} = - 1842554.99$ ) temos que a soma das entradas dos investimentos feito nos produtos A1, B2, C5, L5 e no CAIXA1<sup>7</sup> no dia 4 é igual a entrada de receita prevista para esse dia, o que garante a exaustão de todos os recursos e conseqüentemente havendo o equilíbrio financeiro.

Na linha [35] do mesmo modelo ( $TE_{CAIXA1\_1} - A1_{CAIXA1\_1} - B2_{CAIXA1\_1} - C2_{CAIXA1\_1} - L2_{CAIXA1\_1} = 0$ ) determina que a transferência realizada para o produto CAIXA1 subtraído a somatória das transferências do produto A1 para o CAIXA1, do produto B2 para o CAIXA1, do produto C2 e do produto L2 para o CAIXA1 no dia 1 é igual a zero.

Na linha [157], a equação ( $- L8\_4 + L8\_5 = 0$ ) indica a igualdade entre os produtos L8\_4 e L8\_5, o que significa que não houve rendimento, uma vez que a maturação do produto L é de nove dias.

Em relação a análise de sensibilidade do problema, duas classes de indicadores são de relevantes importâncias no contexto dessa análise: uma que trata o *reduced cost* e a outra que trata das variáveis duais (*dual price*). Em relação a coluna *reduced cost* no relatório da solução do problema, as variáveis cujos valores são iguais a 0 (zero) são as variáveis não - básicas

---

<sup>7</sup> Os índices ao lado de cada produto significam a variação do produto. Por exemplo: B2 representa o valor que está aplicado no produto B no segundo dia, como o produto B tem prazo de 3 dias para ter retorno, implica que o dinheiro não pode ser utilizado, caso contrário, perde-se o rendimento e ainda é penalizado com a taxa de retirada.

(VNB) e as variáveis diferentes de 0 (zero) são as variáveis básicas (VB). Os valores das variáveis VB diferentes de zero significam a penalidade que o gestor pagará a cada unidade monetária caso decida investir no produto associado. Vejamos o seguinte exemplo: No relatório da solução (Apêndice C), a coluna do *reduced cost* do produto A1(5) apresenta o valor  $0,4011109E-03$  (ou  $0,0004011109$ ), que representa o valor de penalidade, ou ainda, o custo que o gestor terá a cada unidade monetária investida nesse produto, ou equivalentemente o valor a ser reduzido no saldo de caixa otimizado.

As variáveis duais de um modelo de programação linear, também denominadas de multiplicadores de Lagrange, ou ainda *shadow price* (preço sombra), é interpretado economicamente como sendo o incremento (ou decréscimo) no valor da função objetivo causado pelo acréscimo de uma unidade monetária adicional no insumo, ou seja, quando não há desperdício de recursos (*slack* = 0).

Assim, a interpretação da coluna *dual price*, é descrita como se segue: o insumo referente à linha 14 no Apêndice C, correspondente a variável *slack* = 0, tem *dual price* de 1,002301, indicando que se adicionarmos uma unidade monetária nesse insumo, o valor do saldo de caixa otimizado será acrescido de R\$ 1,002301

## 5 CONCLUSÃO E PROPOSTA PARA TRABALHO FUTURO

O desenvolvimento e a implementação de uma ferramenta computacional de apoio à decisão na área econômica e financeira foi a diretriz principal para o surgimento desse trabalho, que encontrou dentro da Universidade Estadual do Ceará através do MACC - Mestrado Acadêmico em Ciência da Computação e do LOGIN - Laboratório de Otimização e Gestão Industrial nas figuras dos professores Antônio Clécio e Renato Craveiro, a incubadora de conhecimentos e experiências acadêmicas necessárias para o desenvolvimento do mesmo. Paralelo a isso, o desejo do Governo do Estado do Ceará através da sua Secretaria da Fazenda em buscar dentro do próprio estado, ferramentas que lhe proporcionasse melhor alocação e gestão dos seus recursos, visando buscar a eficiência de seus resultados para suprir as demandas da sociedade cearense.

Na linha de conduta que tem como objetivo maior o fortalecimento da estrutura econômica local e converter o discurso em ação, o Governo do Estado do Ceará tem sido um fiel cumpridor dos fundamentos que, verdadeiramente, caracterizam a gestão pública de qualidade, buscando tecnologias inovadoras na área de otimização de processos visando a racionalidade na aplicação dos recursos públicos e redução do seu nível de endividamento, fazendo com isso que as demandas crescentes da sociedade sejam atendidas, possibilitando uma melhoria da qualidade de vida do povo cearense.

Assim, este trabalho que a princípio tinha como finalidade desenvolver e implementar uma ferramenta de apoio aos gestores financeiros do estado, tornou-se objeto de estudo e consequentemente, projeto de dissertação e por fim um trabalho de dissertação com o objetivo de cumprir uma das exigências do Mestrado Acadêmico em Ciência da Computação da Universidade Estadual do Ceará para obtenção do grau de Mestre em Ciência da Computação. Sendo hoje, um projeto que vem sendo desenvolvido junto a COTES, órgão vinculado a SEFAZ/CE, e vem ao encontro dos anseios do governo estadual quanto a maximização dos seus recursos para melhor atender as demandas da sociedade.

O modelo de fluxo de caixa otimizado integrado ao de administração de caixa (Modelo de Miller - Orr), desenvolvido nesse trabalho via programação matemática, é único no que tange os métodos utilizados, uma vez que os mesmos estão integrados num só ambiente. Tornando a sua utilização acessível a todos os gestores financeiros, uma vez que através de uma

ambiente amigável, o gestor disponibilizará os dados inerentes ao ambiente e terá como retorno uma análise precisa e real da situação financeira do fluxo de caixa, possibilitando ao mesmo fazer simulações dos mais diversos cenários financeiros, ajustando as finanças públicas dentro dos preceitos constitucionais. O mesmo também pode ser utilizado na iniciativa privada para a gestão do seu fluxo de caixa, podendo ser integrado outros modelos de administração de caixa para determinar o saldo ótimo do mesmo, conforme as necessidades da empresa, uma vez que tais valores são inseridos no problema através de parâmetros.

Uma vez concluído esse trabalho, inevitavelmente surgiram idéias e propostas para trabalhos futuros, que visem a integração de novas metodologias. Uma proposta interessante com vista a um trabalho futuro seria inserir elementos de IA, tais como redes neurais e lógica fuzzy, uma vez que o modelo depende muito ainda da intervenção do gestor no processo de tomada de decisão. Utilizar-se-ia modelos de redes neurais para determinação do fluxo de caixa projetado e lógica fuzzy para o modelo de administração de caixa para a flutuação do saldo em caixa no momento em que o saldo do fluxo de caixa oscila entre os limites determinado (saldos mínimo, ótimo e máximo) pelo modelo, ou seja, o momento de investir ou de captar recursos. Tornando o ambiente a ser desenvolvido em um sistema inteligente, diminuindo com isso a influência do gestor, mas colocando ao mesmo tempo uma ferramenta poderosa de apoio à decisão.

## 6 BIBLIOGRÁFICA

[Andrade 2005] **ANDRADE, Nilton de Aquino.** *O Fluxo De Caixa Como Planejamento Na Gestão Dos Recursos Públicos Municipais.* Artigo. Seminário de Gestão de Negócio. Curitiba, 2005. Disponível em: [HTTP://www.fae.edu/publicacoes/pdf/art\\_cie/art\\_28.pdf](HTTP://www.fae.edu/publicacoes/pdf/art_cie/art_28.pdf)

[Assaf Neto 2005] **ASSAF NETO, Alexandre.** *Finanças Corporativas e Valor.* 2º Ed. São Paulo: Atlas, 2005.

[Assaf Neto 2002] **ASSAF NETO, A. e SILVA, C. A T.** *Administração do capital de giro.* 3º Ed, São Paulo: Atlas, 2002.

[Bastos 2004] **BASTOS, H. A. et al.** *Informação Gerencial no Orçamento Público do Brasil.* IX Congresso Internacional del CLAD Sobre la Reforma del Estado y de la Administración Pública. Madri, 2004.

[Baumol 1952] **BAUMOL, William.** *Transactions Demand for Cash: An Inventory Theoretic Approach.* Quarterly Journal of Economics, v. 66, nº 4, p. 543-56, 1952.

[Bazaraa 1977] **BAZARAA, M.; JARVIS, J.; SHERALL, H.** *Linear Programming and Network Flows.* New York. Jonh Wiley & Sons, Inc. New York, NY, USA. 1977.

[Bertseks 1991] **BERTSEKS, D.** *Linear Networks Optimazation.* Cambridge, MA. The MIT Press, 1991.

[Bregalda 1981] **BREGALDA, P. F.; OLIVEIRA, A. F.; BORNSTEIN, C.** *Introdução à Programação Linear.* São Paulo: Atlas, 1999.

[Campos 1999] **CAMPOS, Ademar F.** *Demonstração dos fluxos de caixa.* São Paulo: Atlas, 1999.

[Cardeal 2006] **CARDEAL, R. D.** *A Administração de Caixa em Empresas de Pequeno Porte: Estudo de Caso no Setor Hoteleiro de Salvador – BA.* Dissertação (Mestrado) – Mestrado em Administração Estratégica da Universidade de Salvador – UNIFACS, Salvador, BA, maio 2006.

[Ceccotti 2003] **CECCOTTI, H.** *Teses e Dissertações: Manual de Normalizações da UNICAMP/FOP*. [S.I]: Piracicaba, 2003.

[Chvatal 1983] **CHVATAL, V.** *Linear Programming*. New York, NY. USA. 1983.

[Cormen 2002] **CORMEN, Thomas H.; LEISERSON, Charles E.; RIVEST, Ronald L.; STEIN, Clifford.** *Algoritmos, Teoria e Prática*. Editora Campus, 2002.

[Dalbello 1999] **DALBELLO, L. A.** *A Relevância do Fluxo de Caixa como Ferramenta de Gestão Financeira para Avaliação da Liquidez e Capacidade de Financiamento de Empresas*. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós – Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, SC. Junho, 1999.

[Dantzig 1963] **DANTZIG, G.** *Linear Programming and Extensions*. New Jersey: Princeton University, 1963.

[Donato 2002] **DONATO, Alysson A.** *Aplicação do Processamento Paralelo na Resolução de Problemas de Programação Linear de Grande Porte Utilizando o Princípio de Decomposição de Dantzig – Wolfe*. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós – Graduação em Ciência da Computação da Universidade Federal do Ceará. Fortaleza, CE. Julho, 2002.

[Eid Jr. 2001] **EID JR., William; CENDRON, Giani.** *Administração de Caixa: uma análise de modelos para quantificação do saldo de caixa*. Revista de Negócios, v. 6, nº 2, 2001. Disponível em: <http://proxy.furb.br/ojs/index.php/rn/article/viewFile/380/355>. Acessado em: agosto de 2008.

[Famá e Grava 2000] **FAMÁ, Rubens e GRAVA, J. William.** *Liquidez e a Teoria dos Elementos Causadores da Insolvência*. FEA-USP, Caderno de Pesquisas em Administração, v.1, nº 12, 2º trim./2000.

[Filho 1998] **FILHO, A. G.** *Interface Gráfica para Dimensionamento e Otimização de Fluxos em Redes de Abastecimento de Água*. Dissertação (Mestrado) – Mestrado em Ciência da Computação da Universidade Federal do Ceará. Fortaleza, CE, julho 1998.

[Forte 2003] **FORTE, Sérgio H. A. Cavalcante.** *Manual de Elaboração de Tese, Dissertação e Monografia*. Fortaleza: Universidade de Fortaleza, 2003.

[Franco e Monard 2000] **FRANCO, J. L.; MONARD, Maria C.** *Programação Lógica e Fluxo em Redes*. Artigo. LABIC – Laboratory of Computacional Intelligence, 2000.

Disponível em: <http://labic.icmc.usp.br/didactic-material/prolog/net.pdf>. Acessado em 10/2008.

[Gass 1985] **GASS, S. I.** *Linear Programming: Methods and Applications*. New York: McGraw – Hill Book, 1985.

[Gazzoni 2003] **GAZZONI, Elizabeth Inez.** *Fluxo de Caixa – Ferramenta de Controle Financeiro para a Pequena Empresa*. 2003, 96 fls. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós Graduação em Engenharia de Produção, UFSC, Florianópolis.

[Gitman 1997] **GITMAN, Lawrence J.** *Princípios de Administração Financeira*. 7. ed. São Paulo: Harbra, 1997.

[Goldberg e Luna 2000] **GOLDBARG, M.; LUNA, H.** *Otimização, Combinatória e Programação Linear: Modelos e Algoritmos*. Rio de Janeiro: Campus, 2000.

[Luenberg 1984] **LUENBERG, D.** *Linear e Nonlinear Programming*. Massachusetts: Addison – Wesley, 1994.

[Machado 2005] **MACHADO, C. M. S.** *Um modelo de Fluxo em Redes para Solução de Problemas de Distribuição de Produtos Compostos*. Tese (Doutorado) – Programa de Pós – Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, abril, 2005.

[Maculan e Pereira 1980] **MACULAR, Nelson; PEREIRA, M. V. F.** *Programação Linear*. São Paulo: Atlas, 1980.

[Matsumoto e Lima 2005] **MATSUMOTO, A. S.; LIMA, J. P.** *A Determinação do Saldo Ótimo de Caixa Através dos Modelos Baumol e de Miller-orr: Uma Aplicação Prática*. 2º Congresso de Iniciação Científica em Contabilidade. Universidade de São Paulo. São Paulo, SP, 2005. Disponível em: <http://www.congressosp.fipecafi.org/artigos22005/113.pdf>. Acessado em: 10/2008.

[Miller e Orr 1966] **MILLER, M. H.; Orr Daniel.** *A Model of the Demand for Money by Firms*. The Quarterly Journal of Economics. Vol. 80, nº 3, p. 413-435, 1966.

[Nascimento 2002] **NASCIMENTO, P. H. L.** *Métodos e Técnicas para Resolução do Problema de Fluxo Máximo em Redes*. Dissertação (Mestrado) – Mestrado em Ciência da Computação da Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, CE, agosto de 2002.

[Rogers et al 2005] **ROGERS, Dany; ROGERS, Pablo; RIBEIRO, Kárem C. S.** *Influência dos Custos de Transação no Lucro de uma Empresa: Aplicação do Modelo de Miller – Orr*. XXV ENEGEP, Porto Alegre, RS, novembro de 2005.

[Ross, Westerfield e Jaffe 1995] **ROSS, S. A.; WESTERFIELD, R. W.; JAFFE, J. F.** *Administração Financeira*. São Paulo; Atlas, 2005.

[Sá 2004] **SÁ, Carlos Alexandre.** *Liquidez e Fluxo de Caixa: Um estudo teórico sobre alguns elementos que atuam no processo de formação do caixa e na determinação do nível de liquidez de empresas privadas não financeiras*. 2004. 74 fls. Dissertação de Mestrado Profissionalizante. Escola de Pós – Graduação em Economia da Fundação Getúlio Vargas. Rio de Janeiro.

[Shrage 1991] **SHRAGE, L.** *User's Manual for LINGO*. LINDO Systems Inc. Chicago, IL, 1991.

[Sousa 2000] **SOUSA, Almir Ferreira de, BARROS, Lucas Ayres B. de C.** *Propriedades estatísticas do fluxo de caixa e modelos de gerenciamento de caixa*. Artigo. Caderno de Pesquisas em Administração, São Paulo, v. 01, nº 12, 2º trim./2000. Disponível em: <http://www.ead.fea.usp.br/Cad-pesq/arquivos/c12-art03.pdf>. Acessado em: setembro de 2008.

[Taha 1987] **TAHA, H.** *Operations Research: an introduction*. [S.I.]: Macmillan Publishing Co., Inc. Indianápolis, IN, USA, 1987.

[Villalba e Sousa 2001] **VILLALBA, G.; SOUSA, A.** *Modelos de Administração de Caixa – Análise Empírica*. V SEMEAD, FEA – USP, junho de 2001. Disponível em: <http://www.ead.fea.usp.br/semead/5semead/Finan%E7as/Modelos%20de%20Administra%E7ao%20de%20Caixa.pdf>. Acessado em: setembro de 2008.

[Zdanowicz 1995] **ZDANOWICZ, José E.** *Fluxo de caixa*. Porto Alegre: Sagra-Dc Luzzatto, 1995.

## ANEXO A – PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA E O MÉTODO SIMPLEX

Um Problema de Programação Linear (PPL) é um problema de programação matemática que consiste em maximizar ou minimizar uma função linear (função objetivo) definida sobre um domínio descrito por equações e/ou inequações lineares.

A definição matemática de um problema de programação linear na forma padrão é encontrar valores  $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$  satisfazendo as condições [Bazaraa 1977]:

$$\text{minimize } z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

s.a:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

⋮

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

onde:

- ❖ todos  $a_{ij}, b_i, c_j$  com  $1 \leq i \leq m$  e  $1 \leq j \leq n$ , são constantes reais;
- ❖  $z$  é a função objetivo a ser minimizada;
- ❖ os coeficientes  $c_1, c_2, \dots, c_n$  são chamados de coeficientes de custos;
- ❖  $x_1, x_2, \dots, x_n$  são as variáveis cujos valores ótimos devem ser encontrados;
- ❖ os coeficientes  $a_{ij}$  são chamados coeficientes tecnológicos;
- ❖ as inequações são as restrições do problema;
- ❖ um conjunto de valores para as variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$  que satisfaz todas as restrições é chamado solução factível.

O problema acima também pode ser expresso na forma matricial

$$\text{minimizar } c^t x \quad (1)$$

$$\text{s. a: } Ax = b \quad (2)$$

$$x \geq 0 \quad (3)$$

onde:

$c$  é o vetor coluna formado pelos coeficientes de custo;

$x$  é o vetor coluna composto pelas variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ;

$A$  é a matriz formada pelos coeficientes tecnológicos;

$b$  é o vetor coluna de termos independentes.

ou ainda:

$$c^t = [c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_n]$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

As condições de otimalidade para o par de problemas primal e dual incluem as condições de viabilidade primal, as de viabilidade dual e as denominadas condições de folgas complementares. Satisfazer a todas essas condições é equivalente a resolvermos o problema primal-dual, a saber: encontrar, se existir, uma solução para o sistema de equações e inequações:

$$Ax = b$$

$$A^t y + s = c$$

$$xs = 0$$

$$x, s \geq 0$$

Aqui o produto  $xs = 0$  é o produto de Hadamard, isto é,  $x_j s_j = 0, j = 1, 2, 3, \dots, n$ .

**DEFINIÇÃO:** Chamamos de solução viável um ponto (vetor)  $x$  que satisfaz as restrições (1) e (2).

**DEFINIÇÃO:** O conjunto  $C = \{x / Ax = b, x \geq 0\}$  denomina-se conjunto de soluções viáveis.

**DEFINIÇÃO:** Uma matriz  $A$  de ordem  $m \times n$  com  $m < n$  possui *rank* cheio se possui  $m$  linhas linearmente independentes.

DEFINIÇÃO: Uma base de uma matriz  $A_{m \times n}$  é uma matriz quadrada de  $m$  vetores colunas linearmente independentes em  $\mathbb{R}^n$ . As variáveis associadas a essas colunas denominamos variáveis básicas.

DEFINIÇÃO: Seja  $B$  uma base associada à matriz  $A$ . O vetor composto de  $x_B = B^{-1}b$  e  $x_N = 0$  é chamado de solução básica.

DEFINIÇÃO: Uma solução básica sem componentes negativas é denominada solução básica viável.

DEFINIÇÃO: Um conjunto  $C \in \mathbb{R}$  é dito convexo se, e somente se, o ponto (vetor) resultante de uma combinação linear convexa de pontos (vetores) de  $C$  for também pertencente a  $C$ , ou seja:

$$x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \forall x_1, x_2 \in C \text{ e } 0 < \lambda < 1$$

TEOREMA: O conjunto  $C$  das soluções viáveis de um modelo de programação linear é um conjunto convexo [Goldbarg 2000].

TEOREMA: Toda solução básica viável do sistema  $Ax = b$  é um ponto extremo do conjunto de soluções viáveis, ou seja, um extremo do conjunto  $C$  [Goldbarg 2000].

TEOREMA: Um ponto  $x$  é extremo em um conjunto de soluções viáveis de PPL se, e somente se,  $x \geq 0$  for uma solução básica do sistema de equações lineares [Goldbarg 2000].

TEOREMA FUNDAMENTAL DA PROGRAMAÇÃO LINEAR [Luenberg 1984].

Dado um PPL na forma padrão onde  $A$  é uma matriz  $m \times n$  de *rank*  $m$ ,

- i) se existe uma solução viável, existe uma solução básica viável;
- ii) se existe uma solução ótima viável, existe uma solução básica ótima viável.

## MÉTODO SIMPLEX

Em 1947 George B. Dantzig desenvolveu uma técnica algébrica para determinar a solução ótima de um PPL. Conhecido como Algoritmo Simplex, essa técnica pode ser vista como um processo combinatório que busca encontrar as colunas da matriz de restrições que induzem uma base e, portanto, uma solução básica ótima. Contudo, no pior dos casos, a complexidade desse algoritmo é de ordem exponencial, uma vez que existe um número exponencial de possíveis combinações de colunas.

$$C_n^m = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

Segundo Donato (2002, p. 24) para que um problema seja resolvido pelo Simplex, é necessário que o mesmo esteja na forma padrão (a função objetivo deve ser minimizada, todas as restrições são igualdades e todas as variáveis são positivas). Para que o Simplex inicie, é necessário conhecer pelo menos um dos pontos extremos (solução viável básica) do conjunto de soluções viáveis. Supondo-se disponível uma solução viável básica inicial para (2) e (3), o método verifica se essa solução é ótima. Se não for, é porque algum dos pontos extremos adjacentes ao ponto correspondente à solução dada fornece, para a função objetivo, um valor menor do que o atual. O método então calcula a solução correspondente ao ponto extremo adjacente que mais diminui o valor da função objetivo. O método verifica novamente se tal ponto é ótimo, e se não for, o processo recomeça. O método pára quando, estando num ponto extremo, todos os pontos extremos a ele adjacentes fornecem, para a função objetivo, valores maiores do que o atual. É nessa hora que é importante o fato do conjunto de soluções viáveis serem convexo.

Algebricamente esse processo é feito da seguinte forma. Um ponto extremo é uma solução viável básica que inclui todas as variáveis básicas anteriores, com exceção de apenas uma delas. Portanto, para encontrar a próxima solução viável básica (ponto extremo adjacente), é necessário primeiro escolher uma variável básica para deixar a base atual, ou seja, torná-la não-básica, e depois, escolher uma variável não-básica para substituir a variável que saiu da base. Resumindo, o método Simplex compreende os seguintes passos [Donato 2002]:

- i. Encontrar uma solução básica viável inicial.
- ii. Verificar se a solução atual é ótima. Se for, pare. Caso contrário, prossiga.
- iii. Determinar a variável não-básica que deve entrar na base.
- iv. Determinar a variável básica que deve sair da base.
- v. Identificar a nova solução básica viável e voltar ao passo ii.

O método é baseado no fato de que no mínimo  $(n - m)$  componentes (variáveis) de  $x$  são iguais a zero, se  $x$  é um ponto extremo do conjunto de soluções viáveis. Assim,  $x$  pode ser particionado em um subvetor  $x_B$ , que contém  $m$  componentes (variáveis básicas), e um subvetor  $x_n$ , que contém  $(n - m)$  componentes (variáveis não-básicas com valores nulos). Da mesma forma, podemos particionar a matriz dos coeficientes  $A$  como

$$A = [B|N] \quad (4)$$

onde  $B$  contém as  $m$  colunas correspondentes às variáveis básicas ( $x_B$ ), e  $N$  contém as  $(n - m)$  colunas restantes.

Em cada iteração do método, uma variável básica (uma componente de  $x_B$ ) é transformada em variável não-básica, e vice-versa. Em outras palavras,  $x_B$  e  $x_N$  trocam componentes. Geometricamente, esse processo de troca corresponde a mover-se de um ponto extremo do conjunto de soluções viáveis para um dos pontos extremos adjacentes a ele. É necessário, portanto, identificar esse ponto extremo adjacente, ou seja, escolher qual componente de  $x_B$  deve entrar em  $x_N$  (isto é, qual variável possivelmente deixará de ser zero), e qual componente de  $x_N$  deve entrar em  $x_B$  (isto é, uma variável que será zerada). Na verdade, é preciso fazer apenas a primeira dessas escolhas, já que a segunda é alcançada por (2) e (3). Senão vejamos, aplicando o particionamento de (4) em (2), obtemos que  $Bx_B + Nx_N = b$ . Expressando  $x_B$  em termos de  $x_N$ , temos

$$x_B = B^{-1}(b - Nx_N) \quad (5)$$

Particionando o vetor de coeficientes da função objetivo  $c$  em  $c_B$  e  $c_N$  (coeficientes das variáveis básicas e das variáveis não-básicas, respectivamente), e a partir de (5), tem-se

$$c^t x = c_B^t x_B + c_N^t x_N = c_B^t B^{-1}(b - Nx_N) + c_N^t x_N = c_B^t B^{-1} b + (c_N^t - c_B^t B^{-1} N) x_N$$

O vetor linha  $d_n = c_N^t - c_B^t B^{-1} N$  é chamado de vetor de custos reduzidos. Se todos os componentes de  $x_B$  forem estritamente positivos e pelo menos um dos componentes (por exemplo, a  $i$ -ésima componente) de  $d_N$  for negativo, é possível decrescer o valor atual da função objetivo ( $c^t x$ ) fazendo com que o componente  $i$  de  $x_N$  se torne positivo (ou seja, entre na base), devendo-se ajustar  $x_B$  para não afetar a viabilidade da solução. Como  $x_B \geq 0$ , existe um limite superior para  $x_{N,i}$ , o  $i$ -ésimo elemento de  $x_N$ .

A princípio, podemos escolher qualquer  $x_{N,i}$  com  $d_{N,i} < 0$  para entrar na base. Se  $d_N < 0$ , então  $x$ , a solução corrente, é ótima. Se mais de um das componentes de  $d_N$  são negativas, em geral escolhe-se a componente que levará à máxima redução da função objetivo, ou seja, aquela cujo valor em  $d_N$  for a mais negativa deve entrar na base. Apesar de essa escolha ser um tanto quanto óbvia, não se pode garantir que a adoção desse critério fará o método convergir mais rapidamente.

Nesse ponto, sabendo que os elementos restantes de  $x_N$  permanecem iguais a zero, usando (2) temos que

$$x_B = B^{-1}(b - N_j x_{N,j}) \quad (6)$$

onde  $N_j$  é a coluna de  $N$  correspondente a  $x_{N,j}$ . O ideal é escolher como novo valor de  $x_{N,j}$  o maior valor que satisfaça  $x_B \geq 0$ . Para obter  $x_{N,j}$  explicitamente, podemos obter, a partir de (6), que

$$x_{N,j} = \min\{(B^{-1}b)_i / (B^{-1}N_j)_i : (B^{-1}N_j)_i \geq 0\} \quad (7)$$

Dessa forma, escrevendo sob a forma algorítmica, podemos detalhar ainda mais os passos do método Simplex enumerados anteriormente:

- i. **Encontrar uma solução básica viável inicial:** encontrar algum ponto extremo do conjunto de soluções viáveis ( $x$ ) que contenha pelo menos  $(n - m)$  componentes iguais a zero ( $x_N$ ). Se não se conhece uma base  $B$  inicial, pode-se facilmente fazê-lo através da inclusão de variáveis artificiais (método Simplex de duas fases), que podem ser excluídas no decorrer do processo. Mais detalhes podem ser encontrados em (Dantzig, 1963).
- ii. **Verificar se a solução atual é ótima. Se for, pare. Caso contrário, prossiga:** a partir dos custos reduzidos correspondentes às variáveis não- básicas ( $d_N$ ), podemos determinar se a solução atual é ótima. Se  $d_N \geq 0$ , ou seja,  $d_N$  não possui nenhum

elemento negativo, então a solução ótima foi encontrada e o método deve parar. Caso contrário, prossiga para o próximo passo.

- iii. **Determinar a variável não-básica que deve entrar na base:** escolhe-se alguma componente  $x_{N,j}$  de  $x_N$  tal que seu custo reduzido seja negativo, ou seja,  $d_{N,j} < 0$ . Em geral escolhe-se a componente cujo custo reduzido é o mais negativo.
- iv. **Determinar a variável básica que deve sair da base:** escolhe-se alguma componente  $x_{B,j}$  de  $x_B$  tal que:

$$x_{N,j} = \min\{(B^{-1}b)_k / (B^{-1}N_j)_k : (B^{-1}N_j)_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, m\}$$

- v. **Identificar a nova solução básica viável e voltar ao passo ii:** obtém-se o novo ponto extremo removendo-se do ponto extremo anterior a componente de  $x_B$  que se tornará não-básica e inserindo a componente de  $x_N$  que se tornará básica.

Por questão de conveniência, costuma-se colocar os dados do problema original ( $Ax = b \Rightarrow Bx_B + Nx_N = b$ ) em um quadro (*tableau*) como mostrado a seguir:

	$x_B$	$x_N$	
$x_B$	B	N	$b$
Z	$c_B^T$	$c_N^T$	$Q(x)$

O método Simplex alcança seu objetivo (solução do problema) executando uma seqüência de operações de pivotamento no quadro acima até que se obtenha a seguinte configuração (quadro final):

	$x_B$	$x_N$	
$x_B$	I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$
Z	0	$c_N^T - c_B^T B^{-1}N$	$Q(x) - c_B^T B^{-1}b$

De acordo com o quadro acima, a solução ótima  $x$ , pode ser obtida a partir de  $x_B = B^{-1}b$  e  $x_N = 0$ . A maior parte do custo computacional do método vem da necessidade de, a cada iteração, calcular os vetores  $B^{-1}b$  e  $B^{-1}N_j$ , e também calcular explicitamente a inversa da base ( $B^{-1}$ ).

## MÉTODO SIMPLEX REVISADO

Com o objetivo de tornar o Simplex mais eficiente e eliminar grande parte desse esforço computacional, uma versão revisada do mesmo foi desenvolvida. Em geral, é essa versão que é implementada nos computadores. Segundo Dantzig (1963), a idéia é simples: a cada iteração do Simplex, muitas das informações contidas no tableau não são usadas pelo processo de decisão do método. Enquanto cada iteração do Simplex requer que um novo tableau inteiro seja calculado e armazenado, pode-se observar que são necessários apenas os seguintes elementos para o funcionamento do método [Donato]:

- ❖ O vetor de custos reduzidos das variáveis não-básicas ( $d_N$ ): É necessário para selecionar a variável a entrar na base, o que é feito encontrando-se algum  $d_{N,j} < 0$ ;
- ❖ A inversa da base ( $B^{-1}$ ): Se existir algum  $d_{N,j} < 0$ , é necessário encontrar a nova coluna  $P_j$  a entrar na base, que pode ser obtida multiplicando a matriz inversa da base ( $B^{-1}$ ) pela coluna  $N_j$  correspondente à variável não-básica que irá entrar na base  $P_j = (B^{-1}N_j)$ ;
- ❖ A solução viável básica corrente ( $B^{-1}b$ ): pode ser obtido na última coluna do tableau e é usado, juntamente com a coluna  $P_j$ , para escolher qual a variável a sair da base.

É importante notar que, apenas uma coluna não-básica do tableau corrente ( $P_j$ ) é necessária em cada iteração. Como é bastante comum termos um número maior de colunas do que linhas em um problema de programação linear podem obter um ganho bastante significativo em termos de tempo de processamento e de espaço de armazenamento, se ignorar as colunas  $P_i$ , para  $j \neq i$ . Um procedimento ainda mais eficiente seria gerar, a partir dos dados do problema original, primeiro, o vetor de custos reduzidos ( $d_N$ ) e, depois, a coluna  $P_j$  a entrar na base. É exatamente isso o que o Simplex Revisado faz, sendo necessário, para isso, apenas guardar a inversa da base ( $B^{-1}$ ) corrente a cada iteração, para que os valores citados sejam obtidos. É fácil notar que para obter a coluna  $P_j$  ( $B^{-1}N_j$ ) e a solução viável básica ( $B^{-1}b$ ), é necessário apenas conhecer a inversa da base corrente. No caso do vetor de custos reduzidos ( $d_N$ ), temos que  $d_N = c_N^t - c_B^t B^{-1}N$ , sendo necessário, portanto manter apenas o vetor  $\pi = c_B^t B^{-1}$ , já que os elementos restantes são todos constantes (os elementos de  $p$  são denominados multiplicadores simplex associados à base  $B$ , e é devido a isso que o

Simplex Revisado também é conhecido como Método Simplex usando Multiplicadores). Dessa forma, o tableau que guarda as informações necessárias ao método a cada iteração possui  $(m + 1)$  linhas e  $(m + 1)$  colunas, e tem a seguinte forma:

	$x_B$	
$x_B$	$B^{-1}$	$B^{-1}b$
	$\pi$	

### SIMPLEX REVISADO – ALGORITMO

Suponha que, em alguma iteração  $k$ , a inversa da base corrente,  $B^{-1}$ , a solução básica associada a  $B$ ,  $x_B = B^{-1}b$ , e os dados originais do problema ( $A$ ,  $b$  e  $c$ ) estão disponíveis. A iteração  $k$  procede como se segue:

- i. A linha  $(m + 1)$  do tableau tem a seguinte forma  $(\pi_1, \dots, \pi_m)$ . Calcule os custos reduzidos  $d_N$  a partir dos coeficientes da função objetivo e da matriz  $N$  (matriz formada pelas colunas de  $A$  correspondente às variáveis não básicas).
- ii. Se  $d_N \geq 0$ , pare. A solução ótima foi encontrada e está disponível no tableau (coluna  $m + 1$ ). Caso contrário, selecione, para se tornar básica, uma variável não-básica  $x_{N,j}$  cujo custo reduzido  $d_{N,j}$  é negativo.
- iii. Calcule a coluna  $P_j$  a entrar na base, multiplicando  $N_j$  (coluna correspondente a  $x_{N,j}$ ) à esquerda pela inversa da base ( $P_j = B^{-1}N_j$ ).
- iv. Determine a variável básica  $x_{B,j}$  a sair da base onde  $j$  é tal que:
 
$$(B^{-1}b)/P_{i,j} = \min\{(B^{-1}b)_k / (P_{i,j})_k : (P_{i,j})_k > 0, k = 1, \dots, m\}$$
- v. Efetue operações de pivotamento no tableau de forma a encontrar nova base  $B$  e novos multiplicadores simplex  $\pi$ . Volte para o passo 1).

## ANEXO B – MODELO MATEMÁTICO

$$[_1] \text{ MAX= OBJ ;}$$

$$[_2] - E_{A1\_1} - E_{B2\_1} - E_{C2\_1} - E_{L2\_1} - E_{CAIXA1\_1} = - 1406603541.79 ;$$

$$[_3] - E_{A1\_2} - E_{B3\_2} - E_{C3\_2} - E_{L3\_2} - E_{CAIXA1\_2} = - 60869855.03 ;$$

$$[_4] - E_{A1\_3} - E_{B1\_3} - E_{C4\_3} - E_{L4\_3} - E_{CAIXA1\_3} = - 1842554.99 ;$$

$$[_5] - E_{A1\_4} - E_{B2\_4} - E_{C5\_4} - E_{L5\_4} - E_{CAIXA1\_4} = - 1842554.99 ;$$

$$[_6] - E_{A1\_5} - E_{B3\_5} - E_{C1\_5} - E_{L6\_5} - E_{CAIXA1\_5} = - 1842554.99 ;$$

$$[_7] - E_{A1\_6} - E_{B1\_6} - E_{C2\_6} - E_{L7\_6} - E_{CAIXA1\_6} = - 1842554.99 ;$$

$$[_8] - E_{A1\_7} - E_{B2\_7} - E_{C3\_7} - E_{L8\_7} - E_{CAIXA1\_7} = 0 ;$$

$$[_9] - E_{A1\_8} - E_{B3\_8} - E_{C4\_8} - E_{L9\_8} - E_{CAIXA1\_8} = 0 ;$$

$$[_10] - E_{A1\_9} - E_{B1\_9} - E_{C5\_9} - E_{L1\_9} - E_{CAIXA1\_9} = - 1842554.99 ;$$

$$[_11] - E_{A1\_10} - E_{B2\_10} - E_{C1\_10} - E_{L2\_10} - E_{CAIXA1\_10} = - 105325987.83 ;$$

$$[_12] - \text{FOLGA}_1 - S_{A1\_1} - S_{B2\_1} - S_{C2\_1} - S_{L2\_1} - S_{CAIXA1\_1} = 0 ;$$

$$[_13] \text{FOLGA}_1 - \text{FOLGA}_2 - S_{A1\_2} - S_{B3\_2} - S_{C3\_2} - S_{L3\_2} - S_{CAIXA1\_2} = - 88181043.67 ;$$

$$[_14] \text{FOLGA}_2 - \text{FOLGA}_3 - S_{A1\_3} - S_{B1\_3} - S_{C4\_3} - S_{L4\_3} - S_{CAIXA1\_3} = - 5606251.16 ;$$

$$[_15] \text{FOLGA}_3 - \text{FOLGA}_4 - S_{A1\_4} - S_{B2\_4} - S_{C5\_4} - S_{L5\_4} - S_{CAIXA1\_4} = - 5606251.16 ;$$

$$[_16] \text{FOLGA}_4 - \text{FOLGA}_5 - S_{A1\_5} - S_{B3\_5} - S_{C1\_5} - S_{L6\_5} - S_{CAIXA1\_5} = - 5606251.16 ;$$

$$[_17] \text{FOLGA}_5 - \text{FOLGA}_6 - S_{A1\_6} - S_{B1\_6} - S_{C2\_6} - S_{L7\_6} - S_{CAIXA1\_6} = - 1326518.98 ;$$

$$[_18] \text{FOLGA}_6 - \text{FOLGA}_7 - S_{A1\_7} - S_{B2\_7} - S_{C3\_7} - S_{L8\_7} - S_{CAIXA1\_7} = 0 ;$$

$$[_19] \text{FOLGA}_7 - \text{FOLGA}_8 - S_{A1\_8} - S_{B3\_8} - S_{C4\_8} - S_{L9\_8} - S_{CAIXA1\_8} = 0 ;$$

$$[_20] \text{FOLGA}_8 - \text{FOLGA}_9 - S_{A1\_9} - S_{B1\_9} - S_{C5\_9} - S_{L1\_9} - S_{CAIXA1\_9} = - 5606251.16 ;$$

$$[_21] \text{FOLGA}_9 - \text{FOLGA}_{10} - S_{A1_{10}} - S_{B2_{10}} - S_{C1_{10}} - S_{L2_{10}} - S_{CAIXA1_{10}} = - 5936547.48 ;$$

$$[_22] - A1\_1 - 1.000001 * S_{A1\_1} + E_{A1\_1} - 1.000001 * A1_{B2\_1} - 1.000001 * A1_{C2\_1} - 1.000001 * A1_{L2\_1} - 1.000001 * A1_{CAIXA1\_1} + B2_{A1\_1} + C2_{A1\_1} + L2_{A1\_1} + CAIXA1_{A1\_1} = 0 ;$$

$$[_23] \text{TE}_{A1\_1} - B2_{A1\_1} - C2_{A1\_1} - L2_{A1\_1} - CAIXA1_{A1\_1} = 0 ;$$

$$[_24] \text{TS}_{A1\_1} - A1_{B2\_1} - A1_{C2\_1} - A1_{L2\_1} - A1_{CAIXA1\_1} = 0 ;$$

$$[_25] - B2\_1 - 1.000001 * S_{B2\_1} + E_{B2\_1} + A1_{B2\_1} - 1.000001 * B2_{A1\_1} - 1.000001 * B2_{C2\_1} - 1.000001 * B2_{L2\_1} - 1.000001 * B2_{CAIXA1\_1} + C2_{B2\_1} + L2_{B2\_1} + CAIXA1_{B2\_1} = 0 ;$$

$$[_26] \text{TE}_{B2\_1} - A1_{B2\_1} - C2_{B2\_1} - L2_{B2\_1} - CAIXA1_{B2\_1} = 0 ;$$

$$[_27] \text{TS}_{B2\_1} - B2_{A1\_1} - B2_{C2\_1} - B2_{L2\_1} - B2_{CAIXA1\_1} = 0 ;$$

$$[_{28}] - C2\_1 - 1.000001 * S\_C2\_1 + E\_C2\_1 + A1\_C2\_1 + B2\_C2\_1 - 1.000001 * C2\_A1\_1 - 1.000001 * C2\_B2\_1 - 1.000001 * C2\_L2\_1 - 1.000001 * C2\_CAIXA1\_1 + L2\_C2\_1 + CAIXA1\_C2\_1 = 0 ;$$

$$[_{29}] TE\_C2\_1 - A1\_C2\_1 - B2\_C2\_1 - L2\_C2\_1 - CAIXA1\_C2\_1 = 0 ;$$

$$[_{30}] TS\_C2\_1 - C2\_A1\_1 - C2\_B2\_1 - C2\_L2\_1 - C2\_CAIXA1\_1 = 0 ;$$

$$[_{31}] - L2\_1 - 1.000001 * S\_L2\_1 + E\_L2\_1 + A1\_L2\_1 + B2\_L2\_1 + C2\_L2\_1 - 1.000001 * L2\_A1\_1 - 1.000001 * L2\_B2\_1 - 1.000001 * L2\_C2\_1 - 1.000001 * L2\_CAIXA1\_1 + CAIXA1\_L2\_1 = 0 ;$$

$$[_{32}] TE\_L2\_1 - A1\_L2\_1 - B2\_L2\_1 - C2\_L2\_1 - CAIXA1\_L2\_1 = 0 ;$$

$$[_{33}] TS\_L2\_1 - L2\_A1\_1 - L2\_B2\_1 - L2\_C2\_1 - L2\_CAIXA1\_1 = 0 ;$$

$$[_{34}] - CAIXA1\_1 - S\_CAIXA1\_1 + E\_CAIXA1\_1 + A1\_CAIXA1\_1 + B2\_CAIXA1\_1 + C2\_CAIXA1\_1 + L2\_CAIXA1\_1 - CAIXA1\_A1\_1 - CAIXA1\_B2\_1 - CAIXA1\_C2\_1 - CAIXA1\_L2\_1 = 0 ;$$

$$[_{35}] TE\_CAIXA1\_1 - A1\_CAIXA1\_1 - B2\_CAIXA1\_1 - C2\_CAIXA1\_1 - L2\_CAIXA1\_1 = 0 ;$$

$$[_{36}] TS\_CAIXA1\_1 - CAIXA1\_A1\_1 - CAIXA1\_B2\_1 - CAIXA1\_C2\_1 - CAIXA1\_L2\_1 = 0 ;$$

$$[_{37}] 1.0001 * A1\_1 - A1\_2 - 1.000001 * S\_A1\_2 + E\_A1\_2 - 1.000001 * A1\_B3\_2 - 1.000001 * A1\_C3\_2 - 1.000001 * A1\_L3\_2 - 1.000001 * A1\_CAIXA1\_2 + B3\_A1\_2 + C3\_A1\_2 + L3\_A1\_2 + CAIXA1\_A1\_2 = 0 ;$$

$$[_{38}] TE\_A1\_2 - B3\_A1\_2 - C3\_A1\_2 - L3\_A1\_2 - CAIXA1\_A1\_2 = 0 ;$$

$$[_{39}] TS\_A1\_2 - A1\_B3\_2 - A1\_C3\_2 - A1\_L3\_2 - A1\_CAIXA1\_2 = 0 ;$$

$$[_{40}] - 0.0001 * A1\_1 + R\_A1\_2 = 0 ;$$

$$[_{41}] - B1\_1 + B1\_2 = 0 ;$$

$$[_{42}] - B2\_1 + B2\_2 = 0 ;$$

$$[_{43}] - B3\_2 - 1.000001 * S\_B3\_2 + E\_B3\_2 + A1\_B3\_2 - 1.000001 * B3\_A1\_2 - 1.000001 * B3\_C3\_2 - 1.000001 * B3\_L3\_2 - 1.000001 * B3\_CAIXA1\_2 + C3\_B3\_2 + L3\_B3\_2 + CAIXA1\_B3\_2 = 0 ;$$

$$[_{44}] TE\_B3\_2 - A1\_B3\_2 - C3\_B3\_2 - L3\_B3\_2 - CAIXA1\_B3\_2 = 0 ;$$

$$[_{45}] TS\_B3\_2 - B3\_A1\_2 - B3\_C3\_2 - B3\_L3\_2 - B3\_CAIXA1\_2 = 0 ;$$

$$[_{46}] - C1\_1 + C1\_2 = 0 ;$$

$$[_{47}] - C2\_1 + C2\_2 = 0 ;$$

$$[_{48}] - C3\_2 - 1.000001 * S\_C3\_2 + E\_C3\_2 + A1\_C3\_2 + B3\_C3\_2 - 1.000001 * C3\_A1\_2 - 1.000001 * C3\_B3\_2 - 1.000001 * C3\_L3\_2 - 1.000001 * C3\_CAIXA1\_2 + L3\_C3\_2 + CAIXA1\_C3\_2 = 0 ;$$

$$[_{49}] TE\_C3\_2 - A1\_C3\_2 - B3\_C3\_2 - L3\_C3\_2 - CAIXA1\_C3\_2 = 0 ;$$

$$[_{50}] TS\_C3\_2 - C3\_A1\_2 - C3\_B3\_2 - C3\_L3\_2 - C3\_CAIXA1\_2 = 0 ;$$

$$[_{51}] - C4\_1 + C4\_2 = 0 ;$$

$$[_{52}] - C5\_1 + C5\_2 = 0 ;$$

$$[_{53}] - L1\_1 + L1\_2 = 0 ;$$

$$[_{54}] - L2\_1 + L2\_2 = 0 ;$$

$$[_55] - L3\_2 - 1.000001 * S\_L3\_2 + E\_L3\_2 + A1\_L3\_2 + B3\_L3\_2 + C3\_L3\_2 - 1.000001 * L3\_A1\_2 - 1.000001 * L3\_B3\_2 - 1.000001 * L3\_C3\_2 - 1.000001 * L3\_CAIXA1\_2 + CAIXA1\_L3\_2 = 0 ;$$

$$[_56] TE\_L3\_2 - A1\_L3\_2 - B3\_L3\_2 - C3\_L3\_2 - CAIXA1\_L3\_2 = 0 ;$$

$$[_57] TS\_L3\_2 - L3\_A1\_2 - L3\_B3\_2 - L3\_C3\_2 - L3\_CAIXA1\_2 = 0 ;$$

$$[_58] - L4\_1 + L4\_2 = 0 ;$$

$$[_59] - L5\_1 + L5\_2 = 0 ;$$

$$[_60] - L6\_1 + L6\_2 = 0 ;$$

$$[_61] - L7\_1 + L7\_2 = 0 ;$$

$$[_62] - L8\_1 + L8\_2 = 0 ;$$

$$[_63] - L9\_1 + L9\_2 = 0 ;$$

$$[_64] CAIXA1\_1 - CAIXA1\_2 - S\_CAIXA1\_2 + E\_CAIXA1\_2 + A1\_CAIXA1\_2 + B3\_CAIXA1\_2 + C3\_CAIXA1\_2 + L3\_CAIXA1\_2 - CAIXA1\_A1\_2 - CAIXA1\_B3\_2 - CAIXA1\_C3\_2 - CAIXA1\_L3\_2 = 0 ;$$

$$[_65] TE\_CAIXA1\_2 - A1\_CAIXA1\_2 - B3\_CAIXA1\_2 - C3\_CAIXA1\_2 - L3\_CAIXA1\_2 = 0 ;$$

$$[_66] TS\_CAIXA1\_2 - CAIXA1\_A1\_2 - CAIXA1\_B3\_2 - CAIXA1\_C3\_2 - CAIXA1\_L3\_2 = 0 ;$$

$$[_67] R\_CAIXA1\_2 = 0 ;$$

$$[_68] 1.0001 * A1\_2 - A1\_3 - 1.000001 * S\_A1\_3 + E\_A1\_3 - 1.000001 * A1\_B1\_3 - 1.000001 * A1\_C4\_3 - 1.000001 * A1\_L4\_3 - 1.000001 * A1\_CAIXA1\_3 + B1\_A1\_3 + C4\_A1\_3 + L4\_A1\_3 + CAIXA1\_A1\_3 = 0 ;$$

$$[_69] TE\_A1\_3 - B1\_A1\_3 - C4\_A1\_3 - L4\_A1\_3 - CAIXA1\_A1\_3 = 0 ;$$

$$[_70] TS\_A1\_3 - A1\_B1\_3 - A1\_C4\_3 - A1\_L4\_3 - A1\_CAIXA1\_3 = 0 ;$$

$$[_71] - 0.0001 * A1\_2 + R\_A1\_3 = 0 ;$$

$$[_72] - B1\_3 - 1.000001 * S\_B1\_3 + E\_B1\_3 + A1\_B1\_3 - 1.000001 * B1\_A1\_3 - 1.000001 * B1\_C4\_3 - 1.000001 * B1\_L4\_3 - 1.000001 * B1\_CAIXA1\_3 + C4\_B1\_3 + L4\_B1\_3 + CAIXA1\_B1\_3 = 0 ;$$

$$[_73] TE\_B1\_3 - A1\_B1\_3 - C4\_B1\_3 - L4\_B1\_3 - CAIXA1\_B1\_3 = 0 ;$$

$$[_74] TS\_B1\_3 - B1\_A1\_3 - B1\_C4\_3 - B1\_L4\_3 - B1\_CAIXA1\_3 = 0 ;$$

$$[_75] - B2\_2 + B2\_3 = 0 ;$$

$$[_76] - B3\_2 + B3\_3 = 0 ;$$

$$[_77] - C1\_2 + C1\_3 = 0 ;$$

$$[_78] - C2\_2 + C2\_3 = 0 ;$$

$$[_79] - C3\_2 + C3\_3 = 0 ;$$

$$[_80] - C4\_3 - 1.000001 * S\_C4\_3 + E\_C4\_3 + A1\_C4\_3 + B1\_C4\_3 - 1.000001 * C4\_A1\_3 - 1.000001 * C4\_B1\_3 - 1.000001 * C4\_L4\_3 - 1.000001 * C4\_CAIXA1\_3 + L4\_C4\_3 + CAIXA1\_C4\_3 = 0 ;$$

$$[_81] TE\_C4\_3 - A1\_C4\_3 - B1\_C4\_3 - L4\_C4\_3 - CAIXA1\_C4\_3 = 0 ;$$

$$[_82] TS\_C4\_3 - C4\_A1\_3 - C4\_B1\_3 - C4\_L4\_3 - C4\_CAIXA1\_3 = 0 ;$$

$$[_83] - C5_2 + C5_3 = 0 ;$$

$$[_84] - L1_2 + L1_3 = 0 ;$$

$$[_85] - L2_2 + L2_3 = 0 ;$$

$$[_86] - L3_2 + L3_3 = 0 ;$$

$$[_87] - L4_3 - 1.000001 * S_{L4_3} + E_{L4_3} + A1_{L4_3} + B1_{L4_3} + C4_{L4_3} - 1.000001 * L4_{A1_3} - 1.000001 * L4_{B1_3} - 1.000001 * L4_{C4_3} - 1.000001 * L4_{CAIXA1_3} + CAIXA1_{L4_3} = 0 ;$$

$$[_88] TE_{L4_3} - A1_{L4_3} - B1_{L4_3} - C4_{L4_3} - CAIXA1_{L4_3} = 0 ;$$

$$[_89] TS_{L4_3} - L4_{A1_3} - L4_{B1_3} - L4_{C4_3} - L4_{CAIXA1_3} = 0 ;$$

$$[_90] - L5_2 + L5_3 = 0 ; [_91] - L6_2 + L6_3 = 0 ;$$

$$[_92] - L7_2 + L7_3 = 0 ; [_93] - L8_2 + L8_3 = 0 ;$$

$$[_94] - L9_2 + L9_3 = 0 ;$$

$$[_95] CAIXA1_2 - CAIXA1_3 - S_{CAIXA1_3} + E_{CAIXA1_3} + A1_{CAIXA1_3} + B1_{CAIXA1_3} + C4_{CAIXA1_3} + L4_{CAIXA1_3} - CAIXA1_{A1_3} - CAIXA1_{B1_3} - CAIXA1_{C4_3} - CAIXA1_{L4_3} = 0 ;$$

$$[_96] TE_{CAIXA1_3} - A1_{CAIXA1_3} - B1_{CAIXA1_3} - C4_{CAIXA1_3} - L4_{CAIXA1_3} = 0 ;$$

$$[_97] TS_{CAIXA1_3} - CAIXA1_{A1_3} - CAIXA1_{B1_3} - CAIXA1_{C4_3} - CAIXA1_{L4_3} = 0 ;$$

$$[_98] R_{CAIXA1_3} = 0 ;$$

$$[_99] 1.0001 * A1_3 - A1_4 - 1.000001 * S_{A1_4} + E_{A1_4} - 1.000001 * A1_{B2_4} - 1.000001 * A1_{C5_4} - 1.000001 * A1_{L5_4} - 1.000001 * A1_{CAIXA1_4} + B2_{A1_4} + C5_{A1_4} + L5_{A1_4} + CAIXA1_{A1_4} = 0 ;$$

$$[_100] TE_{A1_4} - B2_{A1_4} - C5_{A1_4} - L5_{A1_4} - CAIXA1_{A1_4} = 0 ;$$

$$[_101] TS_{A1_4} - A1_{B2_4} - A1_{C5_4} - A1_{L5_4} - A1_{CAIXA1_4} = 0 ;$$

$$[_102] - 0.0001 * A1_3 + R_{A1_4} = 0 ;$$

$$[_103] - B1_3 + B1_4 = 0 ;$$

$$[_104] 1.0006 * B2_1 - B2_4 - 1.000001 * S_{B2_4} + E_{B2_4} + A1_{B2_4} - 1.000001 * B2_{A1_4} - 1.000001 * B2_{C5_4} - 1.000001 * B2_{L5_4} - 1.000001 * B2_{CAIXA1_4} + C5_{B2_4} + L5_{B2_4} + CAIXA1_{B2_4} = 0 ;$$

$$[_105] TE_{B2_4} - A1_{B2_4} - C5_{B2_4} - L5_{B2_4} - CAIXA1_{B2_4} = 0 ;$$

$$[_106] TS_{B2_4} - B2_{A1_4} - B2_{C5_4} - B2_{L5_4} - B2_{CAIXA1_4} = 0 ;$$

$$[_107] - 0.0006 * B2_1 + R_{B2_4} = 0 ;$$

$$[_108] - B3_3 + B3_4 = 0 ;$$

$$[_109] - C1_3 + C1_4 = 0 ;$$

$$[_110] - C2_3 + C2_4 = 0 ;$$

$$[_111] - C3_3 + C3_4 = 0 ;$$

$$[_112] - C4_3 + C4_4 = 0 ;$$

$$[_113] - C5\_4 - 1.000001 * S\_C5\_4 + E\_C5\_4 + A1\_C5\_4 + B2\_C5\_4 - 1.000001 * C5\_A1\_4 - 1.000001 * C5\_B2\_4 - 1.000001 * C5\_L5\_4 - 1.000001 * C5\_CAIXA1\_4 + L5\_C5\_4 + CAIXA1\_C5\_4 = 0 ;$$

$$[_114] TE\_C5\_4 - A1\_C5\_4 - B2\_C5\_4 - L5\_C5\_4 - CAIXA1\_C5\_4 = 0 ;$$

$$[_115] TS\_C5\_4 - C5\_A1\_4 - C5\_B2\_4 - C5\_L5\_4 - C5\_CAIXA1\_4 = 0 ;$$

$$[_116] - L1\_3 + L1\_4 = 0 ;$$

$$[_117] - L2\_3 + L2\_4 = 0 ;$$

$$[_118] - L3\_3 + L3\_4 = 0 ;$$

$$[_119] - L4\_3 + L4\_4 = 0 ;$$

$$[_120] - L5\_4 - 1.000001 * S\_L5\_4 + E\_L5\_4 + A1\_L5\_4 + B2\_L5\_4 + C5\_L5\_4 - 1.000001 * L5\_A1\_4 - 1.000001 * L5\_B2\_4 - 1.000001 * L5\_C5\_4 - 1.000001 * L5\_CAIXA1\_4 + CAIXA1\_L5\_4 = 0 ;$$

$$[_121] TE\_L5\_4 - A1\_L5\_4 - B2\_L5\_4 - C5\_L5\_4 - CAIXA1\_L5\_4 = 0 ;$$

$$[_122] TS\_L5\_4 - L5\_A1\_4 - L5\_B2\_4 - L5\_C5\_4 - L5\_CAIXA1\_4 = 0 ;$$

$$[_123] - L6\_3 + L6\_4 = 0 ;$$

$$[_124] - L7\_3 + L7\_4 = 0 ;$$

$$[_125] - L8\_3 + L8\_4 = 0 ;$$

$$[_126] - L9\_3 + L9\_4 = 0 ;$$

$$[_127] CAIXA1\_3 - CAIXA1\_4 - S\_CAIXA1\_4 + E\_CAIXA1\_4 + A1\_CAIXA1\_4 + B2\_CAIXA1\_4 + C5\_CAIXA1\_4 + L5\_CAIXA1\_4 - CAIXA1\_A1\_4 - CAIXA1\_B2\_4 - CAIXA1\_C5\_4 - CAIXA1\_L5\_4 = 0 ;$$

$$[_128] TE\_CAIXA1\_4 - A1\_CAIXA1\_4 - B2\_CAIXA1\_4 - C5\_CAIXA1\_4 - L5\_CAIXA1\_4 = 0 ;$$

$$[_129] TS\_CAIXA1\_4 - CAIXA1\_A1\_4 - CAIXA1\_B2\_4 - CAIXA1\_C5\_4 - CAIXA1\_L5\_4 = 0 ;$$

$$[_130] R\_CAIXA1\_4 = 0 ;$$

$$[_131] 1.0001 * A1\_4 - A1\_5 - 1.000001 * S\_A1\_5 + E\_A1\_5 - 1.000001 * A1\_B3\_5 - 1.000001 * A1\_C1\_5 - 1.000001 * A1\_L6\_5 - 1.000001 * A1\_CAIXA1\_5 + B3\_A1\_5 + C1\_A1\_5 + L6\_A1\_5 + CAIXA1\_A1\_5 = 0 ;$$

$$[_132] TE\_A1\_5 - B3\_A1\_5 - C1\_A1\_5 - L6\_A1\_5 - CAIXA1\_A1\_5 = 0 ;$$

$$[_133] TS\_A1\_5 - A1\_B3\_5 - A1\_C1\_5 - A1\_L6\_5 - A1\_CAIXA1\_5 = 0 ;$$

$$[_134] - 0.0001 * A1\_4 + R\_A1\_5 = 0 ;$$

$$[_135] - B1\_4 + B1\_5 = 0 ;$$

$$[_136] - B2\_4 + B2\_5 = 0 ;$$

$$[_137] 1.0006 * B3\_2 - B3\_5 - 1.000001 * S\_B3\_5 + E\_B3\_5 + A1\_B3\_5 - 1.000001 * B3\_A1\_5 - 1.000001 * B3\_C1\_5 - 1.000001 * B3\_L6\_5 - 1.000001 * B3\_CAIXA1\_5 + C1\_B3\_5 + L6\_B3\_5 + CAIXA1\_B3\_5 = 0 ;$$

$$[_138] TE\_B3\_5 - A1\_B3\_5 - C1\_B3\_5 - L6\_B3\_5 - CAIXA1\_B3\_5 = 0 ;$$

$$[_139] TS\_B3\_5 - B3\_A1\_5 - B3\_C1\_5 - B3\_L6\_5 - B3\_CAIXA1\_5 = 0 ;$$

$$[_140] - 0.0006 * B3\_2 + R\_B3\_5 = 0 ;$$

$$[_141] - C1\_5 - 1.000001 * S\_C1\_5 + E\_C1\_5 + A1\_C1\_5 + B3\_C1\_5 - 1.000001 * C1\_A1\_5 - 1.000001 * C1\_B3\_5 - 1.000001 * C1\_L6\_5 - 1.000001 * C1\_CAIXA1\_5 + L6\_C1\_5 + CAIXA1\_C1\_5 = 0 ;$$

$$[_142] TE\_C1\_5 - A1\_C1\_5 - B3\_C1\_5 - L6\_C1\_5 - CAIXA1\_C1\_5 = 0 ;$$

$$[_143] TS\_C1\_5 - C1\_A1\_5 - C1\_B3\_5 - C1\_L6\_5 - C1\_CAIXA1\_5 = 0 ;$$

$$[_144] - C2\_4 + C2\_5 = 0 ;$$

$$[_145] - C3\_4 + C3\_5 = 0 ;$$

$$[_146] - C4\_4 + C4\_5 = 0 ;$$

$$[_147] - C5\_4 + C5\_5 = 0 ;$$

$$[_148] - L1\_4 + L1\_5 = 0 ;$$

$$[_149] - L2\_4 + L2\_5 = 0 ;$$

$$[_150] - L3\_4 + L3\_5 = 0 ;$$

$$[_151] - L4\_4 + L4\_5 = 0 ;$$

$$[_152] - L5\_4 + L5\_5 = 0 ;$$

$$[_153] - L6\_5 - 1.000001 * S\_L6\_5 + E\_L6\_5 + A1\_L6\_5 + B3\_L6\_5 + C1\_L6\_5 - 1.000001 * L6\_A1\_5 - 1.000001 * L6\_B3\_5 - 1.000001 * L6\_C1\_5 - 1.000001 * L6\_CAIXA1\_5 + CAIXA1\_L6\_5 = 0 ;$$

$$[_154] TE\_L6\_5 - A1\_L6\_5 - B3\_L6\_5 - C1\_L6\_5 - CAIXA1\_L6\_5 = 0 ;$$

$$[_155] TS\_L6\_5 - L6\_A1\_5 - L6\_B3\_5 - L6\_C1\_5 - L6\_CAIXA1\_5 = 0 ;$$

$$[_156] - L7\_4 + L7\_5 = 0 ;$$

$$[_157] - L8\_4 + L8\_5 = 0 ;$$

$$[_158] - L9\_4 + L9\_5 = 0 ;$$

$$[_159] CAIXA1\_4 - CAIXA1\_5 - S\_CAIXA1\_5 + E\_CAIXA1\_5 + A1\_CAIXA1\_5 + B3\_CAIXA1\_5 + C1\_CAIXA1\_5 + L6\_CAIXA1\_5 - CAIXA1\_A1\_5 - CAIXA1\_B3\_5 - CAIXA1\_C1\_5 - CAIXA1\_L6\_5 = 0 ;$$

$$[_160] TE\_CAIXA1\_5 - A1\_CAIXA1\_5 - B3\_CAIXA1\_5 - C1\_CAIXA1\_5 - L6\_CAIXA1\_5 = 0 ;$$

$$[_161] TS\_CAIXA1\_5 - CAIXA1\_A1\_5 - CAIXA1\_B3\_5 - CAIXA1\_C1\_5 - CAIXA1\_L6\_5 = 0 ;$$

$$[_162] R\_CAIXA1\_5 = 0 ;$$

$$[_163] 1.0001 * A1\_5 - A1\_6 - 1.000001 * S\_A1\_6 + E\_A1\_6 - 1.000001 * A1\_B1\_6 - 1.000001 * A1\_C2\_6 - 1.000001 * A1\_L7\_6 - 1.000001 * A1\_CAIXA1\_6 + B1\_A1\_6 + C2\_A1\_6 + L7\_A1\_6 + CAIXA1\_A1\_6 = 0 ;$$

$$[_164] TE\_A1\_6 - B1\_A1\_6 - C2\_A1\_6 - L7\_A1\_6 - CAIXA1\_A1\_6 = 0 ;$$

$$[_165] TS\_A1\_6 - A1\_B1\_6 - A1\_C2\_6 - A1\_L7\_6 - A1\_CAIXA1\_6 = 0 ;$$

$$[_166] - 0.0001 * A1\_5 + R\_A1\_6 = 0 ;$$

$$[_167] 1.0006 * B1\_3 - B1\_6 - 1.000001 * S\_B1\_6 + E\_B1\_6 + A1\_B1\_6 - 1.000001 * B1\_A1\_6 - 1.000001 * B1\_C2\_6 - 1.000001 * B1\_L7\_6 - 1.000001 * B1\_CAIXA1\_6 + C2\_B1\_6 + L7\_B1\_6 + CAIXA1\_B1\_6 = 0 ;$$

$$[_168] TE\_B1\_6 - A1\_B1\_6 - C2\_B1\_6 - L7\_B1\_6 - CAIXA1\_B1\_6 = 0 ;$$

$$[_169] TS\_B1\_6 - B1\_A1\_6 - B1\_C2\_6 - B1\_L7\_6 - B1\_CAIXA1\_6 = 0 ;$$

$$[_170] - 0.0006 * B1\_3 + R\_B1\_6 = 0 ;$$

$$[_171] - B2\_5 + B2\_6 = 0 ;$$

$$[_172] - B3\_5 + B3\_6 = 0 ;$$

$$[_173] - C1\_5 + C1\_6 = 0 ;$$

$$[_174] 1.0012 * C2\_1 - C2\_6 - 1.000001 * S\_C2\_6 + E\_C2\_6 + A1\_C2\_6 + B1\_C2\_6 - 1.000001 * C2\_A1\_6 - 1.000001 * C2\_B1\_6 - 1.000001 * C2\_L7\_6 - 1.000001 * C2\_CAIXA1\_6 + L7\_C2\_6 + CAIXA1\_C2\_6 = 0 ;$$

$$[_175] TE\_C2\_6 - A1\_C2\_6 - B1\_C2\_6 - L7\_C2\_6 - CAIXA1\_C2\_6 = 0 ;$$

$$[_176] TS\_C2\_6 - C2\_A1\_6 - C2\_B1\_6 - C2\_L7\_6 - C2\_CAIXA1\_6 = 0 ;$$

$$[_177] - 0.0012 * C2\_1 + R\_C2\_6 = 0 ;$$

$$[_178] - C3\_5 + C3\_6 = 0 ;$$

$$[_179] - C4\_5 + C4\_6 = 0 ;$$

$$[_180] - C5\_5 + C5\_6 = 0 ;$$

$$[_181] - L1\_5 + L1\_6 = 0 ;$$

$$[_182] - L2\_5 + L2\_6 = 0 ;$$

$$[_183] - L3\_5 + L3\_6 = 0 ;$$

$$[_184] - L4\_5 + L4\_6 = 0 ;$$

$$[_185] - L5\_5 + L5\_6 = 0 ;$$

$$[_186] - L6\_5 + L6\_6 = 0 ;$$

$$[_187] - L7\_6 - 1.000001 * S\_L7\_6 + E\_L7\_6 + A1\_L7\_6 + B1\_L7\_6 + C2\_L7\_6 - 1.000001 * L7\_A1\_6 - 1.000001 * L7\_B1\_6 - 1.000001 * L7\_C2\_6 - 1.000001 * L7\_CAIXA1\_6 + CAIXA1\_L7\_6 = 0 ;$$

$$[_188] TE\_L7\_6 - A1\_L7\_6 - B1\_L7\_6 - C2\_L7\_6 - CAIXA1\_L7\_6 = 0 ;$$

$$[_189] TS\_L7\_6 - L7\_A1\_6 - L7\_B1\_6 - L7\_C2\_6 - L7\_CAIXA1\_6 = 0 ;$$

$$[_190] - L8\_5 + L8\_6 = 0 ;$$

$$[_191] - L9\_5 + L9\_6 = 0 ;$$

$$[_192] CAIXA1\_5 - CAIXA1\_6 - S\_CAIXA1\_6 + E\_CAIXA1\_6 + A1\_CAIXA1\_6 + B1\_CAIXA1\_6 + C2\_CAIXA1\_6 + L7\_CAIXA1\_6 - CAIXA1\_A1\_6 - CAIXA1\_B1\_6 - CAIXA1\_C2\_6 - CAIXA1\_L7\_6 = 0 ;$$

$$[_193] TE\_CAIXA1\_6 - A1\_CAIXA1\_6 - B1\_CAIXA1\_6 - C2\_CAIXA1\_6 - L7\_CAIXA1\_6 = 0 ;$$

$$[_194] TS\_CAIXA1\_6 - CAIXA1\_A1\_6 - CAIXA1\_B1\_6 - CAIXA1\_C2\_6 - CAIXA1\_L7\_6 = 0 ;$$

$$[_195] R\_CAIXA1\_6 = 0 ;$$

$$[_{196}] 1.0001 * A1_6 - A1_7 - 1.000001 * S_{A1_7} + E_{A1_7} - 1.000001 * A1_{B2_7} - 1.000001 * A1_{C3_7} - 1.000001 * A1_{L8_7} - 1.000001 * A1_{CAIXA1_7} + B2_{A1_7} + C3_{A1_7} + L8_{A1_7} + CAIXA1_{A1_7} = 0;$$

$$[_{197}] TE_{A1_7} - B2_{A1_7} - C3_{A1_7} - L8_{A1_7} - CAIXA1_{A1_7} = 0;$$

$$[_{198}] TS_{A1_7} - A1_{B2_7} - A1_{C3_7} - A1_{L8_7} - A1_{CAIXA1_7} = 0;$$

$$[_{199}] - 0.0001 * A1_6 + R_{A1_7} = 0;$$

$$[_{200}] - B1_6 + B1_7 = 0;$$

$$[_{201}] 1.0006 * B2_4 - B2_7 - 1.000001 * S_{B2_7} + E_{B2_7} + A1_{B2_7} - 1.000001 * B2_{A1_7} - 1.000001 * B2_{C3_7} - 1.000001 * B2_{L8_7} - 1.000001 * B2_{CAIXA1_7} + C3_{B2_7} + L8_{B2_7} + CAIXA1_{B2_7} = 0;$$

$$[_{202}] TE_{B2_7} - A1_{B2_7} - C3_{B2_7} - L8_{B2_7} - CAIXA1_{B2_7} = 0;$$

$$[_{203}] TS_{B2_7} - B2_{A1_7} - B2_{C3_7} - B2_{L8_7} - B2_{CAIXA1_7} = 0;$$

$$[_{204}] - 0.0006 * B2_4 + R_{B2_7} = 0;$$

$$[_{205}] - B3_6 + B3_7 = 0;$$

$$[_{206}] - C1_6 + C1_7 = 0;$$

$$[_{207}] - C2_6 + C2_7 = 0;$$

$$[_{208}] 1.0012 * C3_2 - C3_7 - 1.000001 * S_{C3_7} + E_{C3_7} + A1_{C3_7} + B2_{C3_7} - 1.000001 * C3_{A1_7} - 1.000001 * C3_{B2_7} - 1.000001 * C3_{L8_7} - 1.000001 * C3_{CAIXA1_7} + L8_{C3_7} + CAIXA1_{C3_7} = 0;$$

$$[_{209}] TE_{C3_7} - A1_{C3_7} - B2_{C3_7} - L8_{C3_7} - CAIXA1_{C3_7} = 0;$$

$$[_{210}] TS_{C3_7} - C3_{A1_7} - C3_{B2_7} - C3_{L8_7} - C3_{CAIXA1_7} = 0;$$

$$[_{211}] - 0.0012 * C3_2 + R_{C3_7} = 0;$$

$$[_{212}] - C4_6 + C4_7 = 0;$$

$$[_{213}] - C5_6 + C5_7 = 0;$$

$$[_{214}] - L1_6 + L1_7 = 0;$$

$$[_{215}] - L2_6 + L2_7 = 0;$$

$$[_{216}] - L3_6 + L3_7 = 0;$$

$$[_{217}] - L4_6 + L4_7 = 0;$$

$$[_{218}] - L5_6 + L5_7 = 0;$$

$$[_{219}] - L6_6 + L6_7 = 0;$$

$$[_{220}] - L7_6 + L7_7 = 0;$$

$$[_{221}] - L8_7 - 1.000001 * S_{L8_7} + E_{L8_7} + A1_{L8_7} + B2_{L8_7} + C3_{L8_7} - 1.000001 * L8_{A1_7} - 1.000001 * L8_{B2_7} - 1.000001 * L8_{C3_7} - 1.000001 * L8_{CAIXA1_7} + CAIXA1_{L8_7} = 0;$$

$$[_{222}] TE_{L8_7} - A1_{L8_7} - B2_{L8_7} - C3_{L8_7} - CAIXA1_{L8_7} = 0;$$

$$[_{223}] TS_{L8_7} - L8_{A1_7} - L8_{B2_7} - L8_{C3_7} - L8_{CAIXA1_7} = 0;$$

$$[_224] - L9_6 + L9_7 = 0 ;$$

$$[_225] CAIXA1_6 - CAIXA1_7 - S\_CAIXA1_7 + E\_CAIXA1_7 + A1\_CAIXA1_7 + B2\_CAIXA1_7 + C3\_CAIXA1_7 + L8\_CAIXA1_7 - CAIXA1\_A1_7 - CAIXA1\_B2_7 - CAIXA1\_C3_7 - CAIXA1\_L8_7 = 0 ;$$

$$[_226] TE\_CAIXA1_7 - A1\_CAIXA1_7 - B2\_CAIXA1_7 - C3\_CAIXA1_7 - L8\_CAIXA1_7 = 0 ;$$

$$[_227] TS\_CAIXA1_7 - CAIXA1\_A1_7 - CAIXA1\_B2_7 - CAIXA1\_C3_7 - CAIXA1\_L8_7 = 0 ;$$

$$[_228] R\_CAIXA1_7 = 0 ;$$

$$[_229] 1.0001 * A1_7 - A1_8 - 1.000001 * S\_A1_8 + E\_A1_8 - 1.000001 * A1\_B3_8 - 1.000001 * A1\_C4_8 - 1.000001 * A1\_L9_8 - 1.000001 * A1\_CAIXA1_8 + B3\_A1_8 + C4\_A1_8 + L9\_A1_8 + CAIXA1\_A1_8 = 0 ;$$

$$[_230] TE\_A1_8 - B3\_A1_8 - C4\_A1_8 - L9\_A1_8 - CAIXA1\_A1_8 = 0 ;$$

$$[_231] TS\_A1_8 - A1\_B3_8 - A1\_C4_8 - A1\_L9_8 - A1\_CAIXA1_8 = 0 ;$$

$$[_232] - 0.0001 * A1_7 + R\_A1_8 = 0 ;$$

$$[_233] - B1_7 + B1_8 = 0 ;$$

$$[_234] - B2_7 + B2_8 = 0 ;$$

$$[_235] 1.0006 * B3_5 - B3_8 - 1.000001 * S\_B3_8 + E\_B3_8 + A1\_B3_8 - 1.000001 * B3\_A1_8 - 1.000001 * B3\_C4_8 - 1.000001 * B3\_L9_8 - 1.000001 * B3\_CAIXA1_8 + C4\_B3_8 + L9\_B3_8 + CAIXA1\_B3_8 = 0 ;$$

$$[_236] TE\_B3_8 - A1\_B3_8 - C4\_B3_8 - L9\_B3_8 - CAIXA1\_B3_8 = 0 ;$$

$$[_237] TS\_B3_8 - B3\_A1_8 - B3\_C4_8 - B3\_L9_8 - B3\_CAIXA1_8 = 0 ;$$

$$[_238] - 0.0006 * B3_5 + R\_B3_8 = 0 ;$$

$$[_239] - C1_7 + C1_8 = 0 ;$$

$$[_240] - C2_7 + C2_8 = 0 ;$$

$$[_241] - C3_7 + C3_8 = 0 ;$$

$$[_242] 1.0012 * C4_3 - C4_8 - 1.000001 * S\_C4_8 + E\_C4_8 + A1\_C4_8 + B3\_C4_8 - 1.000001 * C4\_A1_8 - 1.000001 * C4\_B3_8 - 1.000001 * C4\_L9_8 - 1.000001 * C4\_CAIXA1_8 + L9\_C4_8 + CAIXA1\_C4_8 = 0 ;$$

$$[_243] TE\_C4_8 - A1\_C4_8 - B3\_C4_8 - L9\_C4_8 - CAIXA1\_C4_8 = 0 ;$$

$$[_244] TS\_C4_8 - C4\_A1_8 - C4\_B3_8 - C4\_L9_8 - C4\_CAIXA1_8 = 0 ;$$

$$[_245] - 0.0012 * C4_3 + R\_C4_8 = 0 ;$$

$$[_246] - C5_7 + C5_8 = 0 ;$$

$$[_247] - L1_7 + L1_8 = 0 ;$$

$$[_248] - L2_7 + L2_8 = 0 ;$$

$$[_249] - L3_7 + L3_8 = 0 ;$$

$$[_250] - L4_7 + L4_8 = 0 ;$$

$$[_251] - L5_7 + L5_8 = 0 ;$$

$$[_252] - L6_7 + L6_8 = 0 ;$$

$$[_253] - L7_7 + L7_8 = 0 ;$$

$$[_254] - L8_7 + L8_8 = 0 ;$$

$$[_255] - L9_8 - 1.000001 * S_{L9_8} + E_{L9_8} + A1_{L9_8} + B3_{L9_8} + C4_{L9_8} - 1.000001 * L9_{A1_8} - 1.000001 * L9_{B3_8} - 1.000001 * L9_{C4_8} - 1.000001 * L9_{CAIXA1_8} + CAIXA1_{L9_8} = 0 ;$$

$$[_256] TE_{L9_8} - A1_{L9_8} - B3_{L9_8} - C4_{L9_8} - CAIXA1_{L9_8} = 0 ;$$

$$[_257] TS_{L9_8} - L9_{A1_8} - L9_{B3_8} - L9_{C4_8} - L9_{CAIXA1_8} = 0 ;$$

$$[_258] CAIXA1_7 - CAIXA1_8 - S_{CAIXA1_8} + E_{CAIXA1_8} + A1_{CAIXA1_8} + B3_{CAIXA1_8} + C4_{CAIXA1_8} + L9_{CAIXA1_8} - CAIXA1_{A1_8} - CAIXA1_{B3_8} - CAIXA1_{C4_8} - CAIXA1_{L9_8} = 0 ;$$

$$[_259] TE_{CAIXA1_8} - A1_{CAIXA1_8} - B3_{CAIXA1_8} - C4_{CAIXA1_8} - L9_{CAIXA1_8} = 0 ;$$

$$[_260] TS_{CAIXA1_8} - CAIXA1_{A1_8} - CAIXA1_{B3_8} - CAIXA1_{C4_8} - CAIXA1_{L9_8} = 0 ;$$

$$[_261] R_{CAIXA1_8} = 0 ;$$

$$[_262] 1.0001 * A1_8 - A1_9 - 1.000001 * S_{A1_9} + E_{A1_9} - 1.000001 * A1_{B1_9} - 1.000001 * A1_{C5_9} - 1.000001 * A1_{L1_9} - 1.000001 * A1_{CAIXA1_9} + B1_{A1_9} + C5_{A1_9} + L1_{A1_9} + CAIXA1_{A1_9} = 0 ;$$

$$[_263] TE_{A1_9} - B1_{A1_9} - C5_{A1_9} - L1_{A1_9} - CAIXA1_{A1_9} = 0 ;$$

$$[_264] TS_{A1_9} - A1_{B1_9} - A1_{C5_9} - A1_{L1_9} - A1_{CAIXA1_9} = 0 ;$$

$$[_265] - 0.0001 * A1_8 + R_{A1_9} = 0 ;$$

$$[_266] 1.0006 * B1_6 - B1_9 - 1.000001 * S_{B1_9} + E_{B1_9} + A1_{B1_9} - 1.000001 * B1_{A1_9} - 1.000001 * B1_{C5_9} - 1.000001 * B1_{L1_9} - 1.000001 * B1_{CAIXA1_9} + C5_{B1_9} + L1_{B1_9} + CAIXA1_{B1_9} = 0 ;$$

$$[_267] TE_{B1_9} - A1_{B1_9} - C5_{B1_9} - L1_{B1_9} - CAIXA1_{B1_9} = 0 ;$$

$$[_268] TS_{B1_9} - B1_{A1_9} - B1_{C5_9} - B1_{L1_9} - B1_{CAIXA1_9} = 0 ;$$

$$[_269] - 0.0006 * B1_6 + R_{B1_9} = 0 ;$$

$$[_270] - B2_8 + B2_9 = 0 ;$$

$$[_271] - B3_8 + B3_9 = 0 ;$$

$$[_272] - C1_8 + C1_9 = 0 ;$$

$$[_273] - C2_8 + C2_9 = 0 ;$$

$$[_274] - C3_8 + C3_9 = 0 ;$$

$$[_275] - C4_8 + C4_9 = 0 ;$$

$$[_276] 1.0012 * C5_4 - C5_9 - 1.000001 * S_{C5_9} + E_{C5_9} + A1_{C5_9} + B1_{C5_9} - 1.000001 * C5_{A1_9} - 1.000001 * C5_{B1_9} - 1.000001 * C5_{L1_9} - 1.000001 * C5_{CAIXA1_9} + L1_{C5_9} + CAIXA1_{C5_9} = 0 ;$$

$$[_277] TE_{C5_9} - A1_{C5_9} - B1_{C5_9} - L1_{C5_9} - CAIXA1_{C5_9} = 0 ;$$

$$[_278] TS_{C5_9} - C5_{A1_9} - C5_{B1_9} - C5_{L1_9} - C5_{CAIXA1_9} = 0 ;$$

$$[_279] - 0.0012 * C5_4 + R_{C5_9} = 0 ;$$

$$[_280] - L1\_9 - 1.000001 * S\_L1\_9 + E\_L1\_9 + A1\_L1\_9 + B1\_L1\_9 + C5\_L1\_9 - 1.000001 * L1\_A1\_9 - 1.000001 * L1\_B1\_9 - 1.000001 * L1\_C5\_9 - 1.000001 * L1\_CAIXA1\_9 + CAIXA1\_L1\_9 = 0 ;$$

$$[_281] TE\_L1\_9 - A1\_L1\_9 - B1\_L1\_9 - C5\_L1\_9 - CAIXA1\_L1\_9 = 0 ;$$

$$[_282] TS\_L1\_9 - L1\_A1\_9 - L1\_B1\_9 - L1\_C5\_9 - L1\_CAIXA1\_9 = 0 ;$$

$$[_283] - L2\_8 + L2\_9 = 0 ;$$

$$[_284] - L3\_8 + L3\_9 = 0 ;$$

$$[_285] - L4\_8 + L4\_9 = 0 ;$$

$$[_286] - L5\_8 + L5\_9 = 0 ;$$

$$[_287] - L6\_8 + L6\_9 = 0 ;$$

$$[_288] - L7\_8 + L7\_9 = 0 ;$$

$$[_289] - L8\_8 + L8\_9 = 0 ;$$

$$[_290] - L9\_8 + L9\_9 = 0 ;$$

$$[_291] CAIXA1\_8 - CAIXA1\_9 - S\_CAIXA1\_9 + E\_CAIXA1\_9 + A1\_CAIXA1\_9 + B1\_CAIXA1\_9 + C5\_CAIXA1\_9 + L1\_CAIXA1\_9 - CAIXA1\_A1\_9 - CAIXA1\_B1\_9 - CAIXA1\_C5\_9 - CAIXA1\_L1\_9 = 0 ;$$

$$[_292] TE\_CAIXA1\_9 - A1\_CAIXA1\_9 - B1\_CAIXA1\_9 - C5\_CAIXA1\_9 - L1\_CAIXA1\_9 = 0 ;$$

$$[_293] TS\_CAIXA1\_9 - CAIXA1\_A1\_9 - CAIXA1\_B1\_9 - CAIXA1\_C5\_9 - CAIXA1\_L1\_9 = 0 ;$$

$$[_294] R\_CAIXA1\_9 = 0 ;$$

$$[_295] 1.0001 * A1\_9 - A1\_10 - 1.000001 * S\_A1\_10 + E\_A1\_10 - 1.000001 * A1\_B2\_10 - 1.000001 * A1\_C1\_10 - 1.000001 * A1\_L2\_10 - 1.000001 * A1\_CAIXA1\_10 + B2\_A1\_10 + C1\_A1\_10 + L2\_A1\_10 + CAIXA1\_A1\_10 = 0 ;$$

$$[_296] TE\_A1\_10 - B2\_A1\_10 - C1\_A1\_10 - L2\_A1\_10 - CAIXA1\_A1\_10 = 0 ;$$

$$[_297] TS\_A1\_10 - A1\_B2\_10 - A1\_C1\_10 - A1\_L2\_10 - A1\_CAIXA1\_10 = 0 ;$$

$$[_298] - 0.0001 * A1\_9 + R\_A1\_10 = 0 ;$$

$$[_299] - B1\_9 + B1\_10 = 0 ;$$

$$[_300] 1.0006 * B2\_7 - B2\_10 - 1.000001 * S\_B2\_10 + E\_B2\_10 + A1\_B2\_10 - 1.000001 * B2\_A1\_10 - 1.000001 * B2\_C1\_10 - 1.000001 * B2\_L2\_10 - 1.000001 * B2\_CAIXA1\_10 + C1\_B2\_10 + L2\_B2\_10 + CAIXA1\_B2\_10 = 0 ;$$

$$[_301] TE\_B2\_10 - A1\_B2\_10 - C1\_B2\_10 - L2\_B2\_10 - CAIXA1\_B2\_10 = 0 ;$$

$$[_302] TS\_B2\_10 - B2\_A1\_10 - B2\_C1\_10 - B2\_L2\_10 - B2\_CAIXA1\_10 = 0 ;$$

$$[_303] - 0.0006 * B2\_7 + R\_B2\_10 = 0 ;$$

$$[_304] - B3\_9 + B3\_10 = 0 ;$$

$$[_305] 1.0012 * C1\_5 - C1\_10 - 1.000001 * S\_C1\_10 + E\_C1\_10 + A1\_C1\_10 + B2\_C1\_10 - 1.000001 * C1\_A1\_10 - 1.000001 * C1\_B2\_10 - 1.000001 * C1\_L2\_10 - 1.000001 * C1\_CAIXA1\_10 + L2\_C1\_10 + CAIXA1\_C1\_10 = 0 ;$$

$$[_306] \text{TE\_C1\_10} - \text{A1\_C1\_10} - \text{B2\_C1\_10} - \text{L2\_C1\_10} - \text{CAIXA1\_C1\_10} = 0 ;$$

$$[_307] \text{TS\_C1\_10} - \text{C1\_A1\_10} - \text{C1\_B2\_10} - \text{C1\_L2\_10} - \text{C1\_CAIXA1\_10} = 0 ;$$

$$[_308] - 0.0012 * \text{C1\_5} + \text{R\_C1\_10} = 0 ;$$

$$[_309] - \text{C2\_9} + \text{C2\_10} = 0 ;$$

$$[_310] - \text{C3\_9} + \text{C3\_10} = 0 ;$$

$$[_311] - \text{C4\_9} + \text{C4\_10} = 0 ;$$

$$[_312] - \text{C5\_9} + \text{C5\_10} = 0 ;$$

$$[_313] - \text{L1\_9} + \text{L1\_10} = 0 ;$$

$$[_314] 1.0025 * \text{L2\_1} - \text{L2\_10} - 1.000001 * \text{S\_L2\_10} + \text{E\_L2\_10} + \text{A1\_L2\_10} + \text{B2\_L2\_10} + \text{C1\_L2\_10} - 1.000001 * \text{L2\_A1\_10} - 1.000001 * \text{L2\_B2\_10} - 1.000001 * \text{L2\_C1\_10} - 1.000001 * \text{L2\_CAIXA1\_10} + \text{CAIXA1\_L2\_10} = 0 ;$$

$$[_315] \text{TE\_L2\_10} - \text{A1\_L2\_10} - \text{B2\_L2\_10} - \text{C1\_L2\_10} - \text{CAIXA1\_L2\_10} = 0 ;$$

$$[_316] \text{TS\_L2\_10} - \text{L2\_A1\_10} - \text{L2\_B2\_10} - \text{L2\_C1\_10} - \text{L2\_CAIXA1\_10} = 0 ;$$

$$[_317] - 0.0025 * \text{L2\_1} + \text{R\_L2\_10} = 0 ;$$

$$[_318] - \text{L3\_9} + \text{L3\_10} = 0 ;$$

$$[_319] - \text{L4\_9} + \text{L4\_10} = 0 ;$$

$$[_320] - \text{L5\_9} + \text{L5\_10} = 0 ;$$

$$[_321] - \text{L6\_9} + \text{L6\_10} = 0 ;$$

$$[_322] - \text{L7\_9} + \text{L7\_10} = 0 ;$$

$$[_323] - \text{L8\_9} + \text{L8\_10} = 0 ;$$

$$[_324] - \text{L9\_9} + \text{L9\_10} = 0 ;$$

$$[_325] \text{CAIXA1\_9} - \text{CAIXA1\_10} - \text{S\_CAIXA1\_10} + \text{E\_CAIXA1\_10} + \text{A1\_CAIXA1\_10} + \text{B2\_CAIXA1\_10} + \text{C1\_CAIXA1\_10} + \text{L2\_CAIXA1\_10} - \text{CAIXA1\_A1\_10} - \text{CAIXA1\_B2\_10} - \text{CAIXA1\_C1\_10} - \text{CAIXA1\_L2\_10} = 0 ;$$

$$[_326] \text{TE\_CAIXA1\_10} - \text{A1\_CAIXA1\_10} - \text{B2\_CAIXA1\_10} - \text{C1\_CAIXA1\_10} - \text{L2\_CAIXA1\_10} = 0 ;$$

$$[_327] \text{TS\_CAIXA1\_10} - \text{CAIXA1\_A1\_10} - \text{CAIXA1\_B2\_10} - \text{CAIXA1\_C1\_10} - \text{CAIXA1\_L2\_10} = 0 ;$$

$$[_328] \text{R\_CAIXA1\_10} = 0 ;$$

$$[_329] \text{CAIXA1\_1} \geq 10000000 ;$$

$$[_330] \text{CAIXA1\_2} \geq 10000000 ;$$

$$[_331] \text{CAIXA1\_3} \geq 10000000 ;$$

$$[_332] \text{CAIXA1\_4} \geq 10000000 ;$$

$$[_333] \text{CAIXA1\_5} \geq 10000000 ;$$

[\_334] CAIXA1\_6 >= 10000000 ;

[\_335] CAIXA1\_7 >= 10000000 ;

[\_336] CAIXA1\_8 >= 10000000 ;

[\_337] CAIXA1\_9 >= 10000000 ;

[\_338] CAIXA1\_10 >= 10000000 ;

[\_339] OBJ + 999 \* FOLGA\_1 + 999 \* FOLGA\_2 + 999 \* FOLGA\_3 + 999 \* FOLGA\_4 + 999 \* FOLGA\_5 +  
999 \* FOLGA\_6 + 999 \* FOLGA\_7 + 999 \* FOLGA\_8 + 999 \* FOLGA\_9 + 999 \* FOLGA\_10 - A1\_10 -  
B2\_10 - C1\_10 - L2\_10 - CAIXA1\_10 = 0 ;

@FREE( OBJ);

END



Row	Slack or Surplus	Dual Price			
			54	0.000000	0.000000
2	0.000000	-1.002500	55	0.000000	-1.002400
3	0.000000	-1.002401	56	0.000000	0.000000
4	0.000000	-1.002301	57	0.000000	0.000000
5	0.000000	-1.001900	58	0.000000	0.000000
6	0.000000	-1.001801	59	0.000000	0.000000
7	0.000000	-1.001299	60	0.000000	0.000000
8	0.000000	-1.001199	61	0.000000	0.000000
9	0.000000	-1.000799	62	0.000000	0.000000
10	0.000000	-1.000700	63	0.000000	0.000000
11	0.000000	-1.000000	64	0.000000	-1.002401
12	0.000000	0.000000	65	0.000000	0.000000
13	0.000000	1.002401	66	0.000000	0.000000
14	0.000000	1.002301	67	0.000000	0.000000
15	0.000000	1.001900	68	0.000000	-1.002300
16	0.000000	1.001801	69	0.000000	0.000000
17	0.000000	1.001299	70	0.000000	0.000000
18	0.000000	-997.9987	71	0.000000	0.000000
19	0.000000	-1996.999	72	0.000000	-1.002300
20	0.000000	1.000700	73	0.000000	0.000000
21	0.000000	1.000000	74	0.000000	0.000000
22	0.000000	-1.002500	75	0.000000	0.000000
23	0.000000	0.000000	76	0.000000	0.000000
24	0.000000	0.000000	77	0.000000	0.000000
25	0.000000	-1.002500	78	0.000000	0.000000
26	0.000000	0.000000	79	0.000000	0.000000
27	0.000000	0.000000	80	0.000000	-1.002300
28	0.000000	-1.002500	81	0.000000	0.000000
29	0.000000	0.000000	82	0.000000	0.000000
30	0.000000	0.000000	83	0.000000	0.000000
31	0.000000	-1.002500	84	0.000000	0.000000
32	0.000000	0.000000	85	0.000000	0.000000
33	0.000000	0.000000	86	0.000000	0.000000
34	0.000000	-1.002500	87	0.000000	-1.002300
35	0.000000	0.000000	88	0.000000	0.000000
36	0.000000	0.000000	89	0.000000	0.000000
37	0.000000	-1.002400	90	0.000000	0.000000
38	0.000000	0.000000	91	0.000000	0.000000
39	0.000000	0.000000	92	0.000000	0.000000
40	0.000000	0.000000	93	0.000000	0.000000
41	0.000000	0.000000	94	0.000000	0.000000
42	0.000000	0.000000	95	0.000000	-1.002301
43	0.000000	-1.002401	96	0.000000	0.000000
44	0.000000	0.000000	97	0.000000	0.000000
45	0.000000	0.000000	98	0.000000	0.000000
46	0.000000	0.000000	99	0.000000	-1.001900
47	0.000000	0.000000	100	0.000000	0.000000
48	0.000000	-1.002401	101	0.000000	0.000000
49	0.000000	0.000000	102	0.000000	0.000000
50	0.000000	0.000000	103	0.000000	0.000000
51	0.000000	0.000000	104	0.000000	-1.001899
52	0.000000	0.000000	105	0.000000	0.000000
53	0.000000	0.000000	106	0.000000	0.000000

107	0.000000	0.000000	160	0.000000	0.000000
108	0.000000	0.000000	161	0.000000	0.000000
109	0.000000	0.000000	162	0.000000	0.000000
110	0.000000	0.000000	163	0.000000	-1.001298
111	0.000000	0.000000	164	0.000000	0.000000
112	0.000000	0.000000	165	0.000000	0.000000
113	0.000000	-1.001900	166	0.000000	0.000000
114	0.000000	0.000000	167	0.000000	-1.001299
115	0.000000	0.000000	168	0.000000	0.000000
116	0.000000	0.000000	169	0.000000	0.000000
117	0.000000	0.000000	170	0.000000	0.000000
118	0.000000	0.000000	171	0.000000	0.000000
119	0.000000	0.000000	172	0.000000	0.000000
120	0.000000	-1.001899	173	0.000000	0.000000
121	0.000000	0.000000	174	0.000000	-1.001298
122	0.000000	0.000000	175	0.000000	0.000000
123	0.000000	0.000000	176	0.000000	0.000000
124	0.000000	0.000000	177	0.000000	0.000000
125	0.000000	0.000000	178	0.000000	0.000000
126	0.000000	0.000000	179	0.000000	0.000000
127	0.000000	-1.001900	180	0.000000	0.000000
128	0.000000	0.000000	181	0.000000	0.000000
129	0.000000	0.000000	182	0.000000	0.000000
130	0.000000	0.000000	183	0.000000	0.000000
131	0.000000	-1.001800	184	0.000000	0.000000
132	0.000000	0.000000	185	0.000000	0.000000
133	0.000000	0.000000	186	0.000000	0.000000
134	0.000000	0.000000	187	0.000000	-1.001298
135	0.000000	0.000000	188	0.000000	0.000000
136	0.000000	0.000000	189	0.000000	0.000000
137	0.000000	-1.001800	190	0.000000	0.000000
138	0.000000	0.000000	191	0.000000	0.000000
139	0.000000	0.000000	192	0.000000	-1.001299
140	0.000000	0.000000	193	0.000000	0.000000
141	0.000000	-1.001801	194	0.000000	0.000000
142	0.000000	0.000000	195	0.000000	0.000000
143	0.000000	0.000000	196	0.000000	-1.001198
144	0.000000	0.000000	197	0.000000	0.000000
145	0.000000	0.000000	198	0.000000	0.000000
146	0.000000	0.000000	199	0.000000	0.000000
147	0.000000	0.000000	200	0.000000	0.000000
148	0.000000	0.000000	201	0.000000	-1.001199
149	0.000000	0.000000	202	0.000000	0.000000
150	0.000000	0.000000	203	0.000000	0.000000
151	0.000000	0.000000	204	0.000000	0.000000
152	0.000000	0.000000	205	0.000000	0.000000
153	0.000000	-1.001800	206	0.000000	0.000000
154	0.000000	0.000000	207	0.000000	0.000000
155	0.000000	0.000000	208	0.000000	-1.001198
156	0.000000	0.000000	209	0.000000	0.000000
157	0.000000	0.000000	210	0.000000	0.000000
158	0.000000	0.000000	211	0.000000	0.000000
159	0.000000	-1.001801	212	0.000000	0.000000

213	0.000000	0.000000	266	0.000000	-1.000699
214	0.000000	0.000000	267	0.000000	0.000000
215	0.000000	0.000000	268	0.000000	0.000000
216	0.000000	0.000000	269	0.000000	0.000000
217	0.000000	0.000000	270	0.000000	0.000000
218	0.000000	0.000000	271	0.000000	0.000000
219	0.000000	0.000000	272	0.000000	0.000000
220	0.000000	0.000000	273	0.000000	0.000000
221	0.000000	-1.001198	274	0.000000	0.000000
222	0.000000	0.000000	275	0.000000	0.000000
223	0.000000	0.000000	276	0.000000	-1.000699
224	0.000000	0.000000	277	0.000000	0.000000
225	0.000000	-1.001199	278	0.000000	0.000000
226	0.000000	0.000000	279	0.000000	0.000000
227	0.000000	0.000000	280	0.000000	-1.000699
228	0.000000	0.000000	281	0.000000	0.000000
229	0.000000	-1.000799	282	0.000000	0.000000
230	0.000000	0.000000	283	0.000000	0.000000
231	0.000000	0.000000	284	0.000000	0.000000
232	0.000000	0.000000	285	0.000000	0.000000
233	0.000000	0.000000	286	0.000000	0.000000
234	0.000000	0.000000	287	0.000000	0.000000
235	0.000000	-1.000798	288	0.000000	0.000000
236	0.000000	0.000000	289	0.000000	0.000000
237	0.000000	0.000000	290	0.000000	0.000000
238	0.000000	0.000000	291	0.000000	-1.000700
239	0.000000	0.000000	292	0.000000	0.000000
240	0.000000	0.000000	293	0.000000	0.000000
241	0.000000	0.000000	294	0.000000	0.000000
242	0.000000	-1.000798	295	0.000000	-1.000000
243	0.000000	0.000000	296	0.000000	0.000000
244	0.000000	0.000000	297	0.000000	0.000000
245	0.000000	0.000000	298	0.000000	0.000000
246	0.000000	0.000000	299	0.000000	0.000000
247	0.000000	0.000000	300	0.000000	-1.000000
248	0.000000	0.000000	301	0.000000	0.000000
249	0.000000	0.000000	302	0.000000	0.000000
250	0.000000	0.000000	303	0.000000	0.000000
251	0.000000	0.000000	304	0.000000	0.000000
252	0.000000	0.000000	305	0.000000	-1.000000
253	0.000000	0.000000	306	0.000000	0.000000
254	0.000000	0.000000	307	0.000000	0.000000
255	0.000000	-1.000798	308	0.000000	0.000000
256	0.000000	0.000000	309	0.000000	0.000000
257	0.000000	0.000000	310	0.000000	0.000000
258	0.000000	-1.000799	311	0.000000	0.000000
259	0.000000	0.000000	312	0.000000	0.000000
260	0.000000	0.000000	313	0.000000	0.000000
261	0.000000	0.000000	314	0.000000	-1.000000
262	0.000000	-1.000699	315	0.000000	0.000000
263	0.000000	0.000000	316	0.000000	0.000000
264	0.000000	0.000000	317	0.000000	0.000000
265	0.000000	0.000000	318	0.000000	0.000000

319	0.000000	0.000000
320	0.000000	0.000000
321	0.000000	0.000000
322	0.000000	0.000000
323	0.000000	0.000000
324	0.000000	0.000000
325	0.000000	-1.000000
326	0.000000	0.000000
327	0.000000	0.000000
328	0.000000	0.000000
329	0.000000	-0.9923758E-04
330	0.000000	-0.1002301E-03
331	0.000000	-0.4006698E-03
332	0.000000	-0.9917817E-04
333	0.000000	-0.5012412E-03
334	0.000000	-0.1001199E-03
335	0.000000	-0.4002296E-03
336	0.000000	-0.9906920E-04
337	0.000000	-0.7000245E-03
338	0.000000	0.000000
339	0.000000	1.000000

